UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉVELOPPEMENT D'UN ESTIMATEUR D'ÉTAT ÉNERGÉTIQUE D'UN CHAUFFE-EAU POUR UN CONTRÔLE PAR CHAMP MOYEN

JÉRÔME SOLIS
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
DÉCEMBRE 2015

© Jérôme Solis, 2015.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

DÉVELOPPEMENT D'UN ESTIMATEUR D'ÉTAT ÉNERGÉTIQUE D'UN CHAUFFE-EAU POUR UN CONTRÔLE PAR CHAMP MOYEN

présenté par : SOLIS Jérôme
en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. GOURDEAU Richard, Ph. D., président
M. SIROIS Frédéric, Ph. D., membre et directeur de recherche
M. MALHAMÉ Roland, Ph. D., membre et codirecteur de recherche
M. BERNIER Michel, Ph. D., membre et codirecteur de recherche
M. CIMMINO Massimo, Ph. D., membre

DÉDICACE

À J et M
pour leurs précieux conseils
et encouragements soutenus.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur M. Frédéric Sirois, mes co-directeurs M. Roland Malhamé et M. Michel Bernier et toute l'équipe smartDESC pour leur soutien tout au long de ce projet. Un remerciement tout spécial à l'équipe de M. Alexandre Prieur du CanmetÉNERGIE pour leur précieuse collaboration. Je tiens aussi à remercier M. Maurice Brisson pour son soutien et sa confiance dans ce projet. Le Gouvermenent du Canada a également contribué à ce projet grâce au programme de recherche ecoENERGY Innovation Initiative (ecoEII) qui a rendu ce projet possible. Finalement, un merci à ma compagne, mes parents et amis pour avoir fait de ces années de maîtrise une expérience riche et passionnante.

RÉSUMÉ

Les chauffe-eau électriques domestiques présentent un potentiel de stockage intéressant pouvant être exploité dans un contexte de réseaux électriques intelligents. Ainsi, par exemple, une variation de 1 °C de la température de l'eau d'un chauffe-eau électrique (CE) de 270 litres correspond à 0.313 kWh d'énergie. Pour un réseau électrique comme celui d'Hydro-Québec, qui compte environ 2 millions de CE, cela représente un fort potentiel de stockage. Cette source de stockage déjà présente sur le réseau permettrait, à l'aide d'une stratégie de contrôle adéquate, de lisser la courbe de consommation d'électricité en déplaçant une partie de la charge survenant lors des périodes de pointe vers les périodes de creux. Ce mémoire s'inscrit dans un contexte de développement d'une plate-forme de simulation visant à implanter une stratégie de contrôle par champ moyen des chauffe-eau sur le réseau. Cette approche novatrice de contrôle permet à l'ensemble des chauffe-eau de répondre à une consigne globale tout en respectant les contraintes locales de chacun. Pour être fonctionnelle, cette stratégie requiert plusieurs composantes devant être intégrées à la plate-forme de simulation. Plus particulièrement, ce mémoire s'intéresse au développement d'un modèle numérique et à l'estimation de l'état en température et en énergie d'un chauffe-eau électrique domestique.

Le modèle proposé pour la prédiction du comportement d'un chauffe-eau est un modèle multi-nodal. Cette approche permet de discrétiser le réservoir d'un chauffe-eau en plusieurs petits volumes. L'équation de conservation de l'énergie est résolue pour chacun de ces sous-volumes, et il est possible de prédire l'évolution en température moyenne à la sortie avec une erreur moyenne de 2.4 °C. Les résultats issus du modèle multi-nodal se comparent favorablement avec des modèles numériques de référence, retrouvés dans le logiciel de simulation thermique TRNSYS, ainsi qu'avec des mesures expérimentales de température d'un chauffe-eau électrique. Dans ce modèle, la température est supposée uniforme pour chaque sous-volume et les pertes en attente sont considérées constantes. Bien que le modèle soit linéaire, une routine de correction permet de redistribuer adéquatement la chaleur à l'intérieur du réservoir tout en respectant la dynamique thermique du chauffe-eau, notamment la présence d'une stratification de la température au niveau des éléments chauffants. Le modèle multi-nodal est utilisé principalement pour simuler la charge d'une grande population de chauffe-eau sur le réseau électrique. Il est également utile au planificateur, qui génère la température de consigne pour l'ensemble de la population, ainsi qu'au contrôleur par champ moyen, qui génère la commande optimale pour ce même ensemble.

Le processus d'estimation se déroule en deux étapes distinctes : l'estimation de la séquence

de tirage d'eau chaude (état discret du système) et la reconstruction de l'état en température (état continu du système). Pour réaliser l'estimation de la séquence de tirage, un test de vraisemblance est utilisé avec un ensemble de mesures de la température moyenne du système. En posant l'hypothèse que les statistiques des événements de tirage, modélisés par une chaîne de Markov à deux états (actif et inactif) sont connues à priori, un ensemble de scénarios possibles de tirage est généré. En comparant la prédiction pour chaque scénario avec les mesures du système, celui minimisant l'erreur entre la température prédite et mesurée est conservé. Cette méthode permet de prédire l'état discret du système, soit l'état de tirage du chauffe-eau électrique, correctement 93.7 % du temps.

Puis, en se basant sur le modèle multi-nodal, une routine d'estimation de l'état d'un chauffe-eau électrique est développée. Ce modèle doit être simplifié en retirant la routine de correction de la température afin de pouvoir maintenir le caractère linéaire de ce modèle, ceci en vue de construire plus facilement un observateur d'état, outil permettant la reconstruction complète de l'état à partir de mesures. Cette simplification a pour conséquence de limiter l'utilisation de l'observateur à des périodes de tirage, car sans tirage, il n'y a pas d'échange de chaleur dans le système, ce qui conduit à des aberrations dans le modèle simplifié. Ces aberrations sont corrigées en posant l'hypothèse que la puissance des éléments chauffants est distribuée dans toutes les strates du système proportionnellement à leur volume respectif. Chaque nœud est donc chauffé par un élément intermédiaire. Pour réaliser la reconstruction de l'état continu de la température, deux approches distinctes sont considérées : l'observateur multivarié et le filtre de Kalman. Avec au plus 3 mesures de la température, soit une dans la strate la plus élevée du réservoir, une près de l'élément chauffant du haut et la dernière au bas du réservoir du chauffe-eau, une erreur moyenne (ME) globale de -440 Wh sur l'ensemble des estimés des composantes d'état du chauffe-eau est obtenue en utilisant l'observateur multivarié, ce qui se traduit par une erreur moyenne relative (MPE) globale de -2.9 % sur l'état de charge complet du CE. Profitant d'une utilisation indépendante de l'état discret du système, le filtre de Kalman réussit à reconstruire l'état continu avec une ME globale de -270 Wh, soit l'équivalent d'une MPE globale de -2.0 %. Pour sa meilleure performance et plus grande flexibilité, le filtre de Kalman est préféré à l'observateur multivarié pour réaliser le processus d'estimation de l'état continu en température du chauffe-eau. De plus, l'estimation réalisée par le filtre de Kalman ou l'observateur multivarié peut s'écarter d'environ $\pm 10 - 15$ % par rapport à l'énergie totale stockée dans le chauffe-eau.

Ce mémoire présente des outils novateurs permettant l'utilisation d'un contrôle par champ moyen dans un contexte de réseaux électriques intelligents. Cette toute nouvelle approche présente de nombreux défis et d'importantes améliorations peuvent être amenées, notamment pour l'estimation de l'état du chauffe-eau. Principalement, une description plus juste des

processus d'extraction de l'eau chaude, intégrant plusieurs types de tirage de différentes intensités, permettrait une estimation plus précise et plus robuste de la séquence de tirage.

ABSTRACT

Domestic electric water heaters (EWH) provide an interesting energy storage potential that can be exploited in the context of smart grids. For example, a variation of 1 °C of the water temperature of an EWH of 270 liters corresponds to 0.313 kWh of energy. For utilities like Hydro-Québec, which has about 2 million EWH connected to its grid, this represents a strong storage potential. This storage source already present on the network could allow, using an adequate control strategy, to smooth the electricity consumption curve by moving some of the load occurring during peak periods to trough periods. This thesis position itself in the context of developing a simulation platform to implement a mean field control strategy of water heaters on the grid. This innovative approach enables control of all water heaters to meet a global objective while respecting local constraints of each. To be functional, the strategy requires several components to be integrated into the simulation platform. Specifically, this thesis focuses on the development of a numerical model and the estimation of the state in temperature and energy of an EWH.

The proposed model for predicting the behavior of a EWH is a multi-nodal model. This approach allows discretizing the tank of an EWH into smaller volumes. The energy conservation equation is solved for each of these sub-volumes and it is possible to predict changes in the output mean temperature with an average error of 2.4 °C. The results from the multi-nodal model compare favorably with numerical reference models, found in the TRNSYS thermal simulation software, as well as experimental measurements of temperature of an electric water heater. In this model, the temperature is assumed to be uniform for each sub-volume and the standby losses are considered constants. Although the model is linear, a correction routine allows redistributing adequately heat within the tank while respecting the thermal dynamics of the heater, including the presence of temperature stratification at the heating elements, hence breaking the linearity. The multi-nodal model is used primarily to simulate the load of a large water heater population on the power grid. It is also useful to the scheduler, which generates the desired temperature for the whole population, as well as by mean field controller, which generates the optimal control for this same group.

The estimation process takes place in two distinct steps: estimating the sequence of hot water draw (discrete state of the system) and the reconstruction of the temperature inside the tank (continuous system state). To perform the estimation of the drawing sequence, a maximum likelihood test is used with a set of measurements of the average temperature of the system. Under the assumption that the statistics of random events, modeled by a

two state Markov chain (active and inactive) are known a priori, a set of possible drawing scenarios is generated. By comparing the prediction for each scenario with the actions of the system, the one minimizing the error between the predicted and measured temperature is retained. This method predicts the discrete state of the system correctly 93.7 % of the time.

Then, based on the multi-nodal model, a routine for estimating the continuous state of an EWH is developed. This model should be simplified by removing the temperature correction routine in order to keep it linear. This is required in order to build more easily a state observer, a tool that allows the full reconstruction of the temperature state from measurements. This simplification results in limiting the use of the observer to periods of drawing, because without drawing, there is no heat exchange in the system, resulting in aberrations in the simplified model. Those aberrations are corrected under the assumption that the power of the heating elements is distributed in all layers of the system in proportion to their respective volume. Each node is hence heated by an intermediate element. To realize the reconstruction of the continuous state of temperature, two different approaches are considered: the multivariate observer and the Kalman filter. With at most 3 temperature measurements, either in the highest layer of the tank, near the top heating element and the latter at the bottom of the tank of the water heater, a global average error of -440 Wh on all estimated components of the water heater state is obtained by using the multivariate observer, which translates into a global mean percentage error (MPE) of -2.9 % on the energy stocking capacity. Taking advantage of an independent use of the discrete state of the system, the Kalman filter was able to reconstruct the continuous state with a global MPE of -2.0 %, or -270 Wh. For these reasons, the Kalman filter is preferred to the multivariate observer to complete the process of estimating the complete state of the water heater. Moreover, the estimation made by the Kalman filter or the multivariate observer may deviate around $\pm 10 - 15$ % compared to the total energy stored in the water heater.

This thesis presents innovative tools allowing the use of a mean field control strategy in a context of smart grids. This brand new approach presents many challenges and significant improvements can be envisioned, especially for estimating the state of the water heater. Mainly, a more accurate description of the process of extracting hot water, integrating several types of different drawing intensity, allow a more accurate and robust estimation of the hot water drawing sequence.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iii

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT viii

TABLE DES MATIÈRES x

LISTE DES TABLEAUX xiii

LISTE DES FIGURES xiv

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xvii

LISTE DES ANNEXES xviii

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
- 1.1 Project smartDESC 2
- 1.2 Introduction au fonctionnement d'un chauffe-eau 3
  - 1.2.1 Stratification et thermocline 5
- 1.3 Problématique 7
- 1.4 Objectifs de recherche 8
- 1.5 Plan du mémoire 8

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE 9
- 2.1 Introduction 9
- 2.2 Revue des modèles de chauffe-eau 9

CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE EXPÉRIMENTALE 14
- 3.1 Objectif et hypothèses 14
- 3.2 Montage expérimental 14
  - 3.2.1 Caractéristiques techniques du chauffe-eau de référence 14
  - 3.2.2 Montage du banc de test 16
  - 3.2.3 Acquisition des mesures 19

3.3 Méthodologie 19

CHAPITRE 4 MODÉLISATION D'UN CHAUFFE-EAU 21
4.1 Modélisation multi-nodale d'un chauffe-eau 21
4.1.1 Contrôle thermostatique des éléments chauffants 24
4.1.2 Aperçu de l'algorithme de simulation 25
4.2 Processus de tirage et chaîne de Markov 26
4.2.1 Profil de tirage et chaîne de Markov 28
4.3 Validation inter-modèle avec TRNSYS 30
4.4 Validation expérimentale 34
4.5 Effet du pas de temps sur le comportement en température 37
4.5.1 Influence des conditions initiales 40
4.6 Effet du nombre de nœuds 40
4.7 Bilan énergétique 44
4.8 Résumé 44

CHAPITRE 5 ESTIMATION DE L'ÉTAT ÉNERGÉTIQUE D'UN CHAUFFE-EAU 46
5.1 Introduction au contrôle de la charge par champ moyen 46
5.2 Représentation d'état d'un chauffe-eau électrique 47
5.2.1 Performance de la prédiction par représentation d'état 51
5.3 Reconstruction de l'état discret du chauffe-eau par test de vraisemblance . . 54
5.3.1 Processus d'estimation de la séquence de tirage 54
5.3.2 Estimation par la mesure de la température moyenne 58
5.3.3 Effet de la fenêtre d'estimation 62
5.4 Reconstruction de l'état continu du chauffe-eau par un observateur multivarié 63
5.4.1 Mesures et observabilité du système 63
5.4.2 Design de l'observateur multivarié 66
5.4.3 Résultats de la reconstruction d'état par un observateur multivarié . 70
5.5 Reconstruction de l'état continu du chauffe-eau par filtrage de Kalman . . . 80
5.5.1 Design du filtre de Kalman 80
5.5.2 Résultats de la reconstruction d'état par filtrage de Kalman 84
5.6 Résumé 89

CHAPITRE 6 CONCLUSION 92
6.1 Synthèse des travaux 92
6.2 Améliorations futures 95

RÉFÉRENCES 97

ANNEXES 100

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 Caractéristiques techniques du chauffe-eau de référence 15
Tableau 3.2 Paramètres mesurés lors des expériences 19
Tableau 4.1 Erreur de prédiction de la température moyenne entre Type 4/534 et multi-nodal 33
Tableau 4.2 Erreur de prédiction de la température moyenne entre essai expérimental et multi-nodal 35
Tableau 4.3 Erreur de prédiction de la température nodal entre essai expérimental et multi-nodal 38
Tableau 4.4 Consommation totale d'énergie pour différents pas de temps 39
Tableau 4.5 Temps de simulation pour simuler une période de 24 heures avec différents pas de temps 39
Tableau 4.6 Description des scénarios avec différents maillages 42
Tableau 4.7 Consommation totale d'énergie pour différents maillages 43
Tableau 4.8 Temps de calcul pour différents maillages 43
Tableau 4.9 Bilan d'énergie du système sur une période de 24 heures 45
Tableau 5.1 Statistiques et performances du nombre de sauts par intervalle 59
Tableau 5.2 Erreur d'estimation de la séquence par la température moyenne . . . 61
Tableau 5.3 Performances du nombre de sauts par intervalle 62
Tableau 5.4 Performance de la reconstruction par un observateur multivarié basé sur la mesure de la température du nœud 1 75
Tableau 5.5 Performance de la reconstruction par un observateur multivarié basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9 77
Tableau 5.6 Performance de la reconstruction par filtrage de Kalman basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9 86
Tableau C.1 Paramètres du chauffe-eau 105
Tableau D.1 Paramètres de la chaîne de Markov à deux états 106

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Structure du simulateur smartDESC 2
Figure 1.2 Schéma technique d'un chauffe-eau électrique résidentiel 4
Figure 1.3 Stratification de la température de l'eau à l'intérieur d'un chauffe-eau (mesures expérimentales) 6
Figure 3.1 Schéma du banc de test 17
Figure 3.2 Schéma du montage expérimental de mesure du chauffe-eau 18
Figure 4.1 Schéma du modèle de chauffe-eau multi-nodal 23
Figure 4.2 Chaîne de Markov à deux états 27
Figure 4.3 Comparaison d'un profil aléatoire de consommation d'eau chaude pour un jour de semaine pour différentes tailles de population de chauffe-eau. 29
Figure 4.4 Profil quotidien de tirage d'eau chaude 30
Figure 4.5 Comparaison inter-modèle de la température moyenne 31
Figure 4.6 Comparaison inter-modèle de la température des nœuds 31
Figure 4.7 Comparaison inter-modèle de l'énergie totale extraite par tirage . . . 33
Figure 4.8 Séquence de tirage par chaîne de Markov à deux états 34
Figure 4.9 Validation expérimentale de la température moyenne avec les prédictions du modèle multi-nodal développé dans ce mémoire 36
Figure 4.10 Validation expérimentale de la température nodale avec les prédictions du modèle multi-nodal développé dans ce mémoire 36
Figure 4.11 Validation expérimentale de la prédiction d'énergie extraite obtenue avec le modèle multi-nodal développé dans ce mémoire 38
Figure 4.12 Effet du pas de temps sur le calcul de la température moyenne du chauffe-eau 38
Figure 4.13 Influence des conditions initiales sur la simulation d'un chauffe-eau . 41
Figure 4.14 Effet du maillage sur le calcul de la température moyenne du chauffe-eau 42
Figure 5.1 Schéma fonctionnel global de la séquence d'estimation de l'état discret et continu d'un chauffe-eau 48
Figure 5.2 Schéma fonctionnel de la représentation d'état d'un chauffe-eau . . . 51
Figure 5.3 Prédiction de la température moyenne par représentation d'état . . . 52
Figure 5.4 Prédiction de la température nodale par représentation d'état 53
Figure 5.5 Schéma fonctionnel de l'estimation de la séquence de tirage d'eau chaude 56
Figure 5.6 Schéma du calcul de la probabilité d'une séquence de tirage 58
Figure 5.7 Estimation a posteriori de la température moyenne à partir de mesures 60

Figure 5.8 Estimation de la séquence de tirage à partir de mesures de la température moyenne 60
Figure 5.9 Schéma fonctionnel de la reconstruction de l'état continu de la température d'un chauffe-eau électrique par un observateur multivarié . . . 68
Figure 5.10 Schéma fonctionnel de l'observateur multivarié 69
Figure 5.11 Distribution de l'erreur moyenne globale de l'observateur multivarié . 73
Figure 5.12 Température moyenne d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par un observateur multivarié basé sur la mesure de la température du nœud 1 75
Figure 5.13 Température nodale d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par un observateur multivarié basé sur la mesure de la température du nœud 1 76
Figure 5.14 Température moyenne d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par un observateur multivarié basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9 77
Figure 5.15 Température nodale d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par un observateur multivarié basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9 78
Figure 5.16 Évolution de l'erreur moyenne globale sur l'énergie du chauffe-eau produite par l'observateur multivarié. Axe de gauche : erreur moyenne globale en kWh (c.f. équation 5.34). Axe de droite : erreur moyenne relative en % (c.f. équation 5.37) par rapport à la quantité d'énergie que peut stocker le chauffe-eau pour respecter les limites de confort de l'utilisateur 79
Figure 5.17 Schéma fonctionnel du filtrage par Kalman 83
Figure 5.18 Distribution de l'erreur moyenne globale du filtre de Kalman 85
Figure 5.19 Température moyenne d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par filtrage de Kalman basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9 86
Figure 5.20 Température nodale d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par filtrage de Kalman basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9 87

Figure 5.21 Évolution de l'erreur moyenne globale sur l'énergie du chauffe-eau produite par le filtre de Kalman. Axe de gauche : erreur moyenne globale en kWh (c.f. équation 5.34). Axe de droite : erreur moyenne relative en % (c.f. équation 5.37) par rapport à la quantité d'énergie que peut stocker le chauffe-eau pour respecter les limites de confort de l'utilisateur 88
Figure B.1 Comparaison expérimentale de la température moyenne lors d'un chauffage 102
Figure B.2 Comparaison expérimentale de la température des nœuds lors d'un chauffage 102
Figure B.3 Comparaison expérimentale de la température moyenne lors d'un tirage de faible intensité 103
Figure B.4 Comparaison expérimentale de la température des nœuds lors d'un tirage de faible intensité 103
Figure B.5 Comparaison expérimentale de la température moyenne lors d'un tirage de haute intensité 104
Figure B.6 Comparaison expérimentale de la température des nœuds lors d'un tirage de haute intensité 104

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

CE	Chauffe-eau
RE	Représentation d'état
ED	Équation différentielle
EDP	Équation aux dérivées partielles
MA	Erreur moyenne
MAE	Erreur absolue moyenne
MAPE	Erreur absolue moyenne relative
MPE	Erreur moyenne relative
RMSE	Erreur type de la moyenne
TRNSYS	Transient System Simulation
N	Nombre total de nœud
i	Indice du nœud où $i \in [1, N]$
j	Indice de l'élément chauffant où $j \in [1, 2]$
ρ	Densité volumique de l'eau (kg/m^3)
C_p	Chaleur spécifique de l'eau (J/kg K)
U	Coefficient de transfert thermique de l'isolant (W/m^2 K)
A_i	Surface de contact du nième nœud avec la paroi du réservoir (m^2)
V_i	Volume du nœud i (m^3)
$V_d(t)$	Débit d'eau tirée du chauffe-eau (m^3/s)
$T_i(t)$	Température du nœud i (K)
T_c	Température de sortie du chauffe-eau (K)
T_f	Température d'entrée en provenance de l'aqueduc (K)
T_{env}	Température extérieure (K)
P_j	Puissance nominale de l'élément chauffant j (W)
$m_j(t)$	Contrôle thermostatique sur l'élément chauffant j
$f_j(t)$	Contrôle extérieur sur l'élément chauffant j
E_j	Nœud associé à l'élément chauffant j

LISTE DES ANNEXES

Annexe A Solution à l'équation différentielle du modèle multi-nodal 100

Annexe B Autres résultats des expériences sur un chauffe-eau 102

Annexe C Caractéristiques du modèle numérique de chauffe-eau 105

Annexe D Paramètres de la chaîne de Markov 106

Annexe E Structure de programmation du modèle multi-nodal 115

Annexe F Structure de programmation de l'estimateur de l'état discret 128

Annexe G Structure de programmation de la reconstruction de l'état continu . . 135

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Depuis plus de 25 ans, les énergies renouvelables connaissent une augmentation importante de leur contribution au paysage énergétique canadien. Les compagnies électriques font face à d'importants défis technologiques puisque ces énergies propres présentent une disponibilité de production d'énergie qui est stochastique. Dans ce contexte, l'idée d'intégrer un potentiel de stockage d'énergie devient intéressant car, en plus de mieux gérer le réseau électrique en lissant les pics et les creux de consommation, ce stockage permettrait d'emmagasiner l'énergie non consommée en provenance de sources renouvelables pour la restituer au réseau par période de forte demande.

Les chauffe-eau électriques (CE), présents dans plus en plus de foyers canadiens (Ressources naturelles Canada, 2013), offrent un potentiel intéressant (non-négligeable) de stockage d'énergie sous forme de chaleur. En effet, une élévation de 1 °C de la température de l'eau d'un CE de 270 litres correspond à 0,313 kWh d'énergie. Avec les récents développements des réseaux électriques intelligents, le chauffe-eau électrique est considéré comme un candidat de choix pour jouer le rôle de « batterie thermique » sur le réseau. Le but de ces batteries est de stocker de l'énergie par temps d'abondance de production (par exemple, une importante génération d'énergie d'origine éolienne par fort vent) et de restituer cette énergie lorsqu'il y a une forte demande du réseau. Ainsi, il est possible de lisser la courbe de demande d'électricité sur l'ensemble du réseau électrique. Pour réaliser ce lissage de la courbe de consommation d'énergie sur le réseau électrique, plusieurs stratégies de contrôle peuvent être utilisées :

- Intervention directe par la coupure de certaines charges sur le réseau par période de pointe
- Intervention indirecte par l'instauration de politiques permettant d'influencer le comportement des usagers

L'objectif de ces stratégies est tout d'abord de maximiser la flexibilité du réseau électrique tout en minimisant l'impact de ces interventions sur le confort des usagers du réseau. Ce mémoire porte sur le contrôle par champ moyen d'une population de chauffe-eau sur un réseau électrique, une toute nouvelle approche pour le contrôle intelligent de ces réseaux (Kizilkale et Malhame, 2014).

La section 1.1 introduit le contexte de réalisation de ce mémoire. La section 1.2 définit les concepts de base de fonctionnement d'un chauffe-eau électrique. La section 1.3 décrit les éléments importants de la problématique. La section 1.4 présente les objectifs de recherche. La section 1.5 détaille le plan du présent mémoire.

1.1 Project smartDESC

Ce mémoire est réalisé dans le cadre du projet smartDESC, une initiative d'un regroupement de chercheurs de l'École Polytechnique de Montréal visant à développer une plate-forme de simulation intégrée pour les stratégies de contrôle des réseaux électriques intelligents. Grâce à une programmation orientée agent ainsi qu'une architecture solide et évolutive, cette plate-forme peut être déployée rapidement pour simuler des scénarios de contrôle complexes et à très grande échelle tout en minimisant les ressources nécessaires pour réaliser ces calculs.

Profitant de cet outil de simulation de réseaux électriques intelligents, une stratégie de contrôle par champ moyen permettant de maximiser la consommation de l'énergie en provenance de l'éolien en modulant la charge agrégée des chauffe-eau électriques connectés au réseau est développée dans le cadre de ce mémoire. Tel que montré à la figure 1.1, les éléments suivants se retrouvent dans la structure du simulateur :

- Planificateur : Réalise l'optimisation de la capacité de stockage requise en fonction de la production d'énergie éolienne et génère des objectifs de disponibilité énergétique devant être atteint par la population de CE ;
- Contrôleur global : Génère la commande optimale agrégée devant être suivie par l'ensemble des CE sur le réseau en fonction des objectifs provenant du planificateur ;

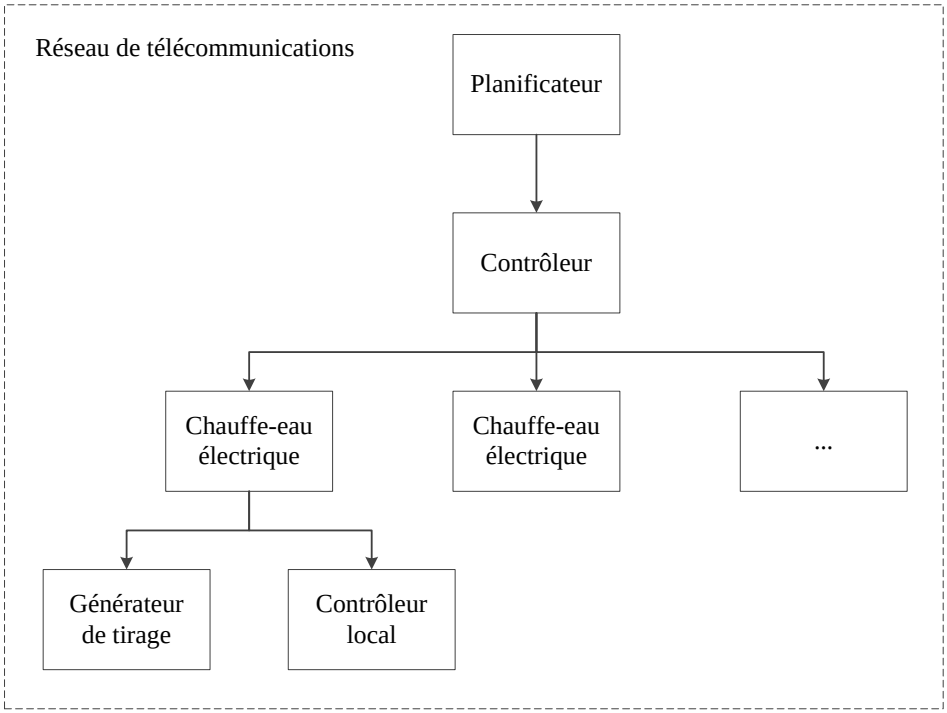


Figure 1.1 Structure du simulateur smartDESC

- Chauffe-eau : Calcule localement l'état d'énergie d'un CE en fonction de la commande locale et de l'état de tirage du CE ;
- Contrôleur local : Génère la commande optimale locale appliquée à un unique CE en fonction de ses contraintes locales et de son état d'énergie ;
- Générateur de tirage : Génère l'état de tirage appliqué à un unique CE ;
- Réseau de télécommunication : Gère l'ensemble des communications entre les différents agents du système.

Ce mémoire s'intéresse à la définition du modèle de chauffe-eau électrique et aux mécanismes d'estimation du contrôleur local.

1.2 Introduction au fonctionnement d'un chauffe-eau

Un chauffe-eau est un équipement permettant de chauffer de l'eau à l'aide d'une source d'énergie. Cette source est principalement de l'électricité ou du gaz naturel, mais des chauffe-eau au mazout, au propane ou même au bois sont aussi présents de façon marginale (Aguilar et al., 2005). Dans ce mémoire c'est l'électricité qui est la source utilisée, affichant moins de pertes en attente et une installation plus simple que le gaz naturel. De ce fait, les chauffe-eau électriques représentent plus de 85% de la population de chauffe-eau domestiques du Québec.

Le design d'un CE résidentiel est présenté à la Figure 1.2. Le volume du réservoir est généralement de 180 litres (40 gallons) ou de 270 litres (60 gallons), et ces volumes correspondent respectivement à 60% et 40% de la population de CE au Québec (Bouthillier et Bernier, 1995). Le réservoir est recouvert d'une couche isolante, typiquement de la fibre de verre ou de la mousse de polyuréthane.

On retrouve dans ce modèle une sortie d'eau chaude sur le dessus du réservoir et une entrée d'eau froide verticale. Une alternative à cette entrée d'eau froide verticale est une entrée d'eau située au bas du réservoir. Même si l'entrée d'eau est située sur le dessus du réservoir, l'eau est injectée au bas du réservoir via le long tuyau pénétrant le système de façon à ne pas perturber la stratification. Une valve de surpression est située généralement sur le dessus du CE et s'active si la pression à l'intérieur du réservoir dépasse la consigne de sécurité. Un drain est aussi positionné au bas du réservoir et permet de vider les sédiments s'accumulant au fond du réservoir.

L'eau contenue dans le réservoir est généralement chauffée par deux éléments chauffants dont la puissance nominale se situe entre 3 kW et 4.5 kW. Typiquement, l'élément chauffant du haut est situé au tiers supérieur du chauffe-eau alors que l'élément du bas se situe près de l'entrée d'eau froide au bas du réservoir, généralement positionnée à 20 cm du fond du

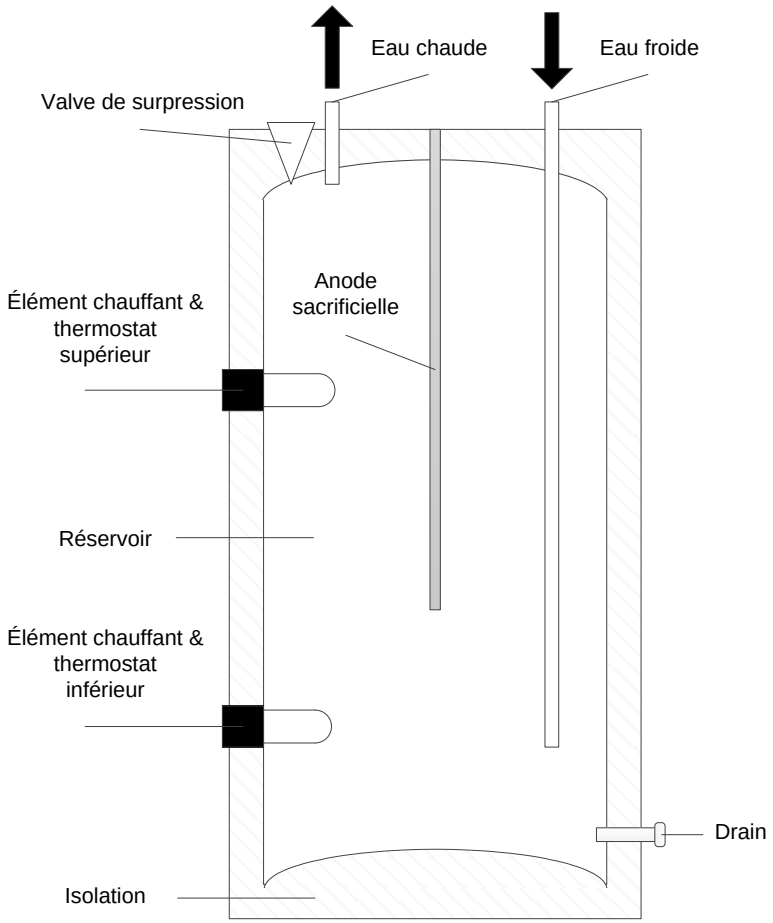


Figure 1.2 Schéma technique d'un chauffe-eau électrique résidentiel

réservoir, afin d'éviter le contact avec les sédiments qui se sont accumulés au fond du CE. Chaque élément chauffant est contrôlé par un thermostat suivant une logique maître-esclave selon laquelle l'élément supérieur a la priorité, alors que l'élément du bas ne peut fonctionner que si l'élément du haut est éteint. Cette méthode permet de chauffer rapidement un petit volume d'eau (au-dessus de l'élément du haut) lorsque le réservoir est complètement déchargé. En opération normale, c'est surtout l'élément du bas qui fonctionne car celui-ci est plus près de l'entrée d'eau froide et il sera activé en premier lorsqu'il y aura consommation d'eau chaude. Cela explique le fait que l'élément chauffant du haut n'est utilisé que 5 % du temps (Laurent et Malhamé, 1994) et que l'élément du bas doit être remplacé plus souvent (Wong et al., 2013).

Chaque thermostat possède une bande morte de l'ordre de 5 °C, mais qui peut aller jusqu'à 10 °C, autour d'une température de consigne. Cette température de consigne peut varier entre 43 et 77 °C, mais les fabricants recommandent de maintenir les CE entre 50 et 60 °C

afin de réduire les risques de brûlure, réduire la dégradation prématurée des composants et minimiser la consommation d'énergie (Wong et al., 2013). Du point de vue de l'usager, cette température de consigne a des effets important sur le confort car une température de consigne trop élevée augmente le risque de brûlure de l'usager, mais une température de consigne trop basse peut aussi mener à la prolifération de la Légionellose (Bélanger-Bonneau et Dionne, 2001).

Dans ce travail la zone de confort de l'usager est considérée comprise dans la plage de température entre 50 et 60 °C.

1.2.1 Stratification et thermocline

Les CE sont conçus pour favoriser la stratification thermique de façon à retrouver l'eau la plus chaude au haut du réservoir. L'élément clé d'une bonne stratification est l'entrée d'eau froide. Cette entrée doit se situer au bas du chauffe-eau et ne pas engendrer un mixage de l'eau trop important. Les éléments chauffants contribuent bien évidemment à la stratification en chauffant l'eau. La séquence de chargement d'un réservoir froid est la suivante. Au commencement, c'est l'élément chauffant supérieur qui se met en marche le premier et chauffe le volume d'eau supérieur du CE jusqu'à ce que celui-ci atteigne la température de consigne. Une fois cet objectif atteint, c'est au tour de l'élément inférieur de faire le travail jusqu'à ce que le thermostat du bas indique que la température de consigne a été atteinte. Indépendamment de l'élément en marche, l'eau chaude a tendance à monter vers le haut du réservoir grâce à la poussée d'Archimède, car cette dernière à une masse volumique plus faible que l'eau froide. Ainsi, l'eau présente dans la partie supérieure du CE est presque toujours à la température maximale dans le réservoir. L'ascension du panache d'eau chaude engendre un certain mélange avec l'eau « froide ». Au final, lorsque le point de consigne au bas du réservoir est atteint, l'élément du bas est éteint. À ce moment la température au-dessus de l'élément du bas est presque uniforme et égale à la température de consigne. Sous l'élément du bas, la température est nettement plus basse et tend vers la température de l'entrée d'eau froide. Il y a donc une transition thermique abrupte au niveau de l'élément du bas. L'épaisseur de cette transition, qu'on appelle thermocline, évoluera lentement dans le temps à cause de la conduction thermique dans l'eau. Lorsqu'un volume d'eau chaude est tiré du haut du CE, un même volume d'eau froide est immédiatement injecté dans le réservoir par l'entrée d'eau [1]. Or, si le volume soutiré est assez faible, l'eau de sortie demeurera à la température de consigne grâce à la stratification, alors que le volume d'eau froide se mélangera avec le

1. Lors d'un fonctionnement normal, le réservoir du CE est toujours complètement rempli d'eau. Celui-ci est seulement vidé lors d'un nettoyage ou d'une réparation en ouvrant la valve du drain située au bas du CE.

volume du bas.

Les mécanismes décrits aux paragraphes précédents sont illustrés à la figure 1.3. Ce chauffe-eau est initialement à une température d'environ 15 °C et la température de consigne des deux éléments chauffants est fixée à 60 °C. Aucun tirage d'eau n'est appliqué au système pour cet exemple. Ces mesures ont été obtenues sur le banc de test présenté à la section 3. Les mesures sont représentées sous 10 nœuds avec le nœud 1 représentant le haut du réservoir.

Les nœuds 1 à 4 sont chauffés les premiers par l'élément chauffant supérieur au cours des 2 premières heures. Il est possible d'observer une thermocline entre les nœuds 4 et 5 à $t = 2h$. Vers $t = 2h$, le thermostat du haut observe que la température de consigne est atteinte à son niveau, l'élément inférieur se met en marche. Celui-ci chauffe les nœuds 5 à 9 jusqu'à environ la 3e heure. À ce moment, le panache d'eau chaude produit par l'élément du bas, « traverse » le nœud 5 pour se mélanger avec le nœud 4. En effet, l'eau chauffée près de cet élément devient moins dense que l'eau du réservoir. Cette différence entraîne le volume d'eau chaude vers le haut sous l'effet de la gravité. L'eau continue de monter jusqu'à une hauteur critique appelée point neutre où la température du panache est égale à celle du fluide. Dans le cas présenté à la figure 1.3, il s'agit du nœud 4. À cause de son inertie, le panache continue sa course au-dessus du point neutre, pour ensuite se répandre sur l'ensemble de la section d'écoulement à cette hauteur. Ce phénomène de montée du panache a tendance à

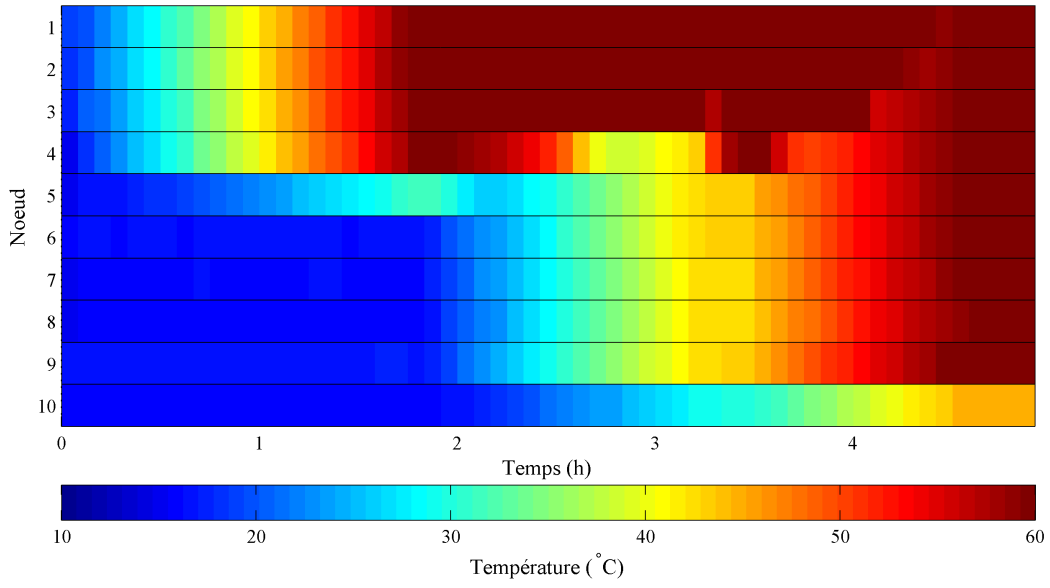


Figure 1.3 Stratification de la température de l'eau à l'intérieur d'un chauffe-eau (mesures expérimentales)

uniformiser la température entre l'élément du bas et la région immédiatement au-dessus du point neutre. Le phénomène se poursuit et les nœuds 3, 2 et 1 sont successivement mélangés au reste du réservoir. À la fin du test, la température du réservoir est uniforme au-dessus de l'élément chauffant. Finalement la température du nœud 10, situé sous l'élément du bas, reste relativement froide pendant tout le test car la montée du panache n'affecte pas cette région. Avec le temps, une légère augmentation de la température du 10e nœud se produit et est causée non pas par un mouvement d'eau vers le bas, mais par de la conduction thermique dans l'eau.

Finalement, les résultats présentés à la figure 1.3 indiquent qu'il faut environ 4.5 heures pour charger complètement ce chauffe-eau de 260 litres de 15 à 60 °C à l'aide d'éléments chauffants de 2.9 kW. Wong et al. (2013) rapporte un temps de chargement de 2.5 heures pour un chauffe-eau standard de 270 litres muni d'éléments chauffants d'une puissance de 4.5 kW.

1.3 Problématique

Les méthodes de commande intelligente actuelles se basent sur un modèle simplifié des chauffe-eau. En procédant de la sorte, le réseau tend à sous-estimer la capacité réelle de stockage du chauffe-eau. En effet, la stratification de la température présente dans le chauffe-eau permettrait d'abaisser la température moyenne (niveau énergétique) du réservoir sous le seuil de confort tout en offrant une eau en sortie près de la température de confort. Plusieurs modèles améliorés ont déjà été proposés, notamment un modèle à deux couches avec une mémoire des événements de tirage (Kondoh et al., 2011), un modèle semi-empirique tenant compte de la monté de la thermocline (Atabaki et Bernier, 2005), un modèle agrégé basé sur des simulations Monte Carlo (Dolan et al., 1996) et un modèle numérique multicouche (Allard et al., 2011).

En plus de la stratification, un second aspect rend la modélisation d'un chauffe-eau complexe : son processus de tirage d'eau. Il a été suggéré que les événements de tirage d'eau, équivalent à un demande en énergie, pourraient-être décrits par un processus stochastique qu'est la chaîne de Markov à deux états [9]. Le chauffe-eau est caractérisé par deux états de demande, en l'occurrence un état actif et un état inactif de demande. Ce modèle présente cependant certaines lacunes. Par exemple, il n'est pas sensible à la température d'entrée de l'eau en provenance de l'aqueduc. Cette dernière peut varier considérablement. Ainsi, une différence de 20 °C est possible entre l'hiver et l'été (Wong et al., 2013). De plus, une chaîne de Markov à deux états ne permet pas de modéliser différents types de tirage qui nécessitent débits et durées en général différents (lave-vaisselle, douche, lavage de main, etc.).

1.4 Objectifs de recherche

L'objectif général de ce projet est le développement d'un processus d'estimation de l'état d'énergie d'un CE basé sur un modèle numérique. Ce processus d'estimation permet au contrôleur local par champ moyen de corriger sa prédiction de l'état actuel du CE pour obtenir une commande mieux ciblée.

Afin de réaliser l'objectif général, plusieurs étapes sont nécessaires :

1. Recenser les modèles de chauffe-eau présents dans la littérature ;
2. Caractériser expérimentalement le comportement thermique d'un chauffe-eau assujetti à divers profils de tirage d'eau ;
3. Comparer et valider les différents modèles numériques de chauffe-eau avec des résultats expérimentaux ;
4. Comparer et valider les estimations d'état d'énergie de chauffe-eau avec des résultats expérimentaux.

Si la modélisation s'avère concluante, il sera possible de prescrire une conduite à l'ensemble de la population de chauffe-eau (basée sur des statistiques d'ensemble) sans que chacun doive suivre exactement la même consigne (approche classique), et sans surcharger la bande passante du réseau de télécommunication. Il sera alors possible de mieux niveler les flux de puissance sur le réseau électrique, tout en respectant les contraintes locales.

