

**Titre:** Analyse de la stabilité robuste généralisée par la méthode de l'intégrale de dilatation  
Title: l'intégrale de dilatation

**Auteur:** Karim Bessadi  
Author:

**Date:** 2015

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Bessadi, K. (2015). Analyse de la stabilité robuste généralisée par la méthode de l'intégrale de dilatation [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].  
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/1926/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/1926/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Lahcen Saydy, & David Saussié  
Advisors:

**Programme:** génie électrique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE DE LA STABILITÉ ROBUSTE GÉNÉRALISÉE PAR LA MÉTHODE DE  
L'INTÉGRALE DE DILATATION

KARIM BESSADI  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)  
OCTOBRE 2015

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ANALYSE DE LA STABILITÉ ROBUSTE GÉNÉRALISÉE PAR LA MÉTHODE DE  
L'INTÉGRALE DE DILATATION

présenté par : BESSADI Karim

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. GOURDEAU Richard , Ph. D., président

M. SAYDY Lahcen , Ph. D., membre et directeur de recherche

M. SAUSSIÉ David, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. O'SHEA Jules, D. Ing., membre

## DÉDICACE

*À ma famille*

## REMERCIEMENTS

Arrivé au terme de la rédaction de ce mémoire, je voudrais exprimer ma gratitude et mes remerciements à tous ceux qui, par leur soutien, leurs conseils ou leur enseignement, m'ont aidé à sa réalisation.

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de recherche. M. Lahcen Saydy, et M. David Saussié de m'avoir encadré et soutenu tout au long de ce projet. Je leur suis infiniment reconnaissant pour leur aide financière, les charges de laboratoires qu'ils m'ont confiées ainsi que d'avoir appuyé ma demande d'exemption des frais de scolarité. J'ai beaucoup aimé travailler sous leur direction sur un projet de recherche aussi passionnant.

Je tiens à remercier tout particulièrement M. Saussié pour son aide permanente, sa motivation sans faille tout au long de ma Maîtrise. Ses encouragements m'ont redonné de l'espoir quand tout semblait impossible. Je n'oublierai jamais ce qu'il a fait pour moi. Sa générosité et son engagement resteront à jamais gravés dans ma mémoire.

Je remercie ensuite les membres du jury, M. Richard Gourdeau, et M. Jules O'shea pour avoir accepté de lire mon mémoire et participer à la soutenance.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers tous les professeurs qui m'ont enseigné à l'École Polytechnique de Montréal et à l'École Polytechnique d'Alger. C'est à eux tous que je dois ma passion pour l'Automatique.

Je tiens aussi à remercier tout le personnel de l'École Polytechnique pour leur professionnalisme, en particulier Mme Nathalie Levesque et Mme Marie-Lyne Brisson.

Je remercie tous mes collègues : Ghazi, Erwan, Saad, Hugo, Sadid et Vincent. Je remercie également tous mes amis et surtout Ghazi Majdoub qui est tel un vrai frère pour moi.

Finalement, je remercie mes chers parents et toute ma famille de m'avoir tout le temps encouragé. Je ne serai jamais arrivé là sans leur amour sincère.

Je remercie Allah le tout puissant, le Très Miséricordieux.

## RÉSUMÉ

Depuis plusieurs décennies, l'étude de la stabilité généralisée des systèmes paramétrés a suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs. Bien qu'il existe à ce jour de nombreuses méthodes permettant l'analyse du confinement des valeurs propres d'une matrice dans des domaines du plan complexe, la majorité n'adresse que des cas particuliers de systèmes, tandis que d'autres, plus générales, souffrent de la difficulté d'utilisation lorsque le nombre de paramètres augmente. Dans ce contexte, il est très intéressant de développer une méthode d'analyse permettant d'adresser tous les types de systèmes, quel que soit le nombre de paramètres.

Pour arriver à une solution, une étude approfondie sur les applications gardiennes a été poursuivie. Ceci a permis de les maîtriser et d'en sortir une méthode d'analyse qui permet de juger la robustesse autour d'un point nominal à partir du signe de l'application gardienne.

Ainsi, on a entrepris une étude sur la méthode de l'intégrale de dilatation pour apporter une solution au jugement de la positivité d'un polynôme multivariable. On est ainsi parvenu à maîtriser cette nouvelle méthode, à relever ses faiblesses et à proposer des améliorations surtout en ce qui concerne la convergence des calculs. Parallèlement, une présentation de la méthode d'intégration de Smolyak a été détaillée. Celle-ci permet de calculer exactement l'intégrale de dilatation des polynômes multivariable tout en réduisant le nombre d'évaluations, surtout lorsque la dimension augmente.