1.5 Plan du mémoire

Ce mémoire est divisé en quatre grands chapitres. Dans un premier temps, le chapitre 2 présente une revue de la littérature sur la modélisation des chauffe-eau électriques et les techniques d'estimation d'état. Le chapitre 3 suit avec une description de la méthodologie des expériences de tirage d'eau sur un CE réalisées en laboratoire. Ces expériences ont pour objectif de fournir un ensemble complet de données pour comparer les résultats numériques à des valeurs réelles. Plusieurs expériences présentant différents profils de tirage d'eau chaude sont réalisées. Puis, le chapitre 4 continue avec la description du modèle numérique de CE développé avec une approche multi-nodale. Finalement, le chapitre 5 présente en détail les différents mécanismes d'estimation de l'état d'énergie d'un CE ainsi que des tests numériques de performance.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Introduction

Depuis la construction du tout premier parc éolien au Canada en 1993, la contribution des énergies renouvelables au paysage énergétique canadien n'a cessé d'augmenter. En 2013, l'énergie éolienne a contribué à 1.5 % de la génération totale d'électricité au Canada selon canadienne de l'électricité. L'association canadienne de l'énergie éolienne (voir CanWEA) prévoit à ce titre une production éolienne représentant 20 % de la demande domestique en électricité totale du Canada d'ici 2025. Cet apport en énergie renouvelable, autant éolien que solaire, cause cependant des nombreux défis techniques pour les compagnies d'électricité. En effet, le comportement chaotique de la disponibilité de ces ressources demande l'instauration de nouvelles technologies de contrôle de la demande et de l'offre. À ce titre, les chauffe-eau électriques domestiques offrent des possibilités intéressantes pour le contrôle de la charge sur le réseau électrique.

Les chauffe-eau électrique résidentiels sont nombreux dans plusieurs provinces canadiennes, particulièrement le Québec, et représentent globalement 44% de l'ensemble des chauffe-eau installés au Canada (Wong et al., 2013). Avec une consommation quotidienne moyenne de 75 litres d'eau chaude par habitant à travers le pays, ces CE représentent 17% de la consommation d'énergie dans le secteur résidentiel (Ressources naturelles Canada, 2010). De plus, cette consommation d'énergie par les CE est corrélée à la demande du réseau électrique, avec un maximum de la demande d'électricité des CE coïncidant avec le pic de demande sur le réseau. Pour ces raisons, le CE est un choix intéressant pour le développement d'une stratégie de gestion de la charge. Bien que le but premier de ce dispositif est de convertir de l'énergie en chaleur afin d'offrir à l'usager une eau chaude à la température désirée en tout temps, celui-ci aussi peut devenir une batterie thermique du point de vue du réseau, offrant de l'énergie en période de demande et en la stockant par période d'abondance. C'est ce qui motive l'intérêt porté vers la modélisation de ces réservoirs d'énergie.

La section 2.2 présente une revue des nombreux modèles de CE que l'on retrouve dans la littérature.

2.2 Revue des modèles de chauffe-eau

Les premiers efforts de modélisation de la température à l'intérieur d'un CE furent réalisés par Cabelli (1977). Celui-ci évalue l'impact du nombre de Reynolds d'entrée ainsi que la

stratification de la température à l'intérieur du réservoir engendrée par la poussée de l'eau. Il remarque aussi que la performance d'un modèle simplifié unidimensionnel par rapport à un modèle bidimensionnel est faible. Dans ce modèle simplifié unidimensionnel, le CE est représenté par un seul volume d'eau à température uniforme et sans mélange et le comportement en température est obtenue analytiquement.

Cook (1980) réalise d'importants tests sur les performances thermiques de chauffe-eau électriques de géométrie différentes, soit un haut et mince et un second petit et large de volume égal (189.5 litres) et de même puissance de chauffage pour chacun des deux éléments chauffants (4.5 kW). Il se base sur les tests standards développés par le département de l'énergie américain (DOE). Il s'interroge aussi sur la capacité des chauffe-eau électriques à réguler la demande résidentielle en électricité en réduisant la pointe de consommation et redistribuant cette charge sur les périodes plus creuses (notamment la nuit). Pour ce faire, il applique un ensemble de tests : diffusion, stratification dynamique et stratification statique avec 1 et 2 éléments chauffants. Il conclut suite au test de diffusion que les deux chauffe-eau permettent de fournir le même volume d'eau chaude jusqu'à ce que l'élément du bas s'active, mais que le CE plus haut fournit plus pour un tirage prolongé. Quant aux tests de stratification, il démontre que le chauffe-eau haut et mince produit plus rapidement de l'eau chaude avec deux éléments, bien que la température moyenne demeure la même pour les deux systèmes. Après un durée statique de 24 heures, il n'observe plus de stratification dans les deux chauffe-eau. Finalement, il propose un contrôle variable des éléments chauffants pour moduler la charge des chauffe-eau électriques sur le réseau. Il décrit aussi qu'il est plus avantageux de distribuer une charge sur une période de creux prolongée à une énergie moindre plutôt que sur une période plus courte à plus forte énergie.

Laurent et Malhamé (1994) s'intéressent au potentiel de stockage des chauffe-eau électriques et présentent un modèle agrégé pour une population homogène de CE. Ce modèle est linéaire et répond à l'équation de conservation de l'énergie. Un CE est représenté par un volume d'eau à une température moyenne uniforme. Pour modéliser le processus d'extraction d'énergie que subit un CE, ils proposent un processus stochastique suivant une chaîne de Markov à deux états, tirage et non-tirage. Suivant cette description de l'état discret du système, ils décrivent la dynamique agrégée de la population par une interaction entre deux systèmes d'équations aux dérivées partielles. Cette description est importante afin de comprendre l'impact des stratégies de gestion de la charge sur les réseaux électriques.

Bouthillier et Bernier (1995) proposent un modèle amélioré de la performance thermique d'un CE. Il s'agit d'un modèle transitoire unidimensionnel dont la particularité est une subdivision en deux volumes distincts : une région complètement mélangée où la température de l'eau

est homogène et une seconde région au-dessus de la région complètement mélangée agissant comme un piston où la vélocité de l'eau est uniforme et la température varie de façon axiale. La hauteur de la région complètement mélangée est obtenue grâce à une corrélation entre la hauteur de la région et le nombre de Richardson. Le nombre de Richardson représente ici le rapport entre la flottabilité du fluide et les forces inertielles et peut varier dans le temps. Ainsi, un débit ou une température variable de l'eau en entrée du CE peut être traiter par ce modèle. La variation de la hauteur de la région mélangée permet de tenir compte du déplacement de la thermocline dans le réservoir. Une fois la hauteur de la région connue, un bilan énergétique transitoire est réalisé afin d'obtenir la température de l'eau dans ce volume. Cette température sert aussi de condition frontière pour la température d'entrée de la région supérieure. La distribution de la température dans le réservoir supérieur est alors obtenue en résolvant les équations de convection et diffusion par une méthode numérique de volumes-finis. La validation expérimentale de ce modèle démontre qu'une considération adéquate des dynamiques d'entrée de l'eau est nécessaire pour une bonne prédiction de la température de sortie. L'une des limites de ce modèle est l'utilisation de la corrélation de la hauteur de la région et le nombre de Richardson établie par Nakahara (Nakahara et al., 1989). Cette corrélation fut établie lors de l'étude de la stratification dans des réservoirs de stockage froid à géométrie cubique. La validité pour une géométrie cylindrique n'est pas vérifié. Atabaki et Bernier (2005) propose alors une nouvelle corrélation pour déterminer la hauteur de la région complètement mélangée. Cette dernière est obtenue expérimentalement en observant le comportement d'un CE pour différentes valeurs du nombre de Richardson généralement observé dans un contexte résidentiel. Ce modèle a l'avantage d'être beaucoup plus rapide qu'un modèle à deux ou trois dimensions pour la prédiction du comportement thermique d'un CE.

Kondoh et al. (2011) proposent un modèle alternatif unidimensionnel à deux réservoirs. Celui-ci intègre deux volumes d'eau avec un volume fixe et une température uniforme. Le modèle tient aussi compte du volume cumulatif d'eau extrait du système. Tant que ce volume demeure inférieur au volume du réservoir supérieur, la température de l'eau extraite est égale à la température de l'eau de la région du haut. Lorsque ce volume cumulé dépasse le volume supérieur, la température de sortie du CE est égale à la température de la région du bas. Cette hypothèse permet de simuler la montée de la thermocline dans le réservoir du CE. La température de l'eau dans chaque volume du modèle est alors calculée en résolvant les équations de conservation de l'énergie pour chaque sous-volume. Ce modèle présente cependant des défis d'implémentation à cause de ce volume cumulatif qui doit être enregistré pour chaque CE distinct.

Allard et al. (2011) réalisent une étude comparative des nombreux modèles numériques de chauffe-eau électriques présents dans la littérature. Plus précisément, ils se penchent sur les modèles Type 4, 60, 534, 340 du logiciel TRNSYS suivant une approche nodale, soit la division en un nombre fixe de strates, et le Type 38 basé sur une approche « plug-flow », signifiant que le nombre de strates varie tout au long de la simulation et est contrôlé par le pas de temps, les flux entrants et sortants ainsi que les températures des nœuds. Il caractérise la performance de chaque modèle suivant l'ensemble de critères de la gestion de la charge : l'apport en température, la consommation d'énergie, le temps d'opération et la distribution verticale de la température. Il conclut que l'approche nodale offre de meilleurs résultats que celle dite « plug-flow » pour un chauffe-eau électrique typique de la province du Québec. Le Type 38 ne réussit pas à reproduire fidèlement la stratification observée expérimentalement. De tous les modèles basés sur une architecture nodale, c'est le Type 534 qui démontre la meilleure performance. Le Type 4 ne tient pas compte de la déstratification à l'intérieur du réservoir, le Type 60 affiche des erreurs numériques lors de certains tests et le Type 340 est limité à l'utilisation d'un seul élément chauffant. Le Type 534 offre le meilleur compromis entre flexibilité et qualité de la prédiction de la température.

Vanthournout et al. (2012) proposent une interface générale pour le contrôle de chauffe-eau électriques résidentiels. Ils se basent sur une approche multi-nodale pour décrire les dynamiques thermiques du système et divise en 8 volumes égaux le réservoir du CE. La température de chaque volume est observée par des senseurs de température. Pour appliquer un contrôle efficace aux chauffe-eau, ils se basent sur un ensemble de quatre indicateurs critiques, soit : la puissance nominale des éléments chauffants, l'énergie requise pour chauffer le réservoir, l'état de charge du réservoir et l'énergie minimale pour conserver le niveau de charge du réservoir. Le comportement de ces critères est validé numériquement et expérimentalement. La connaissance de la dynamique de ces critères permet d'établir une stratégie de contrôle locale respectant les conditions de confort de l'usager. L'interface développée peut être utilisée dans le cas de test pilote de différentes stratégies de contrôle de la charge.

Prieur (2013) s'intéresse à l'utilisation des chauffe-eau électriques comme charge flexible sur le réseau et ainsi augmenter la pénétration des renouvelables. Plus précisément, il présente un cas de coopération entre un groupe de chauffe-eau et une production d'énergie photovoltaïque intermittente permettant de compenser partiellement les fluctuations de production. Pour réaliser la simulation du comportement d'un ensemble de chauffe-eau, il se réfère aux conclusions de Allard et al. (2011) et opte pour un modèle Type 534 contrôlé par deux aquastats. Il analyse l'effet du pas de temps et conclut qu'un pas de temps d'une minute offre des résultats satisfaisants en comparaison avec les résultats espérés. Il précise aussi que sept heures sont nécessaires au système pour évacuer l'effet des conditions initiales sur le

comportement du modèle. Ce modèle est validé expérimentalement avec le scénario de Bouthillier et Bernier (1995). Il démontre aussi qu'une asymptote sur la qualité de la prédiction en température est atteinte lorsque le modèle multi-nodal comporte cent nœuds, contrairement au nombre de mille requis par Bouthillier et Bernier (1995). À des fins de vitesse du calcul, il ne retiendra que dix nœuds pour son modèle. Il complète l'analyse du modèle par une validation approfondie du bilan énergétique du système.

Wong et al. (2013) réalisent une introduction bien détaillée aux concepts, techniques et modèles utilisés pour l'évaluation du potentiel de gestion de la charge des chauffe-eau électriques domestiques. Ils décrivent le mode de fonctionnement d'un chauffe-eau, notamment comment la stratification affecte le potentiel réel de stockage du réservoir. Ils notent cependant qu'un modèle aussi détaillé est trop complexe pour la simulation d'un ensemble très grand de CE. Pour cela, ils proposent un modèle d'agrégation d'une large population de CE qui repose sur les principes établis par Laurent et Malhamé (1994). Ils analysent la sensibilité de cette approche à la taille de la population, le pas de temps de simulation, aux variations saisonnières et à l'intensité de la consommation. Ils offrent finalement un regard d'ensemble aux différentes stratégies de contrôle de la charge maintenant disponibles aux opérateurs de réseaux grâce à des architectures de communication unidirectionnelles et bidirectionnelles.

Xu et al. (2014) présentent un modèle basé sur une équation aux dérivées partielles (EDP), soit l'équation de la chaleur à l'intérieur d'un CE. Cette équation est résolue en divisant le réservoir en 112 petits sous-volumes et en appliquant une technique de différences finies centrales pour les dérivées partielles de premier et deuxième ordre en température et une différence finie avant pour les dérivées partielles temporelles. Les résultats comparatifs démontrent une meilleure performance du modèle par EDP par rapport aux modèles à une couche (température moyenne) et à deux couches. L'intérêt de ce modèle est l'ajout des termes de conduction et de convection thermique qui viennent préciser le comportement à l'intérieur du réservoir du CE.

CHAPITRE 3 MÉTHODOLOGIE EXPÉRIMENTALE

Ce chapitre présente le cadre d'expérience utilisé pour obtenir des mesures expérimentales de température sur un CE électrique domestique typique. Ces expériences ont été réalisées en partenariat avec le CanmetÉNERGIE. La section 3.1 présente l'objectif et les hypothèses reliées au cadre d'expérience. Le banc de test est décrit en détail à la section 3.2, et la méthodologie de l'expérience est présentée à la section 3.3.

3.1 Objectif et hypothèses

Le but de cette série d'expériences est de caractériser la performance thermique d'un CE afin de valider les modèles numériques de CE développés dans le cadre du projet smartDESC.

Afin d'être en mesure de connaître l'état exact du CE en tout temps, le montage expérimental comprend les éléments suivants :

- Régulateur du tirage d'eau et de la température de l'eau à l'entrée ;
- Contrôle sur les éléments chauffants et connaissance de leur état de marche et de leur puissance ;
- Mesure de la température à dix endroits différents à l'intérieur du réservoir du CE ainsi qu'à l'entrée et à la sortie ;

Les caractéristiques techniques du CE utilisé sont données à la section 3.2.1.

3.2 Montage expérimental

Cette section présente le montage expérimental du CE disponible dans le laboratoire du CanmetÉnergie. Les caractéristiques techniques du CE sont définies à la section 3.2.1 puis, le montage expérimental à la section 3.2.2.

3.2.1 Caractéristiques techniques du chauffe-eau de référence

Les caractéristiques techniques du CE de référence utilisé pour ce banc de test sont présentées au tableau 3.1.

Le volume réel du réservoir est calculé grâce à des mesures de la dimension du réservoir. Le volume théorique de 284 L est ainsi corrigé à 260 L suite à ces mesures. Les pertes thermiques en attente sont obtenues en consultant la fiche technique du CE (John Wood). Il est possible d'approximer le coefficient de déperdition thermique de l'enveloppe du chauffe-eau à l'aide

Tableau 3.1 Caractéristiques techniques du chauffe-eau de référence

Paramètre	Valeur
Fabricant	John Wood
Modèle	JW80SDE145
Volume nominal	284 L (260 L)
Pertes thermiques en attente	91 W
Position de l'élément chauffant supérieur	100.7 cm
Température de consigne du thermostat supérieur	55 °C
Bande morte du thermostat supérieur	10 °C
Puissance de l'élément chauffant supérieur	2750 W
Position de l'élément chauffant inférieur	24.8 cm
Température de consigne du thermostat inférieur	58.5 °C
Bande morte du thermostat inférieur	3 °C
Puissance de l'élément chauffant inférieur	2900 W
Position du 1er capteur de température	128.2 cm
Position du 2e capteur de température	114.7 cm
Position du 3e capteur de température	101.2 cm
Position du 4e capteur de température	87.7 cm
Position du 5e capteur de température	74.2 cm
Position du 6e capteur de température	60.7 cm
Position du 7e capteur de température	47.2 cm
Position du 8e capteur de température	33.7 cm
Position du 9e capteur de température	20.3 cm
Position du 10e capteur de température	6.8 cm

de la relation suivante :

$$\dot{Q}_{pertes} = UA(T_{CE} - T_{env}) \tag{3.1}$$

où

- $\dot{Q}_{pertes}$ sont les pertes thermiques en attente
- U est le coefficient de déperdition thermique de l'enveloppe
- A est la surface efficace de contact entre l'eau et la paroi du réservoir
- T_{CE} est la température à l'intérieur du CE
- T_{env} est la température de l'environnement extérieur au CE

Pour retrouver le facteur U, les hypothèses suivantes sont utilisées : une température uniforme à l'intérieur du CE égale à 333.15 K (60 °C), une température extérieur de 293.15 K (20 °C) et une surface de contact totale d'environ 2.5 m^2. Le facteur U est donc égal à :

$$U = \frac{\dot{Q}_{perte}}{A(T_{CE} - T_{env})} = \frac{91 \text{ W}}{2.5 \text{ m}^2 \times (333.15 \text{ K} - 293.15 \text{ K})} = 0.91 \text{ W/m}^2\,\text{K} \tag{3.2}$$

La puissance nominale des éléments chauffants est inférieure à celle prescrite par le manufacturier. Cela est causé par la plus faible tension appliquée aux bornes de ces éléments. En effet, l'installation affiche une tension aux bornes des deux éléments inférieure à 200 V pour une puissance autour de 2750 W et 2900 W pour les éléments supérieur et inférieur plutôt qu'une puissance de 4500 W tel qu'affichée sur la fiche technique. La valeur des bandes mortes des thermostats découle d'observations expérimentales du comportement des éléments chauffants.

Finalement, la position des capteurs de température, insérés le long d'une tige dans le réservoir, est calculée de façon à positionner ceux-ci de manière équidistante pour permettre de diviser le CE en dix sous-volumes équivalents.

3.2.2 Montage du banc de test

La figure 3.1 présente le montage utilisé pour produire expérimentalement des scénarios de tirage d'eau chaude sur un CE. Ce montage présente un système de distribution d'eau en boucle fermée. Un contrôle est appliqué sur la pompe afin de produire le profil de tirage d'eau désiré. De l'eau froide en provenance du réservoir d'eau est injectée dans le chauffe-eau. L'eau extraite de celui-ci est refroidie lorsqu'elle atteint l'échangeur de chaleur, puis retourne dans le réservoir d'eau principal. Puisque l'eau circule dans une boucle fermée, une augmentation de la température de l'eau à l'entrée du CE est observée au cours de l'expérience. La température de cette eau est mesurée par un thermocouple juste avant son entrée dans le CE. Un débitmètre est aussi présent à la sortie du CE pour mesurer le débit

en temps réel. La figure 3.2 détaille les outils de mesure et les dimensions géométriques du CE de référence (pour plus d'informations sur le fonctionnement d'un CE, voir section 1.2).

Le CE compte deux systèmes de mesure de la température : un thermomètre à résistance et une tige comprenant dix capteurs en température. Le thermomètre à résistance (RTD) suit le principe que la résistance électrique d'un élément varie selon la température. Cet outil permet de mesurer la température moyenne de l'environnement dans lequel il est inséré. Il est utilisé afin de mesurer la température moyenne de l'eau dans le CE. Il a été démontré en laboratoire que ce capteur permet de mesurer avec une bonne précision le niveau d'énergie (température moyenne) d'un CE. Un thermomètre à résistance offre plusieurs avantages par rapport à l'utilisation d'une série de capteurs en température pour mesurer la température moyenne d'un CE, étant principalement peu coûteux et s'insérant facilement dans le réservoir grâce à sa malléabilité. Dans une perspective d'amélioration des CE, ce dispositif est attrayant pour les fabricants. Les mesures de ce thermomètre à résistance sont utilisées au chapitre 5 pour estimer l'état de tirage d'eau du système.

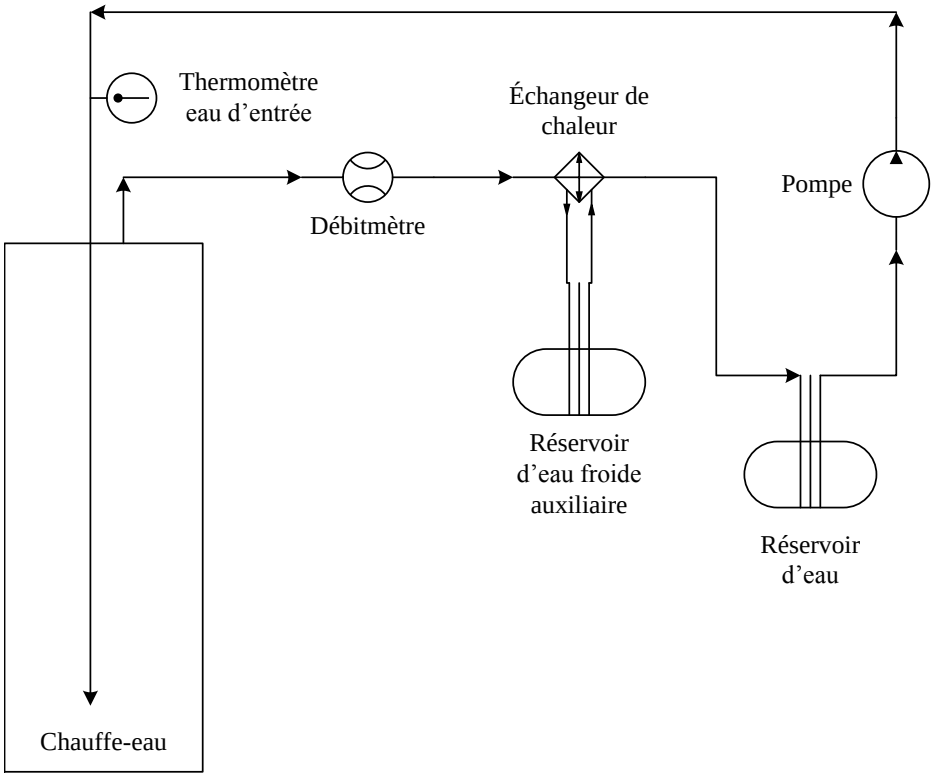


Figure 3.1 Schéma du banc de test

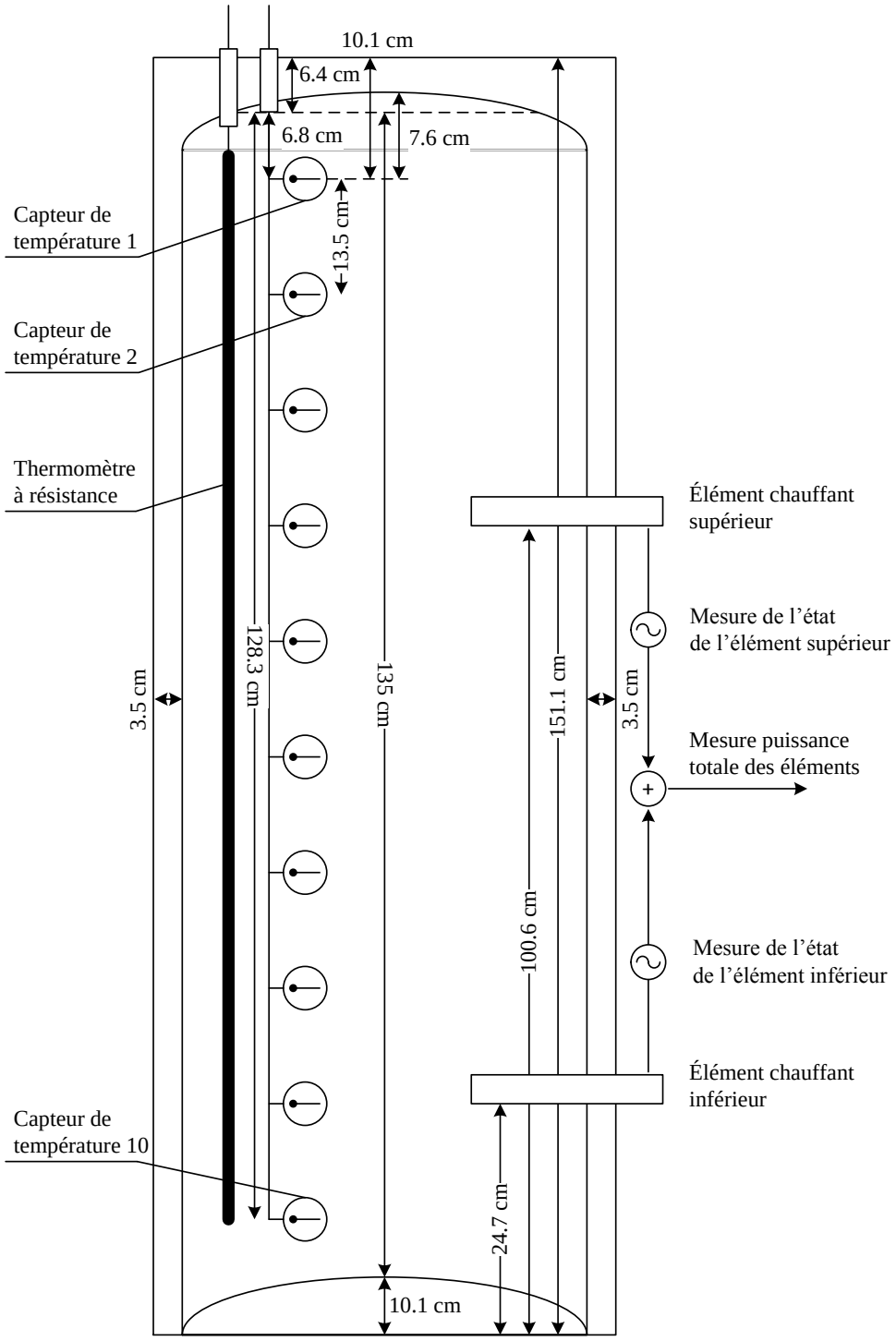


Figure 3.2 Schéma du montage expérimental de mesure du chauffe-eau

Une tige sur laquelle est positionnée dix capteurs de température de type thermocouple est aussi insérée dans le réservoir. Les dix capteurs sont positionnés de façon équidistante sur la tige. Ces mesures sont utilisées subséquemment au chapitre 4 pour comparer la prédiction numérique du comportement en température d'un CE.

L'état des éléments chauffants est mesuré afin de connaître la séquence de contrôle des thermostats. Ainsi, la puissance totale dissipée par les deux éléments est mesurée tout au long des expériences.

3.2.3 Acquisition des mesures

Le tableau 3.2 présente les données mesurées à chaque pas de temps pour chaque expérience. Notons que le seul paramètre imposé au système est le débit d'eau chaude soutiré. Un pas de temps de mesure d'une seconde est utilisé pour l'ensemble des tests réalisés et présentés précédemment.

3.3 Méthodologie

L'ensemble des expériences réalisées pour ce projet se divise en trois catégories :

1. **Test de chauffage (charge)** : Le CE, dont la température du réservoir est initialement égale à celle de l'eau de l'aqueduc, est chauffé complètement jusqu'à ce que la température de consigne soit atteinte pour les deux thermostats. Le CE ne subit aucun tirage durant l'exercice de chauffage.
2. **Test de refroidissement (décharge)** : Le CE, dont la température du réservoir est initialement égale à la température de consigne, est refroidit complètement jusqu'à ce

Tableau 3.2 Paramètres mesurés lors des expériences

Paramètre	Unité	Valeur(t)
Pas de temps	s	...
Débit sortant	l/min	...
Tension de la résistance filaire	V	...
État de l'élément supérieur	-	...
État de l'élément inférieur	-	...
Puissance totale des éléments	W	...
Température de l'eau d'entrée	°C	...
Température du 1er capteur	°C	...
⋮	⋮	⋮
Température du 10e capteur	°C	...

que la température moyenne du réservoir soit égale à celle de l'eau de l'aqueduc. Un tirage d'eau chaude d'une intensité supérieure à 1 L/min doit être appliqué lors du refroidissement afin de dépasser le gain en chaleur amené par les éléments chauffants.

3. **Test aléatoire** : Le CE est initialement à la température de consigne. Il subit, pendant un période de simulation prédéfinie, une séquence d'événements de tirage de même intensité dictée par un processus stochastique par chaîne de Markov à deux états (voir section 4.2).

Inspirés par les travaux de Cook (1980), les tests suivants sont proposés pour générer un ensemble de données expérimentales pertinents à la validation de modèles numériques et du processus d'estimation de l'état d'énergie d'un CE :

1. **Test de charge**

   Cinq heures de temps de mesure sont requis pour observer le chargement complet du CE par les deux éléments chauffants.

2. **Test de décharge à faible débit**

   Un faible débit constant de 5 L/min est appliqué au CE durant une période de 90 minutes pour observer un déchargement complet du CE.

3. **Test de décharge à débit élevé**

   Un débit élevé constant de 15 L/min est appliqué au CE durant une période de 24 minutes pour observer un déchargement complet du CE.

4. **Test aléatoire à débit moyen**

   Une séquence de saut générée par une chaîne de Markov sur une période de 12 heures est appliquée au CE. Chaque saut possède la même intensité de tirage égale à 7.5 L/min.

De toutes ces expériences, le scénario aléatoire à débit moyen représente le cas le plus intéressant et le plus près de la réalité. Les résultats de cette expérience sont présentés aux chapitres 4 et 5 pour caractériser la performance du modèle de CE numérique proposé, de même que la performance du processus d'estimation de l'état d'énergie du système. Les résultats des autres expériences sont présentées en complément à l'annexe B.

CHAPITRE 4 MODÉLISATION D'UN CHAUFFE-EAU

Ce chapitre débute par une présentation du modèle mathématique représentant un chauffe-eau électrique. Puis, la chaîne de Markov comme processus stochastique de tirage d'eau est présentée à la section 4.2. Une fois les bases du modèle établies, celui-ci est comparé à deux des modèles de chauffe-eau disponibles dans le logiciel TRNSYS (section 4.3) et à des données expérimentales (section 4.4). Par la suite, des études de sensibilité du modèle au pas de temps de simulation (section 4.5) et au maillage (section 4.6) sont réalisées. Puis, une vérification du bilan énergétique du système est présenté à la section 4.7. Finalement, la section 4.8 résume les conclusions importantes de ce chapitre.

4.1 Modélisation multi-nodale d'un chauffe-eau

Le modèle mathématique d'un CE se base principalement sur le principe de conservation de l'énergie. Dans ce système, le débit d'eau en entrée est toujours égal à celui en sortie. Le CE est régi par différents processus de gain et de perte d'énergie, soit :

- Une perte de chaleur par les parois du réservoir
- Une perte de chaleur par la différence de température entre l'eau qui sort et l'eau qui entre
- Un gain de chaleur par le fonctionnement des éléments chauffants
- Une variation de l'énergie interne du réservoir

La loi de conservation de l'énergie pour ces quatre processus est représentée par l'équation différentielle (ED) suivante :

$$\rho V C_p \frac{dT(t)}{dt} = \dot{Q}_e - UA(T(t) - T_{env}) - \rho \dot{V}_d(t) C_p (T(t) - T_f) \tag{4.1}$$

où :

- ρ est la masse volumique de l'eau
- C_p est la chaleur spécifique de l'eau
- U est le coefficient de transfert thermique de l'isolant
- A est la surface totale du réservoir
- $\dot{Q}_e$ est la puissance dégagée par les éléments chauffants
- V est le volume total d'eau
- $V_d(t)$ est le débit d'eau tiré
- $T(t)$ est la température moyenne de l'eau
- T_f est la température de l'eau de l'aqueduc

– T_{env} est la température extérieure au chauffe-eau

L'équation (4.1) représente plus particulièrement l'évolution de la température moyenne (un seul nœud) dans le CE. Bien que la température moyenne soit un bon indice de l'état d'énergie du système (Laurent et Malhamé, 1994), l'utilisation d'un nœud unique ne permet pas de prendre en compte toute la dynamique thermique engendrée par la stratification de la température (voir section 1.2.1). C'est pourquoi une approche multi-nodale est intéressante pour modéliser plus finement le comportement en température d'un CE et, indirectement, de son état énergétique.

La figure 4.1 offre une représentation détaillée du modèle multi-nodal utilisé ici. L'approche multi-nodale permet de découper le volume d'eau total contenu dans le CE en un ensemble de sous-volumes (nœuds). L'idée est d'obtenir un modèle mathématique constant dans le temps par morceau et ainsi obtenir une solution analytique pour chaque nœud. Pour ce faire, les hypothèses suivantes sont posées :

1. Chaque sous-volume a une température uniforme
2. Le coefficient de transfert thermique U est constant en fonction de la température de l'eau
3. Les paramètres de chauffage et de tirage sont constants pendant chaque pas de temps
4. La température d'entrée de l'eau est constante dans le temps

Plusieurs chercheurs s'entendent pour dire que les effets saisonniers ont un impact important sur le potentiel de stockage d'énergie d'un CE (Kempton, 1988; Eslami-nejad et Bernier, 2009) avec des écarts de température de l'eau froide en entrée dépassant les 21 °C sur une année pour le Québec (selon des données datant de 2003). Néanmoins dans le modèle proposé, la température d'entrée d'eau est considérée constante dans le temps. Cependant le modèle peut également faire varier cette quantité à chaque pas de temps si requis.

Pour un modèle de CE subdivisé en N nœuds, l'équation (4.1) est appliqué individuellement à chaque nœud pour ainsi obtenir, de façon générale, l'ED suivante permettant de caractériser le comportement en température de chaque nœud :

$$\begin{aligned}\rho V_i C_p \frac{dT_i(t)}{dt} = &\sum_{j=1}^{2} \delta_{iE_j} f_j(t) m_j(t) P_j - \rho \dot{V}_d C_p (T_i(t) - (1-\delta_{iN}) T_{i+1}(t) - \delta_{iN} T_f) \\ &- U A_i (T_i(t) - T_{env}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

où

– $f_j(t)$ est un contrôle extérieur appliquable à un élément chauffant j

– $m_j(t)$ est le contrôle thermostatique de l'élément chauffant j (voir section 4.1.1)

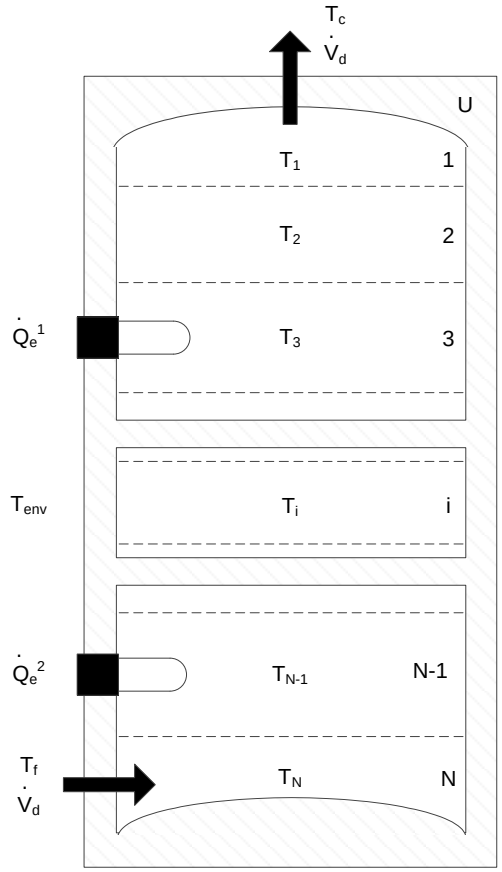


Figure 4.1 Schéma du modèle de chauffe-eau multi-nodal

– P_j est la puissance nominale de l'élément chauffant j

Grâce au delta de Kronecker δ_{iE_j}, le chauffage pour l'élément chauffant j n'est appliqué au nœud i que si $E_j = i$, où E_j est le nœud associé à l'élément j. Cet indice est défini tel que $E_j \in \mathbb{N}$ et $E_0 = 0$. De même, le second delta de Kronecker δ_{iN} permet un échange de chaleur en période de tirage entre un nœud i et son nœud sous-jacent lorsque $i \neq N$ et avec l'eau de l'aqueduc lorsque $i = N$, où N est le nombre total de nœuds du modèle. Cela permet de simuler l'effet de la montée d'un volume d'eau du bas du réservoir vers le haut lors d'un événement de tirage. Il est important de noter que dans ce modèle multi-nodal, l'eau froide de l'aqueduc est toujours injectée dans le nœud le plus bas.

La solution pour l'ED (4.2) est décrite par (4.3) :

$$T(t) = T_0 e^{-\alpha_i (t-t_0)} - \frac{\beta_i}{\alpha_i}\left(1 - e^{-\alpha_i (t-t_0)}\right) \tag{4.3}$$

où

$$\alpha_i = \frac{\rho \dot{V}_d C_p + UA_i}{\rho V_i C_p} \tag{4.4a}$$

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{2} \delta_{iE_j} f_j m_j P_j + \rho \dot{V}_d C_p((1-\delta_{iN})T_{i+1} + \delta_{iN} T_f) + UA_i T_{env}}{\rho V_i C_p} \tag{4.4b}$$

et où T_0 est la température initiale et t_0 le temps initial pour un pas de temps. Il est à remarquer que le paramètre β_i varie selon le type de nœud considéré, selon la présence d'un élément chauffant ou un contact direct avec l'eau froide en entrée. La résolution complète de l'ED (4.2) est présentée à l'annexe A. La température moyenne dans le CE est calculée selon une moyenne pondérée par le volume de chaque nœud tel que :

$$\bar{T}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} V_i T_i(t)}{\sum_{i=1}^{N} V_i}. \tag{4.5}$$

4.1.1 Contrôle thermostatique des éléments chauffants

Les équations 4.2 et 4.3 font intervenir des paramètres issus du contrôle thermostatique appliqué au deux éléments chauffants du système. Tel que mentionné précédemment à la section 1.2, la logique de contrôle de ces éléments suit une relation maître-esclave où l'élément supérieur a toujours la priorité sur celui du dessous. Le comportement thermostatique pour chaque élément chauffant est défini mathématiquement par l'expression suivante :

$$m_j(t+\Delta t) = \begin{cases} 0 & \text{si } T_i(t) \geq T_{set} + \frac{\Delta T_{db}}{2} \\ 1 & \text{si } T_i(t) \leq T_{set} - \frac{\Delta T_{db}}{2} \\ m_j(t) & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.6}$$

où
- $j \in [1, 2]$ est l'indice de l'élément chauffant
- $i \in [1, N]$ est l'indice du nœud du modèle où l'on observe la présence de l'élément chauffant j
- T_{set} est la température de consigne du thermostat, généralement située entre 50 et 60 °C
- ΔT_{db} est la bande morte du thermostat, généralement située entre 5 et 10 °C

De plus, la relation maître-esclave entre l'élément du haut ($j = 1$) et celui du bas ($j = 2$) impose que $m_2(t) = 0$ si $m_1(t) = 1$. Si $m_1(t) = 0$, alors m_2 est décrit par l'équation (4.6).

Bien que ce projet s'intéresse plutôt à une stratégie de contrôle par champ moyen, il est toujours pertinent de conserver ce contrôle thermostatique qui pourra être utilisé lorsque le

contrôle par champ moyen du CE est interrompu permettant ainsi de maintenir le CE dans la zone de confort de l'usager.

4.1.2 Aperçu de l'algorithme de simulation

Le modèle de CE multi-nodal est défini à l'intérieur d'un objet de programmation afin de l'intégrer à la plate-forme de simulation smartDESC développée dans le cadre de ce projet. Ce dernier permettra de simuler l'évolution de l'état énergétique des CE sur le réseau, perçus comme éléments de stockage d'énergie, mais pourra aussi être utilisé comme modèle de référence par l'optimiseur ou le contrôleur central.

Chaque CE simulé est basé sur un fichier de configuration tel que décrit à l'annexe C, définissant un ensemble de paramètres nécessaires au calcul de la température du modèle multi-nodal. Cet ensemble de paramètres est basé sur les caractéristiques du CE de référence utilisé pour le banc de test et présenté à la section 3.2. Chaque CE interagit avec un objet « Générateur », qui génère des événements de tirage en se basant sur un fichier de configuration contenant soit des séquences de tirage pré-déterminées, soit un modèle de tirage par chaînes de Markov (voir section 4.2).

Le cœur de l'algorithme de simulation du CE reprend l'équation (4.3) qui est calculée pour chaque nœud en partant du plus bas au plus haut. Puisqu'il s'agit d'une solution constante par morceau dans le temps, les paramètres α_i (4.4a) et β_i (4.4b) sont recalculés à chaque pas de temps. Suite à ce calcul, une routine de vérification, qui permet de redistribuer la température entre tous les nœuds du CE en suivant les principes de stratification, est appliquée à l'ensemble du système.

Cette étape de vérification a comme effet de venir briser la linéarité du modèle multi-nodal. En effet, une fois cette routine appliquée, il n'est plus possible de retrouver le comportement décrit par (4.3) dans chaque nœud. Concrètement, cette routine vérifie qu'il n'y ait pas d'inversion de température dans le système. Nous savons que l'eau chaude étant moins dense que l'eau froide, celle-ci devrait toujours se retrouver dans le haut du CE. Cependant, la manière dont l'ajout de la chaleur fournie par les éléments chauffants est calculé cause une inversion de température. En effet, en période de chauffage, les nœuds associés aux éléments chauffants emmagasinent toute l'énergie émise par les éléments, ce qui fait monter leur température à de très hautes valeurs. La routine évalue si, à partir d'un nœud supérieur i, il y a un nœud inférieur j avec une température plus élevée. Si oui, la température de tous les nœuds compris entre i et j est moyennée. Cette vérification est faite pour tous les nœuds du modèle.

La combinaison de la résolution de l'équation (4.3) pour chaque nœud et la routine de redis-

tribution de la chaleur permettent de modéliser fidèlement le comportement d'un CE comme cela est montré aux sections 4.3 et 4.4. Les détails de l'algorithme de calcul sont présentés à l'annexe E.

4.2 Processus de tirage et chaîne de Markov

La consommation résidentielle d'eau chaude est un processus stochastique complexe. Il est important de pouvoir modéliser le plus fidèlement possible ce processus afin d'être en mesure d'appliquer un contrôle intelligent sur les CE domestiques sans compromettre le confort de l'usager.

Fairey et Parker (2004) rapportent différents profils de consommation résidentiels d'eau chaude retrouvés dans la littérature dont ceux de Becker et Stogsdill (1990), Bouchelle et al. (2000) et aussi Perlman et Mills (1985). Ce dernier est souvent cité comme un profil de référence de consommation résidentielle d'eau chaude en Amérique du Nord. En analysant ces profils, des chercheurs ont développé différents modèles mathématiques de consommation, notamment Laurent et Malhamé (1994), qui proposent de représenter cette séquence de tirage d'eau par une chaîne de Markov à deux états. C'est ce modèle qui est utilisé ici pour décrire le comportement de consommation en eau chaude des usagers sur le réseau, ainsi que l'impact de cette consommation sur la demande en puissance vue du réseau électrique.

Laurent et Malhamé (1994) décrivent le processus de tirage d'eau comme une chaîne de Markov à temps continu et à espace d'états discret. Tout d'abord, une chaîne de Markov est un processus de Markov et qui possède la propriété de Markov. Cette propriété indique que la distribution conditionnelle de probabilité des états futurs ne dépend plus des états passés, lorsque conditionné sur l'état présent. Autrement dit, toute l'information nécessaire pour prédire le futur est contenue dans l'état présent. Cette propriété rend le calcul de longues séquences efficace car il n'y a pas besoin de mémoriser les anciens états du système. Lorsque le choix de valeurs que peut prendre une variable aléatoire est fini ou dénombrable il s'agit d'un espace d'état discret. Dans le cadre de ce projet, une vision simplifiée des habitudes de consommation d'eau chaude est utilisée en supposant deux états possibles : tirage (état « 1 ») et non-tirage (état « 0 »). Cet espace d'état est présenté à la figure 4.2.

Soit l'espace d'état $E = [0, 1]$ et un paramètre de saut $q(t)$. Alors, la probabilité de saut à un temps $t + h$, où h est un incrément infinitésimal, est décrite par

$$\Pr\Big(q(t+h) = 1 | q(t) = 0\Big) = \alpha_0(t)h \tag{4.7}$$

$$\Pr\Big(q(t+h) = 0 | q(t) = 1\Big) = \alpha_1(t)h \tag{4.8}$$

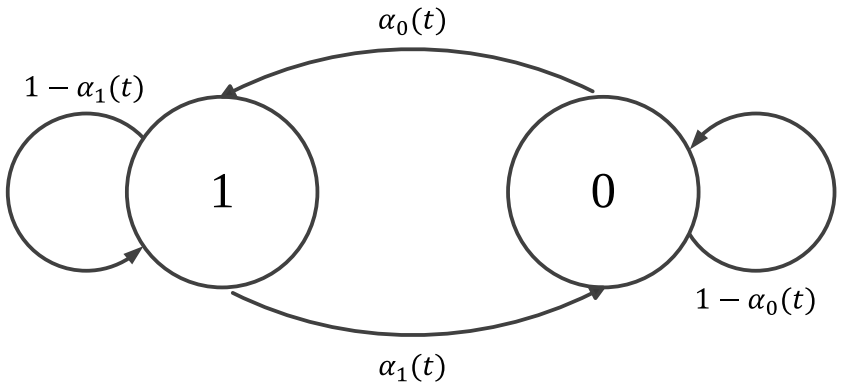


Figure 4.2 Chaîne de Markov à deux états

où $\alpha_i(t) > 0 \ \forall i \in E$. Les paramètres $\alpha_0(t)$ et $\alpha_1(t)$ représente respectivement la probabilité de sauter de l'état 0 (non-tirage) à 1 (tirage) et de l'état 1 à 0. Ceux-ci sont calculés à partir de profil de tirage d'eau chaude et varient en fonction du moment de la journée pour représenter les habitudes de consommation d'un usager. Les valeurs de ces paramètres de transition en fonction du temps sont présentées au tableau D.1 de l'annexe D. Intuitivement, $\alpha_0(t)$ peut être perçu comme la probabilité que l'usager consomme de l'eau chaude en fonction du moment de la journée, tandis que $\alpha_1(t)$ est relié à la durée de l'événement de tirage. Il est possible de définir une matrice de transition $P(t)$ tel que

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1-\alpha_0(t) & \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) & 1-\alpha_1(t) \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Ce processus stochastique de tirage est inséré dans l'équation (4.3) en définissant le terme de débit d'eau $\dot{V}_d$ de la manière suivante :

$$\dot{V}_d = q(t)\bar{\dot{V}}_d \tag{4.10}$$

où $\bar{\dot{V}}_d$ est le débit moyen d'un événement de tirage. Puisque l'équation (4.3) doit être constante par morceau, chaque changement de l'état discret du tirage force une réévaluation des paramètres α_i et β_i pour tous les nœuds du modèle de CE.

Une des limites de ce modèle à deux états est qu'il ne peut y avoir qu'une seule intensité de tirage (débit), puisqu'il n'y a qu'un seul état de tirage. Le débit sera donc le même, que l'usager se lave les mains ou qu'il prenne une douche bien qu'il soit reconnu que ces différentes activités ont une implication directe sur la consommation d'un CE (Lowenstein et Hiller, 1996). Il serait donc intéressant, suite à ce projet, de développer un modèle de chaîne de Markov multi-états et ainsi tenir compte des différents types de tirage (lavage de main,

bain, douche, lave-vaisselle, etc.).

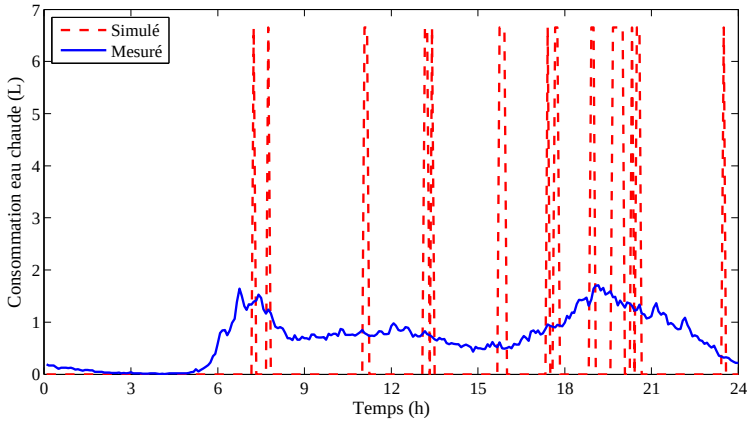
4.2.1 Profil de tirage et chaîne de Markov

Les méthodes d'identification de la matrice de transition de la chaîne de Markov ne font pas partie du cadre de ce projet. Cependant, la connaissance des statistiques de tirage est cruciale pour estimer l'état d'énergie à partir de mesure de température, tel que montré au chapitre 5.

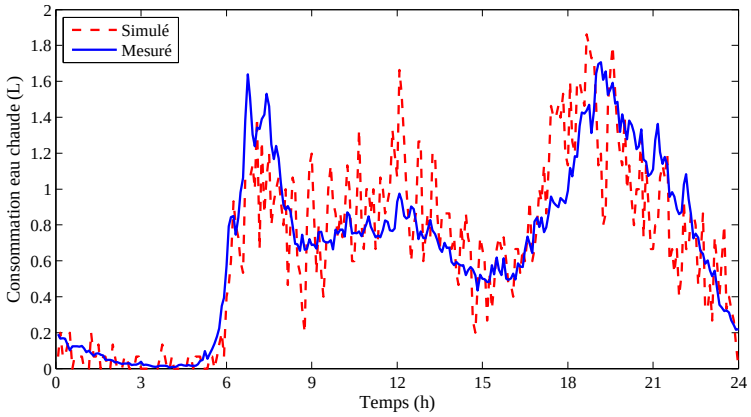
Les paramètres $\alpha_0(t)$ et $\alpha_1(t)$ ont été calculés à partir de données de tirage fournies par Hydro-Québec. Ces données présentent la consommation en eau chaude de 75 clients par intervalle de 5 minutes sur la période allant de novembre 2006 à avril 2007. Toutes ces données ont été analysées afin d'obtenir en sortie deux ensembles de 288 matrices de transition, soit un ensemble pour les jours de semaine et un second pour les jours de fin de semaine. En effet, les études montrent qu'il y a d'importantes disparités entre les habitudes des consommateurs durant la semaine de travail et la fin de semaine (voir Lowenstein et Hiller, 1996). Chaque ensemble contient 288 matrices, soit une matrice par tranche de 5 minutes sur une plage de 24 heures. Pour obtenir une échelle encore plus fine, une interpolation linéaire peut être utilisée.

Plus le nombre de dispositifs augmente et plus les simulations tendent vers le profil attendu présenté par les données d'Hydro-Québec. En effet, l'agrégation de la consommation en eau chaude de plusieurs chauffe-eau en un profil moyen minimise le comportement stochastique du processus pour tendre vers un scénario déterministe, représenté par la courbe bleue à la figure 4.3. Elle est obtenue en moyennant, pour tous les jours de la semaine ou de la fin de semaine, la consommation de chaque client par segment de 5 minutes. La figure 4.3(a) présente, d'une part, la séquence de tirage (chaîne de Markov) pour un usager et d'autre part la consommation moyenne d'une grande population de chauffe-eau. Il n'y a aucun événement avant 6 heures pour ensuite traverser deux période de pointe, une en matinée (entre 6 et 9 heures) avant le départ des usagers pour le travail, et une seconde en début de soirée alors qu'ils reviennent du travail. En moyennant plusieurs de ces séquences aléatoires de tirage, la courbe simulée tend bien vers celle correspondant aux mesures. Les Figures 4.3(b) et 4.3(c) présentent ces profils moyens pour une population respective de 100 et 10 000 CE.

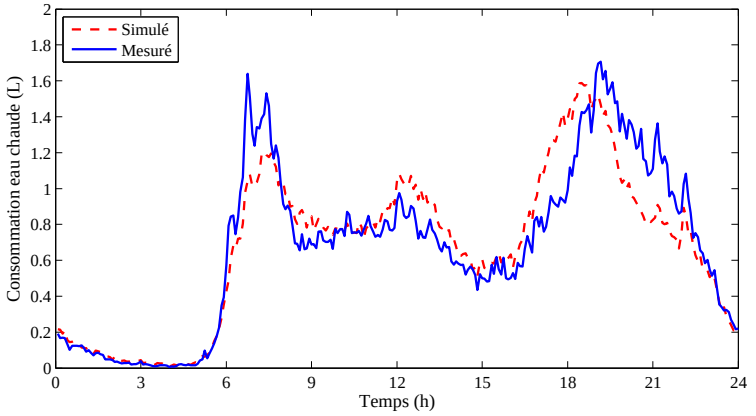
Il est possible de conclure que le modèle stochastique, décrit par chaîne de Markov à deux états, permet de reproduire localement les habitudes de consommation de l'usager et de représenter globalement les dynamiques d'ensemble d'une population de CE.



(a) 1 chauffe-eau



(b) 100 chauffe-eau



(c) 10 000 chauffe-eau

Figure 4.3 Comparaison d'un profil aléatoire de consommation d'eau chaude pour un jour de semaine pour différentes tailles de population de chauffe-eau.

4.3 Validation inter-modèle avec TRNSYS

Il existe déjà dans la littérature plusieurs modèles de référence de la dynamique thermique d'un CE. L'un des logiciels de référence en matière de simulation thermique, TRNSYS, en inclut d'ailleurs plusieurs dans sa librairie. Allard et al. (2011) fait le recensement et analyse la performance de plusieurs de ces modèles de CE. Suite à l'évaluation de la performance de plusieurs modèles de TRNSYS, il conclut que le Type 534 est le meilleur modèle et le plus flexible. Contrairement à des modèles plus simples comme le Type 4, le Type 534 tient compte du transfert de chaleur par conduction entre les nœuds et est donc plus fidèle à la dynamique thermique réelle du CE. Puisque la modélisation présentée à la section 4.1 suit une logique semblable au Type 4, la performance du modèle multi-nodal est d'abord comparé au Type 4 et ensuite au Type 534 de TRNSYS.

La validation inter-modèle est réalisée en simulant sur une période de 24 heures par intervalle de 60 secondes le comportement des modèles multi-nodal, Type 4 et Type 534. Un profil quotidien de consommation d'eau chaude, tiré de mesures réelles réalisées par Hydro-Québec, est utilisé. Ce profil est présenté à la figure 4.4. Il s'agit d'un profil typique de tirage d'eau chaude un jour de semaine et affichant deux pics de consommation : l'un vers 9h le matin, suite au réveil des occupants, et un second vers 18h, au retour du travail. Les mesures sont enregistrées à toutes les 5 minutes et le débit à chaque pas de temps est calculé suivant une interpolation linéaire sur cet ensemble de mesures.

L'évolution de la température moyenne d'un CE telle que prédite par les trois modèles numériques est montré à la figure 4.5. Il y a généralement un bon accord entre les résultats issus du Type 4. Une différence est observée entre les deux modèles autour de la 6e heure. Cette différence est causée principalement par la gestion du contrôle thermostatique lorsque la température observée par le thermostat atteint la limite inférieure ou supérieure. Le modèle multi-nodal applique une vérification booléenne alors que le Type 4 utilise une méthode

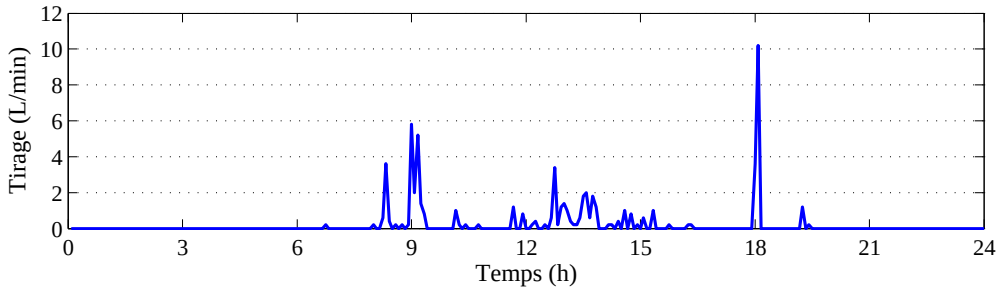


Figure 4.4 Profil quotidien de tirage d'eau chaude

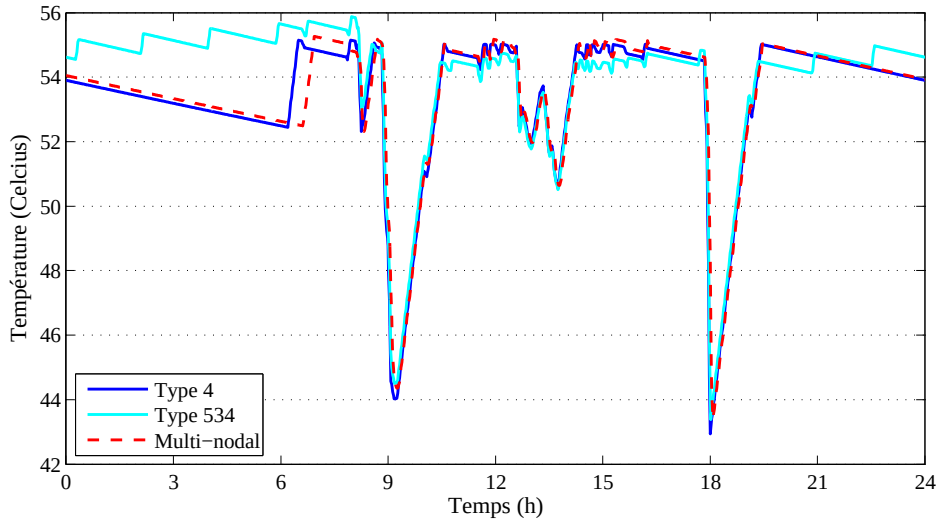


Figure 4.5 Comparaison inter-modèle de la température moyenne

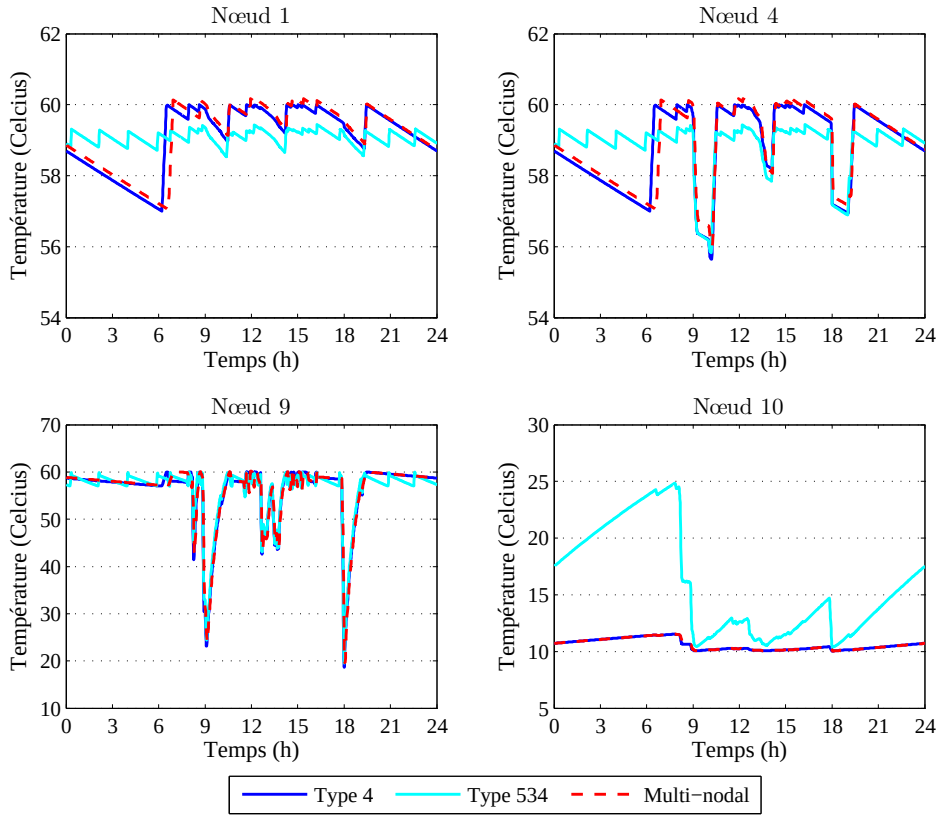


Figure 4.6 Comparaison inter-modèle de la température des nœuds

prédictive à savoir si la température sera atteinte dans le pas de temps.

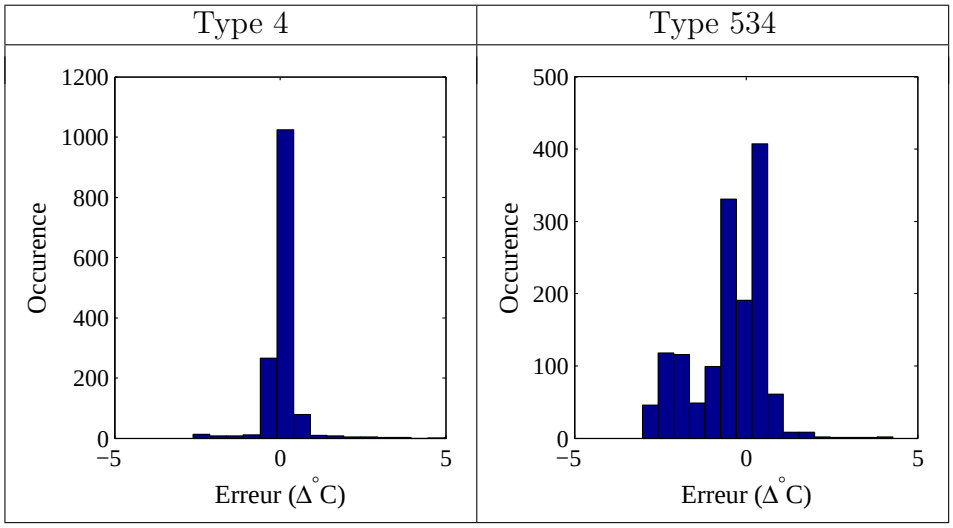
Il existe également un bon accord entre les résultats du modèle multi-nodal et le Type 534, particulièrement lors des événements de tirage. L'amplitude de la baisse en température est semblable tout comme le regain de chaleur par chauffage. Cependant, pendant les périodes d'inactivité les deux modèles se comportent différemment. La figure 4.6 est utilisée pour mieux comprendre ces différences. Cette figure présente les courbes de température pour les nœuds les plus importants :

- le nœud 1 associé à la température de sortie du chauffe-eau ;
- le nœud 4 où se trouve l'élément chauffant supérieur ;
- le nœud 9 où se situe l'élément chauffant inférieur ;
- le nœud 10 où l'eau en provenance de l'aqueduc est injectée dans le réservoir.

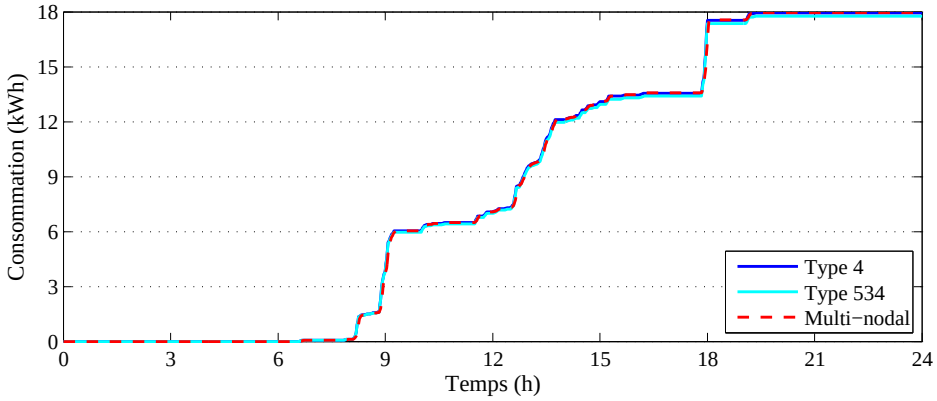
Il existe de relativement grande différences pour le nœud 10. Ainsi pour les modèles multi-nodal et Type 4, la température est égale à celle de l'eau en provenance de l'aqueduc (10 °C), tout au long de la simulation. La variation de la température prédite par le Type 534 est beaucoup plus importante. Ce comportement est dû à la conduction thermique entre les nœuds qui cause un échange de chaleur entre le 9e et 10e nœud, même lorsqu'il y a absence de tirage. Avec une petite bande morte, l'élément chauffant inférieur se retrouve à contre-balancer le refroidissement du 9e nœud en s'activant à plusieurs reprises. C'est pour cela qu'il est possible d'observer une oscillation de la température plutôt qu'une décroissance constante. Cependant, la prévision de la température offre de bons résultats au niveau du 9e nœud pour les trois modèles, malgré la présence de l'oscillation pour le Type 534. Cette oscillation a des effets importants sur la dynamique du 1er et 4e nœud. Comme l'élément chauffant inférieur est souvent sollicité à cause de l'étroite bande morte du thermostat du bas, les nœuds du haut se retrouvent eux aussi chauffés alors qu'il ne devrait pas y avoir de chauffage. Ce comportement oscillatoire tend à disparaitre plus la bande morte du thermostat inférieur augmente.

Le tableau 4.1 résume la performance du modèle en comparant l'erreur de prédiction du modèle multi-nodal par rapport aux Type 4 et Type 534 de TRNSYS. L'axe des abcisses donne l'erreur relative entre la température moyenne du Type 4 ou 534 et du multi-nodal, puis sur l'axe des ordonnées le compte de chaque erreur sur la période de simulation de 24 heures. Dans les deux cas, l'erreur suit une distribution normale plutôt étroite. Il existe un bon accord entre le modèle multi-nodal et le Type 4 avec une erreur absolue moyenne (MAE) de 0.26 °C et une erreur type de la moyenne (RMSE) de 0.53 °C. Pour un CE typique, cela représente une MAE d'environ 0.079 kWh sur le niveau d'énergie. Quant à la comparaison entre le modèle multi-nodal et le Type 534, une erreur légèrement supérieure est observée avec une MAE de 0.87 °C, probablement causée par le phénomène évoqué plus haut au sujet du nœud 10.

Tableau 4.1 Erreur de prédiction de la température moyenne entre Type 4/534 et multi-nodal



MAE	RMSE	MAE	RMSE
0.26	0.53	0.87	1.2



Modèle	Multi-Nodal	Type 4	Type 534
Consommation totale (kWh)	17.97	17.93	17.75

Figure 4.7 Comparaison inter-modèle de l'énergie totale extraite par tirage

En plus de la bonne performance du modèle multi-nodal sur la prédiction du niveau d'énergie du système, ce dernier prédit aussi très bien la consommation d'énergie extraite par tirage d'eau chaude, comme le montre la figure 4.7. Une consommation totale de 17.97 kWh est enregistrée sur 24 heures pour le modèle multi-nodal. Une consommation légèrement inférieure est calculée pour le Type 534, car la température de sortie du CE est plus basse à cause de la conduction thermique inter-nodale.

Suite à cette comparaison inter-modèle, il est possible de conclure que le comportement en température du modèle multi-nodal développé à la section 4.1 donne de bons résultats tant au niveau de la distribution de température que de la consommation d'énergie. Bien que le modèle Type 534 de TRNSYS soit plus précis, le Type 4 de TRNSYS est plus simple et facilite l'implémentation des processus de contrôle et d'estimation locaux du CE nécessaire au contrôle par champ moyen. La principale différence entre le modèle multi-nodal et le Type 534 est le processus de diffusion de la chaleur entre les nœuds du réservoir. Dans le cas du Type 534, un échange constant est observé entre un nœud et ses voisins, ce qui permet d'observer une déstratification de l'eau à l'intérieur du réservoir et donc une représentation plus fidèle de la dynamique thermique du CE.

4.4 Validation expérimentale

La validité du modèle présenté à la section 4.1 est à nouveau vérifiée en comparant cette fois son comportement à des mesures expérimentales. De nombreux essais sont proposés au chapitre 3 afin d'évaluer la performance thermique du modèle multi-nodal par rapport à de vraies mesures. De tous ces essais proposés, cette section examine uniquement une séquence de tirage issue d'une chaîne de Markov. Il s'agit d'un essai complet qui simule plusieurs événements de tirage d'eau. Les résultats des autres essais peuvent être consultés à l'annexe B.

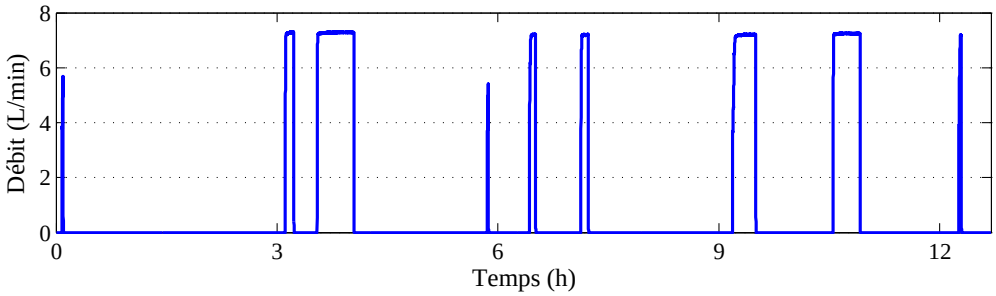


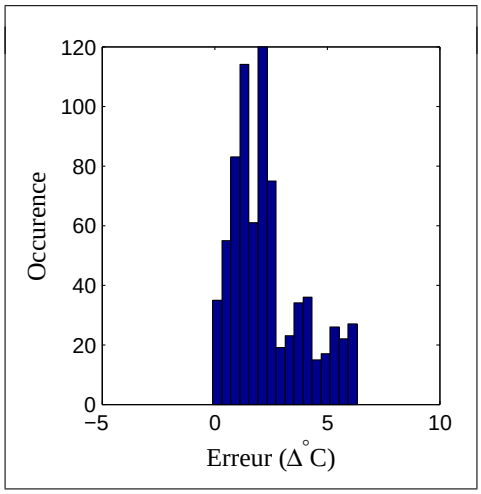
Figure 4.8 Séquence de tirage par chaîne de Markov à deux états

La séquence de tirage appliquée au montage expérimental (décrit au chapitre 3) est présentée à la figure 4.8. Elle s'étend sur une période d'environ 12 heures et possède 9 événements de tirage de même intensité (environ 7.2 l/min), mais de différentes durées (entre 1 et 30 minutes). Certains événements de tirage de courte durée ne sont pas de même intensité que les autres plus longs. Ceci s'explique par le fait que la pompe utilisée pour tirer l'eau n'a pas pu atteindre la puissance désirée sur cette période.

Pour évaluer la performance du modèle, dans un premier temps la température moyenne simulée est comparée à celle mesurée sur le banc de test. Cette dernière est obtenue en prenant la moyenne des 10 capteurs de température insérés à l'intérieur du réservoir (voir figure 3.2). Les résultats de cette comparaison sont présentés à la Figure 4.9.

Il existe un bon accord entre les résultats expérimentaux et simulés. L'écart observé dans la température moyenne lors des événements de tirage à la 9e et 11e heure s'explique en observant le comportement individuel des nœuds présenté à la figure 4.10. Lors des événements de tirage d'eau chaude à la 9e et 11e heure, il est possible d'observer que la température mesurée au 10e nœud augmente considérablement. Cela est dû au mélange entre l'eau du 9e et 10e nœud. Ce mélange est causé par la montée du panache au bas du réservoir, tel que décrit à la section 1.2.1. La montée du panache cause la dé-stratification de la température et résulte en un mélange entre ces deux nœuds. Le nœud du bas se retrouve alors chauffé par l'élément inférieur et la température moyenne du système augmente. Ce comportement n'est pas représenté dans le modèle multi-nodal, car seul un mélange entre l'eau d'un nœud et le nœud sous-jacent à ce dernier est permis. C'est ce qui explique la légère sous-estimation du niveau d'énergie par le modèle multi-nodal.

Tableau 4.2 Erreur de prédiction de la température moyenne entre essai expérimental et multi-nodal



MAE	RMSE
2.36	2.85

La figure 4.10 permet aussi d'observer le phénomène de « décrochage » de la température du 4e nœud, décrit précédemment à la section 1.2.1. Rappelons que ce décrochage est aussi causé par la montée du panache qui vient frapper le 4e nœud. À mesure que sa température augmente, le panache réussit à pénétrer le nœud et force le mélange de l'eau, diminuant ainsi sa température.

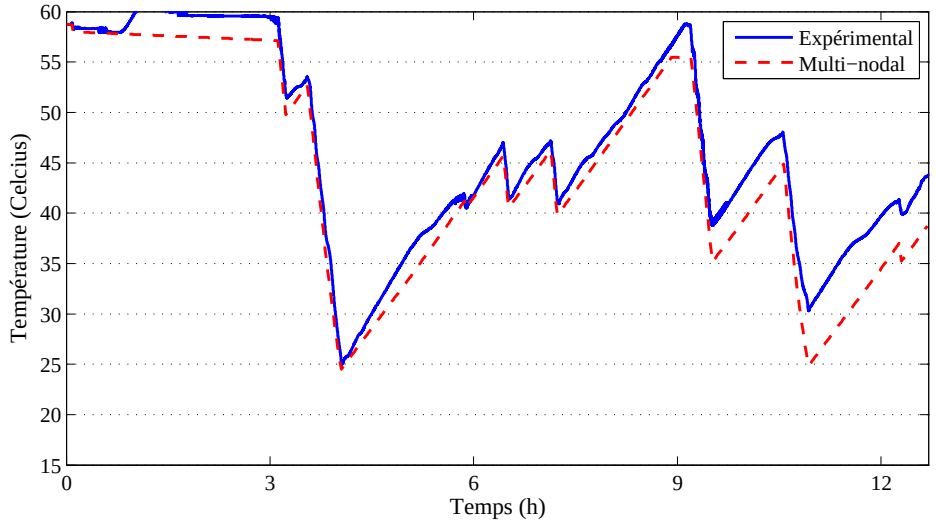


Figure 4.9 Validation expérimentale de la température moyenne avec les prédictions du modèle multi-nodal développé dans ce mémoire

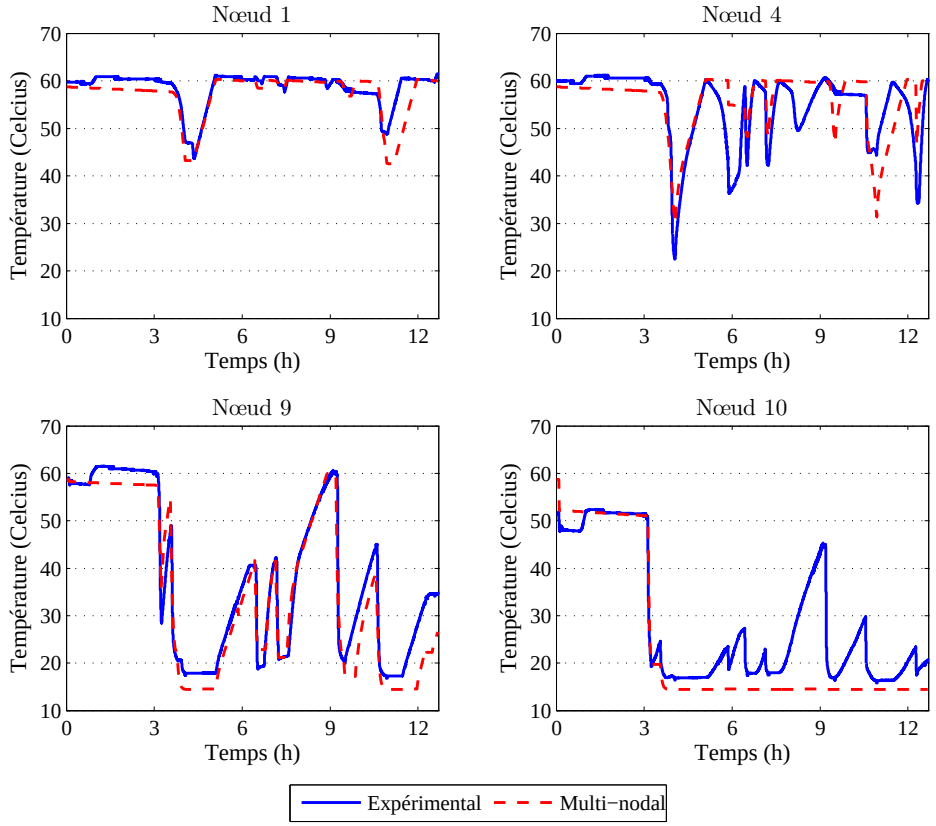


Figure 4.10 Validation expérimentale de la température nodale avec les prédictions du modèle multi-nodal développé dans ce mémoire

L'erreur de prédiction du modèle simulé est évaluée par rapport aux mesures expérimentales en se basant sur un échantillon de 762 données. Un histogramme de l'erreur de prédiction de la température moyenne est présenté au tableau 4.2. L'erreur est décrite par une distribution normale et caractérisée par une MAE et une RMSE égales respectivement à 2.36 °C et 2.85 °C. Cette MAE équivaut à environ 0.7 kWh pour un modèle de chauffe-eau électrique standard. Une synthèse détaillée de la performance du modèle par nœud est présentée dans le tableau 4.3. Les nœuds 4, 5 et 10 sont ceux qui offrent la moins bonne performance.

Finalement, la qualité de la prédiction du modèle multi-nodal sur la consommation d'énergie par tirage d'eau est évaluée en comparant celle-ci aux mesures expérimentales. Ces résultats sont présentés à la figure 4.11. L'écart de 0.8 kWh observé est causé par l'erreur de prédiction de la température de sortie et représente 2.5 % de la consommation d'énergie totale.

Suite à cette validation expérimentale, il est possible de conclure que le modèle multi-nodal développé dans le cadre de ce projet réussit à reproduire fidèlement le comportement thermique d'un CE. La suite de ce chapitre s'intéresse à la sensibilité du modèle multi-nodal à différents paramètres lors d'une simulation.

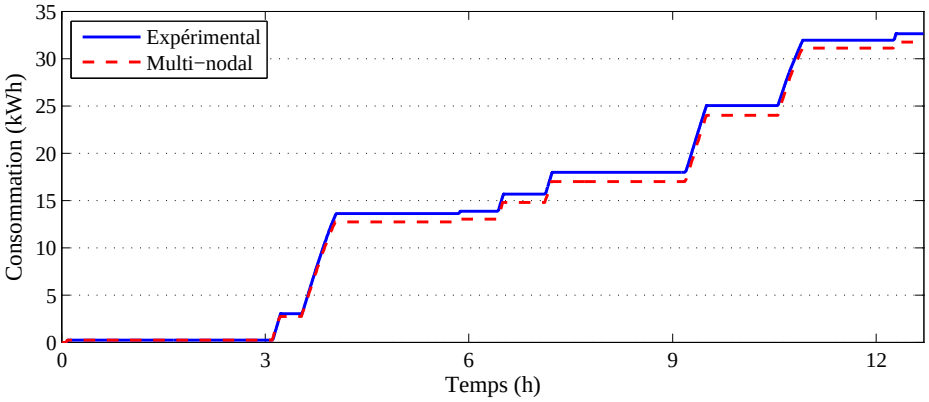
4.5 Effet du pas de temps sur le comportement en température

La durée du pas de temps est un facteur important lors de la simulation du comportement d'un chauffe-eau. Dans l'étude de sensibilité présentée ici, le CE est simulé sur une période de 24 heures avec différents pas de temps tout en gardant le nombre de nœuds constant et égal à 10. Les autres paramètres sont présentés au tableau C.1. Le CE est soumis à une séquence de tirage d'eau chaude tirée des mesures d'Hydro-Québec, présentée précédemment à la Figure 4.4. Les valeurs de tirage de ce profil de consommation ont été adaptées afin d'être conséquent avec le pas de temps de chaque scénario. Ainsi, la consommation en eau chaude horaire est la même pour chaque scénario. La Figure 4.12 présente l'évolution de la température moyenne pour un CE pour des valeurs de pas de temps de 1, 60, 300, 900, 1800 et 3600 secondes.

Les courbes pour les pas de temps de 1, 60 et 300 secondes sont assez proches les unes des autres, mais un écart marqué pour les scénarios à pas de temps élevé (900, 1800 et 3600 secondes) est observé. Ainsi, la température moyenne du CE est grandement surestimée pour les scénarios avec un pas de temps supérieur à 300 secondes. Cette température va même atteindre les 65 °C dans le cas d'un pas de temps de 3600 secondes, une température nettement supérieure à la température de consigne du CE. La longueur du pas de temps affecte aussi l'erreur sur le niveau d'énergie du système. En effet, il est difficile d'appliquer un contrôle

Tableau 4.3 Erreur de prédiction de la température nodal entre essai expérimental et multi-nodal

Nœud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MAE	1.9	2.1	2.4	4.2	5.3	3.1	3.0	3.2	3.7	5.5
RMSE	3.0	3.3	3.6	6.0	7.6	4.2	4.2	4.5	4.9	8.3



Modèle	Multi-Nodal	Expérience
Consommation totale (kWh)	31.8	32.6

Figure 4.11 Validation expérimentale de la prédiction d'énergie extraite obtenue avec le modèle multi-nodal développé dans ce mémoire

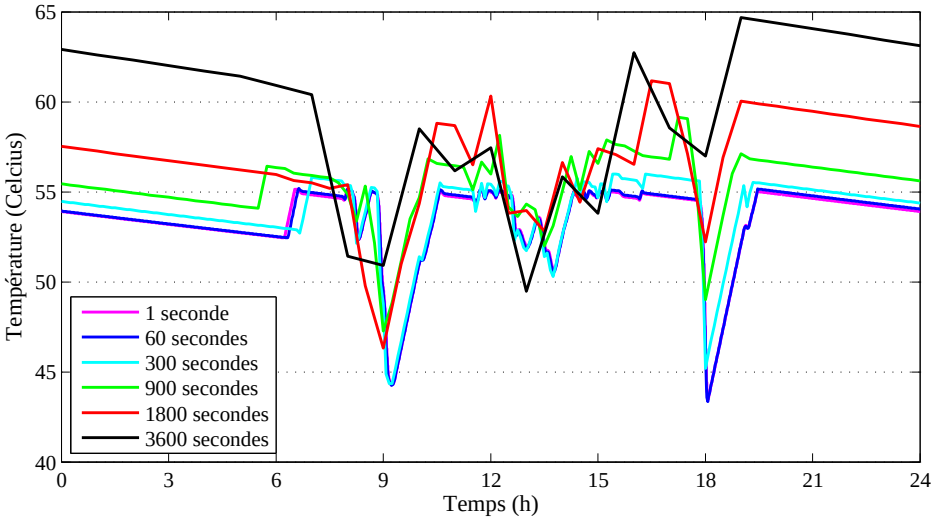
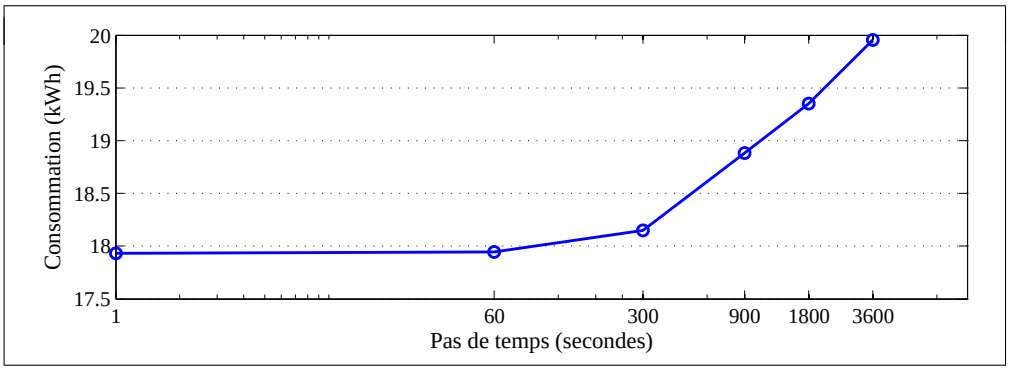


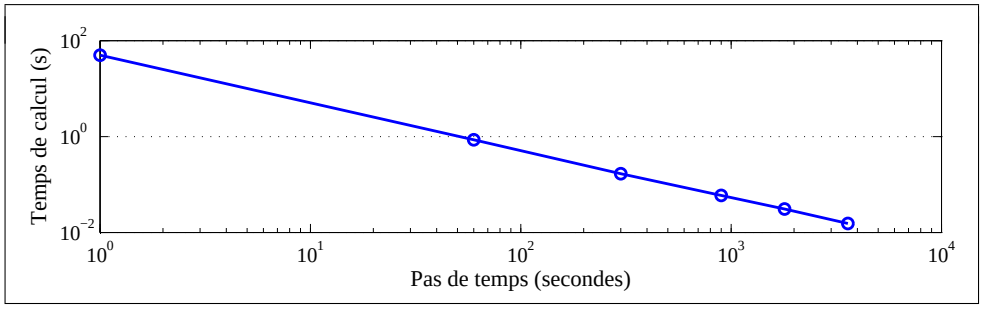
Figure 4.12 Effet du pas de temps sur le calcul de la température moyenne du chauffe-eau

Tableau 4.4 Consommation totale d'énergie pour différents pas de temps



Pas de temps (s)	Consommation totale (kWh)	Erreur relative (%)
1	17.93	-
60	17.94	0.080
300	18.15	1.2
900	18.88	5.3
1800	19.35	7.9
3600	19.95	11

Tableau 4.5 Temps de simulation pour simuler une période de 24 heures avec différents pas de temps



Pas de temps (s)	Temps de calcul (s)	Gain relatif (%)
1	53	-
60	0.89	98
300	0.18	99
900	0.063	99
1800	0.033	99
3600	0.018	99

thermostatique effectif avec un pas de temps élevé, car la variation en température lors d'un pas de temps est importante. La courbe en température tend à osciller davantage autour de la température de consigne pour un scénario à pas de temps élevé.

Un autre indicateur de l'effet du pas de temps de simulation est la consommation totale d'énergie du CE, i.e. l'énergie extraite du CE par le tirage d'eau chaude. Cette consommation sur une période de 24 heures pour chaque scénario est présentée dans le tableau 4.4. Ces résultats démontrent qu'il y a en effet une erreur sur l'extraction d'énergie qui augmente avec la longueur du pas de temps. Cela s'explique par la surestimation de la température moyenne qui est de plus en plus importante plus le pas de temps augmente. Le niveau d'énergie du CE est alors supérieur et une plus grande énergie est soutirée au système pour un même volume d'eau, car la température de sortie est plus grande, voire supérieure à 60 °C. L'erreur (par rapport à un pas de temps de 1 seconde) sur la consommation pour un pas de temps de 60 secondes demeure petite, soit à 0.08 %, et augmente de façon importante pour les scénarios subséquents. Inversement, tel que montré au tableau 4.5, le temps de calcul pour chaque scénario diminue exponentiellement avec le pas de temps.

Puisque l'objectif de ce projet est d'estimer avec précision le niveau d'énergie d'un CE, un pas de temps de 60 secondes sera utilisé dans les simulations car l'erreur sur le niveau d'énergie est faible et le temps de calcul est satisfaisant.

4.5.1 Influence des conditions initiales

Lorsqu'un ensemble très grand de CE est simulé, il est important de savoir après combien de temps les conditions initiales de chacun de ces CE n'auront plus d'effet sur la dynamique du système. Pour ce faire, l'évolution du nœud inférieur d'un CE de 10 nœuds est simulée avec un pas de temps de 60 secondes (voir tableau C.1) sur une période de 3 jours suivant le même profil de tirage journalier. La figure 4.13 présente ces résultats. Il est possible de remarquer qu'il faut environ 12 heures pour que le CE retrouve sa trajectoire normale et élimine l'effet des conditions initiales.

Dans la présente étude, une période de 24 heures est utilisée afin d'éliminer l'effet des conditions initiales avant de lancer une simulation.