Par la suite, on s'est intéressé au système de commande de vol d'un avion militaire. On a présenté la stratégie adoptée pour le contrôle du mode Short Period de la dynamique longitudinale. On a ensuite procédé à la modélisation de cette dynamique en boucle fermée tenant compte explicitement de la masse et de l'incertitude sur la position du centre de masse de l'avion.

Finalement, nous avons testé et éprouvé la nouvelle méthode sur le système étudié. Les résultats obtenus ont permis d'une part de valider le respect du cahier des charges concernant les contraintes sur les valeurs propres, et ont surtout confirmé l'aisance d'utilisation de la nouvelle méthode d'analyse basée sur la méthode de l'intégrale de dilatation.

## ABSTRACT

The generalized stability of uncertain systems has attracted the interest of many researchers. Although there up to now many methods for analysing the belonging of matrix's eigenvalues inside some areas of the complex plane, the majority address particular cases systems, while others, more general, suffer from difficulty of use when the number of parameters increases. In this context, it becomes very interesting to develop a new method to analyze all linear systems, regardless of the number of parameters.

To arrive at a solution, we studied carefully the method of guardian maps. This helped to master this tool and we found an analysis method for judging the robustness around a nominal parameters' configuration from the sign of the guardian map.

Afterwards, the dilation integral method has been studied to provide a solution to the judgment of the multivariable polynomial's positivity. We mastered this method, raised its weaknesses and proposed improvements especially with regard to calculation rate of convergence. Meanwhile, a presentation of the Smolyak method was detailed. It calculates exactly the dilation integral of multivariable polynomials while reducing the number of evaluations, especially when the dimension increases.

Subsequently, there has been interest in the flight control system of a military aircraft. We presented the control strategy of the Short Period mode. Then, we gave the closed-loop's dynamics, considering explicitly the mass and the uncertainty centering.

Finally, we have tried and tested the new method on the studied system. The results obtained allowed to validate compliance with the specifications regarding constraints on eigenvalues, especially to confirm the ease of use of the new analysis's method.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	x
LISTE DES FIGURES . . . . .	xi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xv
 CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Objectifs . . . . .	2
1.3 Plan du mémoire . . . . .	2
 CHAPITRE 2 MÉTHODE DE SMOLYAK . . . . .	4
2.1 Approximation polynomiale d'une fonction . . . . .	4
2.1.1 Interpolation polynomiale . . . . .	4
2.1.2 Interpolation de Lagrange . . . . .	5
2.2 Méthodes de quadrature . . . . .	6
2.2.1 Formule de quadrature d'interpolation . . . . .	6
2.2.2 Formule de quadrature de Gauss . . . . .	8
2.2.3 Séquences de Clenshaw-Curtis . . . . .	10
2.2.4 Séquences de Kronrod-Patterson . . . . .	11
2.2.5 Séquences retardées de Petras . . . . .	12
2.3 Approximation d'une intégrale multiple . . . . .	13
2.3.1 Formule de Smolyak . . . . .	13
2.3.2 Nombre de points d'une grille . . . . .	15

2.3.3	Degré d'exactitude . . . . .	17
2.3.4	Algorithme de calcul des points et leurs poids . . . . .	17
2.3.5	Exemples numériques . . . . .	19
2.4	Conclusion . . . . .	23
 CHAPITRE 3 INTÉGRALE DE DILATATION . . . . .		24
3.1	Intégrale de dilatation . . . . .	24
3.2	Conditionnement des calculs . . . . .	28
3.2.1	Estimation du conditionneur . . . . .	30
3.3	Calcul de l'intégrale de dilatation avec Smolyak . . . . .	33
3.4	Algorithme de calcul . . . . .	39
3.5	Amélioration de la convergence des calculs . . . . .	39
3.5.1	Introduction d'une fonction convexe . . . . .	39
3.5.2	Interpolation de la fonction sign( $f$ ) . . . . .	41
3.5.3	Subdivision du domaine d'intégration . . . . .	43
3.6	Exemples numériques . . . . .	45
 CHAPITRE 4 STABILITÉ GÉNÉRALISÉE . . . . .		47
4.1	Préliminaires Mathématiques . . . . .	47
4.1.1	Produit de Kronecker . . . . .	47
4.1.2	Produit bialterné . . . . .	48
4.2	Applications gardiennes et semi-gardiennes . . . . .	49
4.2.1	Définitions et propriétés . . . . .	50
4.2.2	Construction pour un domaine à frontière polynomiale . . . . .	52
4.2.3	Applications usuelles . . . . .	54
4.2.4	Construction à partir d'applications usuelles . . . . .	55
4.2.5	Exemple d'analyse par applications gardiennes . . . . .	56
 CHAPITRE 5 APPLICATION AUX COMMANDES DE VOL . . . . .		63
5.1	Contrôle longitudinal d'un F-16 . . . . .	63
5.1.1	Modèle et architecture de commande . . . . .	63
5.1.2	Système à analyser . . . . .	66
5.2	Analyse graphique basée sur l'annulation des applications gardiennes . . . . .	67
5.2.1	Méthodologie . . . . .	67
5.2.2	Marge de stabilité . . . . .	69
5.2.3	Cône d'amortissement . . . . .	69
5.3	Analyse de la robustesse basée sur la positivité des applications gardiennes .	71