4.6 Effet du nombre de nœuds

Tout comme le pas de temps, le choix du nombre de nœuds, qu'on appellera maillage dans ce qui suit, à utiliser pour simuler un CE est important. L'une des premières implication du maillage sur le modèle est que le volume d'eau total soutiré au CE pendant un pas de

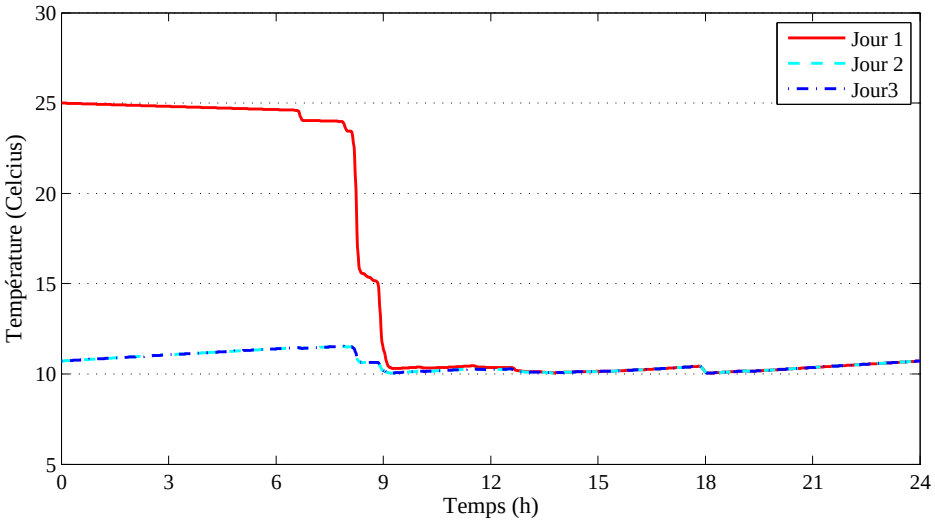


Figure 4.13 Influence des conditions initiales sur la simulation d'un chauffe-eau

temps ne dépasse pas le volume d'un nœud. Si ce n'est pas le cas, la simulation est erronée. Considérant un pas de temps donné de 60 secondes, le volume minimal que doit posséder un nœud pour que le modèle multi-nodal soit valable peut être évalué. Le tirage maximum que nous observons dans le profil de consommation présenté à la Figure 4.4 est de 10.2 l/min. Ainsi, pour un CE de 260 litres, le nombre de nœuds maximal est le suivant

$$\frac{260\ \mathrm{l}}{60\ \mathrm{s}} \times \frac{60\ \mathrm{s}}{10.2\ \mathrm{l}} \approx 25 \tag{4.11}$$

Or, Bouthillier et Bernier (1995) précisent qu'un espacement de 1 mm entre les nœuds est nécessaire pour obtenir des résultats indépendants du maillage, soit environ 1000 nœuds. Le pas de temps choisi de 60 secondes ne permet pas d'analyser l'indépendance du maillage. Pour cette raison, un pas de temps réduit à 1 seconde sera utilisé afin d'obtenir un nombre maximal de nœuds permis égal à environ $25 \times 60 = 1500$. L'impact du maillage est évalué pour l'ensemble de scénarios suivants : 1, 2, 3, 5, 10, 20, 30, 50 et 100 nœuds. Les caractéristiques de chaque scénario sont présentés au tableau 4.6, les autres paramètres étant identiques au modèle de référence (voir tableau C.1), à l'exception du pas de temps. Il est à noter que les éléments chauffants du haut et du bas sont généralement installés à des hauteurs respectives de 90 et 15 cm du bas du CE.

Les résultats comparatifs d'une simulation sur une journée sont présentés à la figure 4.14. Il est possible de remarquer une séparation entre deux ensembles de scénario, soit 1-2-3-5 et 10-20-30-50-100 nœuds. Cela s'explique par le fait que le premier ensemble de scénario contient des modèles qui ne possèdent pas de nœud froid, soit un ou des nœuds inférieurs à

Tableau 4.6 Description des scénarios avec différents maillages

Nombre de nœud	1	2	3	5	10	20	30	50	100
Hauteur/nœud (m)	1.35	0.675	0.45	0.27	0.135	0.0675	0.045	0.027	0.0135
Nœud élément sup.	1	1	1	2	4	7	10	17	33
Nœud élément inf.	-	2	3	5	9	18	27	45	90

l'élément chauffant inférieur. Cela force une surestimation dans le calcul de la température moyenne du CE. Quant au second ensemble de scénarios, il existe peu de différences dans les prédictions de la température moyenne du CE. Ainsi, plus le nombre de nœuds du modèle augmente, plus la mesure de l'énergie extraite par tirage est précise.

L'impact du maillage sur la consommation énergétique du CE est présenté au tableau 4.7. La consommation énergétique augmente jusqu'à atteindre un plateau aux environs de 18.0 MWh. Un maillage de 10 nœuds permet d'être à 0.21 % du maximum observé pour 100 nœuds, ce qui est plutôt négligeable. Les scénarios 2-3-5 présentent aussi de bons résultats, mais leur comportement est biaisé par l'absence de nœud froid dans ces modèles et ne sont donc pas fidèles à la réalité.

Le Tableau 4.8 présente les temps de calcul pour chacun des scénarios au Tableau 4.6. Il y a une tendance linéaire dans le gain en temps de calcul en fonction du nombre de nœuds.

Avec un gain enregistré en temps de calcul de 82 %, une erreur de 0.21 % sur la consommation énergétique et une bonne cohérence dans son comportement en température, nous choisissons

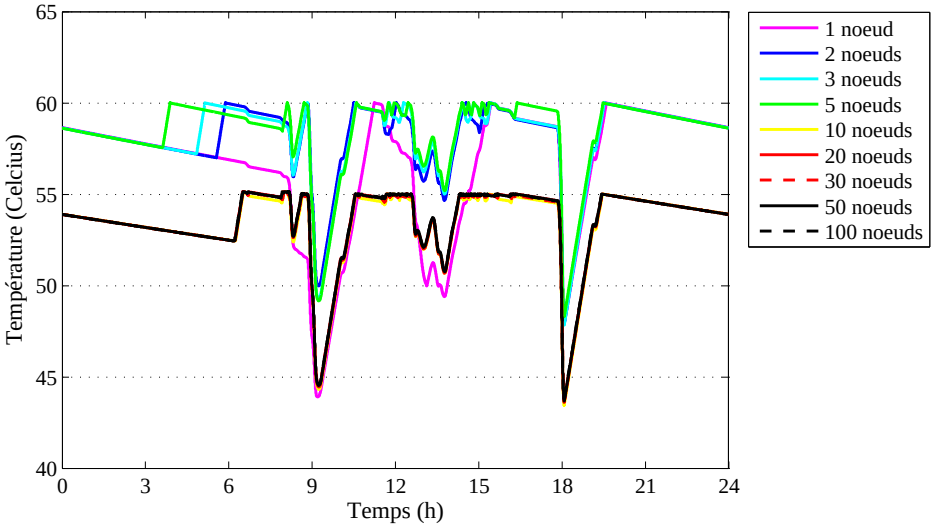
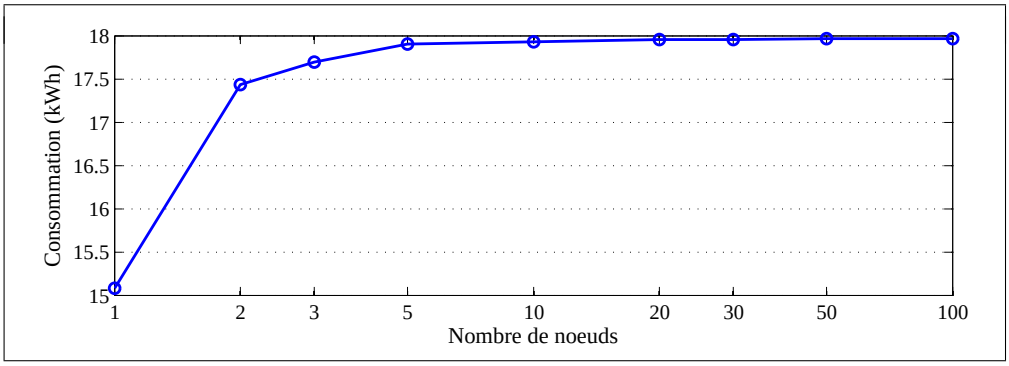


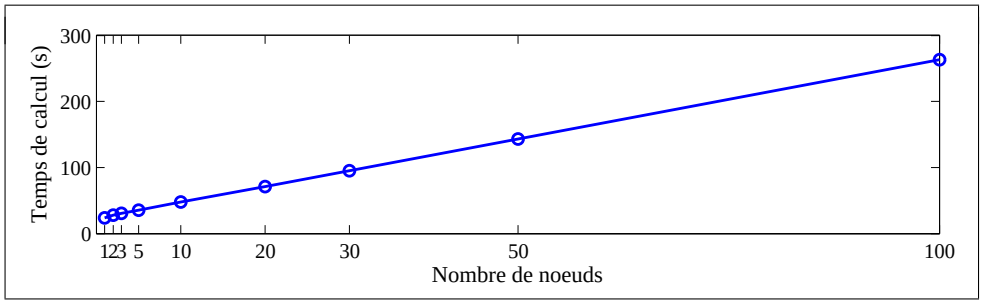
Figure 4.14 Effet du maillage sur le calcul de la température moyenne du chauffe-eau

Tableau 4.7 Consommation totale d'énergie pour différents maillages



Nombre de nœuds	Consommation totale (kWh)	Erreur relative (%)
1	15.08	-16
2	17.44	-3.0
3	17.70	-1.5
5	17.90	-0.35
10	17.93	-0.21
20	17.96	-0.059
30	17.96	-0.057
50	17.96	-0.020
100	17.97	-

Tableau 4.8 Temps de calcul pour différents maillages



Nombre de nœuds	Temps de calcul (s)	Gain relatif (%)
1	23.9	-91
2	27.9	-89
3	30.8	-88
5	35.6	-86
10	47.4	-82
20	71.3	-73
30	95.2	-64
50	143.2	-46
100	263.3	-

un modèle à 10 nœuds pour nos simulations.

4.7 Bilan énergétique

Comme il fut mentionné à la section 4.1, le modèle multi-nodal d'un chauffe-eau repose sur l'équation de conservation d'énergie appliquée à chaque nœud, telle que décrite par 4.12. En principe, le bilan énergétique d'un chauffe-eau multi-nodal simulé sur une certaine période devrait être nul.

$$Q_e - Q_{ext} - Q_d - Q_{CE} = 0 \tag{4.12}$$

Le tableau 4.9 présente les résultats de ce bilan d'énergie pour un chauffe-eau à 10 nœuds suivant les paramètres du tableau C.1, simulé avec un pas de temps de 60 secondes sur une période de 24 heures.

L'erreur sur le bilan énergétique est égale à 0.032 kWh, soit 0.18 % de l'énergie extraite. Cette erreur est causée par la discrétisation du calcul en pas de temps. L'énergie extraite est alors basée sur la température moyenne du système dans le pas de temps. Or, puisque l'évolution de la température ne suit pas un comportement linéaire, une erreur d'approximation cause ce léger déséquilibre. Cependant, puisque cette valeur est négligeable par rapport à l'énergie extraite par tirage ($\approx$ 0.18 %), nous considérons que le bilan énergétique est respecté et que le modèle est valide.

4.8 Résumé

Dans un premier temps, ce chapitre a fait la lumière sur les processus impliqués dans la dynamique thermique d'un chauffe-eau. Notamment, la présence d'éléments chauffants crée une stratification de la température de l'eau, segmentant ainsi le réservoir en trois volumes distincts, une zone chaude au haut du réservoir, une thermocline et une zone de mélange ou zone froide au bas. De plus, l'activation des éléments chauffants entraîne la montée d'un panache qui vient homogénéiser la température entre l'élément chauffant et un point au sommet du réservoir. Ce chapitre aura aussi été l'occasion de présenter l'ensemble des éléments formant un CE et de comprendre les détails d'ordre pratique du contrôle thermostatique qui régule le niveau d'énergie du CE. Par la suite, une brève attention a été portée à la modélisation du processus stochastique de tirage d'eau chaude. En se basant sur les travaux de Laurent et Malhamé (1994), une approche par chaîne de Markov à deux états a été implémentée pour générer des séquences de tirage d'eau en lien avec les habitudes de consommation des usagers

Tableau 4.9 Bilan d'énergie du système sur une période de 24 heures

Source d'énergie	Valeur (kWh)
Énergie des éléments chauffants (Q_e)	19.62
Pertes d'énergie en attente (Q_{ext})	1.73
Énergie extraite par tirage (Q_d)	17.97
Énergie accumulée (Q_{CE})	-0.035
Bilan final	**0.032**

du Québec.

En se basant sur ces connaissances, un modèle mathématique multi-nodal permettant la prédiction de la température à l'intérieur du CE a été développée. Ce modèle repose sur la sub-division du volume total du CE en plusieurs sous-volumes, aussi appelés nœuds. L'équation de conservation de l'énergie est résolue pour chacun de ces nœuds et une redistribution de la chaleur est appliquée lorsqu'il y a inversion de température. Cette redistribution permet de modéliser fidèlement la stratification observée dans un CE, mais ajoute de la non-linéarité au modèle. L'approche multi-nodale a été par la suite validée par une comparaison inter-modèle dans un premier temps. Sa performance par rapport aux modèles de référence choisis, le Type 4 et le Type 534 du logiciel Transient System Simulation (TRNSYS), s'est révélée très satisfaisante, enregistrant une erreur moyenne sur la température de 0.26 °C et 0.87 °C respectivement. Une seconde étape de validation a été réalisée en comparant la prédiction thermique du modèle multi-nodal à des mesures expérimentales. Malgré les simplifications imposées au modèle, ce dernier réussit très bien à prédire l'évolution de la température moyenne du CE et la consommation d'énergie par tirage observées sur un période de 24 heures.

Une analyse détaillée de l'impact du pas de temps et du maillage sur les résultats de simulation a été présentée. En comparant un ensemble de différents scénarios, il ressort qu'un modèle de CE multi-nodal comprenant 10 nœuds et un pas de temps de 60 secondes est le meilleur compromis entre précision et temps de calcul. Finalement, une évaluation du bilan d'énergie sur une période de simulation de 24 heures montre que le modèle permet de vérifier le bilan à 0.18 % près.

Tous les résultats de cette analyse confirment la validité du modèle et le positionne comme un bon choix sur lequel baser les routines d'estimation du tirage et de reconstruction de l'état du CE qui sont développées au chapitre 5.

CHAPITRE 5 ESTIMATION DE L'ÉTAT ÉNERGÉTIQUE D'UN CHAUFFE-EAU

5.1 Introduction au contrôle de la charge par champ moyen

Dans le contexte de ce mémoire, le contrôle par champ moyen est une théorie linéaire quadratique qui applique une commande locale pour atteindre un objectif global (Kizilkale et Malhame, 2014). Cette loi de commande sur l'état est générée de façon locale, tenant compte ainsi des contraintes locales du système. Chaque entité locale contribue au maximum de sa capacité, mais cette contribution varie d'une entité à l'autre, car les contraintes locales ne sont pas les mêmes. Ainsi, dans le cadre d'une stratégie de gestion de la charge et si un effort de refroidissement est exigé par l'opérateur du réseau, un chauffe-eau dont le niveau d'énergie est élevé (température moyenne haute) contribuera plus à l'atteinte de l'objectif qu'un chauffe-eau avec un faible niveau d'énergie (température proche de la limite inférieure de la zone de confort). Ce processus s'apparente à un système d'imposition où les plus riches sont plus taxés (contribuent plus à l'objectif global) que les pauvres compte tenu de leurs ressources respectives.

Pour générer cette loi de commande optimale, le contrôleur a besoin de connaître le vecteur d'état du chauffe-eau, soit :

1. L'état discret, en l'occurrence l'état de la demande en eau chaude
2. L'état continu, en l'occurrence la température de chaque nœud du modèle stratifié

L'idée est de tenter d'obtenir ces deux informations avec un minimum de points de mesure pour, d'un côté, limiter la gestion d'une grosse banque de données et de l'autre, faciliter l'implémentation d'un tel système de contrôle sur les chauffe-eau déjà présents sur le marché. Ces contraintes fonctionnelles rendent moins intéressante l'idée d'asservir complètement le système en y installant un ensemble de thermistors sur la paroi du réservoir, en plus d'un compteur d'eau à la sortie du chauffe-eau. Plutôt que d'implémenter cette approche coûteuse, nous proposons une solution estimant la séquence de tirage et l'état complet du système avec un minimum de mesures. Ce processus d'estimation est réalisé en deux étapes clés :

1. Estimer la séquence de tirage sur une période grâce à un test de vraisemblance en n'observant que la température moyenne du CE
2. Reconstruire l'état complet de la température du système en observant la température de certains nœuds

La séquence complète de ces étapes du processus d'estimation est présentée à la Figure 5.1.

Ce processus est réalisé dans une fenêtre de temps que nous appelons le pas de temps d'estimation. Ce pas de temps est différent du pas de temps de simulation au sens où il représente l'intervalle de temps entre deux mesures en température du CE, alors que le pas de temps de simulation est associé au calcul de la température dans le modèle de CE. Par exemple, il est possible de réaliser une estimation sur une période de 5 minutes (pas de temps d'estimation) avec un modèle de CE possédant un pas de temps de simulation de 1 minute. Ainsi, à partir de ces ensembles de mesures en température, qui sont définis plus tard dans ce chapitre, nous tentons d'estimer dans un premier temps l'état discret du système, soit l'état de tirage de l'eau chaude par l'utilisateur, puis dans un second temps, ayant la connaissance de l'état discret, nous tentons de reconstruire l'état complet du CE. Tel que mentionné précédemment, cette approche a pour objectif de minimiser le volume de données à gérer localement par le contrôleur et de permettre l'utilisation d'un modèle d'estimation simplifié.

La section 5.2 présente les détails du modèle d'état proposé pour le chauffe-eau. La section 5.3 présente le processus d'estimation de la séquence de tirage d'eau chaude. La section 5.4 présente le développement de deux outils permettant la reconstruction de l'état continu, l'observateur multivarié et le filtre de Kalman, et la section 5.6 conclut avec un résumé des résultats importants de cette approche.

5.2 Représentation d'état d'un chauffe-eau électrique

Tel que présenté au chapitre 4, la représentation d'état (RE) d'un chauffe-eau électrique se base sur la dynamique thermique de l'eau à l'intérieur du réservoir. En découpant le volume d'eau du réservoir en plusieurs plus petits volumes isothermes (appelés nœuds), la loi de conservation de l'énergie est appliquée pour déduire l'évolution de la température de chaque nœud et, implicitement, de la température moyenne du système. La température de l'eau dans chaque nœud est calculée à l'aide de (4.2), une équation que nous rappelons en (5.1).

$$\begin{aligned}\rho V_i C_p \frac{dT_i(t)}{dt} = &\sum_{j=1}^{2} \delta_{iE_j} f_j(t) m_j(t) P_j - \rho \dot{V}_d C_p (T_i(t) - (1-\delta_{iN}) T_{i+1}(t) - \delta_{iN} T_f) \\ &- UA_i (T_i(t) - T_{env}) \end{aligned} \tag{5.1}$$

L'équation (5.1) est modifiée dans un premier temps pour intégrer un terme de chauffage dans chacun des strates $i \in [1, N]$. En effet, car dans le modèle décrit à la section 4.1, une routine de vérification est appliquée après chaque itération pour redistribuer la chaleur dans le CE. Dans le contexte d'une RE pour une loi de commande linéaire, cela n'est pas possible car une non-linéarité est alors induite dans le modèle. Si la routine de redistribution de la chaleur ne

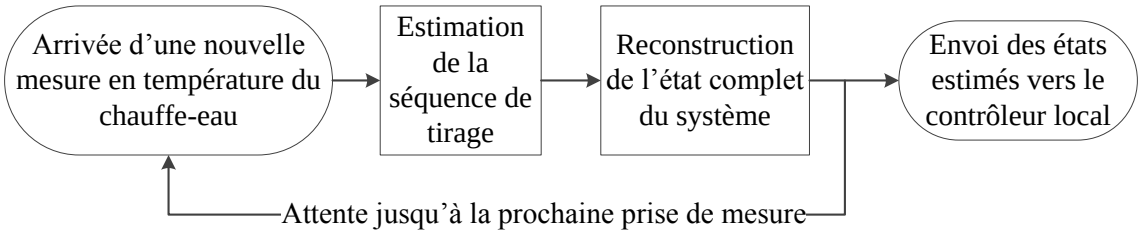


Figure 5.1 Schéma fonctionnel global de la séquence d'estimation de l'état discret et continu d'un chauffe-eau

peut être appliquée, cela implique que la chaleur n'est diffusée dans le réservoir que lorsque le système est dans un état de demande d'eau chaude (terme $A_{i,i+1}$ non nul). Cette limitation est levée en segmentant chaque élément en plusieurs éléments intermédiaires. Pour intégrer cette nouvelle façon de concevoir le chauffage, la puissance dégagée par l'élément chauffant inférieur ou supérieur est redistribuée dans chaque strate chauffée proportionnellement à son volume. La somme de ces éléments intermédiaires égale donc la puissance nominale des éléments chauffants réels. De plus, chaque élément intermédiaire demeure assujetti au contrôle des thermostats associés à chaque élément chauffant principal.

Par exemple, considérant un modèle à 10 nœuds de même volume avec des éléments situés dans les strates 4 et 9, les nœuds 1 à 4 reçoivent chacun un quart de la puissance de l'élément du haut et les nœuds 5 à 9 respectivement un cinquième de la puissance du nœud du bas. Le nœud 10 reçoit une puissance nulle car il n'est chauffé par aucun élément.

Cette hypothèse permet de simuler la diffusion de la chaleur à l'intérieur du réservoir sans briser la linéarité du modèle. Il n'est donc plus nécessaire d'appliquer une routine de vérification telle que présentée à la section 4.1.2. L'équation (5.1) s'exprime alors tel que :

$$\begin{aligned}\rho V_i C_p \frac{dT_i(t)}{dt} = &\sum_{j=1}^{2} f_j(t) m_j(t) P(i,j) - \rho \dot{V}_d C_p (T_i(t) - (1-\delta_{iN}) T_{i+1}(t) - \delta_{iN} T_f) \\ &- U A_i (T_i(t) - T_{env})\end{aligned} \tag{5.2}$$

où

$$P(i,j) = \begin{cases} \frac{V(i)P_j}{V} & \text{si } E_{j-1} < i \leq E_j \\ 0 & autrement \end{cases} \tag{5.3}$$

Par la suite, l'équation (5.2) est transformée sous forme matricielle afin d'inclure l'ensemble des équations du système. En accord avec les conventions et à des fins de clarté, le vecteur de

température du chauffe-eau $T(t)$ est représenté par le vecteur d'état $X(t)$ dans la suite des explications. Pour compléter la RE du CE, un vecteur de mesures noté $Y(t)$ est ajouté. Pour un CE subdivisé en N nœuds, le système multivarié de dimension N présenté par l'équation (5.4) est obtenu :

$$\begin{cases} \dot{X} = \mathbf{A}X(t) + \mathbf{B}U(t) + \Gamma \\ Y = \mathbf{C}X(t) \end{cases}, \tag{5.4}$$

où

– **A** est une matrice triangulaire supérieure $N \times N$ représentant les pertes thermiques par mélange avec le nœud inférieur, telle que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{N-1,N-1} & A_{N-1,N} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{N,N} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

où

$$A_{i,i} = -\frac{\rho \dot{V}_L(t) C_p + UA_i}{\rho V_i C_p} \quad \text{et} \quad A_{i,i+1} = \frac{\dot{V}_L(t)}{V_i} \quad \text{pour} \quad i \in [1, N] \tag{5.6}$$

– **B** est une matrice diagonale $N \times N$ représentant le chauffage produit par les éléments chauffants, telle que

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_N \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

avec

$$B_i = \sum_{j=1}^{2} \begin{cases} \frac{f_j(t) m_j(t) V(i) P_j}{V} & \text{si } E_{j-1} < i \leq E_j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{5.8}$$

pour $i \in [1, N]$ où E_j est le nœud associé à l'élément chauffant $j \in [1, 2]$.

– **C** est une matrice diagonale $N \times N$ représentant les nœuds mesurés en sortie du système, telle que

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & C_N \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

où pour un nœud $i \in [1, N]$

$$C_i = \begin{cases} 0 & \text{si la température de } i \text{ n'est pas mesurée} \\ 1 & \text{si la température de } i \text{ est mesurée} \end{cases} \tag{5.10}$$

– Γ est un vecteur $N \times 1$ représentant les pertes thermiques avec l'environnement et par mélange avec l'entrée de l'eau à température T_{in} en provenance de l'aqueduc, tel que

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_{N-1} \\ \Gamma_N \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

où

$$\Gamma_i = \begin{cases} \frac{UA_i}{\rho V_i C_p} T_{env} & i \neq N \\ \frac{UA_i}{\rho V_i C_p} T_{env} + \frac{\dot{V}_L(t)}{V_i} T_{in} & i = N \end{cases} \tag{5.12}$$

– $X(t)$ est un vecteur $N \times 1$ représentant la température à chacun des nœuds de mesure
– $Y(t)$ est un vecteur $N \times 1$ représentant les données de sortie du système

Dans un contexte de commande, la forme $\dot{X} = \mathbf{A}X + \mathbf{B}U$ doit être strictement retrouvée pour la RE. Pour répondre à ce critère, il est possible de combiner les termes $\mathbf{B}$ et Γ de (5.4) tel que

$$\mathbf{B}U(t) + \Gamma = (\mathbf{B} + \Gamma)U'(t) = \mathbf{B}'U'(t) \tag{5.13}$$

où

$$U'_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ n'est pas associé à un élément chauffant} \\ 1 & \text{si } i \text{ est associé à un élément chauffant actif} \\ \frac{\Gamma_i}{B_i + \Gamma_i} & \text{si } i \text{ est associé à un élément chauffant inactif} \end{cases} \tag{5.14}$$

pour $i \in [1, N]$. Ce changement de variable implique que la commande régit maintenant aussi les pertes en attente. La commande appliquée à chaque nœud associé à un élément chauffant est modulée afin de tenir compte de l'état d'activité de cet élément. Nous obtenons ainsi la nouvelle RE

$$\begin{cases} \dot{X} = \mathbf{A}X(t) + \mathbf{B}'U'(t) \\ Y = \mathbf{C}X(t) \end{cases} \tag{5.15}$$

Le système (5.15) est résolu numériquement par une méthode aux différences finies (Crank-Nicolson) selon le pas de temps de simulation choisi. La Figure 5.2 présente le schéma fonctionnel de la RE décrite par (5.15).

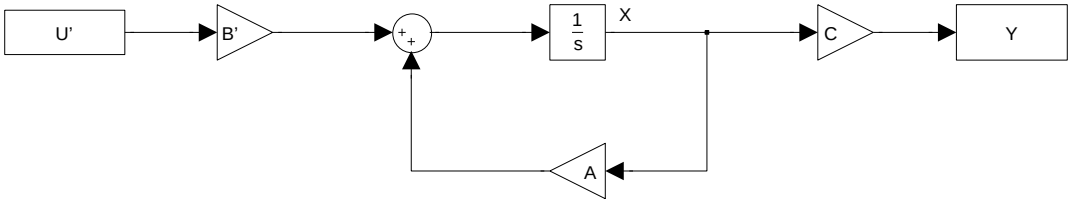


Figure 5.2 Schéma fonctionnel de la représentation d'état d'un chauffe-eau

Rappelons que le système présenté en (5.15) est un système linéaire stationnaire par morceau. Stationnaire, car tous les termes à l'exception de la température sont considérés comme invariants sur une période de temps T définie. Lorsqu'il y a un changement dans l'état du système, par exemple l'arrivée d'une nouvelle demande de tirage, les différents paramètres du système doivent être mis à jour. La linéarité, quant à elle, doit être respectée pour simplifier la reconstruction de l'état. C'est afin de conserver cette linéarité et d'éviter l'accumulation de chaleur dans les strates associées aux éléments que l'hypothèse sur le distribution de la puissance des éléments dans les nœuds est posée. Il s'agit de l'une des hypothèses critiques de ce modèle de CE simplifié. La section 5.2.1 présente une revue détaillée de la capacité de cette représentation d'état à prédire la température et discute des impacts de ce modèle simplifié sur la solution proposée dans le cadre de ce projet.

Cette modélisation simplifiée d'un chauffe-eau électrique est uniquement utilisée pour la commande et l'estimation d'état du système.

5.2.1 Performance de la prédiction par représentation d'état

La Figure 5.3 présente la prédiction de la température moyenne par représentation d'état pour un modèle de CE référence à 10 nœuds (voir tableau C.1). Les données de tirage du test référence aléatoire à débit moyen sont utilisées pour générer ces courbes. Il est important de noter que la séquence de contrôle est la même pour les deux modèles et directement issue de la simulation du modèle multi-nodal. Cela est réalisé dans l'objectif de reproduire fidèlement les conditions d'estimation dans lesquelles la RE sera utilisée. En effet, la séquence de contrôle des éléments chauffants, c'est-à-dire l'état de fonctionnement de chaque élément dans le temps, est connue ou supposée connue lors de l'estimation de l'état discret et continu du CE.

Une bonne correspondance est observée entre la prédiction de la température moyenne par le modèle numérique multi-nodal et la RE tout au long de la simulation. Un léger décalage s'installe à la 4e heure. Ce décalage est causé par le fait que la répartition de l'énergie dans le

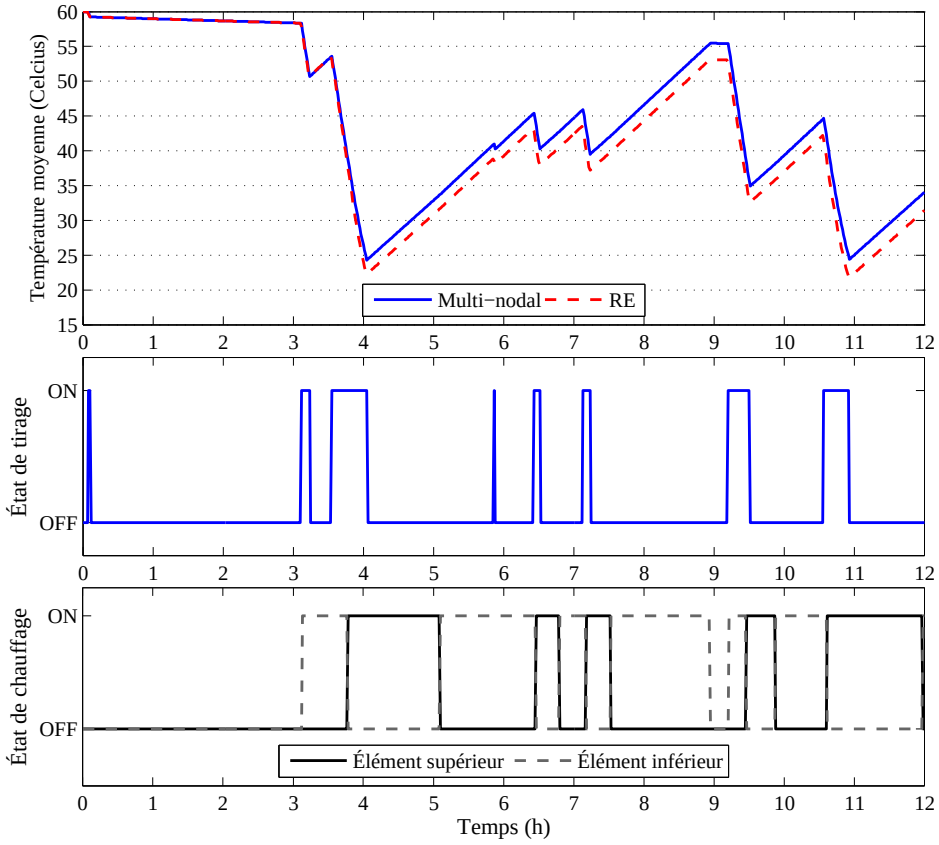


Figure 5.3 Prédiction de la température moyenne par représentation d'état

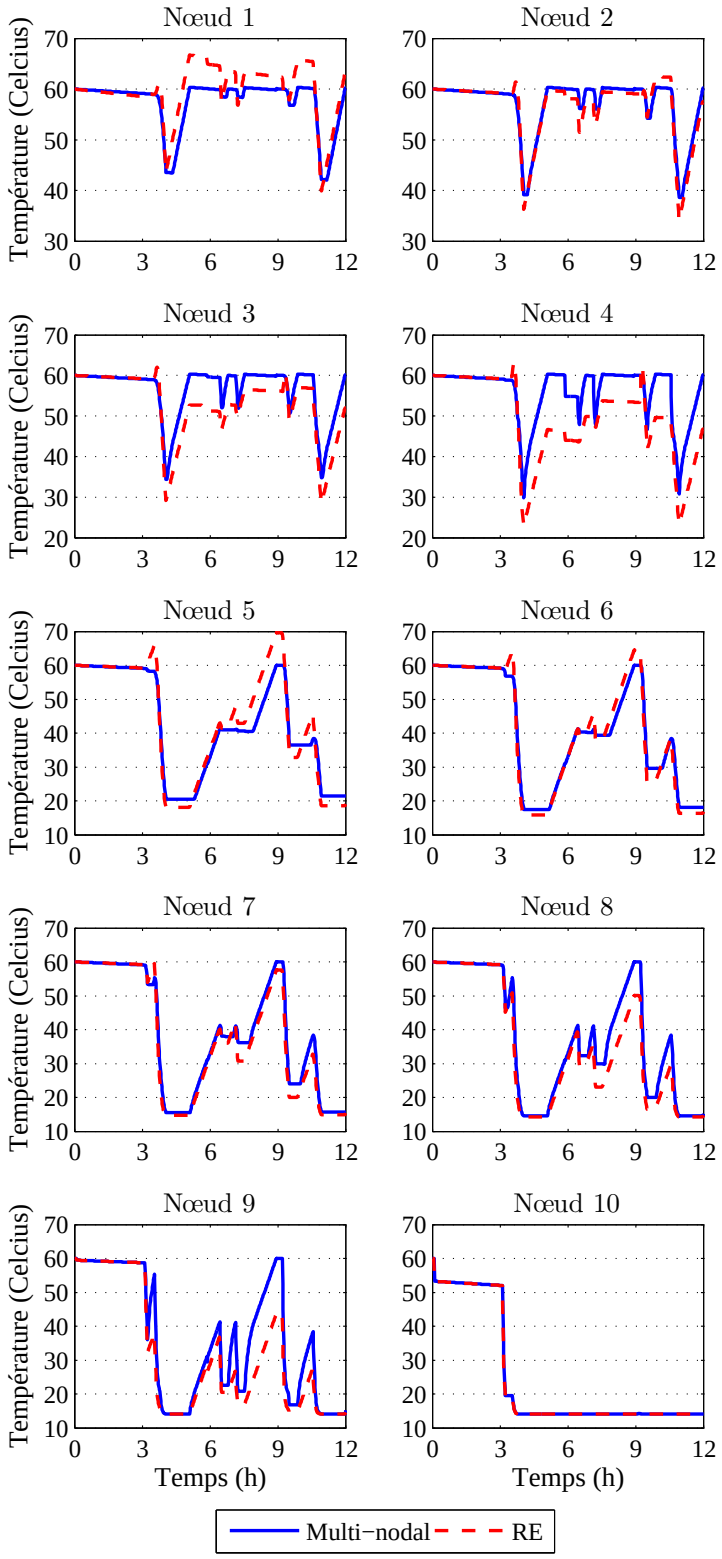


Figure 5.4 Prédiction de la température nodale par représentation d'état

système n'est pas parfaite. En effet, la figure 5.4 démontre que certaines strates accumulent trop d'énergie et dépassent la température de consigne de 60 °C alors que d'autres devraient être plus chaude. Ce phénomène est causé par le fait que tous les éléments intermédiaires d'un même élément chauffant principal répondent au même contrôle. C'est donc la température des nœuds associés aux éléments principaux qui influe sur la commande et qui cause ce débalancement. Cela est l'une des limites importantes du modèle simplifié de chauffe-eau utilisé.

Cette limitation de la RE n'est cependant pas présente pour un modèle à un nœud, car toute l'énergie extraite et injectée est contenue dans un seul volume. Ainsi, la RE peut être utilisée sans problème pour l'estimation de l'état discret (séquence de tirage) du système, présentée à la section 5.3. Une RE à plusieurs nœuds est cependant nécessaire pour la reconstruction complète de l'état du CE. Cette limite de la RE est alors mitigée en intégrant une rétroaction d'état grâce à des mesures du système, telle que présentée à la section 5.4.

5.3 Reconstruction de l'état discret du chauffe-eau par test de vraisemblance

L'estimation de l'état discret du CE, ou autrement dit l'estimation de l'état du tirage d'eau chaude auquel le CE est assujetti à un certain moment, est la première étape dans le processus complet d'estimation de l'état discret et continu du système. Celle-ci repose sur l'utilisation d'un filtre de Kalman qui permet d'estimer l'état du CE tout en profitant des mesures en température disponibles. Tel qu'implémenté dans ce projet, le filtre de Kalman nous permet d'estimer efficacement la température moyenne du système ou la température d'un seul nœud, selon les mesures réalisées, mais ne permet pas de reconstruire l'état complet en température du CE avec un nombre réduit de mesures. Cette dernière étape est réalisée par l'observateur d'état (section 5.4). L'idée est donc de déduire, sur une certaine période d'estimation, la séquence de tirage avec un minimum d'information.

La sous-section 5.3.1 détaille le processus d'estimation de l'état de tirage. La sous-section 5.3.2 présente les résultats de l'estimation du tirage à partir de la température moyenne du CE. Puis, la sous-section 5.3.3 évalue l'impact de la longueur de la période d'estimation sur la performance de l'estimateur.

5.3.1 Processus d'estimation de la séquence de tirage

La première étape du processus d'estimation de l'état complet du CE débute avec l'estimation de l'état discret du système, soit la séquence de tirage d'eau chaude. L'idée derrière cette estimation est d'analyser différents scénarios de tirage à partir d'un point de mesure passé et

de projeter l'évolution en température du système sur la période que nous tentons d'estimer avec cette séquence de tirage précise. La température finale de ce scénario est alors comparée à la mesure réelle du système à cet instant. Un ensemble de scénarios de tirage dont l'erreur quadratique par rapport à la température mesurée est comprise dans un certain intervalle arbitrairement choisi est conservé. Connaissant les statistiques de tirage, décrites par les paramètres de la chaîne de Markov présentée à la section 4.2, nous pouvons alors calculer la probabilité de réalisation de chaque scénario retenu et ne conserver que le plus probable. Le processus d'estimation de la séquence de tirage que nous venons de décrire est résumé à la Figure 5.5.

Ce processus d'estimation débute avec le choix d'un scénario de tirage à tester. Il faut commencer par définir un nombre maximal d'événements de tirage (sauts) autorisés pendant la fenêtre d'estimation. Pour une fenêtre de 300 secondes par exemple, un nombre maximal de deux sauts peut être considéré sur toute la période. Ce nombre est défini en fonction des habitudes de consommation de la population modélisée. Ainsi, nous évaluons toutes les combinaisons possibles pour chaque nombre de saut permis sur une séquence tel que

$$\# \text{ de scénarios générés} = \sum_{i=1}^{Z} \binom{i}{T} \tag{5.16}$$

où

- $Z \in \mathbb{N}$ est le nombre maximal de sauts permis
- $T \in \mathbb{N}^*$ est la durée normalisée de la fenêtre d'estimation, soit $T = \frac{\text{fenêtre estimation}}{\text{pas de temps simulation}}$

En plus de la séquence de tirage d'eau chaude qui est généré préalablement à l'estimation, la séquence de contrôle des éléments chauffants est aussi connue sur toute la période d'estimation. Ce contrôle est appliqué de façon identique pour tous les scénarios de tirage. Puisque la même séquence de contrôle est appliquée à tous les scénarios, plusieurs d'entre eux ne respecteront pas la conservation de l'énergie dans l'ensemble du système. Ce comportement n'influence cependant pas la qualité du scénario retenu, car ces cas pathogènes résultent en des températures finales largement à l'extérieur de l'intervalle de confiance. Une étape de filtrage de ces scénarios erronés est réalisée en imposant une limite arbitraire sur l'erreur du bilan d'énergie sur la période d'estimation. Le calcul du bilan d'énergie suit l'équation (4.12), présentée précédemment à la section 4.7. Si l'erreur sur le bilan d'énergie est inférieure au seuil de tolérance, alors le scénario passe à la prochaine étape. Sinon, il est éliminé. La tolérance sur le bilan d'énergie est définie à 1 kWh. Il s'agit d'un seuil plutôt conservateur qui permet de nettoyer plus particulièrement les scénarios les plus extrêmes.

La prochaine étape consiste à évaluer l'erreur quadratique moyenne entre l'évolution de la

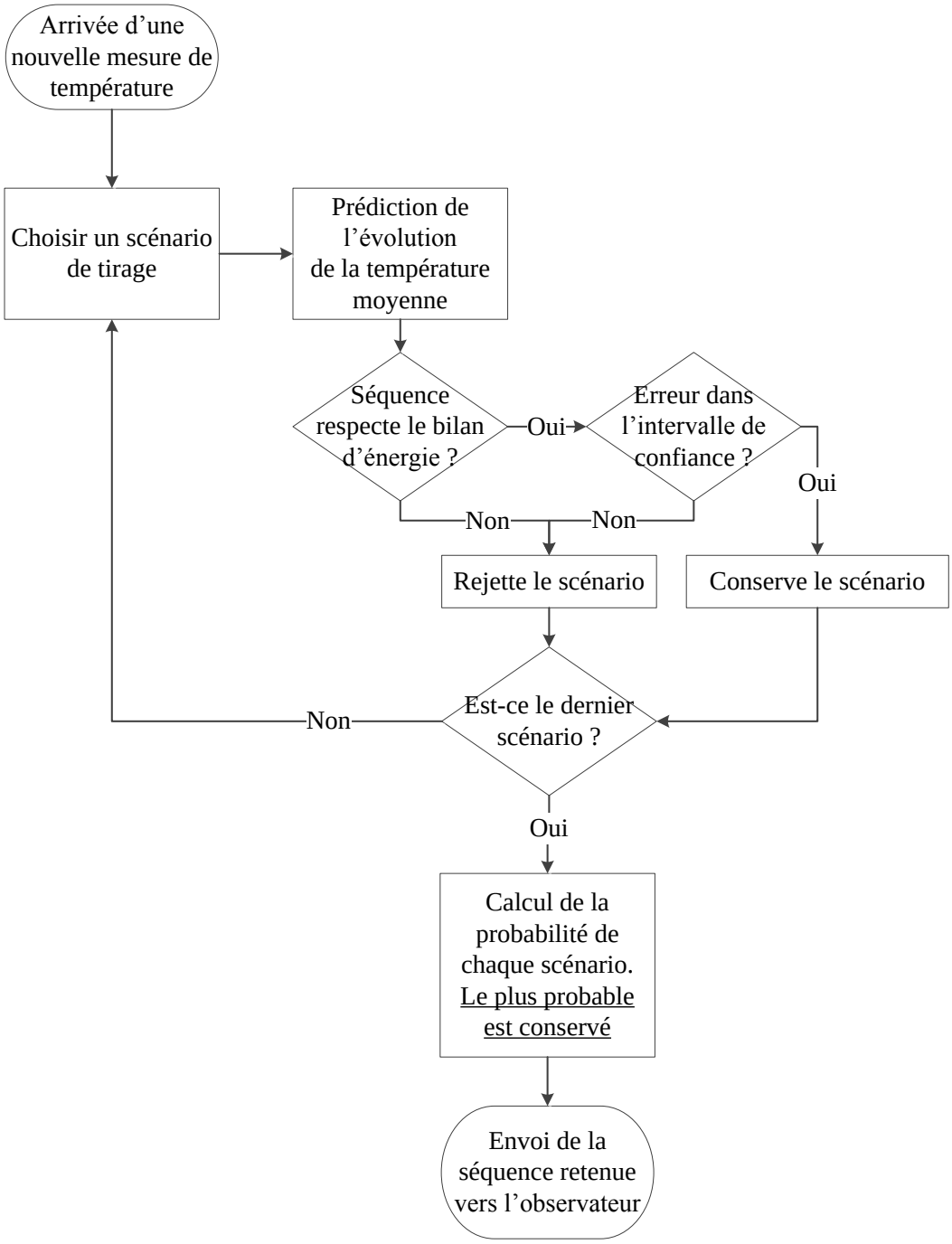


Figure 5.5 Schéma fonctionnel de l'estimation de la séquence de tirage d'eau chaude

température prédite par le scénario et les mesures réelles du système. Ce critère de performance est décrit par (5.17). Si l'erreur calculée est comprise dans l'intervalle de confiance, alors le scénario est conservé. Sinon, il est ignoré. La tolérance sur ce critère de performance est définie arbitrairement selon le comportement désiré et les contraintes reliées à l'estimateur. Dans le cadre des simulations présentées dans ce chapitre, la tolérance sur l'erreur quadratique moyenne est de 0.1. Il s'agit d'un compromis entre la précision de la prédiction en température et la probabilité de réalisation du scénario.

$$\text{Erreur}(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{T}(\hat{X}(s,k) - X(k))^2 \tag{5.17}$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots, T$ et où $X(k)$ est la température moyenne du CE mesurée à l'instant k et $\hat{X}(s,k)$ est la température prédite au temps k pour un scénario s compris dans l'ensemble des scénarios retenus S ($s \in S$). Le choix du scénario optimal repose finalement sur la connaissance des statistiques de tirage. En effet, nous posons l'hypothèse que nous connaissons à priori les paramètres de transition $\alpha_0(t)$ et $\alpha_1(t)$ caractérisant le processus stochastique de tirage par chaîne de Markov à deux états, tel que définis à la section 4.2. Grâce à la méthode des différences finies, nous évaluons la pente de la séquence pour chaque pas de temps, tel que présenté à la Figure 5.6.

Si la pente entre les points (k) et $(k+1)$ est positive, alors il y a un changement de l'état inactif (« OFF ») vers l'état actif (« ON ») suivant la probabilité $\alpha_0(k)$. À l'inverse, si la pente est négative, alors le changement survient de l'état actif vers l'état inactif selon la probabilité de transition $\alpha_1(k)$. Puis, si la pente est nulle, alors la probabilité de cet événement est égal à $(1-\alpha_0(k))$ ou $(1-\alpha_1(k))$ selon l'état dans lequel on se trouve. La probabilité globale de la séquence de tirage d'eau chaude $\Pr(s)$ est alors égale à la somme sur tous les pas de temps de simulation k compris dans la période d'estimation T ($k = 0, 1, 2, \ldots, T$), soit :

$$\Pr(s) = \prod_{k=0}^{T} \Pr(s,k) \tag{5.18}$$

où

$$\Pr(s,k) = \begin{cases} \alpha_0(k) & \text{si } q(s,k+1) - q(s,k) = 1 \\ \alpha_1(k) & \text{si } q(s,k+1) - q(s,k) = -1 \\ 1-\alpha_0(k) & \text{si } q(s,k+1) - q(s,k) = 0 \text{ et } q(s,k) = 0 \\ 1-\alpha_1(k) & \text{si } q(s,k+1) - q(s,k) = 0 \text{ et } q(s,k) = 1 \end{cases} \tag{5.19}$$

où $q(s,k) \in [0,1]$ est l'état de tirage du scénario s au temps k. Une fois la probabilité pour chaque scénario retenu s calculée, nous retenons uniquement le scénario de tirage d'eau ayant

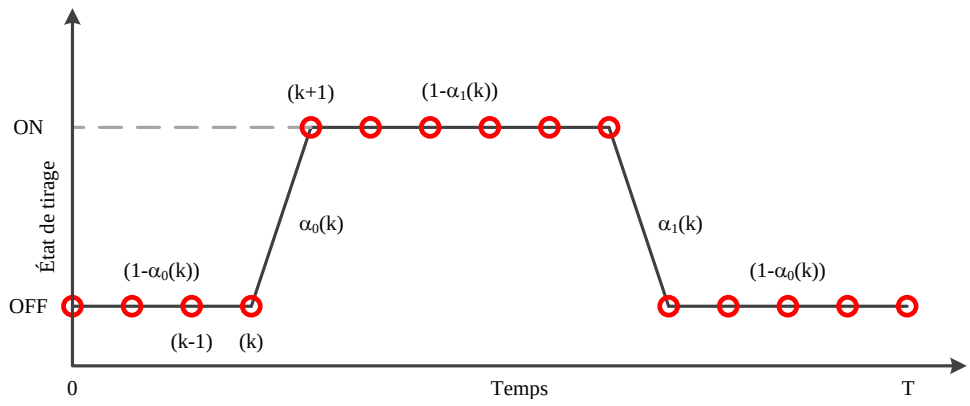


Figure 5.6 Schéma du calcul de la probabilité d'une séquence de tirage

la plus grande probabilité. Autrement dit :

$$s^* = \max\{\Pr(s) : s \in S\} \tag{5.20}$$

Le scénario optimal s^* est alors enregistré et transmis à l'observateur. La sous-section 5.3.2 présente les résultats de ce processus d'estimation en se basant sur la température moyenne.

5.3.2 Estimation par la mesure de la température moyenne

Nous nous intéressons à l'estimation de la séquence de tirage d'eau chaude en se basant sur des mesures de la température moyenne d'un CE. Une mesure de la température moyenne est obtenue par la mesure de la résistance filaire à l'intérieur du réservoir du CE référence, tel que présenté à la section 3.2.2. L'estimation de la séquence est réalisée grâce au test de vraisemblance présenté précédemment à la section 5.3.1.

Avant de procéder à la réalisation de ces tests, il est important d'évaluer la configuration optimale de chaque test en fonction de la fenêtre d'estimation, soit la longueur de la fenêtre d'estimation et le nombre de sauts maximum considéré dans cette même fenêtre qui offre le meilleure rapport qualité et temps de calcul. En effet, le nombre de sauts, noté Z dans la suite de ce chapitre, qui est considéré par le test pour chaque intervalle, doit permettre d'inclure un maximum de scénarios possibles, tout en offrant la meilleure performance possible. Ainsi, on ne considère pas le même nombre de sauts possibles sur un intervalle de 300 secondes et de 1800 secondes. On désire alors évaluer le nombre de sauts encourus lors d'intervalles de même durée sur une journée complète pour des intervalles de 300, 600, 900, 1800 et 3600 secondes. Afin d'obtenir un échantillon statistique valide, la simulation des événements de

tirage suivant un processus de Markov à deux états (voir section 4.2) est répétée pour 10000 journées consécutives. Pour l'ensemble de ces journées, on analyse par intervalle les différents paramètres suivants :

- Nombre de sauts maximum par intervalle (Z_{max}) : On recherche le nombre de sauts maximum dans un intervalle pour l'ensemble des intervalles de même durée. Cela permet d'établir une limite pratique sur le nombre maximum de sauts à considérer par intervalle.
- Nombre de sauts moyen par intervalle ($\bar{Z}$) : On recherche le nombre de sauts moyen dans un intervalle pour l'ensemble des intervalles de même durée. Ce paramètre permet d'évaluer la distribution des valeurs de l'échantillon par rapport au maximum et au mode de ce même échantillon.
- Mode de l'échantillon de sauts (Z_m) : Le mode permet de connaître la valeur la plus représentée dans l'échantillon, ce qui correspond en quelque sorte au nombre de sauts le plus probable par intervalle. Ce paramètre sert de première estimation de la configuration optimale pour chaque fenêtre.

Le tableau 5.1 présente ces différents paramètres statistiques pour chaque fenêtre d'estimation.

Tableau 5.1 Statistiques et performances du nombre de sauts par intervalle

Intervalle (s)	300	600	900	1800	3600
Maximum (Z_{max})	4	6	6	10	13
Moyenne ($\bar{Z}$)	2.1	2.5	2.8	3.8	5.1
Mode (Z_m)	2	2	3	4	4
Pr($Z \leq Z_m$)	0.90	0.59	0.82	0.85	0.39
Optimal (Z^*)	2	3	4	4	6
Pr($Z \leq Z^*$)	0.90	0.94	0.99	0.85	0.89

Afin d'évaluer la performance de la configuration initiale du test de vraisemblance, i.e. lorsque le nombre de sauts maximum retenu par intervalle est égal au mode de l'échantillon pour chaque fenêtre, on calcule la probabilité que le nombre de sauts par intervalle soit inférieur cette valeur (Pr($Z \leq Z_m$)), aussi appelé couverture. On remarque que la couverture des scénarios possibles est bonne pour les fenêtres de 300 et de 1800 secondes, mais moindre pour les autres fenêtres. En augmentant le nombre de sauts maximal considéré par intervalle pour les fenêtre de 600, 900 et 3600, on obtient une meilleure couverture. En réajustant ce paramètre, on retrouve l'ensemble de sauts maximal optimal par intervalle Z^* et sa couverture associée Pr($Z \leq Z^*$).

Pour la démonstration présentée dans cette section, nous utiliserons un fenêtre d'estimation de 900 secondes et un nombre de sauts maximal par intervalle de 4 sur une période totale de

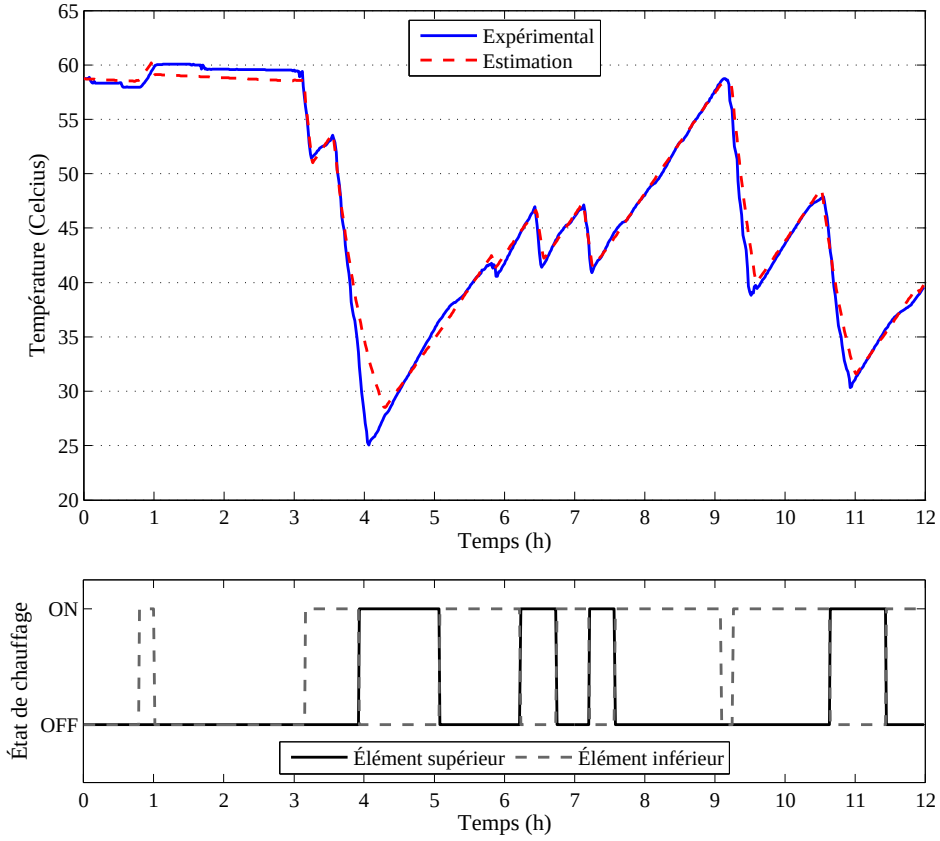


Figure 5.7 Estimation a posteriori de la température moyenne à partir de mesures

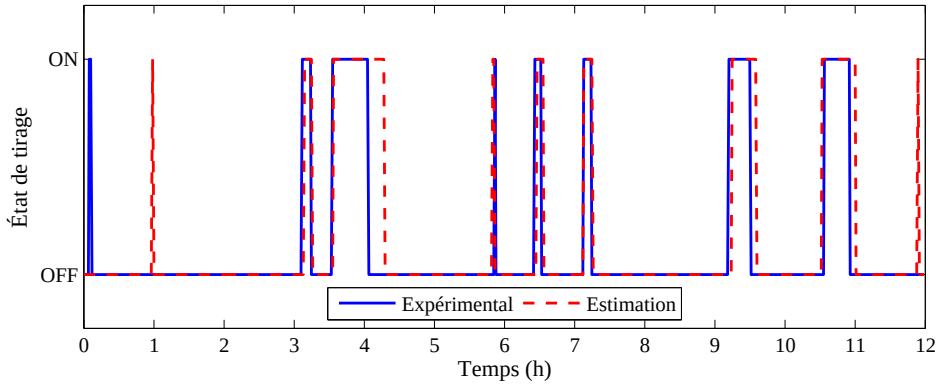


Figure 5.8 Estimation de la séquence de tirage à partir de mesures de la température moyenne

12 heures. Une étude plus détaillée de l'impact du choix de cette fenêtre d'estimation sur la performance du test est réalisée à la section 5.3.3. Les données expérimentales obtenues par le test aléatoire à débit moyen (voir section 3.3) sont utilisées comme référence pour réaliser cette estimation. La Figure 5.7 présente la prédiction du comportement en température et la Figure 5.8 présente les résultats de l'estimation de l'état de tirage.

L'estimation débute avec un ensemble de quinze mesures de la température moyenne. Une première estimation de la séquence de tirage est réalisée sur cet ensemble de mesures. Une fois complétée, un nouvel ensemble de quinze mesures est envoyé à l'estimateur. Cependant, celui-ci profite des résultats de la dernière estimation pour évaluer la performance des différentes scénarios de tirage. Cette performance, correspondant à l'erreur quadratique moyenne de la prédiction température, est alors évaluée sur un ensemble de trente données. L'estimation de la séquence résultante se retrouve améliorée car elle devient moins sensible aux fluctuations de l'erreur entre la température mesurée et prédite. Autrement dit, un scénario avec une erreur quadratique moyenne plus élevée, mais plus probable sur un certain intervalle, a plus de chance d'être retenu s'il est considéré globalement avec les estimations précédentes. Une fois la taille limite de l'ensemble de mesure atteinte, soit 60 mesures dans le cas traité dans cette section, les plus anciennes mesures sont effacées, puis les nouvelles ajoutées. Ceci est réalisé pour l'ensemble des données expérimentales disponibles.

Tableau 5.2 Erreur d'estimation de la séquence par la température moyenne

Température		Séquence
MAE (°C)	RMSE (°C)	MAPE (%)
0.75	1.3	6.3

On remarque que la corrélation entre la température mesurée expérimentalement et prédite est bonne. Le Tableau 5.2 rapporte une MAE sur la température moyenne d'environ 0.75 °C. En observant uniquement l'estimation de la séquence de tirage (Figure 5.8), nous remarquons aussi à ce niveau une bonne corrélation entre les données mesurées et estimées. Le moment de début et de fin de tirage est bien prédit, ainsi que la durée de l'événement. L'estimation de la séquence enregistre une erreur absolue moyenne relative (MAPE) de 6.3 %. Autrement dit, environ 6 fois sur 100, l'état prédit par l'estimateur n'est pas le bon. Ce niveau d'erreur est tout à fait viable dans le cadre de ce projet.

On remarque parfois l'apparition de sauts de très courte durée alors qu'il n'y a pas de changement observé dans les mesures. Ces fausses prédictions sont causée par l'erreur intrinsèque du modèle numérique par rapport au modèle de référence. Ces petits sauts tentent de corriger ponctuellement l'écart entre les deux modèles. Il est possible de limiter l'apparition de

ces fausses prédictions avec un choix judicieux des tolérances sur les critères de performance mentionnés précédemment.

5.3.3 Effet de la fenêtre d'estimation

Cette sous-section présente l'impact de la durée de la fenêtre d'estimation. Il est utile de rappeler que cette fenêtre représente la période sur laquelle un nouvel ensemble de mesures est fournie au système pour une nouvelle estimation de la séquence de tirage. Cette fenêtre d'estimation, telle que présentée précédemment, peut profiter d'un ensemble plus complet de mesures pour évaluer la performance de l'estimation, mais la durée des nouveaux scénarios de tirage générés demeure égale à cette période d'estimation.

Le tableau 5.1 présente les paramètres statistiques du nombre de sauts par intervalle pour différentes fenêtres de temps. Pour évaluer la performance d'estimation en fonction de chacune des ces fenêtres, le nombre de sauts optimal par intervalle est utilisé, puis le temps de calcul et l'erreur sur l'estimation sont observés en fonction de chaque fenêtre. Les tests de performance sont réalisées suivants le profil de tirage du test aléatoire à débit moyen sur une période de 12 heures.

Le Tableau 5.3 présente les résultats obtenus pour quatre fenêtres d'estimation différentes, soit : 60, 300, 900 et 1800 secondes.

Tableau 5.3 Performances du nombre de sauts par intervalle

Intervalle (s)	300	600	900	1800
Optimal (Z^*)	2	3	4	4
Temps (s)	0.035	0.72	12	373
MAE (°C)	1.3	0.99	0.76	0.68
RMSE (°C)	1.9	1.5	1.3	1.2
MAPE (%)	8.2	7.6	6.3	5.6

Il est possible d'observer que le temps de calcul augmente exponentiellement avec la durée de la fenêtre d'estimation alors que l'erreur sur la séquence et la température diminue avec celle-ci. L'augmentation du temps de calcul est expliquée par le fait que le nombre de scénarios de tirage possibles augmente aussi exponentiellement car le nombre total de scénarios générés dépendent d'un terme binomial (voir équation (5.16)).

L'amélioration de l'erreur de l'état de tirage et de température s'explique par la manière dont le test de vraisemblance sélectionne le scénario de tirage optimal. On se rappelle que la performance de celui-ci est calculée à partir de l'erreur quadratique moyenne de la pré-

vision sur les mesures de la température moyenne du chauffe-eau électrique. Plus la fenêtre d'estimation augmente, plus ce critère de performance est calculé avec un grand ensemble de mesures. Or, plus cet ensemble est grand, meilleure est la qualité de l'estimation puisque le test devient moins sensible aux petites perturbations du système.

Suite à cette analyse, il est possible de remarquer qu'une fenêtre d'estimation de 900 secondes (15 minutes) permet d'obtenir une bonne qualité d'estimation (MAPE de 6.3 %) en plus d'un temps de calcul inférieur à 60 secondes, soit environ 12 secondes par intervalle. Cette configuration permet à l'estimateur de fournir une mise à jour de l'estimation en temps réel au contrôleur. En effet, le temps de calcul de l'estimation de l'état discret du système (tirage) étant inférieur à la minute, cette estimation est générée et envoyée au contrôleur avant l'émission d'une nouvelle mesure de la température moyenne du CE. C'est entre autre pour cette raison que la configuration du test de vraisemblance avec une fenêtre de 900 secondes et un nombre maximal de saut de 4 est choisie pour réaliser l'estimation de l'état discret de tirage d'eau chaude.

5.4 Reconstruction de l'état continu du chauffe-eau par un observateur multivarié

La dernière étape du processus d'estimation de l'état énergétique d'un CE est de reconstruire l'état continu de celui-ci. Pour ce faire, deux méthodes sont envisagées : un observateur multivarié et un filtre de Kalman. Ces deux approches permettent d'estimer grâce à une rétroaction avec un vecteur de mesures Y du système tel qu'exprimé dans la RE à la section 5.2 (voir équation (5.15)). Celles-ci seront comparées dans les prochaines sections afin de savoir laquelle offre la meilleure estimation de la température à l'intérieur d'un chauffe-eau. La présente section s'intéresse à l'observateur multivarié et la section 5.5 au filtrage de Kalman.

La sous-section 5.4.1 évalue les conditions nécessaires pour permettre l'utilisation d'un observateur multivarié. La sous-section 5.4.2 décrit les fondements du design d'un observateur et la sous-section 5.4.3 présente les résultats et l'analyse de la reconstruction de l'état complet d'un CE par l'observateur.

5.4.1 Mesures et observabilité du système

Une représentation d'état, telle que décrite à la section 5.2 est dite observable si l'observation des mesures de sortie $Y(t)$ sur un intervalle $t \in [0, T]$ permet de reconstruire l'état $X(T)$ à un temps fini T. Cependant, le vecteur d'état n'est pas nécessairement entièrement mesuré. En fait, on tente dans cette section d'évaluer le minimum de mesures nécessaires à l'observabilité

du système.

Afin de vérifier l'observabilité d'une RE, le test suivant est appliqué : si le rang de la matrice d'observabilité d'un système possédant n états est égal à n, la RE est observable. Une matrice d'observabilité $\mathcal{O}$ est définie par l'équation (5.21).

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

L'objectif est de vérifier que $\text{Rang}(\mathcal{O}) = n$.

Pour analyser les conditions nécessaires à l'observabilité de la RE, différents scénarios de mesures sont analysés pour un modèle de CE à cinq nœuds. Afin de faciliter la compréhension de la démonstration, un modèle à cinq nœuds est utilisé, mais la preuve peut être généralisée pour des cas plus complexes.

Dans un premier temps, le comportement de la matrice d'observabilité est observé dans deux contextes : avec tirage et sans tirage. Puis, pour chacune de ces catégories, l'effet de la prise de mesures est observé sur différents nœuds du CE.

Observabilité sous tirage

Lorsqu'un CE, représenté par un modèle multi-nodal à cinq nœuds, est soumis à un événement de tirage, la RE est caractérisé par la matrice $\mathbf{A}$ suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} & A_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & A_{4,5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

Quant à la matrice diagonale de mesure $\mathbf{C}$, celle-ci varie en fonction des nœuds mesurés. Chaque élément diagonal est soit unitaire si le nœud est mesuré, soit nul s'il ne l'est pas. Or, la matrice d'observabilité du système suit la relation (5.21). Si un système ne mesurant que

le nœud supérieur est considéré, la matrice de mesures $\mathbf{C}$ suivante est obtenue :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

En combinant (5.22) et (5.23) dans (5.21), il est possible de vérifier que $\text{Rang}(\mathcal{O}) = 5$ et que la condition d'observabilité est respectée.

Le cas extrême où tous les nœuds du CE sont mesurés à l'exception de celui du haut est maintenant considéré. La matrice $\mathbf{A}$ demeure inchangée et la matrice de mesure $\mathbf{C}$ devient :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

Il est possible d'observer que $\text{Rang}(\mathcal{O}) = 4$ dans ces conditions. Autrement dit, le système, dans ces circonstances, n'est pas observable. Il est alors possible de conclure que la mesure du nœud supérieur est nécessaire à l'observabilité du système. Ceci s'explique par le fait qu'il n'existe aucun terme de couplage entre un nœud et celui au-dessus dans la matrice $\mathbf{A}$. Le terme de couplage intervient plutôt entre un nœud et celui au-dessous. Il est alors impossible de reconstruire l'état du nœud supérieur à partir d'information sur les nœuds inférieurs. Ce comportement est observé pour tous les scénarios excluant la mesure du nœud du haut.

Observabilité sans tirage

Lorsque le CE se retrouve dans une situation de non-tirage, la matrice $\mathbf{A}$ de la RE devient diagonale telle que :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{4,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{5,5} \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

Il est possible de remarquer qu'en absence de tirage, aucun terme de couplage entre les nœuds n'est retrouvé. Ceci impose d'importantes conditions sur la matrice de mesures du système pour répondre à la condition d'observabilité. En effet, puisqu'il n'y a aucun couplage entre les nœuds, la seule façon de reconstruire l'état complet du CE est de le mesurer complètement.

Ainsi, lorsque $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, $\text{Rang}(\mathcal{O}) = 5$. Si le rang de $\mathbf{C}$ est inférieur à la dimension du système (5 dans ce cas), la condition d'observabilité dans un contexte de non-tirage n'est pas vérifiée.

Conditions globales d'observabilité

En observant les résultats du test d'observabilité sur ces différents scénarios, il est possible de remarquer que seul un scénario contenant la mesure du nœud supérieur dans un contexte de tirage permet d'obtenir un système observable. La mesure d'un nœud inférieur ne permet donc pas de reconstruire l'état du nœud qui lui est au-dessus car il n'y a pas de terme de couplage entre ceux-ci dans l'équation d'état du nœud inférieur. Puis, lorsque le système ne subit aucun tirage, les termes hors-diagonaux de la matrice $\mathbf{A}$ sont nuls. L'état d'un nœud ne peut alors pas être reconstruit à partir d'un nœud sous-jacent, car il n'y a plus d'échange de chaleur entre ces deux nœuds. Ces résultats peuvent être généralisés à des systèmes de plus grande dimension.

Ainsi, il est possible de conclure que :
- La RE n'est observable que dans un état actif de tirage
- Le nœud supérieur doit être mesuré pour que le système soit observable

Ces limitations sont causées par le fait que le modèle de CE utilisé ne permet aucun échange de chaleur entre les strates, sauf par le mélange engendré par le tirage d'un volume d'eau.

Ces résultats obligent la mesure du nœud supérieur du CE en tout temps. De plus, l'utilisation d'un observateur pour reconstruire l'état complet d'un CE ne peut être appliquée qu'en période de tirage. En absence de tirage, un modèle de prédiction de la température peut être utilisé, tel que présenté à la section 5.3.

5.4.2 Design de l'observateur multivarié

Suite aux conclusions de la section précédente, il est connu que le système estimé n'est observable qu'en période de tirage. Or, sur une période d'estimation typique de 60 minutes, plusieurs cycles de tirage se succèdent. La séquence de tirage sur cette période est connue grâce au test de vraisemblance développée à la section 5.3. L'observateur ne pourra donc être utilisé que lorsque l'estimation de la séquence affiche un tirage non-nul. Lorsqu'il n'y a pas de tirage, le mieux qui puisse être fait est de prédire l'évolution de la température en

se basant sur le modèle multi-nodal décrit au chapitre 4. Une juxtaposition adéquate de ces deux représentations permet une convergence vers un état complet du CE représentatif des mesures obtenues expérimentalement. La Figure 5.9 fait la synthèse du fonctionnement de l'estimation par un observateur multivarié de l'état continu en température d'un CE.

Soit la RE présentée en (5.15). Un observateur multivarié dynamique est décrit par l'ensemble d'équations (5.26). La matrice $\mathbf{L}$ correspond à la matrice de gain et est de la même dimension que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ ($N \times N$ pour un CE à N nœuds). Un schéma fonctionnel de la structure de l'observateur est présenté à la Figure 5.10.

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = \mathbf{A}\hat{X} + \mathbf{B}'U' + \mathbf{L}(Y - \hat{Y}) \\ \hat{Y} = C\hat{X} \end{cases} \tag{5.26}$$

L'observateur décrit par (5.26) peut être réécrit de la façon suivante :

$$\dot{\hat{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{X} + \mathbf{B}'U' + \mathbf{L}Y \tag{5.27}$$

L'erreur d'estimation, soit la différence entre l'état mesuré et l'état estimé, peut alors être décrite par

$$\tilde{X} \triangleq X - \hat{X}$$

En soustrayant (5.15) de (5.26), nous obtenons

$$\dot{\tilde{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\tilde{X} \tag{5.28}$$

Nous remarquons que l'erreur d'estimation peut être contrôlée en choisissant arbitrairement les valeurs propres de la matrice $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})$. Ce choix de valeurs propres est important car il influera sur les indices de performance de la réponse transitoire. D'une part, nous devons choisir la matrice de gain $\mathbf{L}$ de telle sorte que toutes ses valeurs propres se retrouvent dans le demi-plan gauche du plan complexe. D'autre part, nous désirons que notre observateur multivarié soit plus rapide que la dynamique du système une fois contrôlé. Pour ce faire, les valeurs propres de l'observateur devront être à gauche de celle du système. Plus elles seront éloignées, plus l'observateur sera rapide. Cependant, un observateur trop rapide n'est pas désirable, car cela équivaut à attribuer une trop grande fiabilité aux mesures. Tous ces facteurs sont pris en compte lors du design de l'observateur.

La première étape dans le design de l'observateur est de calculer les valeurs propres de la RE. Sachant que la matrice $\mathbf{A}$, telle que représentée dans (5.15), est une matrice triangulaire

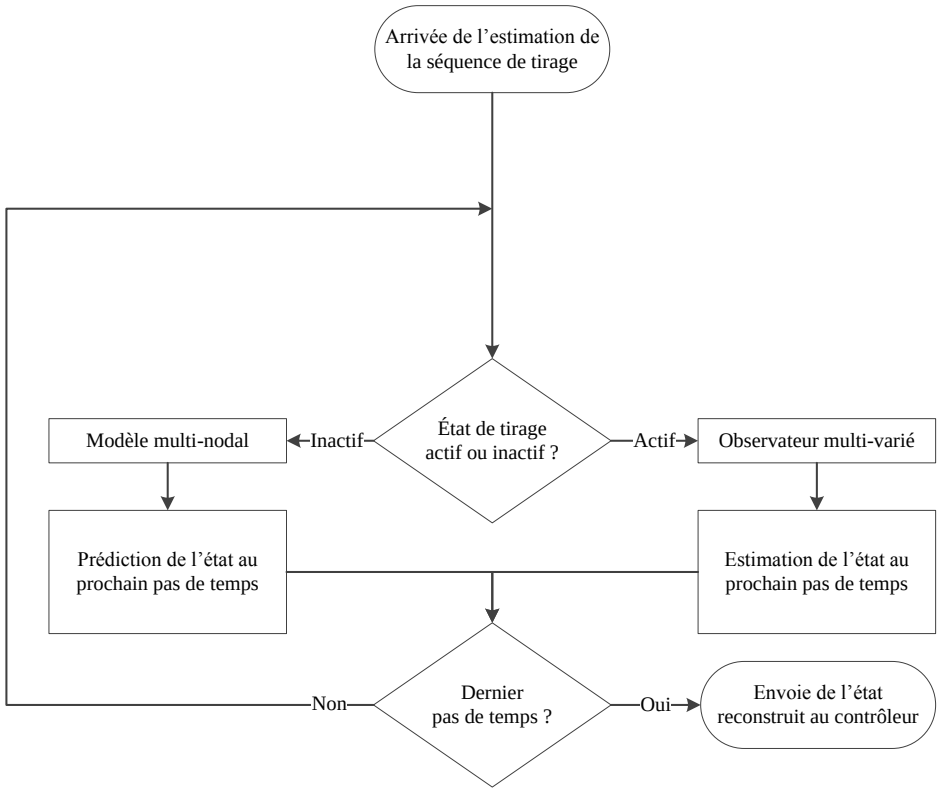


Figure 5.9 Schéma fonctionnel de la reconstruction de l'état continu de la température d'un chauffe-eau électrique par un observateur multivarié

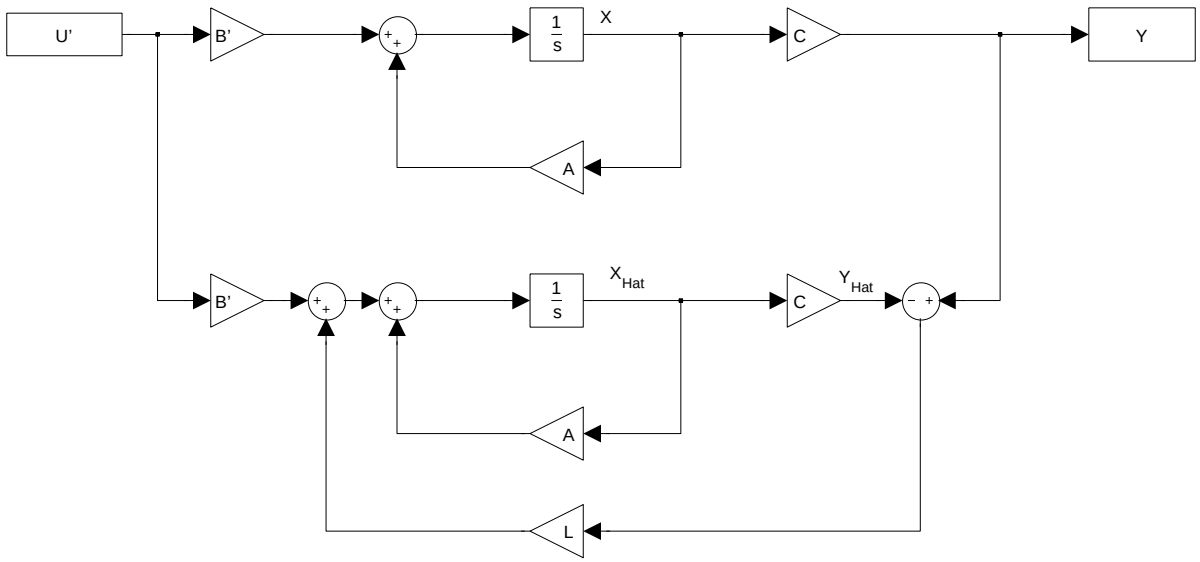


Figure 5.10 Schéma fonctionnel de l'observateur multivarié

supérieure, nous savons que les valeurs propres de cette matrice sont calculées par

$$\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{N}(s - A_{i,i}) = (s - A_{1,1})(s - A_{2,2})\ldots(s - A_{N,N}) \tag{5.29}$$

pour un CE à N états. Nous choisissons arbitrairement les pôles de notre observateur de sorte qu'ils soit plus rapide que la dynamique du système sous contrôle thermostatique. Cela est réalisé par l'utilisation de la fonction `place` de MATLAB [1]. Il est aussi recommandé que la multiplicité des pôles désirés soit unitaire. Or, pour un modèle multi-nodal de CE, les valeurs propres de la matrice $\mathbf{sI} - \mathbf{A}$ peuvent être de multiplicité supérieure à un si certains nœuds du système sont de même volume, de même surface de contact avec le réservoir et ont un même coefficient de perte en attente, par exemple. Dans ces cas, il suffit de distribuer les pôles désirés de l'observateur sur une plage autour de la valeur désirée.

Une fois la matrice de gain $\mathbf{L}$ connue, le design de l'observateur est terminé. La dernière étape de la construction de l'observateur est de réécrire le système présenté à la Figure 5.10 comme un système global définit par le couple $(X, \hat{X})$. En couplant les équations (5.15) et

1. La fonction `K=place(A,B,p)` permet de calculer la matrice de gain `K` de sorte que les valeurs propre de `A-BK` correspondent à `p`. Pour plus d'informations, voir `http://www.mathworks.com/help/control/ref/place.html`

(5.27), nous définissons la RE d'ensemble suivante

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\hat{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{LC} & \mathbf{A}-\mathbf{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' \\ U' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Y \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{5.30}$$

La section 5.4.3 applique l'observateur développé dans cette section dans un contexte expérimental.

5.4.3 Résultats de la reconstruction d'état par un observateur multivarié

L'objectif de la reconstruction de l'état d'un chauffe-eau est d'estimer la température de tous les nœuds du système en se basant sur un minimum de mesures. Dans cette section, nous tentons de reconstruire l'état complet du chauffe-eau de référence lors de la réalisation du test aléatoire à débit moyen. Pour parvenir à réaliser cette reconstruction, il faut d'abord connaître la séquence de contrôle des éléments ainsi que la séquence de tirage d'eau chaude. La séquence de contrôle est connue implicitement car elle est dictée par le même contrôleur qui planifie la reconstruction et la séquence de tirage est obtenue par le processus d'estimation par test de vraisemblance présenté à la section 5.3.

La reconstruction de la température pour chaque nœud du système suit le processus présenté à la Figure 5.9. Pour un ensemble donné de mesures de la température à différents endroits dans le réservoir, et pour une séquence de tirage d'eau chaude estimée par un test de vraisemblance, l'état complet de la température du CE est estimé par l'observateur lors des périodes de tirage et est prédit par le modèle multi-nodal lors des périodes de non-tirage. Une fois la reconstruction terminée, l'état complet du CE, discret (état de tirage) et continu (valeur de la température à tous les nœuds, est envoyé au contrôleur local.

L'exemple de reconstruction de l'état continu présenté dans cette section suit les hypothèses suivantes :

- La durée de la période de reconstruction est égale à la longueur de la séquence de tirage reçue en entrée
- Le pas de temps de reconstruction est le même que celui de la séquence de tirage estimée
- Des mesures des capteurs de température dans le réservoir du CE de référence sont disponibles à tous les pas de temps de la période de reconstruction
- La commande des deux éléments chauffants est connue à tous les pas de temps de la période de reconstruction

– Les pôles de l'observateur multivarié **L** sont arbitrairement choisis comme étant de 9 à 10 fois plus rapides que les pôles du système.

Tout comme le test par vraisemblance est alimenté par les mesures en provenance de la résistance filaire, la reconstruction de l'état profite des données obtenues par les capteurs de température à l'intérieur du réservoir. La matrice de mesure **C** du système permet de choisir quels capteurs sont utilisés lors de la reconstruction, l'objectif de cette méthode étant de minimiser le nombre de points de mesure nécessaires pour l'estimation de l'état du chauffe-eau électrique.

Pour analyser la performance de l'estimation de la température du système par l'observateur multivarié, trois indicateurs sont utilisés : l'erreur moyenne (ME), l'erreur moyenne relative (MPE) et l'erreur type de la moyenne (RMSE). Ceux-ci sont définis de la manière suivante :

– **L'erreur moyenne (ME)** est définie par les équations (5.31), (5.32), (5.33) et (5.34). Dans le contexte de cette analyse, elle représente l'erreur moyenne par pas de temps et s'exprime en terme de température ou d'énergie. Elle est calculée localement pour chaque strate (ME_i) et aussi globalement (ME) pour le système :
  – erreur moyenne locale en température :

$$\mathrm{ME}_i = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T}\left(\hat{X}_i - X_i\right) \tag{5.31}$$

  – erreur moyenne globale en température :

$$\mathrm{ME} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} V_i \mathrm{ME}_i \tag{5.32}$$

  – erreur moyenne locale en énergie :

$$\mathrm{ME}_i = \frac{\rho V_i C_p}{T}\sum_{k=1}^{T}\left(\hat{X}_i - X_i\right) \tag{5.33}$$

  – erreur moyenne globale en énergie :

$$\mathrm{ME} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{ME}_i \tag{5.34}$$

– **L'erreur moyenne relative (MPE)** locale est définie par :

$$\mathrm{MPE}_i = \frac{\mathrm{ME}_i}{\Delta E_i} \times 100\ \% \tag{5.35}$$

où ME_i correspond à l'erreur moyenne en énergie pour chaque nœud (voir équation (5.33)) et ΔE_i représente la charge complète d'un nœud i du CE, soit l'énergie nécessaire pour chauffer complètement le volume d'eau à partir de la température de l'aqueduc (X_f) jusqu'à la température de consigne (X_{set}) et est calculé par :

$$\Delta E_i = \rho V_i C_p (X_{set} - X_f) \approx 1500 \text{ Wh} \tag{5.36}$$

L'erreur moyenne relative globale est calculée en divisant l'erreur moyenne en énergie (ME, voir équation (5.34)) du système par la charge complète du CE, soit :

$$\mathrm{MPE} = \frac{\mathrm{ME}}{\Delta E} \times 100 \ \% \tag{5.37}$$

où

$$\Delta E = \sum_{i=1}^{N} \Delta E_i = 15000 \text{ Wh} \tag{5.38}$$

– **L'erreur type de la moyenne (RMSE)** représente l'écart type de l'ensemble des données sur toute la période de simulation et est calculée par :

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T} \left(\hat{X}_i - X_i \right)^2} \tag{5.39}$$

La suite de la discussion présente les résultats expérimentaux de la reconstruction de l'état continu d'un chauffe-eau électrique par un observateur multivarié et analyse différentes configurations de mesure de température permettant de minimiser l'erreur d'estimation et le nombre de capteurs de mesure utilisés.

Analyse et choix du vecteur de mesures

L'étude d'observabilité du système présentée à la section 5.4.1 permet de conclure que la mesure du nœud le plus haut dans le réservoir lors d'événements de tirage est nécessaire pour respecter la condition d'observabilité. Afin d'évaluer la performance de la stratégie nécessitant un minimum de mesures, les figures 5.12 et 5.13 présentent respectivement l'estimation de la température moyenne et de la température de chaque nœud d'un chauffe-eau segmenté en dix nœuds en ne mesurant que la température du nœud supérieur. Le tableau 5.4 résume les performances de l'estimation dans ce contexte.

La figure 5.12 présente un important décalage dans la température moyenne estimée près de la 4e heure. Ce décalage est causé par l'estimation de la séquence de tirage, qui prédit un événement de tirage plus long qu'il ne l'est réellement. La rétroaction sur la température du

haut ne permet pas de corriger cette erreur. Lorsque l'on observe la figure 5.13, on remarque que ce sont en effet les nœuds 5 à 10 qui subissent l'effet du prolongement de l'événement de tirage puisque leur température estimée est inférieure d'environ 5 °C à la température mesurée. On remarque aussi à la figure 5.13 que le comportement des nœuds 2 à 4 n'est pas fidèlement représenté par la reconstruction de l'état. Le tableau 5.4 résume la performance de l'estimation pour chaque nœud (1 à 10) et pour le comportement d'ensemble en température et en énergie.

Il est possible de remarquer que la performance est faible pour les nœuds 2, 3, 4, 5 et 10. Sachant qu'une stratification de l'eau apparaît entre le 4e et le 5e nœud à cause de la présence de l'élément chauffant du haut dans la 4e strate, il est pertinent d'ajouter au processus d'estimation une mesure en provenance du volume froid (nœuds 5 à 10). De plus, le comportement du 4e nœud est difficile à prédire à cause notamment de la montée du panache dans le réservoir, qui vient briser la stratification à ce niveau (*voir section 1.2*). Cette configuration offre donc globalement une MPE globale de −9.7 % sur la charge du CE.

Une amélioration à la configuration des mesures du chauffe-eau électrique est donc d'inclure les mesures du 4e et du 9e nœud. Le 4e nœud est choisi, car il s'agit d'un nœud critique dans la représentation d'état qui contient l'effet de l'élément chauffant supérieur et de la collision avec le panache. Pour la région sous-jacente au 4e nœud, la mesure du 9e nœud est retenue, car celui-ci est associé à l'élément inférieur. Finalement, le vecteur de mesure 1, 4 et 9 a l'avantage de permette l'installation facile d'un système de mesure à cause de l'accès direct à l'emplacement des éléments chauffants par l'extérieur du réservoir. La performance d'ensemble de cette nouvelle configuration de mesure est résumée au tableau 5.5.

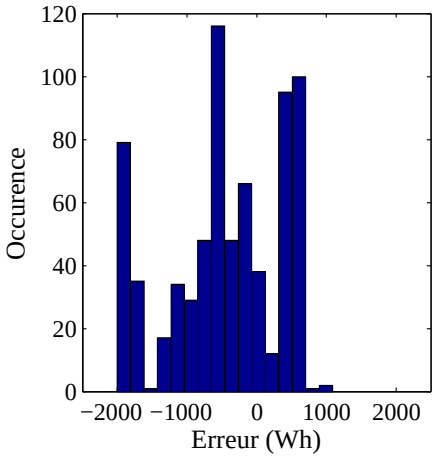


Figure 5.11 Distribution de l'erreur moyenne globale de l'observateur multivarié

Il est possible d'observer de meilleures performances pour l'ensemble des nœuds du système. L'erreur moyenne globale de la température du système entre les mesures et la reconstruction est inférieure à celle obtenue à la section 4.4, alors que le modèle prédictif utilise la séquence de tirage mesurée expérimentalement. Cela prouve l'intérêt d'utiliser un observateur pour estimer la température du système lors d'événements de tirage et de le coupler au modèle prédictif lors des moments sans tirage. Cette nouvelle configuration offre une amélioration

considérable de la qualité de l'estimation avec une MPE globale de -2.9 % sur l'état de charge du CE. Il est intéressant de noter que durant cette période de simulation, une sous-estimation globale maximale de -13 % est enregistrée. La distribution de l'erreur moyenne globale du système est présentée à la figure 5.11 et son évolution dans le temps est présentée à la figure 5.16.

La performance de la reconstruction dépend finalement de la qualité des mesures et du choix des pôles de l'observateur. Dans le cas expérimental présenté dans cette section, la haute qualité des mesures permet de choisir des pôles très rapides pour l'observateur, ce qui reflète un degré élevé de confiance à l'égard des mesures. Ainsi, l'augmentation du bruit des mesures a un impact direct sur la performance de la reconstruction.

Dans la globalité du processus d'estimation de l'état du CE, le temps de calcul que représente la reconstruction de l'état en température par l'observateur est court, enregistrant un temps d'environ 1 seconde pour la reconstruction de l'état sur les 12 heures du scénario test de référence. Le temps de calcul n'est donc pas un facteur important à cette étape du processus.