5.3.1	Remarques préliminaires . . . . .	71
5.3.2	Marge de stabilité . . . . .	73
5.3.3	Cône d'amortissement . . . . .	77
CHAPITRE 6 CONCLUSION . . . . .	81	
6.1	Synthèse des travaux . . . . .	81
6.2	Perspectives . . . . .	82
RÉFÉRENCES . . . . .	83	
ANNEXES . . . . .	88	
A.1	Introduction . . . . .	88
A.2	Repères . . . . .	88
A.2.1	Repère ECI ( $Ox_Iy_Iz_I$ ) . . . . .	88
A.2.2	Repère avion ( $Ox_by_bz_b$ ) . . . . .	88
A.2.3	Repère Géographique ( $Ox_ey_ez_e$ ) . . . . .	89
A.2.4	Repère aérodynamique ( $Ox_ay_az_a$ ) . . . . .	89
A.2.5	Repère stabilité ( $Ox_sy_sz_s$ ) . . . . .	89
A.3	Forces et Moments intervenants . . . . .	90
A.3.1	Force de poussée ou de propulsion . . . . .	91
A.3.2	Force de gravité ou de poids . . . . .	91
A.3.3	Forces aérodynamiques . . . . .	92
A.4	Equations du mouvement . . . . .	93
A.4.1	Mouvement de translation de l'avion . . . . .	93
A.4.2	Mouvement de rotation de l'avion . . . . .	93
A.4.3	Variation des angles d'orientation . . . . .	93
A.5	Dynamique longitudinale . . . . .	93
A.6	Linéarisation du modèle longitudinal . . . . .	95
A.7	Approximation polynomiale des matrices du modèle <i>Short Period</i> . . . . .	96
B.1	Analyse graphique de la stabilité . . . . .	98
B.1.1	Marge de stabilité . . . . .	98
B.1.2	Limite en amortissement . . . . .	99
B.2	Analyse de la stabilité avec l'intégrale de dilatation . . . . .	100
B.2.1	Marge de stabilité . . . . .	100

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	$N_{l,d}$ pour les séquences de Clenshaw-Curtis . . . . .	16
Tableau 2.2	$N_{l,d}$ pour les séquences de Kronrod-Patterson . . . . .	16
Tableau 2.3	Algorithme de calcul des points et des poids . . . . .	20
Tableau 2.4	Résultats . . . . .	22
Tableau 3.1	Convergence des calculs pour l'exemple de Motzkin . . . . .	28
Tableau 3.2	Problème de conditionnement pour $\mu = 1$ . . . . .	32
Tableau 3.3	Problème de conditionnement pour $\mu = 0.3$ . . . . .	33
Tableau 3.4	Problème de calcul symbolique pour $\mu = 0.1$ . . . . .	33
Tableau 3.5	Intégrale de dilatation pour $\mu = 1$ . . . . .	36
Tableau 3.6	intégrale de dilatation pour $\mu = 0.3$ . . . . .	36
Tableau 3.7	Convergence de l'intégrale de dilatation pour $\mu = 0.1$ . . . . .	37
Tableau 3.8	Amélioration de la convergence avec ajout de paramètres . . . . .	41
Tableau 3.9	Amélioration de la convergence avec l'interpolation . . . . .	43
Tableau 3.10	Convergence des calculs en fonction des subdivisions . . . . .	44
Tableau 3.11	Résultats obtenus pour le test de stabilité . . . . .	45
Tableau 3.12	Résultats obtenus pour le test de stabilité . . . . .	46
Tableau 4.1	Valeurs propres de la famille matricielle aux points sélectionnés . . . . .	58
Tableau 4.2	Analyse de la robustesse en stabilité pour $r_1 \in [-3, -2.5]$ et $r_2 \in [-3, -2]$ . . . . .	61
Tableau 4.3	Analyse de la robustesse en stabilité pour $r_1 \in [-3, -2]$ et $r_2 \in [-4, -2]$ . . . . .	61
Tableau 5.1	Analyse de la robustesse de $F_1$ pour $\alpha = 0$ . . . . .	74
Tableau 5.2	Analyse de la robustesse de $F_2$ pour $\alpha = 0$ . . . . .	74
Tableau 5.3	Analyse de la robustesse de $F_1$ pour $\alpha = -1.5$ . . . . .	75
Tableau 5.4	Analyse de la robustesse de $F_2$ pour $\alpha = -1.5$ . . . . .	75
Tableau 5.5	Analyse de la robustesse de $F_1$ pour $\alpha = -2$ . . . . .	76
Tableau 5.6	Analyse de la robustesse de $F_2$ pour $\alpha = -2$ . . . . .	76
Tableau 5.7	Analyse de la robustesse de $G_2$ pour $\xi = 0.3$ . . . . .	77
Tableau 5.8	Analyse de la robustesse de $G_2$ pour $\xi = 0.5$ . . . . .	78
Tableau 5.9	Analyse de la robustesse de $G_2$ pour $\xi = 0.6$ . . . . .	78
Tableau 5.10	Analyse de la robustesse de $G_2$ pour $\xi = 0.6$ - Degré de précision moindre . . . . .	79
Tableau 5.11	Analyse de la robustesse de $G_2$ pour $\xi = 0.65$ . . . . .	79