Tableau 5.4 Performance de la reconstruction par un observateur multivarié basé sur la mesure de la température du nœud 1

Nœud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mesure	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Température (°C)										
ME [a]	-3.9	-9	-9.2	-7.7	-6.0	-2.7	-2.6	-2.5	-2.1	-2.7
RMSE [b]	7.6	13	13	12	9.1	4.9	5.0	5.3	4.3	9.5
Énergie (Wh)										
ME	-120	-270	-280	-230	-180	-81	-79	-76	-63	-82
MAPE [c] (%)	-7.8	-18	-18	-15	-12	-5.3	-5.2	-5.0	-4.1	-5.4
RMSE	230	390	390	360	270	150	150	160	130	290

Erreur	Globale	Maximale
Température (°C)		
ME	-4.8	-12
RMSE	7.0	-
Énergie (Wh)		
ME	-1500	-3600
MAPE (%)	-9.7	-24
RMSE	2100	-

a. Erreur moyenne (ME)
b. Erreur quadratique moyenne (RMSE)
c. Erreur absolue moyenne en pourcentage (MAPE)

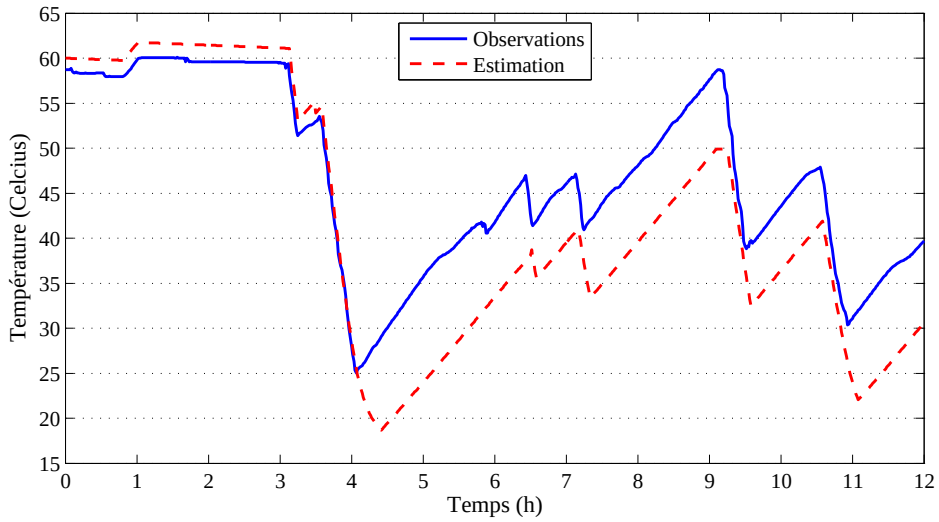


Figure 5.12 Température moyenne d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par un observateur multivarié basé sur la mesure de la température du nœud 1

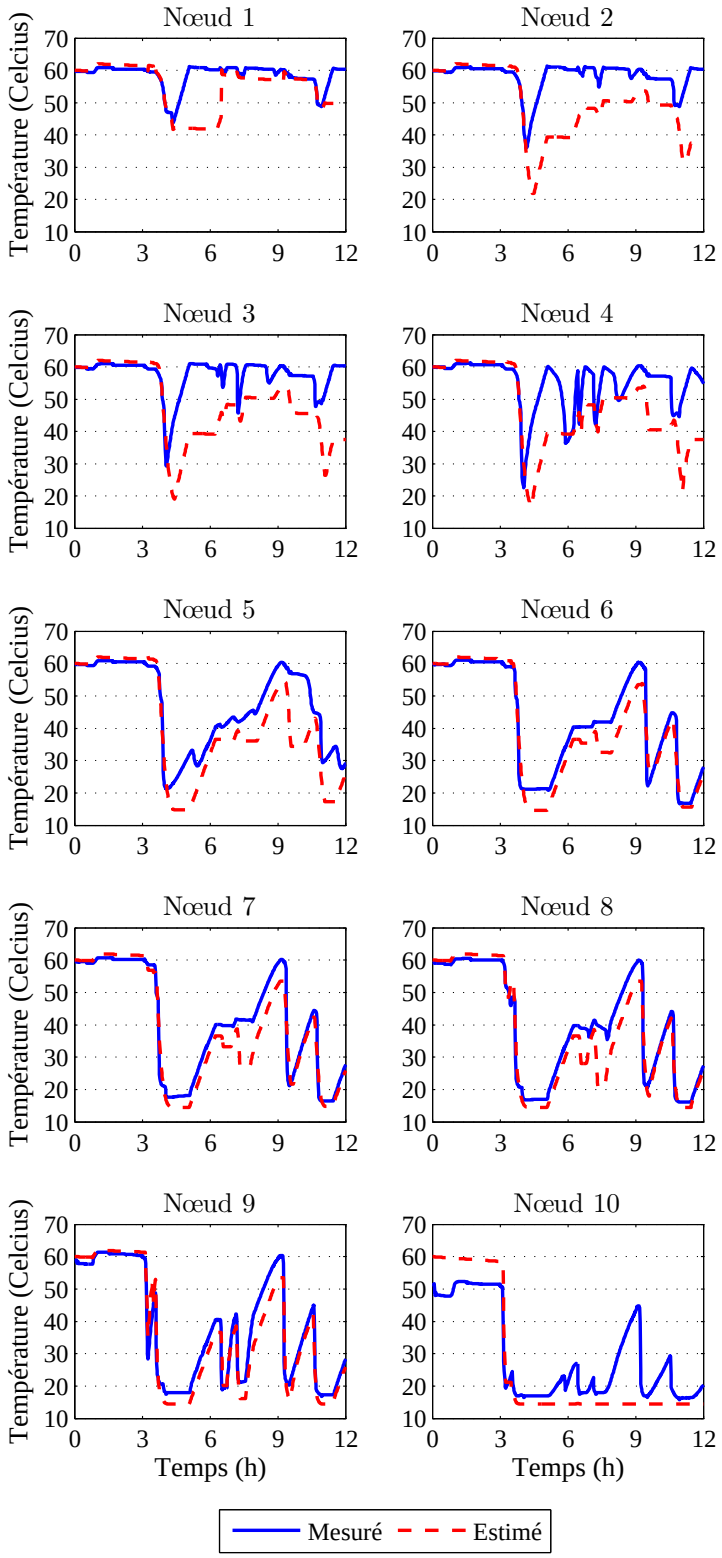


Figure 5.13 Température nodale d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par un observateur multivarié basé sur la mesure de la température du nœud 1

Tableau 5.5 Performance de la reconstruction par un observateur multivarié basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9

Nœud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mesure	✓	×	×	✓	×	×	×	×	✓	×
Température (°C)										
ME	-0.95	-1.7	-1.5	0.36	-4.5	-1.1	-1.0	-1.0	-0.56	-2.7
RMSE	2.1	3.0	2.7	4.2	7.6	3.7	4.2	4.7	2.5	9.5
Énergie (Wh)										
ME	-29	-52	-46	11	-135	-32	-31	-31	-17	-82
MAPE (%)	-1.9	-3.5	-3.0	0.72	-8.9	-2.1	-2.1	-2.1	-1.1	-5.4
RMSE	63	92	82	130	230	110	130	140	76	290

Erreur	Globale	Maximale
Température (°C)		
ME	-1.5	-6.6
RMSE	3.0	-
Énergie (Wh)		
ME	-440	-2000
MAPE (%)	-2.9	-13
RMSE	920	-

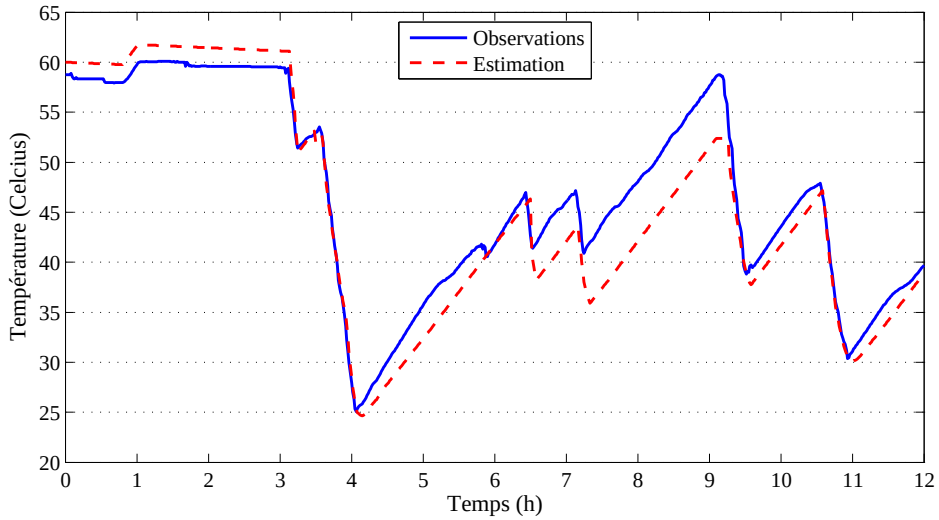


Figure 5.14 Température moyenne d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par un observateur multivarié basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9

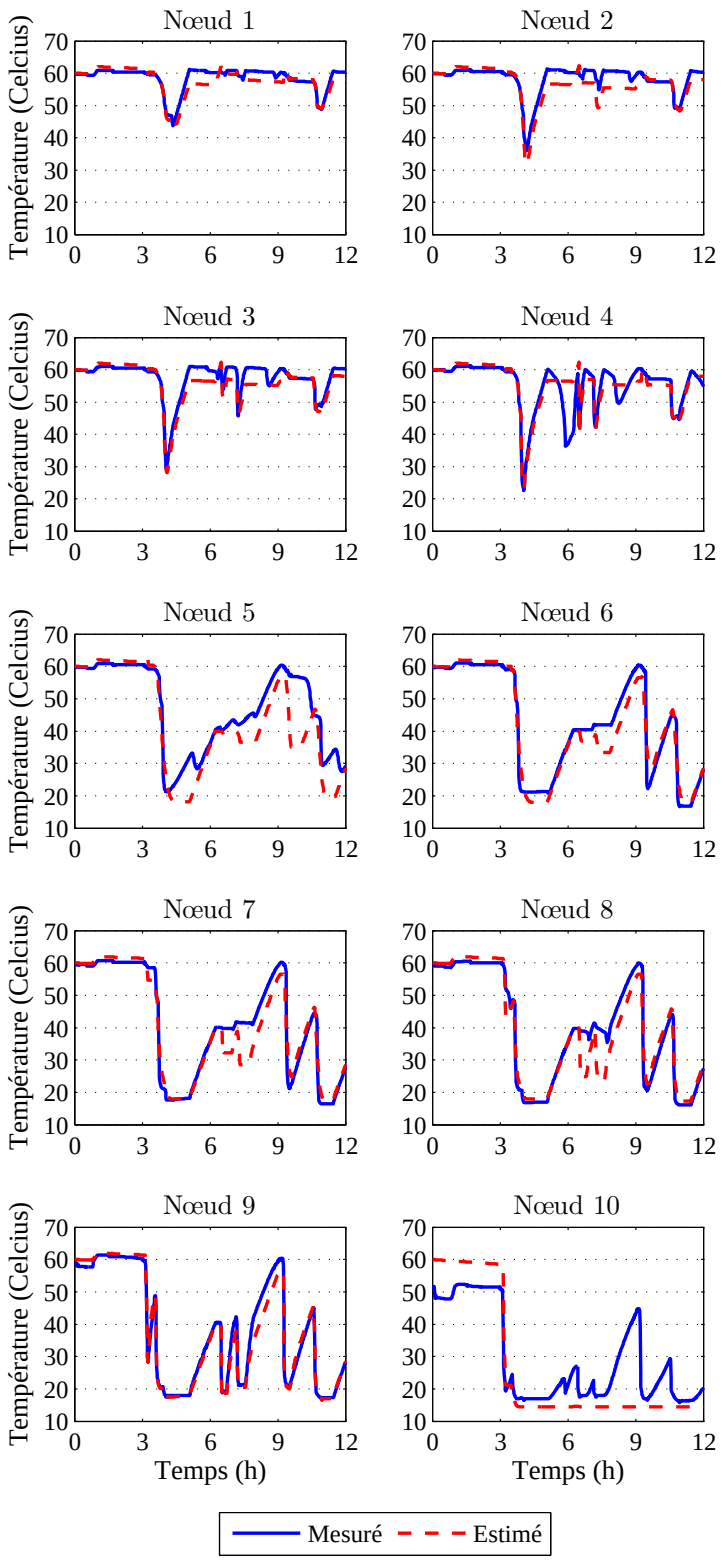


Figure 5.15 Température nodale d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par un observateur multivarié basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9

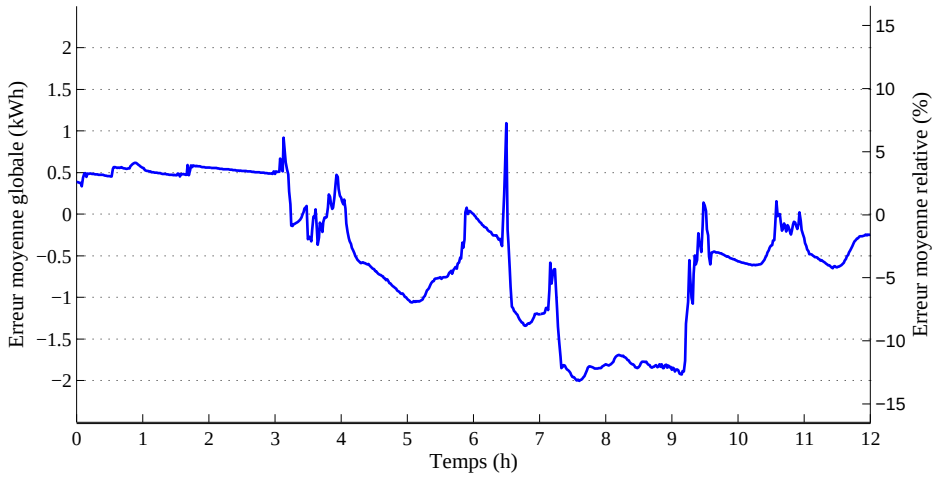


Figure 5.16 Évolution de l'erreur moyenne globale sur l'énergie du chauffe-eau produite par l'observateur multivarié. Axe de gauche : erreur moyenne globale en kWh (c.f. équation 5.34). Axe de droite : erreur moyenne relative en % (c.f. équation 5.37) par rapport à la quantité d'énergie que peut stocker le chauffe-eau pour respecter les limites de confort de l'utilisateur

5.5 Reconstruction de l'état continu du chauffe-eau par filtrage de Kalman

Un filtre de Kalman offre des avantages intéressants par rapport à l'observateur multivarié. Il peut notamment être appliqué peut importe l'état de tirage, actif ou inactif. Bien que les considérations d'observabilité discutées plus haut soient également importantes dans le cas du filtre de Kalman, ce dernier est moins sensible en vertu de ses capacités intrinsèques de prédiction. Également, comme il s'applique à des systèmes linéaires variant dans le temps, et contrairement au cas de l'observateur de Luenberger multivarié, il n'y aura pas besoin de séparer les périodes de tirage de celles de non tirage.

La section 5.5.1 présente la théorie du filtrage de Kalman et la section 5.5.2 compare les résultats obtenus par cette nouvelle méthode d'estimation de l'état continu en température.

5.5.1 Design du filtre de Kalman

Utilisé dans un vaste éventail de domaines, le filtre de Kalman estime les états dynamiques d'un système à partir de mesures bruitées. Dans le cadre de l'estimation de l'état de tirage d'un CE, nous considérons le filtre de Kalman dans un contexte discret. L'estimation par ce filtre de l'état actuel du système ne requiert que la connaissance de l'estimé de l'état antérieur et des mesures actuelles. L'état du filtre de Kalman comprend deux variables : $\hat{X}_{k|k}$, qui représente l'estimation de la température à l'instant k, et la matrice de covariance de l'erreur $\Sigma_{k|k}$. Cette matrice de covariance d'erreur est un indicateur de la précision de l'estimation. Plus une entrée sur sa diagonale est élevée, plus l'erreur d'estimation sur la composante d'état correspondante sera élevée en moyenne.

L'implémentation du filtre de Kalman est réalisée en deux étapes distinctes : la prédiction et la mise à jour. Pour bien comprendre son fonctionnement, référons-nous tout d'abord à l'équation d'état d'un CE décrite par (5.15) à la section 5.2. Dans un contexte discret et multivarié, ainsi que pour un état de tirage $q(t)$ constant, cet ensemble d'équations devient :

$$\begin{cases} \frac{X(k+h)-X(k)}{h} = \mathbf{A}X(k) + \mathbf{B}'U'(k) \\ Y(k) = \mathbf{C}X(k) \end{cases} \tag{5.40}$$

À des fins de simplification, nous considérons l'incrément infinitésimal h égal à une unité de pas de temps de simulation. Autrement dit, avec $h = 1$, il se déroule 1 pas de temps de simulation entre k et $k + 1$, soit 60 secondes selon les conclusions du précédent chapitre

(section 4.8). L'équation (5.40) se simplifie alors ainsi :

$$\begin{cases} X_{k+1} = (\mathbb{I} + \mathbf{A})X_k + \mathbf{B}'U'_k + W_k \\ Y_k = \mathbf{C}X_k + V_k \end{cases} \tag{5.41}$$

Notons l'ajout des termes W_k et V_k dans l'équation (5.41). Ceux-ci correspondent respectivement au bruit dans le système et la mesure. Ces deux termes sont décrits par un bruit blanc gaussien. Il est en effet prudent de considérer un bruit intrinsèque à l'outil de mesure lors de la prise de mesure, bien que ce bruit soit relativement faible pour un système bien calibré. Cependant, l'idée d'ajouter un bruit à la RE du système n'est pas aussi évidente. L'inclusion de ce bruit dans l'équation d'état permet de modéliser l'erreur entre la température estimée par le modèle numérique et la température réelle du système. Nous considérerons que cette erreur peut-être aussi modélisée par un bruit blanc gaussien. Autrement dit, nous avons, respectivement pour le bruit du système et le bruit de mesure, que :

$$W_k \sim \mathcal{N}(0, Q) \tag{5.42}$$

$$V_k \sim \mathcal{N}(0, R) \tag{5.43}$$

Il s'agit d'une hypothèse forte et pourra être remise en question dans des travaux futurs. Dans le cadre des simulations réalisées dans ce rapport, nous utilisons les valeurs de covariance des bruits de système et de mesure suivantes : $\boxed{Q = 10 \times \mathbb{I}}$ et $\boxed{R = 0.1 \times \mathbb{I}}$. Cette définition suit l'hypothèse que le bruit du système et de mesure est le même pour chacun des nœuds du modèle. La valeur de R est choisie petite puisque les instruments de mesure mis en place sur le banc de test sont précis. Pour une valeur de $R = 0.1$, cela représente un écart type d'environ 0.32 sur les mesures. Quant à la matrice de covariance du bruit du système Q, elle est définie suivant l'analyse de l'erreur quadratique moyenne de chaque nœud réalisée lors de la validation expérimentale du modèle multi-nodal à la section 4.4. Ainsi, une covariance d'erreur $Q = 10$ représente un écart type d'environ 3.16 entre les températures estimés et observés, une valeur proche du erreur type de la moyenne (RMSE) de 2.85 présenté au tableau 4.2.

Afin de conserver une notation simple, nous posons les changements de variables suivants :

$$A = (\mathbb{I} + \mathbf{A})$$
$$B = \mathbf{B}'$$
$$C = \mathbf{C}$$

Nous pouvons alors réécrire (5.41) pour obtenir l'ensemble d'équations suivant :

$$\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + BU_k + W_k \\ Y_k = CX_k + V_k \end{cases} \tag{5.44}$$

À partir de (5.44), nous définissons les étapes d'implémentation du filtre.

- **Étape 0 : Initialisation**

  Lors de l'étape d'initialisation, il suffit de définir une valeur initiale pour l'estimé en température $\hat{X}_{0|0}$ et la matrice de covariance de l'erreur Σ_0. Dans le contexte d'un CE, $\hat{X}_{0|0}$ peut être égale à la température de consigne.

- **Étape 1 : Prédiction**

  L'étape de prédiction permet d'obtenir la meilleure prédiction de l'état X à l'instant k connaissant l'état $k-1$. Cela se traduit par :

$$X_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1|k-1} + BU'_{k-1} \tag{5.45}$$

$$\Sigma_{k|k-1} = A\Sigma_{k-1|k-1}A^{\intercal} + Q \tag{5.46}$$

  où

  - $X_{k|k-1}$ est le vecteur d'état prédit
  - $\Sigma_{k|k-1}$ est la matrice a priori de la covariance de l'erreur
  - Q est la matrice de covariance du bruit du système

- **Étape 2 : Mise à jour**

  Cette étape consiste en une mise à jour de l'estimé à partir de la mesure de la température. Dans un premier temps, nous calculons l'innovation, qui est en quelque sorte la différence entre la mesure et l'estimé, soit :

$$\widetilde{Y}_k = Y_k - CX_{k|k-1} \tag{5.47}$$

  Puis, nous calculons le gain de Kalman :

$$K_k = \Sigma_{k|k-1}C^{\intercal}(C\Sigma_{k|k-1}C^{\intercal} + R)^{-1} \tag{5.48}$$

  où

  - R est la matrice de covariance du bruit de mesure
  - $(C\Sigma_{k|k-1}C^{\intercal} + R)^{-1}$ est la matrice de covariance de l'innovation

  La mise à jour de l'état estimé est alors une correction de l'état prédit en fonction de

l'innovation et du gain de Kalman tel que :

$$\hat{X}_{k|k} = X_{k|k-1} + K_k \widetilde{Y}_k \tag{5.49}$$

$$\Sigma_{k|k} = \Sigma_{k|k-1} - \Sigma_{k|k-1} C^{\intercal} (C \Sigma_{k|k-1} C^{\intercal} + R)^{-1} C \Sigma_{k|k-1} \tag{5.50}$$

Si aucune nouvelle mesure n'est disponible lors de l'étape de mise à jour, alors l'état prédit à l'étape précédente devient le meilleur estimé de l'état actuel.

Les étapes 1 et 2 sont utilisées en boucle afin d'obtenir toujours la meilleure estimation de l'état du CE. La figure 5.17 résume le fonctionnement de cette méthode d'estimation.

Comme il a été mentionné au début de cette sous-section, l'état discret de tirage d'eau chaude $q(k)$ et la commande de chauffage $U'(k)$ sont considérés comme connus lors de l'utilisation du filtre de Kalman. Il est important de noter aussi que seuls les nœuds mesurés profiterons du filtre de Kalman, car ce sont les seuls qui auront une innovation non-nulle.

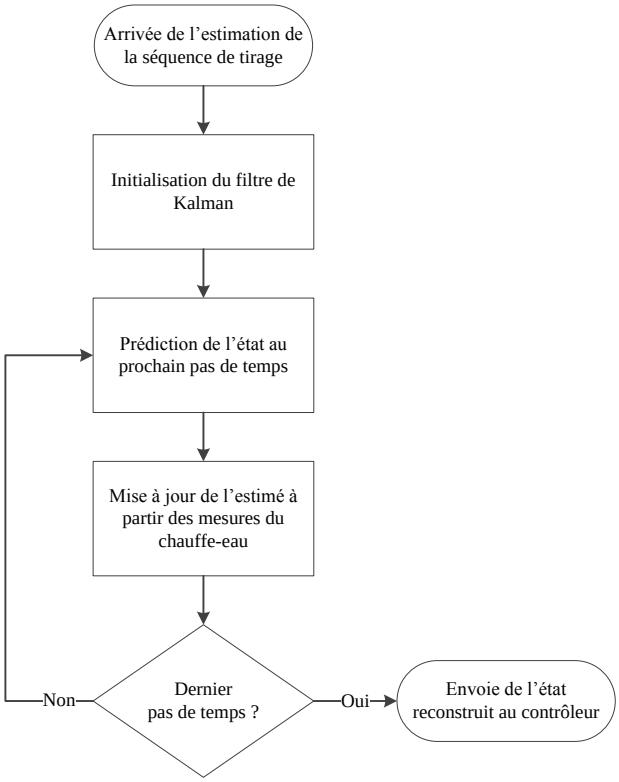


Figure 5.17 Schéma fonctionnel du filtrage par Kalman

5.5.2 Résultats de la reconstruction d'état par filtrage de Kalman

Les figures 5.19 et 5.20 présentent respectivement les résultats de la reconstitution de l'état continu de la température moyenne et de chaque nœud d'un chauffe-eau segmenté en 10 strates. Plusieurs hypothèses présentées à la section 5.4.3 sont utilisées, soit :

- La séquence de contrôle des éléments est connue à priori
- La séquence de tirage est estimée à priori
- La durée de la période de reconstruction est égale à celle de la séquence de tirage
- Le pas de temps de reconstruction est le même que celui de la séquence de tirage
- Des mesures des capteurs de température dans le réservoir du CE de référence sont disponibles à tous les pas de temps de la période de reconstruction

Pour les mêmes raisons présentées à la section 5.4.3, un vecteur de mesure contenant les données des capteurs situés au niveau des éléments chauffants est utilisé en plus de la mesure du nœud supérieur (nœud 1, 4 et 9). Il est intéressant de noter qu'un vecteur de mesure réduit comprenant uniquement les mesures des capteurs situés dans les strates 4 et 9 pourrait être considéré, car la connaissance de la température de la strate supérieure n'est plus nécessaire pour le bon fonctionnement du filtre.

La figure 5.19 montre qu'il y a une bonne corrélation entre l'estimation de la température moyenne et celle observée expérimentalement. Un léger décalage est observé à la 4e heure, causé principalement par la surestimation de la durée de l'événement de tirage. Néanmoins, il est intéressant de remarquer que la rétroaction permet de minimiser de façon importante son impact sur l'ensemble de la trajectoire.

Une seconde déviation apparait aux alentours de la 7e heure. En se référant à la figure 5.20, il est possible de constater qu'à cet instant, le refroidissement est beaucoup plus ressenti par le modèle numérique que par les mesures expérimentales. Il est intéressant de remarquer que ce sont principalement les nœuds 9 et 10 du modèle expérimental qui subissent la perte de chaleur, comparativement au modèle numérique où ce sont les nœuds 7 à 9 qui subissent majoritairement le refroidissement. L'analyse des mesures expérimentales permet d'entrevoir la création d'une seconde thermocline entre le nœud 8 et 9, un phénomène totalement négligé par le modèle numérique. De plus, l'observation d'un réchauffement de la strate inférieure à l'intérieur du réservoir, causé par la diffusion de la chaleur entre les strates 9 et 10, augmente le niveau d'énergie maximal du CE, situation qui n'est pas possible avec le modèle numérique, car celui-ci suppose une diffusion de la chaleur uniquement vers le haut, le nœud inférieur n'étant dans ce cas pas chauffé.

Une analyse détaillée des performances du filtre de Kalman pour la reconstruction de l'état continu du CE est présentée au tableau 5.6. Il est possible de remarquer qu'en moyenne, la

performance du filtre de Kalman est légèrement meilleure que celle de l'observateur multivarié avec une erreur moyenne (ME) globale de −270 Wh (vs. −440 Wh pour l'observateur) et une erreur type de la moyenne (RMSE) associée de 730 Wh (vs. 920 Wh pour l'observateur) par pas de temps. En d'autres termes, cette ME globale représente une erreur moyenne relative (MPE) globale d'environ −2.0 % par rapport à l'état de charge complet, soit une amélioration de 0.9 % par rapport à l'observateur multivarié. De plus, une ME globale maximale de −1700 Wh est observée sur la durée de la simulation. Ainsi, dans le pire des scénarios, le filtre de Kalman sous-estime de 12 % la charge totale du système.

La figure 5.21 présente l'évolution de la ME totale durant la période d'estimation. Il est possible de remarquer une augmentation de l'erreur à partir de la 7e heure, correspondant aussi à la déviation observée sur l'évolution de la température moyenne, présentée à la figure 5.19. Tel que mentionné précédemment, cette déviation est principalement causée par le réchauffement de la strate inférieure du CE par diffusion de la chaleur, un phénomène négligé par le modèle numérique. La distribution de cette erreur tout au long de la période d'estimation est présentée à la figure 5.18.

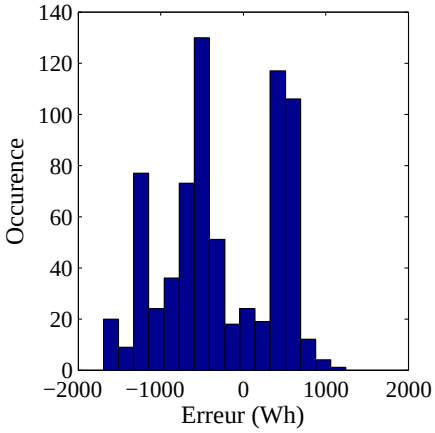


Figure 5.18 Distribution de l'erreur moyenne globale du filtre de Kalman

En plus d'une meilleure performance d'estimation de l'état de charge d'un CE, le filtre de Kalman offre plusieurs avantages par rapport à l'utilisation de l'observateur multivarié, principalement grâce à sa flexibilité envers le contenu du vecteur de mesures et le fait que la méthode est applicable peu importe l'état de tirage du système.

Tableau 5.6 Performance de la reconstruction par filtrage de Kalman basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9

Nœud	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mesure	✓	×	×	✓	×	×	×	×	✓	×
Température (°C)										
ME	-0.0012	-2.7	-2.8	0.0059	-0.91	1.3	0.069	-1.2	0.042	-2.8
RMSE	0.25	3.9	4.2	0.85	6.7	3.5	3.7	5.5	1.4	9.5
Énergie (Wh)										
ME	-0.035	-82	-86	0.18	-28	39	2.1	-38	1.3	-84
MAPE (%)	-0.0025	-5.9	-6.2	0.013	-2.0	2.8	0.15	-2.7	0.091	-6.1
RMSE	7.6	120	130	26	200	110	110	170	44	290

Erreur	Globale	Maximale
Température (°C)		
ME	-0.91	-5.6
RMSE	2.4	-
Énergie (Wh)		
ME	-270	-1700
MAPE (%)	-2.0	-12
RMSE	730	-

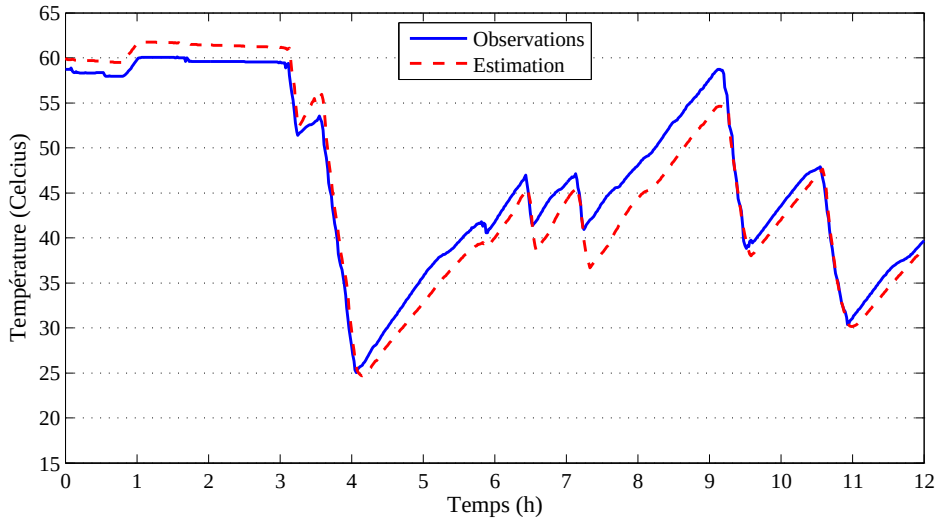


Figure 5.19 Température moyenne d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par filtrage de Kalman basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9

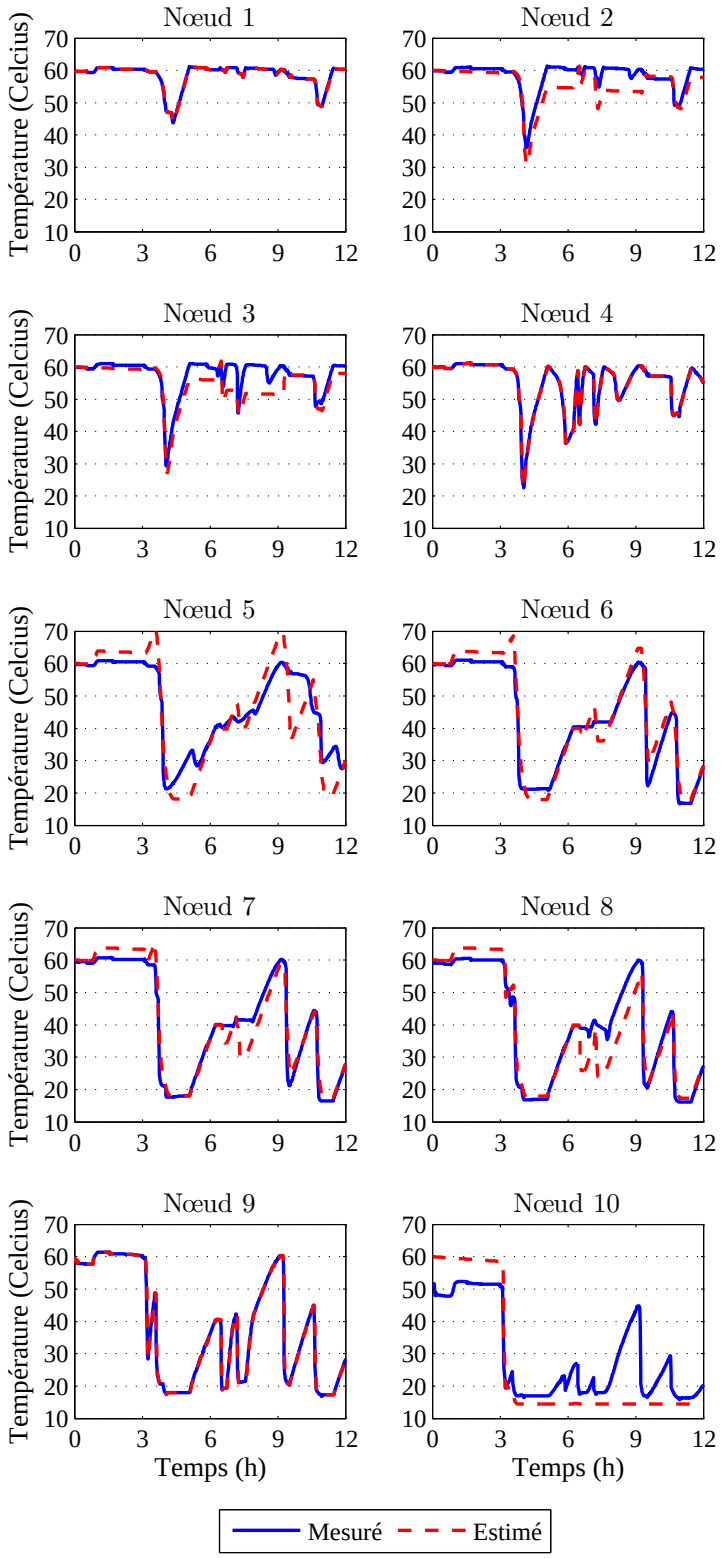


Figure 5.20 Température nodale d'un chauffe-eau suite à la reconstruction expérimentale de son état par filtrage de Kalman basé sur les mesures de la température des nœuds 1, 4 et 9

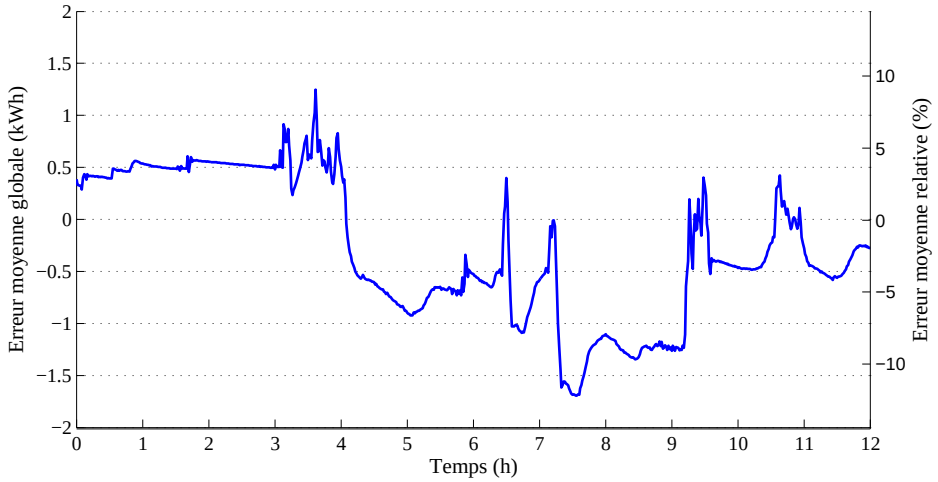


Figure 5.21 Évolution de l'erreur moyenne globale sur l'énergie du chauffe-eau produite par le filtre de Kalman. Axe de gauche : erreur moyenne globale en kWh (c.f. équation 5.34). Axe de droite : erreur moyenne relative en % (c.f. équation 5.37) par rapport à la quantité d'énergie que peut stocker le chauffe-eau pour respecter les limites de confort de l'utilisateur

5.6 Résumé

Ce chapitre 5 propose un processus permettant de reconstruire l'état complet d'un chauffe-eau électrique, soit l'état discret (état du tirage d'eau) et l'état continu (température à tous les nœuds de mesure). Ce processus est géré par le contrôleur local du CE et inclut deux étapes successives : l'estimation de l'état discret, réalisée à partir d'un test de vraisemblance de différents scénarios possibles de tirage d'eau chaude et opérant uniquement sur base de l'évolution de la température moyenne du chauffe-eau telle que directement mesurée, et la reconstruction de l'état continu du système, obtenue grâce à l'utilisation soit d'un observateur d'état couplé avec une simulation numérique (modèle multi-nodal) ou d'un filtre de Kalman.

La représentation d'état d'un CE est développée dans un premier temps. Une importante modification est faite au modèle développé au chapitre 4 : la puissance des éléments chauffants est distribuée dans chaque strate impliquée sous la forme d'un élément chauffant intermédiaire répondant au même contrôle que l'élément principal. Cette hypothèse permet de conserver le caractère linéaire du modèle simplifié tout en tenant compte de la diffusion de la chaleur à l'intérieur du réservoir. Dans la forme $\mathbf{A}X + \mathbf{B}U$, le terme $\mathbf{B}U$ est modifié afin d'inclure un terme constant représentant les pertes en attentes subies par le système. Cette RE sert de base pour le développement de l'estimation d'état de tirage et celui de l'observateur du système.

L'estimation de l'état discret par test de vraisemblance se base sur la connaissance à priori des statistiques du processus de tirage d'eau chaude. Ce processus est caractérisé par une chaîne de Markov à deux états, et les taux de transition entre ces états sont considérés connus. Ces derniers sont obtenus à partir de l'analyse de mesures de profils expérimentaux de tirage d'eau chaude réalisés par Hydro-Québec chez plus de 70 clients volontaires. En limitant le nombre de sauts permis dans l'état discret, il est possible de générer un ensemble fini de scénarios candidats de tirage sur une certaine fenêtre de temps. Cet intervalle est appelé fenêtre d'estimation et le nombre de scénarios possibles augmente avec sa longueur. Pour chaque fenêtre d'estimation, un ensemble de mesures de la température moyenne du réservoir est recueilli. Les mesures sont prises à chaque minute, cette périodicité correspondant au pas de temps de simulation du système. Ainsi, pour chaque scénario possible, l'évolution en température du système est calculée à chaque pas de temps de simulation. De plus, l'erreur quadratique moyenne du scénario considéré est calculée par rapport à l'ensemble de mesures. Si l'erreur est comprise dans l'intervalle de confiance définit à priori de l'estimateur, le scénario est conservé. Dans le cas contraire, il est rejeté. Lorsque tous les scénarios sont évalués, l'estimateur calcule à partir des propriétés théoriques de la chaîne de Markov la probabilité de réalisation pour chaque scénario retenu. Seul le plus probable est alors conservé suite à ce

calcul. Ce scénario est envoyé vers l'observateur pour la reconstruction d'état de température, deuxième étape du processus d'estimation. Une configuration d'estimateur comprenant une fenêtre d'estimation de 900 secondes et un nombre de sauts maximal de 4 par intervalle permet d'obtenir une estimation de l'état discret en temps réel, soit à l'intérieur de la période de mesure du système. Une telle configuration permet d'obtenir une estimation de l'état discret correcte 93.7 % du temps.

Pour le processus de reconstruction de l'état continu, deux approches différentes sont considérées : l'observateur multivarié et le filtre de Kalman. Une analyse détaillée des performances de chaque méthode est réalisée afin de définir quelle approche est la plus avantageuse par rapport aux objectifs du projet, soit de conserver un modèle simple et un minimum de mesures nécessaires à la reconstruction.

Avant de procéder à la reconstruction du système par un observateur, il est important de vérifier les conditions d'observabilité du système. Ce critère vise à savoir si l'observation des mesures de sortie du système (mesure) sur un certain intervalle permet de reconstruire l'état complet du CE, soit la température à chacun des nœuds. Ce test permet de démontrer qu'il est nécessaire que le système soit dans un état de tirage actif et que le nœud du haut du CE soit mesuré pour que le système soit observable. Afin de respecter en tout temps les conditions d'observabilité mentionnées précédemment, l'observateur doit conjuguer estimation et prédiction. Lorsque le système n'est pas dans un état de tirage actif, l'évolution de la température pour chaque nœud est prédite par le modèle non linéaire exact du CE. Si l'état de tirage est actif, la température à chaque nœud est estimée par l'observateur. Alors qu'il reçoit l'estimation de la séquence de tirage en provenance de l'estimateur par test de vraisemblance, l'observateur reçoit aussi les mesures des capteurs de température le long d'une tige insérée dans le réservoir. De cette façon, l'unique mesure de la température du nœud supérieur résulte en une MPE globale de -9.7 % sur la charge complète du CE. En intégrant les mesures des nœuds au niveau des éléments du haut et du bas, l'observateur permet d'obtenir une MPE globale de -2.9 %, une nette amélioration par rapport à la configuration de mesure précédente.

Quant au filtre de Kalman, celui-ci peut être utilisé peu importe l'état discret du système. De plus, il ne requiert pas obligatoirement la mesure de température de la couche supérieure du CE, ce qui en fait une approche plus flexible et robuste. Pour le même cas expérimental utilisé pour qualifier l'observateur multivarié, le filtre de Kalman présente une MPE globale inférieure, égale à -2.0 % contre -2.9 % pour l'observateur. Pour ces raisons, le filtre de Kalman représente une approche plus intéressante que l'observateur multivarié pour la reconstruction de l'état continu de la température d'un CE dans le cadre de ce projet. Il est

possible de remarquer que l'estimation réalisée par le filtre de Kalman ou par l'observateur multivarié peut s'écarter des valeurs observées par environ $\pm 10 - 15$ % de l'énergie totale stockée dans le réservoir.

Avec l'estimation de l'état discret et de l'état continu d'un chauffe-eau électrique, le contrôleur local par champ moyen est en mesure de générer une loi de commande optimale fidèle aux conditions réelles du CE.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

L'objectif principal de ce mémoire a été, d'une part, de développer un modèle numérique de chauffe-eau électrique simple et complet, servant de référence pour la plate-forme de simulation d'un réseau électrique intelligent élaborée dans le cadre du projet smartDESC, et d'autre part, de construire un processus d'estimation permettant de connaître l'état complet d'un chauffe-eau électrique, soit l'état de tirage (état discret) et l'état en température (état continu), à partir d'un ensemble minimal de mesures. Dans un contexte de contrôle de la charge sur un réseau électrique, cela signifie qu'un minimum de mesures est nécessaire afin d'assurer le respect des contraintes locales du CE, liées notamment au confort de l'usager, tout en assurant une réactivité maximale, c'est-à-dire stockage s'il y a chauffage ou affaissement de la charge s'il y a interruption des éléments chauffants, de la population de CE.

Les résultats présentés dans le mémoire permettent de conclure qu'il est possible de satisfaire aux exigences de modélisation, de prise de mesures et d'estimation préalables à la mise en place d'un régulateur à champ moyen, à un coût qui serait raisonnable. Il est intéressant de rappeler qu'un tel régulateur présente un potentiel important d'amélioration par rapport à des stratégies de commande classiques exigeantes à la fois en termes de calculs et d'échange de données entre le centre de conduite et les charges commandées. La section 6.1 présente une synthèse des travaux présentés dans ce mémoire. La section 6.2 conclut avec un ensemble de recommandations pour des travaux futurs.

6.1 Synthèse des travaux

La validation du modèle numérique du chauffe-eau électrique ainsi que la performance du processus d'estimation ont avant tout comme référence un ensemble d'essais expérimentaux réalisés en laboratoire dans un environnement parfaitement contrôlé. Présentés au Chapitre 3, ces essais sont réalisés en partenariat avec le groupe de recherche sur les réseaux électriques intelligents du CanmetÉNERGIE. On dispose pour ces essais d'un circuit d'eau fermé où la puissance du débit généré par la pompe est contrôlée par ordinateur et où la température à l'entrée et à la sortie du CE est observée en tout temps. Puis, on profite d'un CE instrumenté permettant de connaître : l'état d'activation de chaque élément chauffant, la puissance totale dégagée par l'ensemble des éléments chauffants, la température instantanée de l'eau fournie par 10 capteurs en température positionnés de façon équidistante le long du réservoir et une lecture instantanée de la température moyenne de l'eau obtenue par la mesure d'une résistance filaire introduite dans le réservoir.

Sur la base des travaux de Cook (1980), un ensemble d'essais permettant de caractériser la performance thermique du CE est réalisé. Cet ensemble comprend :

- Un essai de chauffage, où le CE initialement froid (température de l'entrée d'eau froide) est chauffé sans tirage d'eau jusqu'à ce que la température de consigne soit atteinte pour chaque thermostat
- Un essai de refroidissement à débit léger, où le CE initialement chaud (température de consigne des thermostats) est refroidit avec un débit léger constant (environ 5 L/min) jusqu'à ce que la température du réservoir soit égale à celle de l'entrée d'eau froide
- Un essai de refroidissement à débit moyen, où le CE initialement chaud (température de consigne des thermostats) est refroidit avec un débit moyen constant (environ 15 L/min) jusqu'à ce que la température du réservoir soit égale à celle de l'entrée d'eau froide
- Un essai à tirage aléatoire, où une séquence de tirage préalablement définie par une simulation du processus de tirage stochastique évoluant selon une chaîne de Markov à deux états est appliquée au système

Un second ensemble de données expérimentales est utilisé. Il s'agit d'un ensemble de mesures de la consommation d'eau chaude sur un intervalle de 5 minutes réalisées par Hydro-Québec sur une population de 75 chauffe-eau électriques entre les mois de novembre 2006 et avril 2007. Ce jeu de mesures est particulièrement pertinent pour modéliser les habitudes de consommation des usagers sur le réseau.

Ces ensembles de données permettent de valider le modèle numérique du CE et d'évaluer la performance du processus d'estimation. L'essai à tirage aléatoire est principalement utilisé dans ce mémoire car il représente une dynamique réaliste de l'utilisation d'un chauffe-eau électrique dans un contexte résidentiel.

Le Chapitre 4 décrit le modèle numérique du CE proposé dans ce mémoire. Il s'agit d'un modèle basé sur une approche multi-nodale. Selon cette approche, le réservoir d'eau du CE est subdivisé en un nombre fini de sous-volumes de même dimension que l'on appelle « nœud ». Chaque nœud possède une température uniforme et répond à l'équation de conservation de l'énergie. La présence de deux éléments chauffants dans le réservoir, l'un dans le haut et l'autre dans le bas, génère une stratification de la température de l'eau à l'intérieur du CE. Le modèle multi-nodal permet de tenir compte de ce phénomène en redistribuant l'énergie dégagée par les éléments dans les nœuds qui sont situés au dessus ou au niveau de chaque élément. L'implémentation de cette approche multi-nodale est en accord avec les modèles Type 4 et 534 de TRNSYS, affichant respectivement une erreur absolue moyenne de la température moyenne du CE de 0.26 °C et de 0.87 °C. Elle affiche cependant une erreur plus élevée par rapport aux mesures expérimentales de l'essai aléatoire, soit une MAE de 2.36 °C pour la température moyenne. L'augmentation de cette erreur est causée par une disparité entre la prédiction de

la température au niveau de l'élément chauffant du haut et au niveau du bas du réservoir. Cette disparité est attribuable au caractère trop approximatif du modèle numérique qui ne tient pas compte de la déstratification de l'eau. Une amélioration de ce modèle fait partie des recommandations présentées à la section 6.2. Après avoir évalué l'impact du maillage et du pas de temps, il est possible de conclure que la configuration optimale pour la simulation du modèle multi-nodale est une découpe en 10 nœuds sur un pas de temps de 60 secondes. L'analyse de l'influence des conditions initiales suggère ensuite qu'il est nécessaire d'initialiser le modèle pendant 24 heures. Les résultats de ce chapitre confirment ainsi la validité du modèle multi-nodal.

Le Chapitre 5 développe le processus complet d'estimation de l'état du chauffe-eau électrique, discret et continu. Dans un premier temps, l'état discret du CE, représentant l'état de tirage actif ou inactif, est estimé grâce à un test de vraisemblance. Ce dernier permet, en comparant plusieurs scénarios de tirage possibles, de trouver celui qui minimise l'erreur type de la moyenne entre la prédiction et les mesures expérimentales de la température moyenne de l'eau dans le réservoir sur une fenêtre de temps d'estimation. Le nombre de scénarios réalisables augmente cependant de façon exponentielle avec la longueur de cette fenêtre et selon le nombre de sauts maximal retenu. Après analyse, une fenêtre d'estimation de 900 secondes (15 minutes) considérant au maximum 4 sauts permet un temps de calcul du scénario optimal inférieur au temps de mise à jour des mesures expérimentales, soit 60 secondes. Avec cet outil, il est alors possible d'estimer l'état discret correctement 93.7 % du temps. Par la suite, la reconstruction de l'état continu de la température du CE est réalisée en comparant deux approches distinctes : l'observateur multivarié et le filtre de Kalman. Dans un premier temps, une analyse détaillée des conditions d'observabilité de l'état du CE est réalisée dans un contexte d'observateur multivarié. Il est alors conclu qu'un état actif du tirage d'eau chaude et un accès à la mesure de la température de l'eau dans le haut du réservoir sont deux conditions nécessaires à l'observabilité du système. Connaissant ces deux conditions *sine qua non*, on procède à la construction d'un observateur d'état pour reconstruire l'état continu en température du CE avec un minimum de mesures. Après l'essai de plusieurs configurations de mesures, on retient le scénario optimal qui consiste à mesurer le nœud du haut, celui au niveau de l'élément chauffant supérieur et finalement celui au niveau de l'élément inférieur. Cette rétroaction permet, d'une part, de limiter les erreurs d'estimation de l'état discret, puis de reconstruire plus fidèlement la température des autres nœuds. Avec l'utilisation d'un observateur multivarié, une MPE globale de -2.9 % est obtenue sur l'état de charge complet du système avec une mise à jour disponible en temps réel, soit avant l'émission du prochain jeu de mesures. En considérant une approche par filtrage de Kalman, une MPE globale de -2.0 % est observée. À cela s'ajoute une plus grande flexibilité du filtre par rapport au

vecteur de mesures et une utilisation indépendante de l'état discret du système, ce qui fait du filtre de Kalman l'approche recommandée pour la reconstruction de l'état continu de la température d'un chauffe-eau. De plus, il est intéressant de noter que l'estimation de l'énergie totale stockée dans le réservoir faite par le filtre de Kalman ou par l'observateur multivarié peut s'écarter des valeurs mesurées par environ $\pm 10 - 15$ %.

L'outil d'estimation développé dans ce mémoire offre donc au régulateur par champ moyen local la possibilité de mettre à jour ses prédictions d'état discret et continu du chauffe-eau électrique en temps réel avec une précision acceptable, tout en minimisant le nombre de mesures requises. Le régulateur présente alors le potentiel de répondre à la demande en respectant les conditions de confort de l'usager tout en maximisant le potentiel énergétique de stockage du CE.

6.2 Améliorations futures

Afin d'améliorer la précision du processus d'estimation, on recommande les actions suivantes :

- Améliorer le modèle de chauffe-eau électrique pour tenir compte de la déstratification de l'eau dans le réservoir. La déstratification est l'un des facteurs d'erreur les plus importants lors de l'estimation d'état du système. Un modèle plus fidèle permettrait d'augmenter la précision de l'estimation et possiblement de réduire le nombre de mesures nécessaires au processus. Le défi est de conserver la linéarité du modèle tout en le raffinant. L'hypothèse des éléments chauffants fictifs intermédiaires est une bonne première approche qui mérite d'être approfondie
- Transformer les événements de tirage à volume constant en événements de tirage à énergie constante. Cette recommandation découle du fait que l'usager, lorsqu'il utilise de l'eau chaude, demande en fait au CE une certaine énergie correspondant au mélange de l'eau chaude et de l'eau froide du robinet. Or, le volume nécessaire d'eau chaude pour obtenir cette énergie varie selon la température de sortie du chauffe-eau et selon la température de l'eau froide en provenance de l'aqueduc. Cette modélisation respecte mieux les habitudes de consommation des usagers, mais pose un défi à la résolution des équations du système puisque le volume soutiré à chaque nœud est maintenant fonction de sa propre température. Cette amélioration offrirait une meilleure correspondance entre le profil de consommation d'énergie simulé et celui-ci mesuré expérimentalement.
- Inclure un modèle stochastique d'événements de tirage d'eau chaude par chaîne de Markov *multi-état*. Dans le cadre de ce mémoire, une chaîne de Markov à deux états, soit un tirage actif ou inactif, a été utilisée. Il est ainsi supposé que tous les événements de tirage pouvant survenir tout au long de la simulation sont de durée variable, mais de même

intensité. Or, ce modèle n'offre pas de différentiation entre un lavage de main ou une douche. Un modèle multi-état permettrait de raffiner la simulation du tirage d'eau en décrivant plusieurs états à différentes intensités, chaque état possédant son propre ensemble de coefficients de transition inter-état.

- Estimer les paramètres de transition de la chaîne de Markov. Le processus d'estimation de l'état de tirage repose entre autre sur la connaissance a priori des coefficients de transition de la chaîne de Markov. En effet, la probabilité de réalisation de chaque scénario retenu est calculée à partir de ces coefficients. Or, nous pouvons imaginer que nous n'avons pas accès a priori à ces valeurs. Il serait alors possible de généraliser le processus d'estimation en intégrant un estimateur de ces paramètres de transition.
- Optimisation de la génération des scénarios possibles de tirage d'eau lors de l'estimation de l'état discret du système. Lors de l'estimation de l'état discret, un ensemble exhaustif de scénarios est généré suivant une loi binomiale. Or, plus le nombre de sauts considérés ou la longueur de la fenêtre d'estimation augmente, plus le nombre de scénarios possibles augmente. Le temps de calcul et la mémoire nécessaires pour générer de grands ensembles deviennent rapidement une limite à la simulation de scénarios plus complexes. Un filtrage intelligent des scénarios de tirage générés par la loi binomiale permettrait de réduire de façon importante la taille de ces ensembles et ainsi permettre une estimation sur une fenêtre d'estimation plus longue et pour des scénarios de tirage plus complexes possédant un nombre de sauts maximal élevé.

RÉFÉRENCES

C. Aguilar, D. J. White, et D. L. Ryan, “Domestic Water Heating and Water Heater Energy Consumption in Canada”, CBEEDAC, Rapp. tech. April, 2005.

Y. Allard, M. Kummert, M. Bernier, et A. Moreau, “Intermodel Comparison and Experimental Validation of Electrical Water Heater Models in TRNSYS”, dans *Proceedings of Building Simulation 2011*, Sydney, Australia, 2011, pp. 688–695. En ligne : `http://ibpsa.org/proceedings/BS2011/P_1310.pdf`

N. Atabaki et M. Bernier, “A semi-empirical model for residential electric water heaters”, *ASHRAE Transactions*, vol. 111, no. 1, pp. 1–10, 2005.

B. Becker et K. Stogsdill, “Development of Hot Water Use Data Base”, *ASHRAE Transactions*, vol. 96, no. 2, pp. 422–427, 1990.

H. Bélanger-Bonneau et M. Dionne, “Prévention de la Légionellose et des brûlures en relation avec la température des chauffe-eau électriques domestiques”, Institut national de santé publique du Québec, Rapp. tech., 2001.

M. P. Bouchelle, D. S. Parker, et M. Anello, “Factors Influencing Water Heating Energy Use and Peak Demand in a Large Scale Monitoring Study”, dans *Proceeding of the Symposium on Improved Building Systems in Hot Humid Climates*, Texas A&M University, College Station, TX, 2000.

P. Bouthillier et M. Bernier, “A new model to simulate the thermal performance of electric water heaters”, Canadian Electrical Association, Vancouver, BC, Rapp. tech., 1995.

A. Cabelli, “Storage tanks - A numerical experiment”, *Solar Energy*, vol. 19, no. 1, pp. 45–54, 1977.

A. canadienne de l’électricité, “Data World”. En ligne : `http://powerforthefuture.ca/data-world/`

CanWEA, “Vision/Mission”. En ligne : `http://canwea.ca/about-canwea/visionmission/`

R. E. Cook, “Effects of stratification in performance and control of residential electric water heaters”, *ASHRAE Transactions*, 1980.

P. Dolan, M. Nehrir, et V. Gerez, “Development of a Monte Carlo based aggregate model for residential electric water heater loads”, *Electric Power Systems Research*, vol. 36, no. 1, pp. 29–35, Jan. 1996. DOI : 10.1016/0378-7796(95)01011-4. En ligne : http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0378779695010114

P. Eslami-nejad et M. Bernier, “Impact of grey water heat recovery on the electrical demand of domestic hot water heaters”, dans *Proceedings : 11th International IBPSA Conference*, Glasgow, Scotland, 2009, pp. 681–687. En ligne : http://www.ibpsa.org/proceedings/bs2009/bs09_0681_687.pdf

P. Fairey et D. S. Parker, “A Review of Hot Water Draw Profiles Used in Performance Analysis of Residential Domestic Hot Water Systems”, Florida Solar Energy Center, Cocoa, Florida, U.S.A., Rapp. tech., 2004. En ligne : http://www.fsec.ucf.edu/en/publications/pdf/FSEC-RR-56-04.pdf

John Wood, “Electric Water Heaters Spec Sheet”. En ligne : http://www.johnwoodwaterheaters.com/files/products/en/JWElectricEnglishJE413C_0614.pdf

W. Kempton, “Residential hot water : A behaviorally-driven system”, *Energy*, vol. 13, no. 1, pp. 107–114, Jan. 1988. DOI : 10.1016/0360-5442(88)90083-7. En ligne : http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0360544288900837

A. Kizilkale et R. Malhame, “Collective Target Tracking Mean Field Control for Markovian Jump-Driven Models of Electric Water Heating Loads”, *IFAC World Congress*, pp. 1867–1872, 2014. DOI : 10.3182/20140824-6-ZA-1003.00630. En ligne : http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/prost/proceedings/ifac2014/media/files/0630.pdf

J. Kondoh, N. Lu, et D. J. Hammerstrom, “An evaluation of the water heater load potential for providing regulation service”, *IEEE Transactions on Power Systems*, pp. 1–8, 2011. En ligne : http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=6039149

J. Laurent et R. Malhamé, “A physically-based computer model of aggregate electric water heating loads”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, no. 3, pp. 1209–1217, 1994. En ligne : http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=336078

A. Lowenstein et C. C. Hiller, “Disaggregating residential hot water use”, *ASHRAE Transactions*, pp. 1019–1027, 1996. En ligne : http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Disaggregating+Residential+Hot+Water+Use#0

N. Nakahara, K. Sagara, et M. Tsujimoto, “Water thermal storage tank : Part 2 - Mixing

model and storage estimation for temperature-stratified tanks", *ASHRAE Transactions*, vol. 95, no. 2, pp. 371–394, 1989.

M. Perlman et B. E. Mills, "Development of residential hot water use patterns", *ASHRAE Transactions*, vol. 91, no. 2A, pp. 657–679, 1985.

A. Prieur, "Utilisation du potentiel de stockage thermique des chauffe-eau électriques pour combler une production variable d'énergie renouvelable", Mémoire, École Polytechnique de Montréal, 2013.

Ressources naturelles Canada, "Chauffe-eau", 2010. En ligne : `http://www.rncan.gc.ca/energie/produits/categories/chauffe-eau/13738`

Ressources naturelles Canada, "Tableau de la Base de données complète sur la consommation d'énergie", 2013. En ligne : `http://oee.nrcan.gc.ca/organisme/statistiques/bnce/apd/showTable.cfm?type=CP&sector=res&juris=ca&rn=34&page=4&CFID=31245357&CFTOKEN=efec83c600ea1ea-A7CD81F8-0212-545C-FB012A3649120D0C`

K. Vanthournout, R. D'hulst, D. Geysen, et G. Jacobs, "A Smart Domestic Hot Water Buffer", *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 3, no. 4, pp. 2121–2127, Déc. 2012. DOI : `10.1109/TSG.2012.2205591`. En ligne : `http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=6228509`

S. Wong, W. Muneer, S. Nazir, et A. Prieur, "Designing, Operating, and Simulating Electric Water Heater Populations for the Smart Grid", Report No. 2013-136 (RP-TEC), CanmetENERGY, Varennes Research Centre, Natural Resources Canada, Rapp. tech., 2013.

Z. Xu, R. Diao, S. Lu, J. Lian, et Y. Zhang, "Modeling of Electric Water Heaters for Demand Response : A Baseline PDE Model", *IEEE Transactions on Smart Grid*, vol. 5, no. 5, pp. 2203–2210, Sep. 2014. DOI : `10.1109/TSG.2014.2317149`. En ligne : `http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=6860329`

ANNEXE A Solution à l'équation différentielle du modèle multi-nodal

Les calculs ci-dessous présentent la solution complète de l'ED (4.2). Pour simplifier la notation, nous utiliserons un modèle à 1 nœud tel que

$$\rho V C_p \frac{dT(t)}{dt} = fmP - \rho \dot{V}_d C_p (T(t) - T_f) - UA(T(t) - T_{env}) \tag{A.1}$$

En isolant le terme de gauche, nous obtenons

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\frac{\rho \dot{V}_d C_p + UA}{\rho V C_p} T(t) + \frac{fmP + \rho \dot{V}_d C_p T_f + UAT_{env}}{\rho V C_p} \tag{A.2}$$

$$\triangleq -\alpha T(t) + \beta \tag{A.3}$$

Suite à cette simplification, nous obtenons l'ED linéaire d'ordre 1 suivante

$$\frac{dT(t)}{dt} + \alpha T(t) = \beta \tag{A.4}$$

Cette équation se résout en utilisant la méthode du facteur intégrant

$$F = e^{\int \alpha dt} = e^{\alpha(t-t_0)} \tag{A.5}$$

et nous résolvons pour $(F \cdot y)'$. En intégrant de chaque côté, nous obtenons

$$T(t)e^{\alpha(t-t_0)} = \int \beta e^{\alpha(t-t_0)} dt \tag{A.6}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha(t-t_0)} + C \tag{A.7}$$

$$T(t) = \frac{\beta}{\alpha} + Ce^{-\alpha(t-t_0)} \tag{A.8}$$

Soit une température initiale $T(0)$, nous avons

$$T(t_0) \equiv T(0) = \frac{\beta}{\alpha} + C \rightarrow C = T(0) - \frac{\beta}{\alpha} \tag{A.9}$$

Nous obtenons finalement, pour un modèle à un nœud, l'évolution de la température en fonction du temps suivante

$$T(t) = T(0)e^{-\alpha(t-t_0)} + \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-t_0)}) \tag{A.10}$$

où

$$\alpha = \frac{\rho \dot{V}_d C_p + UA}{\rho V C_p} T(t) \tag{A.11a}$$

$$\beta = \frac{fmP + \rho \dot{V}_d C_p T_f + UAT_{env}}{\rho V C_p} \tag{A.11b}$$

ANNEXE B Autres résultats des expériences sur un chauffe-eau

Chauffage d'un chauffeau-eau

Les figures B.1 et B.2 présentent respectivement la comparaison entre les mesures expérimentales et les résultats de simulation de la température moyenne et de la température des nœuds lorsqu'un chauffe-eau est complètement chauffé de 15 à 60 °C.

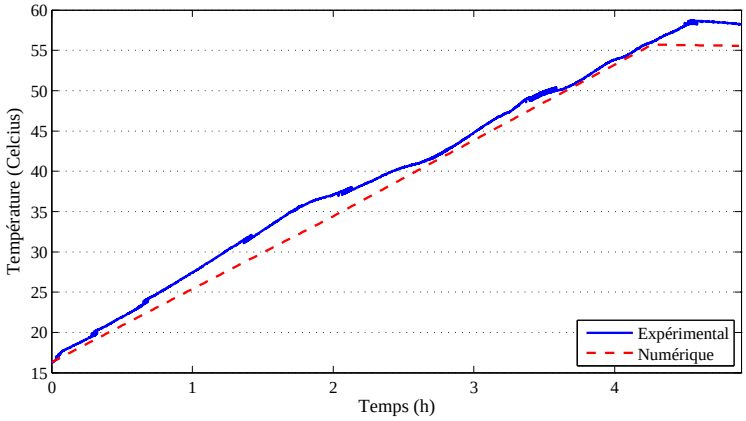


Figure B.1 Comparaison expérimentale de la température moyenne lors d'un chauffage

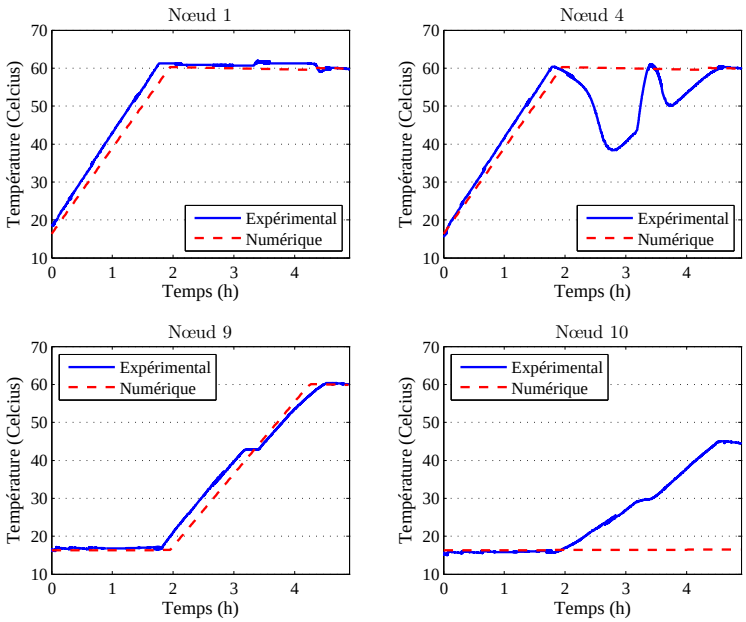


Figure B.2 Comparaison expérimentale de la température des nœuds lors d'un chauffage

Refroidissement d'un chauffe-eau par tirage de faible intensité

Les figures B.3 et B.4 présentent respectivement la comparaison entre les mesures expérimentales et les résultats de simulation de la température moyenne et de la température des nœuds lorsqu'un chauffe-eau est complètement refroidi par un tirage d'eau d'intensité faible, soit 5 L/min.

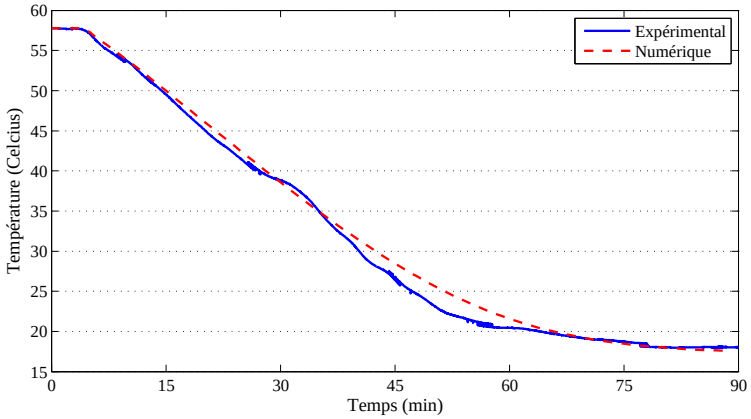


Figure B.3 Comparaison expérimentale de la température moyenne lors d'un tirage de faible intensité

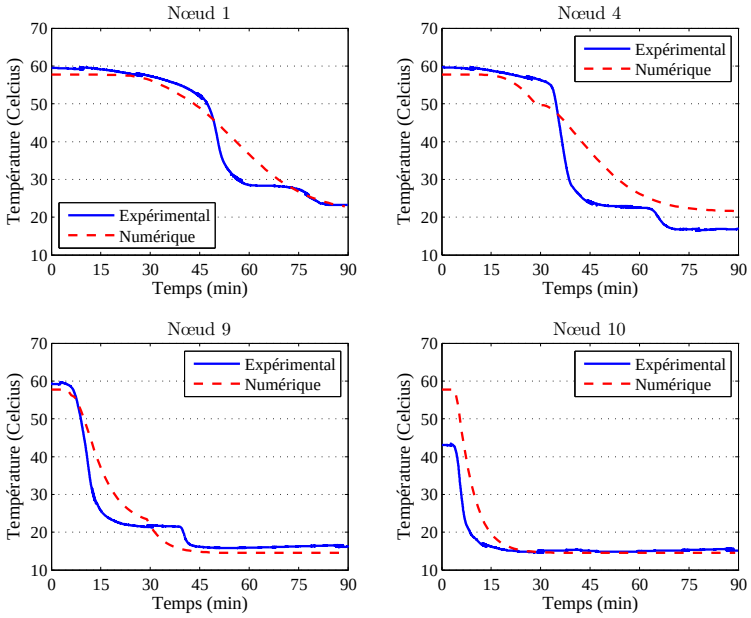


Figure B.4 Comparaison expérimentale de la température des nœuds lors d'un tirage de faible intensité

Refroidissement d'un chauffe-eau par tirage de haute intensité

Les figures B.5 et B.6 présentent respectivement la comparaison entre les mesures expérimentales et les résultats de simulation de la température moyenne et de la température des nœuds lorsqu'un chauffe-eau est complètement refroidi par un tirage d'eau d'intensité élevée, soit 15 L/min.

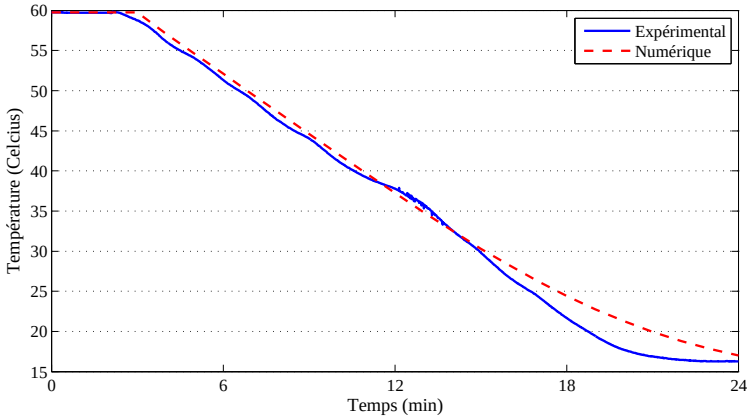


Figure B.5 Comparaison expérimentale de la température moyenne lors d'un tirage de haute intensité

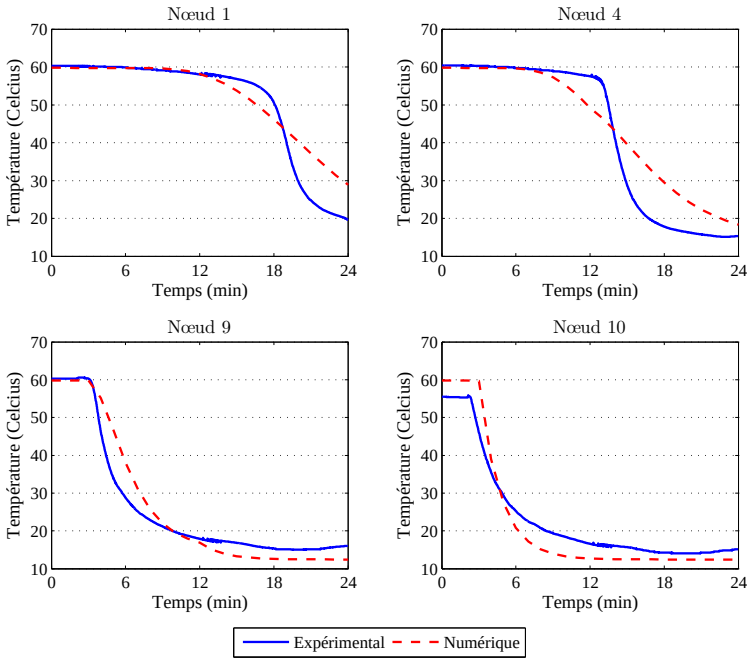


Figure B.6 Comparaison expérimentale de la température des nœuds lors d'un tirage de haute intensité

ANNEXE C Caractéristiques du modèle numérique de chauffe-eau

Le Tableau C.1 présente les valeurs des différents paramètres du modèle numérique de chauffe-eau utilisé dans ce rapport.

Paramètre	Valeur	Unité
Pas de temps	60	s
Chaleur spécifique de l'eau	4190	J/kg K
Densité volumique de l'eau	1000	kg/m^3
Volume du réservoir	0.260	m^3
Coefficient de perte thermique	0.91	$W/m^2 K$
Nœud associé au thermostat supérieur	4	-
Nœud associé à l'élément chauffant supérieur	4	-
Température de consigne du thermostat supérieur	328.15	K
Bande morte du thermostat supérieur	10	K
Puissance de l'élément chauffant supérieur	2750	W
Contrôle extérieur de l'élément chauffant supérieur	1	$\in [0, 1]$
Nœud associé au thermostat inférieur	9	-
Nœud associé à l'élément chauffant inférieur	9	-
Température de consigne du thermostat inférieur	331.65	K
Bande morte du thermostat inférieur	3	K
Puissance de l'élément chauffant inférieur	2900	W
Contrôle extérieur de l'élément chauffant inférieur	1	$\in [0, 1]$
Température initiale de tous les nœuds	298.15	K
Température de l'eau de l'aqueduc	283.15	K
Température extérieur	293.15	K
Nombre de nœud	10	-
Hauteur du nœud 1	0.135	m
Hauteur du nœud 2	0.135	m
Hauteur du nœud 3	0.135	m
Hauteur du nœud 4	0.135	m
Hauteur du nœud 5	0.135	m
Hauteur du nœud 6	0.135	m
Hauteur du nœud 7	0.135	m
Hauteur du nœud 8	0.135	m
Hauteur du nœud 9	0.135	m
Hauteur du nœud 10	0.135	m

Tableau C.1 Paramètres du chauffe-eau

ANNEXE D Paramètres de la chaîne de Markov

Le tableau D.1 présente les valeurs des paramètres de transition de la chaîne de Markov à deux états $\alpha_0(t)$ et $\alpha_1(t)$, exprimés en nombre de sauts par intervalle de 5 minutes.b

Tableau D.1 – Paramètres de la chaîne de Markov à deux états

Heure	$\alpha_0(t)$ (sauts/5 minutes)	$\alpha_1(t)$ (sauts/5 minutes)
00 :00	0.01900	0.64231
00 :05	0.02058	0.63319
00 :10	0.01851	0.56897
00 :15	0.01503	0.69528
00 :20	0.01478	0.65363
00 :25	0.01338	0.62722
00 :30	0.01543	0.59375
00 :35	0.01450	0.65537
00 :40	0.01379	0.65060
00 :45	0.01116	0.58861
00 :50	0.01114	0.61644
00 :55	0.00851	0.64234
01 :00	0.01204	0.61261
01 :05	0.01125	0.65649
01 :10	0.00768	0.68504
01 :15	0.00997	0.60417
01 :20	0.00889	0.60360
01 :25	0.00834	0.61468
01 :30	0.00738	0.63107
01 :35	0.00710	0.70652
01 :40	0.00749	0.73418
01 :45	0.00776	0.65789
01 :50	0.00545	0.66265
01 :55	0.00667	0.70588
02 :00	0.00531	0.68116
02 :05	0.00489	0.68852
02 :10	0.00421	0.72727

Tableau D.1 – Paramètres de la chaîne de Markov à deux états (suite)

Heure	$\alpha_0(t)$ (sauts/5 minutes)	$\alpha_1(t)$ (sauts/5 minutes)
02 :15	0.00448	0.71739
02 :20	0.00393	0.69565
02 :25	0.00624	0.72093
02 :30	0.00475	0.70690
02 :35	0.00407	0.75000
02 :40	0.00366	0.76744
02 :45	0.00420	0.64865
02 :50	0.00393	0.61364
02 :55	0.00244	0.58696
03 :00	0.00244	0.64865
03 :05	0.00257	0.58065
03 :10	0.00366	0.78125
03 :15	0.00230	0.88235
03 :20	0.00311	0.80952
03 :25	0.00311	0.62963
03 :30	0.00244	0.75758
03 :35	0.00216	0.65385
03 :40	0.00149	0.72000
03 :45	0.00284	0.66667
03 :50	0.00135	0.88889
03 :55	0.00216	0.76923
04 :00	0.00203	0.78947
04 :05	0.00203	0.78947
04 :10	0.00149	0.63158
04 :15	0.00338	0.55556
04 :20	0.00176	0.69697
04 :25	0.00189	0.65217
04 :30	0.00230	0.77273
04 :35	0.00216	0.59091
04 :40	0.00230	0.72000
04 :45	0.00352	0.75000
04 :50	0.00244	0.65625
04 :55	0.00460	0.34483

Tableau D.1 – Paramètres de la chaîne de Markov à deux états (suite)

Heure	$\alpha_0(t)$ (sauts/5 minutes)	$\alpha_1(t)$ (sauts/5 minutes)
05 :00	0.00638	0.60377
05 :05	0.00476	0.45588
05 :10	0.00572	0.48611
05 :15	0.00872	0.68354
05 :20	0.01037	0.57303
05 :25	0.01287	0.49123
05 :30	0.01555	0.56579
05 :35	0.01796	0.51397
05 :40	0.02624	0.53456
05 :45	0.03198	0.47241
05 :50	0.04277	0.51181
05 :55	0.04486	0.49076
06 :00	0.05729	0.44723
06 :05	0.05851	0.45299
06 :10	0.05541	0.55212
06 :15	0.05848	0.51117
06 :20	0.06829	0.55660
06 :25	0.07220	0.48917
06 :30	0.08717	0.43182
06 :35	0.09309	0.44766
06 :40	0.09139	0.47547
06 :45	0.09857	0.52353
06 :50	0.09923	0.54869
06 :55	0.09606	0.53125
07 :00	0.11008	0.52452
07 :05	0.11350	0.48055
07 :10	0.11504	0.49293
07 :15	0.10946	0.50870
07 :20	0.11102	0.48394
07 :25	0.10557	0.51977
07 :30	0.11447	0.55058
07 :35	0.10267	0.53001
07 :40	0.09651	0.54177

Tableau D.1 – Paramètres de la chaîne de Markov à deux états (suite)

Heure	$\alpha_0(t)$ (sauts/5 minutes)	$\alpha_1(t)$ (sauts/5 minutes)
07 :45	0.10516	0.56196
07 :50	0.10093	0.56213
07 :55	0.09670	0.57618
08 :00	0.09181	0.57745
08 :05	0.08609	0.56814
08 :10	0.08941	0.55956
08 :15	0.08306	0.59467
08 :20	0.08354	0.56946
08 :25	0.08931	0.59979
08 :30	0.08728	0.57576
08 :35	0.08110	0.54536
08 :40	0.07715	0.57261
08 :45	0.08573	0.56703
08 :50	0.08118	0.56092
08 :55	0.07505	0.57476
09 :00	0.08129	0.56933
09 :05	0.07624	0.55093
09 :10	0.07155	0.51876
09 :15	0.07396	0.57871
09 :20	0.07381	0.56961
09 :25	0.07633	0.56491
09 :30	0.06905	0.55212
09 :35	0.07193	0.56109
09 :40	0.07345	0.53974
09 :45	0.06750	0.51665
09 :50	0.07367	0.56779
09 :55	0.06887	0.54206
10 :00	0.07072	0.55569
10 :05	0.07402	0.53810
10 :10	0.06708	0.49829
10 :15	0.06712	0.55125
10 :20	0.07136	0.54742
10 :25	0.07121	0.56080

Tableau D.1 – Paramètres de la chaîne de Markov à deux états (suite)

Heure	$\alpha_0(t)$ (sauts/5 minutes)	$\alpha_1(t)$ (sauts/5 minutes)
10 :30	0.07372	0.53214
10 :35	0.07323	0.55353
10 :40	0.06888	0.56487
10 :45	0.07012	0.50723
10 :50	0.07224	0.54076
10 :55	0.06813	0.54410
11 :00	0.07118	0.52133
11 :05	0.06980	0.52982
11 :10	0.07616	0.52018
11 :15	0.07872	0.56612
11 :20	0.08003	0.52475
11 :25	0.08150	0.54145
11 :30	0.08490	0.56950
11 :35	0.08674	0.51921
11 :40	0.09334	0.53177
11 :45	0.08687	0.53810
11 :50	0.09794	0.48760
11 :55	0.09796	0.49440
12 :00	0.09310	0.51333
12 :05	0.10102	0.52451
12 :10	0.10363	0.55359
12 :15	0.10426	0.54383
12 :20	0.11409	0.55013
12 :25	0.09751	0.56787
12 :30	0.09811	0.53509
12 :35	0.09389	0.58813
12 :40	0.09940	0.56550
12 :45	0.08900	0.57365
12 :50	0.09421	0.56948
12 :55	0.08848	0.54833
13 :00	0.08711	0.52703
13 :05	0.08112	0.54207
13 :10	0.08656	0.55321

Tableau D.1 – Paramètres de la chaîne de Markov à deux états (suite)

Heure	$\alpha_0(t)$ (sauts/5 minutes)	$\alpha_1(t)$ (sauts/5 minutes)
13 :15	0.07308	0.54745
13 :20	0.07634	0.56616
13 :25	0.07144	0.55580
13 :30	0.07765	0.56481
13 :35	0.06459	0.54689
13 :40	0.06959	0.53220
13 :45	0.06677	0.56635
13 :50	0.06895	0.57516
13 :55	0.06283	0.56516
14 :00	0.05784	0.55963
14 :05	0.05584	0.53814
14 :10	0.05691	0.55021
14 :15	0.05804	0.55857
14 :20	0.05610	0.57940
14 :25	0.06076	0.57526
14 :30	0.04893	0.55108
14 :35	0.05297	0.54290
14 :40	0.04818	0.59356
14 :45	0.05946	0.55499
14 :50	0.05304	0.59791
14 :55	0.05330	0.59809
15 :00	0.05276	0.58469
15 :05	0.05672	0.55863
15 :10	0.05886	0.57839
15 :15	0.05783	0.57481
15 :20	0.06111	0.55539
15 :25	0.05711	0.54698
15 :30	0.05839	0.58357
15 :35	0.06149	0.57143
15 :40	0.05871	0.59605
15 :45	0.05772	0.61471
15 :50	0.06472	0.61137
15 :55	0.06035	0.63965

Tableau D.1 – Paramètres de la chaîne de Markov à deux états (suite)

Heure	$\alpha_0(t)$ (sauts/5 minutes)	$\alpha_1(t)$ (sauts/5 minutes)
16 :00	0.06653	0.60458
16 :05	0.06513	0.60931
16 :10	0.07278	0.59944
16 :15	0.07088	0.59948
16 :20	0.08406	0.58259
16 :25	0.08508	0.60747
16 :30	0.08686	0.57143
16 :35	0.08522	0.59286
16 :40	0.09645	0.54739
16 :45	0.10488	0.60190
16 :50	0.10264	0.57459
16 :55	0.11241	0.57194
17 :00	0.10780	0.56456
17 :05	0.11619	0.55135
17 :10	0.12674	0.54415
17 :15	0.13800	0.56721
17 :20	0.13609	0.58327
17 :25	0.13544	0.57630
17 :30	0.13965	0.55918
17 :35	0.14535	0.55989
17 :40	0.14619	0.55732
17 :45	0.14167	0.56789
17 :50	0.14942	0.55882
17 :55	0.15645	0.55016
18 :00	0.14832	0.55266
18 :05	0.15267	0.52243
18 :10	0.15038	0.51366
18 :15	0.15878	0.48951
18 :20	0.15104	0.48499
18 :25	0.15506	0.48780
18 :30	0.14914	0.48146
18 :35	0.13811	0.48129
18 :40	0.12843	0.49233

Tableau D.1 – Paramètres de la chaîne de Markov à deux états (suite)

Heure	$\alpha_0(t)$ (sauts/5 minutes)	$\alpha_1(t)$ (sauts/5 minutes)
18 :45	0.13739	0.47243
18 :50	0.13623	0.46711
18 :55	0.12993	0.45969
19 :00	0.12039	0.46841
19 :05	0.11643	0.45032
19 :10	0.12204	0.44301
19 :15	0.10801	0.46100
19 :20	0.11620	0.46658
19 :25	0.11029	0.49392
19 :30	0.10524	0.48433
19 :35	0.09188	0.45763
19 :40	0.09076	0.48801
19 :45	0.09466	0.48522
19 :50	0.09476	0.48353
19 :55	0.09010	0.50782
20 :00	0.08384	0.48487
20 :05	0.08304	0.50491
20 :10	0.08122	0.50835
20 :15	0.07797	0.49856
20 :20	0.07909	0.52204
20 :25	0.07860	0.50302
20 :30	0.07586	0.51852
20 :35	0.07782	0.54752
20 :40	0.07409	0.52021
20 :45	0.07152	0.54028
20 :50	0.07232	0.51009
20 :55	0.08065	0.54565
21 :00	0.08270	0.51066
21 :05	0.08048	0.53266
21 :10	0.07643	0.54073
21 :15	0.07072	0.55037
21 :20	0.07343	0.53968
21 :25	0.06704	0.56772

Tableau D.1 – Paramètres de la chaîne de Markov à deux états (suite)

Heure	$\alpha_0(t)$ (sauts/5 minutes)	$\alpha_1(t)$ (sauts/5 minutes)
21 :30	0.07048	0.56638
21 :35	0.06275	0.55420
21 :40	0.06552	0.56282
21 :45	0.06052	0.56572
21 :50	0.07141	0.56157
21 :55	0.08507	0.51685
22 :00	0.08100	0.55789
22 :05	0.06950	0.58792
22 :10	0.07097	0.54470
22 :15	0.06438	0.58775
22 :20	0.06049	0.57956
22 :25	0.05141	0.56534
22 :30	0.05445	0.55758
22 :35	0.04927	0.58485
22 :40	0.05123	0.57661
22 :45	0.04594	0.54455
22 :50	0.04715	0.56706
22 :55	0.04882	0.57019
23 :00	0.04256	0.53952
23 :05	0.03848	0.59392
23 :10	0.03378	0.59267
23 :15	0.03293	0.60369
23 :20	0.03107	0.59204
23 :25	0.02800	0.62042
23 :30	0.02459	0.58480
23 :35	0.02337	0.60759
23 :40	0.02034	0.58966
23 :45	0.01957	0.57576
23 :50	0.02107	0.59921
23 :55	0.01884	0.58333

ANNEXE E Structure de programmation du modèle multi-nodal

Listing E.1 Programme de prédiction de température d'un chauffe-eau électrique basé sur un modèle multi-nodal

```
classdef (ConstructOnLoad = true) TypeX < hgsetget
    %*********************************************************************
    %TypeX Variable node model of an electrical water heater
    % Author:           Jerome Solis
    % Contact:          jerome.solis@polymtl.ca
    % Created:          2013-07-31
    % Last updated:     2015-02-17
    % Description:      This model represents an electric water heater
    %                   using a variable number of nodes. It feeds directly
    %                   on a text file that can be edited. It also offers
    %                   two ways to generate draw events. First, it can use
    %                   a Markov chain generator. Secondly, it can use a
    %                   sequence generator based on file showing hot water
    %                   consumption for a certain period.
    %*********************************************************************

    % properties that can be edited
    properties
        id                          % String
        source                      % String
        timeStep                    % seconds
        currentIteration            % Integer
        fluidSpecificHeat           % J/kg.K
        fluidDensity                % kg/m^3
        tankVolume                  % m^3
        tankRadius                  % meters
        tankHeight                  % meters
        tankLossCoefficient         % W/m^2.K
        controlOverride             % Boolean
        thermostat1Node             % Interger
        element1Node                % Integer
        thermostat1SetPoint         % Kelvin
        thermostat1Deadband         % delta Celcius
        thermostat1MinTemperature   % Kelvin
        thermostat1MaxTemperature   % Kelvin
```

```
    element1Power                % Watts
    element1Control              % Double
    element1State                % Boolean
    thermostat2Node              % Integer
    element2Node                 % Integer
    thermostat2SetPoint          % Kelvin
    thermostat2Deadband          % delta Celcius
    thermostat2MinTemperature    % Kelvin
    thermostat2MaxTemperature    % Kelvin
    element2Power                % Watts
    element2Control              % Double
    element2State                % Boolean
    initialTemperature           % Kelvin
    coldTemperature              % Kelvin
    ambiantTemperature           % Kelvin
    tankTemperature              % Kelvin
    nodeTemperature              % Kelvin
    startNodeTemperature         % Kelvin
    endNodeTemperature           % Kelvin
    avgNodeTemperature           % Kelvin
    nodeNumber                   % Integer
    nodeHeight                   % meters
    nodeVolume                   % m^3
    nodeSurfaceArea              % m^2
    waterDrawState               % Boolean
    waterDrawMode                % Integer
    waterDrawGenerator           % Generator class
    waterDrawEnergy              % Wh
    waterDrawCurrent             % m^3/s
end
methods
    function obj = TypeX(filename, genMode, generatorId)
        % class constructor
        obj.id = strcat('EWH-TypeX:',datestr(now,'MMSSFFF'));
        obj.currentIteration = 0;
        % waterDrawMode available
        %   0 - Markov chain
        %   1 - File sequence
        %  -1 - External generator
        if ~nargin
            % Default model filename
            obj.source = 'ewh_model.txt';
            obj.waterDrawMode = 0; % use Markov chain
        elseif nargin == 1
```

```
        obj.source = filename;
        obj.waterDrawMode = 0; % use Markov chain
    elseif nargin == 2 && genMode ~= -1
        obj.source = filename;
        obj.waterDrawMode = genMode;
    elseif nargin == 3 && genMode == -1
        obj.source = filename;
        obj.waterDrawMode = genMode;
        obj.waterDrawGenerator = generatorId;
    else
        error('EWH-TypeX: Invalid input sequence')
    end
    % standardized file with consistent unit
    fid = fopen(obj.source,'rt');
    if fid ~= -1
        val = fscanf(fid,'%g',[1,Inf])';
        obj.timeStep                    = val(1);
        obj.fluidSpecificHeat           = val(2);
        obj.fluidDensity                = val(3);
        obj.tankVolume                  = val(4);
        obj.tankLossCoefficient         = val(5);
        obj.thermostat1Node             = val(6);
        obj.element1Node                = val(7);
        obj.thermostat1SetPoint         = val(8);
        obj.thermostat1Deadband         = val(9);
        obj.element1Power               = val(10);
        obj.element1Control             = val(11);
        obj.thermostat2Node             = val(12);
        obj.element2Node                = val(13);
        obj.thermostat2SetPoint         = val(14);
        obj.thermostat2Deadband         = val(15);
        obj.element2Power               = val(16);
        obj.element2Control             = val(17);
        obj.initialTemperature          = val(18);
        obj.coldTemperature             = val(19);
        obj.ambiantTemperature          = val(20);
        obj.nodeNumber                  = val(21);
        obj.nodeHeight                  = val(22:end)';
        % file always end with node height. length should be
        % equal to number of node in the model
        if obj.nodeNumber ~= length(obj.nodeHeight)
            error('EWH-TypeX: Nodes Inconsistent number of nodes')
        end
        clear val
```

```
        % markov chain & draw event parameters
        switch obj.waterDrawMode
            case 0
                obj.waterDrawGenerator = GeneratorMarkov(...
                    obj.timeStep);
            case 1
                obj.waterDrawGenerator = GeneratorSequent(...
                    obj.timeStep);
            case -1
                set(obj.waterDrawGenerator,'timeStep',obj.timeStep)
        end
    end
    fclose(fid);
    obj.controlOverride = false;
    % load new class properties upon construction
    obj = obj.load;
end  % TypeX
function obj = load(obj)
    % load new class properties
    % temperature boundary for each thermostat
    obj.thermostat1MaxTemperature  = obj.thermostat1SetPoint + ...
        obj.thermostat1Deadband/2;
    obj.thermostat1MinTemperature  = obj.thermostat1SetPoint - ...
        obj.thermostat1Deadband/2;
    obj.thermostat2MaxTemperature  = obj.thermostat2SetPoint + ...
        obj.thermostat2Deadband/2;
    obj.thermostat2MinTemperature  = obj.thermostat2SetPoint - ...
        obj.thermostat2Deadband/2;
    % nodal geometry of the tank
    obj.tankHeight              = sum(obj.nodeHeight);
    obj.tankRadius              = sqrt(obj.tankVolume/...
        obj.tankHeight/pi);
    obj.nodeVolume              = obj.nodeHeight*obj.tankVolume/...
        obj.tankHeight;
    obj.nodeSurfaceArea         = 2*pi*obj.tankRadius*...
        obj.nodeHeight;
    obj.nodeSurfaceArea(1)      = obj.nodeSurfaceArea(1) + pi*...
        obj.tankRadius^2;     % top node
    obj.nodeSurfaceArea(end)    = obj.nodeSurfaceArea(end) + pi*...
        obj.tankRadius^2;   % bottom node
end % load
function obj = init(obj)
    % initial temperature in the tank. same for all nodes
```

```
        obj.nodeTemperature          = ones(1,obj.nodeNumber)*...
            obj.initialTemperature;
        obj.startNodeTemperature     = obj.nodeTemperature;
        obj.endNodeTemperature       = obj.nodeTemperature;
        obj.avgNodeTemperature       = mean([obj.startNodeTemperature;...
            obj.endNodeTemperature],1);
        obj.tankTemperature          = obj.initialTemperature;
        % initial state of element
        if obj.startNodeTemperature(obj.thermostat1Node) <= ...
            obj.thermostat1MinTemperature
             obj.element1State = 1;
             obj.element2State = 0;
        else
             obj.element1State = 0;
             if obj.startNodeTemperature(obj.thermostat2Node) <= ...
                 obj.thermostat2MinTemperature
                  obj.element2State = 1;
             else
                  obj.element2State = 0;
             end
        end
        % initial state of water draw event
        set(obj.waterDrawGenerator,'currentIteration',...
            obj.currentIteration)
        obj.waterDrawGenerator.init;
        obj.waterDrawState       = get(obj.waterDrawGenerator,'...
            waterDrawState');
        obj.waterDrawCurrent     = get(obj.waterDrawGenerator,'...
            waterDrawCurrent');
        obj.waterDrawEnergy      = 0;
    end % init
    function obj = start(obj)
        obj.startNodeTemperature = obj.endNodeTemperature;
        % state of element (thermostat set point)
        % MASTER (Element 1)
        if ~obj.controlOverride
             if obj.startNodeTemperature(obj.thermostat1Node) <= ...
                 obj.thermostat1MinTemperature
                  obj.element1State = 1;
             elseif obj.startNodeTemperature(obj.thermostat1Node) > ...
                 obj.thermostat1MaxTemperature
                  obj.element1State = 0;
             end
             % SLAVE (Element 2)
```

```
    if ~obj.element1State
        if obj.startNodeTemperature(obj.thermostat2Node) <= ...
           obj.thermostat2MinTemperature
            obj.element2State = 1;
        elseif obj.startNodeTemperature(obj.thermostat2Node) > ...
           obj.thermostat2MaxTemperature
            obj.element2State = 0;
        end
    else
        obj.element2State = 0;
    end
else
    obj.element1State = 1;
    obj.element2State = 1;
end
% else the state of the element remains the same
% state of water draw event
set(obj.waterDrawGenerator,'currentIteration',...
   obj.currentIteration)
obj.waterDrawGenerator.start;
obj.waterDrawCurrent    = get(obj.waterDrawGenerator,'...
   waterDrawCurrent');
obj.waterDrawState      = get(obj.waterDrawGenerator,'...
   waterDrawState');
obj.waterDrawEnergy     = 0;
% start tank temperature computation
for i = obj.nodeNumber:-1:1;
    a = (obj.tankLossCoefficient*obj.nodeSurfaceArea(i) +...
        obj.fluidDensity*obj.fluidSpecificHeat*...
           obj.waterDrawState*obj.waterDrawCurrent)/...
        (obj.fluidDensity*obj.fluidSpecificHeat*obj.nodeVolume(...
           i));
    if i == obj.nodeNumber
        b = (obj.element1Control*obj.element1State*...
           obj.element1Power*(i==obj.element1Node) +...
            obj.element2Control*obj.element2State*...
               obj.element2Power*(i==obj.element2Node) +...
            obj.tankLossCoefficient*obj.nodeSurfaceArea(i)*...
               obj.ambiantTemperature +...
            obj.fluidDensity*obj.fluidSpecificHeat*...
               obj.waterDrawState*obj.waterDrawCurrent*...
            obj.coldTemperature)/...
            (obj.fluidDensity*obj.fluidSpecificHeat*...
               obj.nodeVolume(i));
```

```
        else
            b = (obj.element1Control*obj.element1State*...
                obj.element1Power*(i==obj.element1Node) +...
                obj.element2Control*obj.element2State*...
                    obj.element2Power*(i==obj.element2Node) +...
                obj.tankLossCoefficient*obj.nodeSurfaceArea(i)*...
                    obj.ambiantTemperature +...
                obj.fluidDensity*obj.fluidSpecificHeat*...
                    obj.waterDrawState*obj.waterDrawCurrent*...
                obj.avgNodeTemperature(i+1))/...
                (obj.fluidDensity*obj.fluidSpecificHeat*...
                    obj.nodeVolume(i));
        end
        obj.endNodeTemperature(i) = obj.startNodeTemperature(i)*exp...
            (-a*obj.timeStep) +...
            b/a*(1 - exp(-a*obj.timeStep));
        obj.avgNodeTemperature(i) = mean([obj.startNodeTemperature(...
            i);obj.endNodeTemperature(i)],1);
    end
    if obj.nodeNumber > 1
        % Single node model don't have temperature inversion
        % problems
        if obj.element1State
            for i = obj.element1Node:-1:2
                if obj.endNodeTemperature(i) > ...
                    obj.endNodeTemperature(i-1)
                    obj.endNodeTemperature(i-1:obj.element1Node) = ...
                        sum(obj.endNodeTemperature(i-1:...
                        obj.element1Node).*obj.nodeVolume(i-1:...
                        obj.element1Node))/...
                         sum(obj.nodeVolume(i-1:obj.element1Node));
                else
                    break
                end
            end
            for i = obj.element2Node:-1:2
                if obj.endNodeTemperature(i) > ...
                    obj.endNodeTemperature(i-1)
                    obj.endNodeTemperature(i-1:obj.element2Node) = ...
                        sum(obj.endNodeTemperature(i-1:...
                        obj.element2Node).*obj.nodeVolume(i-1:...
                        obj.element2Node))/...
                         sum(obj.nodeVolume(i-1:obj.element2Node));
                else
```

```
                break
            end
        end
    elseif obj.element2State
        for i = obj.element2Node:-1:2
            if obj.endNodeTemperature(i) > ...
                obj.endNodeTemperature(i-1)
                 obj.endNodeTemperature(i-1:obj.element2Node) = ...
                     sum(obj.endNodeTemperature(i-1:...
                     obj.element2Node).*obj.nodeVolume(i-1:...
                     obj.element2Node))/...
                      sum(obj.nodeVolume(i-1:obj.element2Node));
            else
                break
            end
        end
    end
    index = obj.nodeNumber;
    for i = obj.nodeNumber:-1:2
        if obj.endNodeTemperature(index) > ...
           obj.endNodeTemperature(i-1)
            obj.endNodeTemperature(i-1:index) = sum(...
                obj.endNodeTemperature(i-1:index).*...
                obj.nodeVolume(i-1:index))/...
                 sum(obj.nodeVolume(i-1:index));
        elseif obj.endNodeTemperature(index) == ...
           obj.endNodeTemperature(i-1)
            continue
        else
            index = i-1;
        end
    end
end
% weighted mean to compute mean temperature inside the tank
obj.avgNodeTemperature  = mean([obj.startNodeTemperature;...
   obj.endNodeTemperature],1);
obj.tankTemperature     = sum(obj.endNodeTemperature.*...
   obj.nodeVolume)/obj.tankVolume;
obj.nodeTemperature     = obj.endNodeTemperature;
obj.currentIteration    = obj.currentIteration + 1;
obj.waterDrawEnergy     = obj.fluidDensity*...
   obj.fluidSpecificHeat*...
    obj.waterDrawState*obj.waterDrawCurrent*obj.timeStep*(...
       obj.avgNodeTemperature(1)-obj.coldTemperature);
```

```
        end % start
        function obj = reset(obj)
            % reset the EWH temperature to its initial value
            obj.currentIteration = 0;
            obj.init();
        end % reset
    end % methods
end % classdef
```

Listing E.2 Programme de génération d'événements de tirage basé sur un processus stochastique de chaîne de Markov à deux états

```
classdef (ConstructOnLoad = true) GeneratorMarkov < hgsetget
    %*********************************************************************
    %MarkovGEN Two-state Markov chain draw event generator
    % Author:           Jerome Solis
    % Contact:          jerome.solis@polymtl.ca
    % Created:          2014-01-29
    % Last updated:     2014-03-05
    % Description:      This hot water draw event generator uses a
    %                   two-state Markov chain to generate events. This
    %                   stochastic process aims at simulating a typical hot
    %                   water daily consumption. Each state is described by
    %                   a transition variable a0 (State 0->1) & a1 (State
    %                   1->0)
    %*********************************************************************

    % protected propreties (can only be modified through editing the text
    % file)
    properties (SetAccess = protected)
        id
        source
        sourceTimeStep                          % s
        a0                                      % min^-1
        a1                                      % min^-1
        waterDraw                               % m^3/s
        waterDrawCurrent                        % m^3/s
    end
    % editable propreties of the generator by the user
    properties
        timeStep                                % seconds
        waterDrawState
        currentIteration
```

```
end
methods
    function obj = GeneratorMarkov(timeStep, filename)
        % class constructor
        obj.id = strcat('MGEN',datestr(now,'MMSSFFF'));
        defaultFilename = 'ewh_markov_shu.txt'; % default parameter ...
            file
        if ~nargin
            obj.source = defaultFilename;
            obj.timeStep = 1;
        elseif nargin == 1
            obj.source = defaultFilename;
            obj.timeStep = timeStep;
        elseif nargin == 2
            obj.source = filename;
            obj.timeStep = timeStep;
        else
            error('MarkovGEN: Too many inputs')
        end
        obj = obj.load;
    end % MarkovGEN
    function obj = init(obj)
        x = rand;
        if x <= obj.a0(1);% a0 in min^-1
            obj.waterDrawState = 1;
        else
            obj.waterDrawState = 0;
        end
        clear x
        obj.waterDrawCurrent = obj.waterDraw;
    end % init
    function obj = load(obj)
        % markov chain & draw event parameters
        fid = fopen(obj.source,'rt');
        if fid ~= -1
            val = fscanf(fid,'%g %g',[2 Inf])';
            obj.sourceTimeStep  = val(1,1);
            obj.waterDraw       = val(1,2)/1000/60;
            obj.a0              = [val(2:end,1);val(2,1)]*obj.timeStep/...
                obj.sourceTimeStep;
            obj.a1              = [val(2:end,2);val(2,1)]*obj.timeStep/...
                obj.sourceTimeStep;
```

```
                t       = 0:obj.sourceTimeStep:length(obj.a0)*...
                    obj.sourceTimeStep-1;
                tt      = 0:obj.timeStep:(length(obj.a0)-1)*...
                    obj.sourceTimeStep-1;
                obj.a0  = interp1(t,obj.a0,tt);

                t       = 0:obj.sourceTimeStep:length(obj.a1)*...
                    obj.sourceTimeStep-1;
                tt      = 0:obj.timeStep:(length(obj.a1)-1)*...
                    obj.sourceTimeStep-1;
                obj.a1  = interp1(t,obj.a1,tt);

            end
        end % load
        function obj = start(obj)
            x = rand;
            % obj.timeStep in seconds and obj.a1 in min^-1
            if x <= obj.a0(mod(obj.currentIteration,length(obj.a0))+1) && ...
                obj.waterDrawState == 0
                 obj.waterDrawState = 1;
            elseif x <= obj.a1(mod(obj.currentIteration,length(obj.a1))+1) ...
                && obj.waterDrawState == 1
                 obj.waterDrawState = 0;
            end
            % else the state of water extraction remains the same
            clear x
        end % start
    end % methods
end % classdef
```

Listing E.3 Programme de génération d'événements de tirage basé sur la lecture de mesures expérimentales à partir d'un fichier

```
classdef (ConstructOnLoad = true) GeneratorSequent < hgsetget
    %*********************************************************************
    %SeqGEN
    % Author:           Jerome Solis
    % Contact:          jerome.solis@polymtl.ca
    % Created:          2014-01-29
    % Last updated:     2014-03-05
    % Description:
    %*********************************************************************
```

```
% protected propreties (can only be modified through editing the text
% file)
properties (SetAccess = protected)
    id
    source
    sourceTimeStep
    sourceConversion
    waterDrawCurrent
    waterDrawSequence
end
% editable propreties of the generator by the user
properties
    timeStep
    waterDrawState
    currentIteration
end
methods
    function obj = GeneratorSequent(timeStep, filename)
        % class constructor
        obj.id = strcat('SGEN',datestr(now,'MMSSFFF'));
        defaultFilename = 'ewh_sequence.txt'; % default parameter file
        if ~nargin
            obj.source          = defaultFilename;
            obj.timeStep        = 1;
        elseif nargin == 1
            obj.source          = defaultFilename;
            obj.timeStep        = timeStep;
        elseif nargin == 2
            obj.source          = filename;
            obj.timeStep        = timeStep;
        else
            error('SeqGEN: Too many inputs')
        end
        obj = obj.load;
    end % SeqGEN
    function obj = init(obj)
        obj.waterDrawCurrent = obj.waterDrawSequence(1);
        if ~obj.waterDrawSequence(1)
            obj.waterDrawState = 0;
        else
            obj.waterDrawState = 1;
        end
    end % init
    function obj = load(obj)
```

```
            fid = fopen(obj.source,'rt');
            if fid ~= 1
                val = fscanf(fid,'%g',[1 Inf])';
                val = [val;val(1)];
                obj.sourceConversion    = val(1);
                obj.sourceTimeStep      = val(2);
                t                       = 0:obj.sourceTimeStep:length(val(3...
                    :end))*obj.sourceTimeStep-1;
                tt                      = 0:obj.timeStep:(length(val(3:end)...
                    )-1)*obj.sourceTimeStep-1;
                obj.waterDrawSequence   = interp1(t,obj.sourceConversion*...
                    val(3:end),tt);
            end
        end % load
        function obj = start(obj)
            obj.waterDrawCurrent = obj.waterDrawSequence(mod(...
                obj.currentIteration,length(obj.waterDrawSequence))+1);
            if ~obj.waterDrawCurrent
                obj.waterDrawState = 0;
            else
                obj.waterDrawState = 1;
            end
        end % start
    end % methods
end % classdef
```

ANNEXE F Structure de programmation de l'estimateur de l'état discret

Listing F.1 Programme d'estimation de l'état discret de la température d'un chauffe-eau

```
function [oSequence,oTemperature,tElapsed] = Estimator(pModel,pGen,pJump,...
   pTime,pMeas,pCmd,pTimeBuf,pMeasBuf,pCmdBuf,pEstBuf,pSeqBuf)
%ESTIMATOR EWH discrete state estimation based on mean temperature ...
   mesasurements
% INPUTS
% pMeas     1xN
% pCmd      1xN
% pMeasBuf  1xN
% pCmdByf   1xN
% pEstBuf   1xN
% pSeqBuf   1xN

% Simulation Parameters
seq.length      = length(pTime);    % sequence duration
seq.timeStep    = pModel.timeStep;  % measurement timestep equal model's ...
   timestep

% Construction
% Creation d'un generateur d'evenements de tirage et d'un chauffe-eau. Ceci
% a pour but d'avoir acces a de bonnes donnees pour la simulation. Ces
% objets ne servent pas au calcul.
gen = pGen;
ewh = pModel;

% Calcul des coefficients de l'equation d'etat du systeme
% x(k+1) = (1+A*dt)*x(k) + B*dt*u(k) + G*dt
% y(k) = C*x(k)
A = @(theta) -(ewh.tankLossCoefficient*sum(ewh.nodeSurfaceArea)+...
    ewh.fluidDensity*ewh.fluidSpecificHeat*gen.waterDraw*theta)/...
    (ewh.fluidDensity*ewh.fluidSpecificHeat*ewh.tankVolume);
B = 1/(ewh.fluidDensity*ewh.fluidSpecificHeat*ewh.tankVolume);
G = @(theta) (ewh.tankLossCoefficient*sum(ewh.nodeSurfaceArea)*...
   ewh.ambiantTemperature+...
    ewh.fluidDensity*ewh.fluidSpecificHeat*gen.waterDraw*theta*...
       ewh.coldTemperature)/...
    (ewh.fluidDensity*ewh.fluidSpecificHeat*ewh.tankVolume);
```

```
% Conditions initiales
% Initialisation des parametres pour la simulation de la temperature en
% fonction des sequences pre-etablies
seq.obs             = pMeas;
vTime               = cat(2,pTimeBuf,pTime);
seq.par.lambda      = gen.a0(mod(vTime,length(gen.a0)*gen.timeStep)/...
   gen.timeStep+1);
seq.par.mu          = gen.a1(mod(vTime,length(gen.a1)*gen.timeStep)/...
   gen.timeStep+1);

% Assignations des valeurs initales aux matrices d'enregistrement
% estimation de l'etat initial du tirage
if isempty(pSeqBuf)
    jump.state = 0;
else
    jump.state = pSeqBuf(end);
end

% Initialisation
% Initialisation des parametres de sequence
seq.maxJump = pJump;
seq.gen     = GenerateJumpSequence(seq.maxJump,jump.state,seq.length);
seq.n       = size(seq.gen,1);
seq.prob    = zeros(seq.n,seq.length-1);
seq.probTot = zeros(seq.n,1);
seq.ctrl    = pCmd;

% Initialisation des parametres d'estimation
xp.val      = zeros(seq.n,seq.length); % prevision de la temperature

% Initialisation des parametres d'erreur
error.val   = zeros(seq.n,1);
error.tol   = 0.1;
% Initialisation du minuteur
tStart = tic;

extObs = cat(2,pMeasBuf,seq.obs);
extCmd = cat(2,pCmdBuf,seq.ctrl);

% Estimation
% Calcul de l'estimation de la temperature a l'interieur du chauffe-eau
% pour toutes les sequences
for i = 1:size(seq.gen,1)
```

```
    if isempty(pEstBuf)
        xp.val(i,1) = seq.obs(1);
    else
        xp.val(i,1) = ((2+A(pSeqBuf(end))*seq.timeStep)*pEstBuf(end)+...
            B*seq.timeStep*(pCmd(end)+seq.ctrl(1))+...
            (G(pSeqBuf(end))+G(seq.gen(i,1)))*seq.timeStep)/...
            (2-A(seq.gen(i,1))*seq.timeStep);
    end
    for j = 1:seq.length
        if j == seq.length; break; end
        xp.val(i,j+1) = ((2+A(seq.gen(i,j))*seq.timeStep)*xp.val(i,j)+...
            B*seq.timeStep*(seq.ctrl(j)+seq.ctrl(j+1))+...
            (G(seq.gen(i,j))+G(seq.gen(i,j+1)))*seq.timeStep)/...
            (2-A(seq.gen(i,j+1))*seq.timeStep);
    end

    extEst = cat(2,pEstBuf,xp.val(i,:));
    extSeq = cat(2,pSeqBuf,seq.gen(i,:));

    % Calcul de la probabilite de realisation de la sequence
    jumpSeq = extSeq(1:end-1)-extSeq(2:end);
    for j = 1:length(jumpSeq)
        seq.prob(i,j) = (jumpSeq(j)==1)*seq.par.mu(j)+...
            (jumpSeq(j)==-1)*seq.par.lambda(j)+...
            (jumpSeq(j)==0 & extSeq(j)==1)*(1-seq.par.mu(j))+...
            (jumpSeq(j)==0 & extSeq(j)==0)*(1-seq.par.lambda(j));
    end
    seq.probTot(i) = prod(seq.prob(i,:));
    % Calcul de l'erreur quadratique moyenne pour le scenario sans saut
    eb = pModel.fluidDensity*pModel.fluidSpecificHeat*pModel.tankVolume*(...
       extEst(end)-extEst(1))/3600/1e3-...
        sum(extCmd)*seq.timeStep/3600/1e3+...
        sum(pModel.tankLossCoefficient*sum(pModel.nodeSurfaceArea)*(extEst-...
           pModel.ambiantTemperature))*seq.timeStep/3600/1e3+...
        sum(pModel.fluidDensity*pModel.fluidSpecificHeat*gen.waterDraw*...
           extSeq.*(extEst-pModel.coldTemperature))*seq.timeStep/3600/1e3;
    if abs(eb) > 1
        error.val(i) = 9999;
    else
        error.val(i) = sum((extEst-extObs).^2)/numel(extObs);
    end
end
% evaluation de la sequence de saut la plus probable (minimise
% l'erreur)
```

```
index   = error.val<=(min(error.val)+error.tol);
bIndex  = seq.probTot==max(seq.probTot(index));

error.min       = error.val(bIndex);
xp.bEst         = xp.val(bIndex,:);
seq.bEst        = seq.gen(bIndex,:);

oSequence       = seq.bEst;
oTemperature    = xp.bEst;

tElapsed = toc(tStart);
```

Listing F.2 Programme de génération de séquences de sauts

```
function [seq] = GenerateJumpSequence(pMaxJump,pInitState,pLength)
%GENERATEJUMPSEQUENCE

nSeq = 0;
for i = 1:pMaxJump
    nSeq = nSeq + nchoosek(pLength,i);
end

seq         = zeros(nSeq,pLength);
block       = 1;
seq(block,:)= pInitState; % first is no jump sequence
block       = block+1;

for i = 1:pMaxJump
    nSeq = nchoosek(pLength,i);
    tempSeq = zeros(nSeq,pLength);
    cSeq    = nchoosek(1:pLength,i);
    for j = 1:nSeq
        for k = 1:size(cSeq,2)
            if k == 1
                tempSeq(j,1:cSeq(j,k)-1) = pInitState;
                if k+1>size(cSeq,2)
                    tempSeq(j,cSeq(j,k):end) = ~pInitState;
                else
                    tempSeq(j,cSeq(j,k):cSeq(j,k+1)-1) = ~pInitState;
                end
            else
                if k+1>size(cSeq,2)
```

```
                    tempSeq(j,cSeq(j,k):end) = (mod(k,2)==1)*~pInitState+...
                        ...
                         (mod(k,2)==0)*pInitState;
                else
                    tempSeq(j,cSeq(j,k):cSeq(j,k+1)-1) = (mod(k,2)==1)*~...
                       pInitState+...
                         (mod(k,2)==0)*pInitState;
                end
            end
        end
    end
    seq(block:block+nSeq-1,:) = tempSeq;
    block = block+nSeq;
end
```

Listing F.3 Exemple de routine d'estimation de l'état discret de la température d'un chauffe-eau

```
close all; clear all; clc

addpath(genpath('../../models'))

timeStep = 60;
offset = 0;
estWindow = 300;

load('test_canmet_markov')
gen = GeneratorMarkov(timeStep,'ewh_markov_shu_canmet.txt');
ewh = TypeX('ewh_model_canmet.txt',-1,gen);
ewh.coldTemperature = mean(test_canmet_markov((test_canmet_markov(:,8)~=100...
    & ...
    test_canmet_markov(:,9)~=0),3))+273.15;
ewh.init();

cmdBuffer = [];
estBuffer = [];
obsBuffer = [];
seqBuffer = [];
timeBuffer = [];
cmdBufferFull = [];
estBufferFull = [];
obsBufferFull = [];
seqBufferFull = [];
```

```
vTimeFull = [];
tTot = 0;

for i = 1:144

vTime = (i-1)*estWindow+offset:timeStep:i*estWindow+offset-timeStep;
vTimeFull = cat(2,vTimeFull,vTime);

ctrl        = zeros(length(vTime),2);
ctrl(:,1)   = (test_canmet_markov(vTime+1,11)>0.1)*ewh.element1Power;
ctrl(:,2)   = (test_canmet_markov(vTime+1,12)>0.1)*ewh.element2Power;
ctrl        = sum(ctrl,2)';
x.meas      = test_canmet_markov(vTime+1,13:22)+273.15;
seq.obs     = mean(test_canmet_markov(vTime+1,13:22),2)'+273.15;

maxJump = 2;

[seq.est,x.est,tElapsed] = Estimator(ewh,gen,maxJump,vTime,seq.obs,ctrl,...
   timeBuffer,obsBuffer,cmdBuffer,estBuffer,seqBuffer);

tTot = tTot + tElapsed;

if length(cmdBuffer)*timeStep >= 3600-length(vTime)*timeStep
    cmdBuffer(1:length(vTime)) = [];
end
cmdBufferFull = cat(2,cmdBufferFull,ctrl);
cmdBuffer = cat(2,cmdBuffer,ctrl);

if length(estBuffer)*timeStep >= 3600-length(vTime)*timeStep
    estBuffer(1:length(vTime)) = [];
end
estBufferFull = cat(2,estBufferFull,x.est);
estBuffer = cat(2,estBuffer,x.est);

if length(obsBuffer)*timeStep >= 3600-length(vTime)*timeStep
    obsBuffer(1:length(vTime)) = [];
end
obsBufferFull = cat(2,obsBufferFull,seq.obs);
obsBuffer = cat(2,obsBuffer,seq.obs);

if length(seqBuffer)*timeStep >= 3600-length(vTime)*timeStep
    seqBuffer(1:length(vTime)) = [];
end
```

```
seqBufferFull = cat(2,seqBufferFull,seq.est);
seqBuffer = cat(2,seqBuffer,seq.est);
if length(timeBuffer)*timeStep >= 3600-length(vTime)*timeStep
    timeBuffer(1:length(vTime)) = [];
end
timeBuffer = cat(2,timeBuffer,vTime);

end

seqEst = seqBufferFull;
save('../log/seqEst.mat','seqEst');

seq.obs     = mean(test_canmet_markov(vTimeFull+1,13:22),2)'+273.15;
seq.meas    = (test_canmet_markov(vTimeFull+1,8)~=100 & test_canmet_markov(...
   vTimeFull+1,9)~=0)';

% Calcul de l'erreur moyenne
mape   = sum(abs(seq.meas-seqBufferFull))/numel(seq.meas)*100;
% Erreur sur la temperature
mae    = sum(abs(estBufferFull-seq.obs))/numel(seq.obs);
rmse   = sqrt(sum((estBufferFull-seq.obs).^2)/numel(seq.obs));

fprintf('Estimation completee en %g sec\n',tTot)
fprintf('MAPE d''estimation de la sequence : %g\n',mape)
fprintf('MAE d''estimation de la temperature : %g\nRMSE d''estimation de la...
    temperature : %g\n',mae,rmse)
```

ANNEXE G Structure de programmation de la reconstruction de l'état continu

Listing G.1 Programme de conversion d'un modèle numérique de chauffe-eau vers sa représentation d'état

```
function [ss_model] = Model2StateSpace(pModel)

A = zeros(pModel.nodeNumber);
B = zeros(pModel.nodeNumber);
C = eye(pModel.nodeNumber);
D = zeros(pModel.nodeNumber);

for i = 1:pModel.nodeNumber
    % MATRIX A
    A(i,i) = -(pModel.fluidDensity*pModel.waterDrawState*...
       pModel.waterDrawCurrent*pModel.fluidSpecificHeat +...
        pModel.tankLossCoefficient*pModel.nodeSurfaceArea(i))/...
        (pModel.fluidDensity*pModel.nodeVolume(i)*pModel.fluidSpecificHeat)...
           ;
    if i < pModel.nodeNumber
        A(i,i+1) = pModel.waterDrawState*pModel.waterDrawCurrent/...
           pModel.nodeVolume(i);
    end
    % MATRIX B (K/s)
    if i <= pModel.element1Node
        B(i,i) = pModel.element1Power*pModel.nodeVolume(i)/(sum(...
           pModel.nodeVolume(1:pModel.element1Node))*pModel.fluidDensity*...
           pModel.nodeVolume(i)*pModel.fluidSpecificHeat);
    elseif i <= pModel.element2Node && i > pModel.element1Node
        B(i,i) = pModel.element2Power*pModel.nodeVolume(i)/(sum(...
           pModel.nodeVolume(pModel.element1Node+1:pModel.element2Node))*...
           pModel.fluidDensity*pModel.nodeVolume(i)*...
           pModel.fluidSpecificHeat);
    end
    % MATRIX F
    if i == pModel.nodeNumber
        B(i,i) = B(i,i) + (pModel.fluidDensity*pModel.waterDrawState*...
           pModel.waterDrawCurrent*pModel.fluidSpecificHeat*...
           pModel.coldTemperature + ...
```

```
            pModel.tankLossCoefficient*pModel.nodeSurfaceArea(i)*...
                pModel.ambiantTemperature)/...
            (pModel.fluidDensity*pModel.nodeVolume(i)*...
                pModel.fluidSpecificHeat);
    else
        B(i,i) = B(i,i) + pModel.tankLossCoefficient*pModel.nodeSurfaceArea...
            (i)*pModel.ambiantTemperature/...
        (pModel.fluidDensity*pModel.nodeVolume(i)*pModel.fluidSpecificHeat)...
            ;
    end
end

ss_model = ss(A,B,C,D);
```

Listing G.2 Programme de construction du vecteur de commande des éléments chauffants d'un chauffe-eau

```
function U = CommandVectorBuilder(pModel,pTopCommand,pBottomCommand)

U = ones(pModel.nodeNumber,1);

for i = 1:pModel.nodeNumber
    if i <= pModel.element1Node
        if ~pTopCommand
            B = pModel.element1Power*pModel.nodeVolume(i)/(sum(...
                pModel.nodeVolume(1:pModel.element1Node))*...
                pModel.fluidDensity*pModel.nodeVolume(i)*...
                pModel.fluidSpecificHeat);
            if i ~= pModel.nodeNumber
                G = pModel.tankLossCoefficient*pModel.nodeSurfaceArea(i)*...
                    pModel.ambiantTemperature/...
                    (pModel.fluidDensity*pModel.nodeVolume(i)*...
                        pModel.fluidSpecificHeat);
            elseif i == pModel.nodeNumber
                G = (pModel.fluidDensity*pModel.waterDrawState*...
                    pModel.waterDrawCurrent*pModel.fluidSpecificHeat*...
                    pModel.coldTemperature + ...
                    pModel.tankLossCoefficient*pModel.nodeSurfaceArea(i)*...
                        pModel.ambiantTemperature)/...
                    (pModel.fluidDensity*pModel.nodeVolume(i)*...
                        pModel.fluidSpecificHeat);
            end
            U(i,1) = G/(B+G);
```

```
        end
    elseif i <= pModel.element2Node && i > pModel.element1Node
        if ~pBottomCommand
            B = pModel.element2Power*pModel.nodeVolume(i)/(sum(...
                pModel.nodeVolume(pModel.element1Node+1:pModel.element2Node)...
                )*pModel.fluidDensity*pModel.nodeVolume(i)*...
                pModel.fluidSpecificHeat);
            if i ~= pModel.nodeNumber
                G = pModel.tankLossCoefficient*pModel.nodeSurfaceArea(i)*...
                    pModel.ambiantTemperature/...
                     (pModel.fluidDensity*pModel.nodeVolume(i)*...
                        pModel.fluidSpecificHeat);
            elseif i == pModel.nodeNumber
                G = (pModel.fluidDensity*pModel.waterDrawState*...
                    pModel.waterDrawCurrent*pModel.fluidSpecificHeat*...
                    pModel.coldTemperature + ...
                     pModel.tankLossCoefficient*pModel.nodeSurfaceArea(i)*...
                        pModel.ambiantTemperature)/...
                     (pModel.fluidDensity*pModel.nodeVolume(i)*...
                        pModel.fluidSpecificHeat);
            end
            U(i,1) = G/(B+G);
        end
    end
end
```

Listing G.3 Exemple de routine d'estimation de l'état continu de la température d'un chauffe-eau par un observateur multivarié

```
close all; clear all; clc
addpath(genpath('../../models'))

load('test_canmet_markov');
load('seqEst');

timeStep            = 60;
simulationPeriod    = 0:timeStep:86400/2;

% Construction
gen     = GeneratorSequent(timeStep,'ewh_sequence_0.txt');
ewh0    = TypeX('ewh_model_canmet.txt',-1,gen);
ewh0.init();
ewh0.endNodeTemperature = test_canmet_markov(1,22:-1:13)'+273.15;
```

```
% Set Initial Conditions
x0      = 333.15*ones(1,ewh0.nodeNumber);
x       = zeros(ewh0.nodeNumber,length(simulationPeriod));
ex      = x;
x(:,1)  = x0;
tic
% Initialization
t = test_canmet_markov(:,22:-1:13)'+273.15;
c = test_canmet_markov(simulationPeriod+1,11:12)'>0.1;
s = seqEst;
ewh0.waterDrawState     = 1;
ewh0.waterDrawCurrent   = mean(test_canmet_markov((test_canmet_markov(:,8)'...
   ~=100 & test_canmet_markov(:,9)'>0.1),9))/60/1000;
ewh0.coldTemperature    = mean(test_canmet_markov((test_canmet_markov(:,8)~...
   =100 & test_canmet_markov(:,9)~=0),3))+273.15;

ss_ewh  = Model2StateSpace(ewh0);
A       = ss_ewh.A;
B       = ss_ewh.B;
C       = diag([0,0,0,1,0,0,0,0,1,0]);

% Kalman filter
Q       = 1e1*eye(ewh0.nodeNumber);
R       = 1e-1*eye(ewh0.nodeNumber);
mce     = 1000*eye(ewh0.nodeNumber);
emce    = mce;
dt      = timeStep;

for i = 1:length(simulationPeriod)-1
    ewh0.waterDrawState = s(i);
    ss_ewh  = Model2StateSpace(ewh0);
    A       = ss_ewh.A;
    B       = ss_ewh.B;
    U       = CommandVectorBuilder(ewh0,c(1,i),c(2,i));

    ex(:,i) = (eye(ewh0.nodeNumber)+A*dt)*x(:,i) + B*dt*U;
    emce    = A*mce*A'+Q;

    y           = C*(test_canmet_markov(simulationPeriod(i)+1,22:-1:13)...
       '+273.15);
    kg          = emce*C'/(C*emce*C'+R);
    x(:,i+1)    = ex(:,i)+kg*(y-C*ex(:,i));
    mce         = emce-kg*C*emce;
```

```
end
toc
mae     = sum(abs(x-(test_canmet_markov(simulationPeriod+1,22:-1:13)'+273...
    .15)),2)/size(x,2);
tmae    = sum(abs(mean(x)-mean(t(:,simulationPeriod+1))))/size(x,2);
rmse    = sqrt(sum((x-(test_canmet_markov(simulationPeriod+1,22:-1:13)'+273...
    .15)).^2,2)/size(x,2));
trmse   = sqrt(sum((mean(x)-mean(t(:,simulationPeriod+1))).^2,2)/size(x,2))...
    ;

emae    = sum(abs(ewh0.fluidDensity*ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3*(...
    ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*(x-(test_canmet_markov(...
    simulationPeriod+1,22:-1:13)'+273.15))),2)/size(x,2);
etmae   = sum(abs(mean(ewh0.fluidDensity*ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3*(...
    ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*x)-mean(ewh0.fluidDensity*...
    ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3*(ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*t...
    (:,simulationPeriod+1))))/size(x,2);
ermse   = sqrt(sum((ewh0.fluidDensity*ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3*(...
    ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*(x-(test_canmet_markov(...
    simulationPeriod+1,22:-1:13)'+273.15))).^2,2)/size(x,2));
etrmse  = sqrt(sum((mean(ewh0.fluidDensity*ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3...
    *(ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*x)-mean(ewh0.fluidDensity*...
    ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3*(ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*t...
    (:,simulationPeriod+1))).^2,2)/size(x,2));

fprintf('*Temperature\nMAE\n')
for i=1:length(mae); fprintf('%g\t%1.4f\n',i,mae(i)); end
fprintf('RMSE\n')
for i=1:length(mae); fprintf('%g\t%1.4f\n',i,rmse(i)); end
fprintf('Global\nMAE\n%1.2f\nRMSE\n%1.2f\n',tmae,trmse)
fprintf('*Energy\nMAE\n')
for i=1:length(mae); fprintf('%g\t%1.6f\n',i,emae(i)); end
fprintf('RMSE\n')
for i=1:length(mae); fprintf('%g\t%1.6f\n',i,ermse(i)); end
fprintf('Global\nMAE\n%1.3f\nRMSE\n%1.3f\n',etmae,etrmse)
```

Listing G.4 Exemple de routine d'estimation de l'état discret de la température d'un chauffe-eau par filtrage de Kalman

```
close all; clear all; clc
addpath(genpath('../../models'))

load('test_canmet_markov');
```

```
load('seqEst');

timeStep            = 60;
simulationPeriod    = 0:timeStep:86400/2;

% Construction
gen     = GeneratorSequent(timeStep,'ewh_sequence_0.txt');
ewh0    = TypeX('ewh_model_canmet.txt',-1,gen);
ewh1    = TypeX('ewh_model_canmet.txt',-1,gen);
ewh0.init();
ewh1.init();
ewh0.endNodeTemperature = test_canmet_markov(1,22:-1:13)'+273.15;
ewh1.endNodeTemperature = test_canmet_markov(1,22:-1:13)'+273.15;
ewh0.controlOverride = true;

% Set Initial Conditions
x0      = 333.15*ones(1,ewh1.nodeNumber);
x       = zeros(ewh1.nodeNumber,length(simulationPeriod));
x(:,1)  = x0;
tic
% Initialization
t = test_canmet_markov(:,22:-1:13)'+273.15;
c = test_canmet_markov(simulationPeriod+1,11:12)'>0.1;
s = seqEst;
ewh1.waterDrawState     = 1;
ewh1.waterDrawCurrent   = mean(test_canmet_markov((test_canmet_markov(:,8)'...
   ~=100 & test_canmet_markov(:,9)'>0.1),9))/60/1000;
ewh1.coldTemperature    = mean(test_canmet_markov((test_canmet_markov(:,8)~...
   =100 & test_canmet_markov(:,9)~=0),3))+273.15;

ss_ewh  = Model2StateSpace(ewh1);
A       = ss_ewh.A;
B       = ss_ewh.B;
C       = diag([1,0,0,1,0,0,0,0,1,0]);
ob      = obsv(ss_ewh);

polSys  = eig(ss_ewh.A);
polDes  = linspace(max(polSys)*9,max(polSys)*10,ewh1.nodeNumber);
L       = place(ss_ewh.A',ss_ewh.C',polDes)';

for i = 1:length(simulationPeriod)-1
    if s(i) == 0
        ewh0.endNodeTemperature = x(:,i)';
        ewh0.element1Control    = c(1,i);
```

```
        ewh0.element2Control    = c(2,i);
        ewh0.start();
        x(:,i+1) = ewh0.nodeTemperature;
    elseif s(i) == 1
        startU      = CommandVectorBuilder(ewh1,c(1,i),c(2,i));
        endU        = CommandVectorBuilder(ewh1,c(1,i+1),c(2,i+1));
        startX      = test_canmet_markov(simulationPeriod(i)+1,22:-1:13)...
           '+273.15;
        endX        = test_canmet_markov(simulationPeriod(i+1)+1,22:-1:13)...
           '+273.15;
        startXHat   = x(:,i);
        dt          = timeStep;

        FX          = (2*eye(ewh1.nodeNumber)+(A-L*C)*dt)*startXHat +...
            B*dt*(startU+endU) +...
            L*C*dt*(startX+endX);
        endXHat     = (2*eye(ewh1.nodeNumber)-(A-L*C)*dt)\FX;
        x(:,i+1)    = endXHat;
    end
end
toc
mae     = sum(abs(x-(test_canmet_markov(simulationPeriod+1,22:-1:13)'+273...
   .15)),2)/size(x,2);
tmae    = sum(abs(mean(x)-mean(t(:,simulationPeriod+1))))/size(x,2);
rmse    = sqrt(sum((x-(test_canmet_markov(simulationPeriod+1,22:-1:13)'+273...
   .15)).^2,2)/size(x,2));
trmse   = sqrt(sum((mean(x)-mean(t(:,simulationPeriod+1))).^2,2)/size(x,2))...
   ;

emae    = sum(abs(ewh0.fluidDensity*ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3*(...
   ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*(x-(test_canmet_markov(...
   simulationPeriod+1,22:-1:13)'+273.15))),2)/size(x,2);
etmae   = sum(abs(mean(ewh0.fluidDensity*ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3*(...
   ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*x)-mean(ewh0.fluidDensity*...
   ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3*(ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*t...
   (:,simulationPeriod+1))))/size(x,2);
ermse   = sqrt(sum((ewh0.fluidDensity*ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3*(...
   ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*(x-(test_canmet_markov(...
   simulationPeriod+1,22:-1:13)'+273.15))).^2,2)/size(x,2));
etrmse  = sqrt(sum((mean(ewh0.fluidDensity*ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3...
   *(ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*x)-mean(ewh0.fluidDensity*...
   ewh0.fluidSpecificHeat/3600/1e3*(ewh0.nodeVolume'*ones(1,size(x,2))).*t...
   (:,simulationPeriod+1))).^2,2)/size(x,2));
```

```
fprintf('*Temperature\nMAE\n')
for i=1:length(mae); fprintf('%g\t%1.4f\n',i,mae(i)); end
fprintf('RMSE\n')
for i=1:length(mae); fprintf('%g\t%1.4f\n',i,rmse(i)); end
fprintf('Global\nMAE\n%1.2f\nRMSE\n%1.2f\n',tmae,trmse)
fprintf('*Energy\nMAE\n')
for i=1:length(mae); fprintf('%g\t%1.6f\n',i,emae(i)); end
fprintf('RMSE\n')
for i=1:length(mae); fprintf('%g\t%1.6f\n',i,ermse(i)); end
fprintf('Global\nMAE\n%1.3f\nRMSE\n%1.3f\n',etmae,etrmse)
```