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Grille de points correspondante à $A_{2,2}$	19
Figure 2.2	Grille de points correspondant à $A_{2,4}$	21
Figure 2.3	Grille de points correspondante à $A_{3,5}$	22
Figure 3.1	Polynôme de Motzkin	27
Figure 3.2	Intégrale de dilatation du polynôme de Motzkin pour $k=6$	28
Figure 3.3	Convergence des calculs pour l'exemple d'Ackermann	38
Figure 3.4	Qualité d'interpolation de la fonction signum	42
Figure 3.5	Interpolation de la fonction $\text{sign}(q^4 + 1)$	43
Figure 3.6	subdivisions d'un domaine dans $\mathbb{R}^2$ pour $N=4$	45
Figure 4.1	Domaines usuels de stabilité	54
Figure 4.2	Construction d'un domaine à partir des domaines usuels	56
Figure 4.3	Points d'annulation de $\nu$	57
Figure 4.4	Représentation de l'ensemble stable	58
Figure 4.5	Emplacement des rectangles par rapport au domaine stable	62
Figure 5.1	Architecture du contrôleur utilisé	65
Figure 5.2	Comparaison des tracés des applications gardiennes avec <code>contour</code>	68
Figure 5.3	Analyse graphique de la marge de stabilité	70
Figure 5.4	Analyse graphique de la limite en amortissement	72
Figure A.1	Repère Aérodynamique, Avion et Stabilité	90

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Approximation numérique

$L_{n,j}$	polynôme de la base de Lagrange associé au $j^{\text{e}}$ point d'interpolation
$\varpi(x)$	Fonction de pondération de l'intégrale
$V_n$	Polynôme orthogonal de degré $n$
$Q_n$	Formule de quadrature à $n$ points
$Q_n^{CC}$	Formule de quadrature à $n$ points de type Clenshaw-Curtis
$Q_n^{KP}$	Formule de quadrature à $n$ points de type Kronrod-Patterson
$Q_n^{Petras}$	Formule de quadrature à $n$ points de type Petras
$\otimes$	Produit tensoriel
$\Theta_{l,d}$	Produit tensoriel de dimension $d$ et de précision $l$
$A_{l,d}$	Formule de Smolyak de dimension $d$ et de précision $l$
$\mathbb{H}_{l,d}$	Grille de points associée à la formule de Smolyak de dimension $d$ et précision $l$
$N_{l,d}$	Nombre de points de la grille de Smolyak

### Intégrale de dilatation

$\mathcal{Q}$	Ensemble de variation des paramètres
$\mathcal{Q}_{bad}$	Volume des paramètres où la positivité est violée
$\epsilon_k(\alpha)$	Intégrale de dilatation de degré $k$
$\alpha$	Scalaire positif
$\alpha^*$	La valeur de $\alpha$ qui minimise l'intégrale de dilatation
$\epsilon_k$	Le minimum de l'intégrale de dilatation de degré $k$
$\theta$	Conditionneur
$\theta_k$	Estimée du conditionneur

### Stabilité généralisée

$\Omega$	Ensemble du plan complexe symétrique par rapport à l'axe des réels
$\otimes$	Produit de Kronecker
$\odot$	Produit Bialtérné
$\lambda(P)$	Valeurs propres de $P$
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Matrices réelles carrées de dimension $n$
$\mathcal{S}(\Omega)$	Ensemble de matrice dont toutes les valeurs propres appartiennent à $\Omega$

$\bar{\Omega}$	L'adhérence de l'ensemble $\Omega$
$\partial\Omega$	La frontière de l'ensemble $\Omega$
$\mathring{\Omega}$	L'intérieur de l'ensemble $\Omega$
$\mathcal{F}(A)$	Matrice gardienne basée sur le produit de Kronecker, associée à $A$
$\mathcal{M}(A)$	Matrice gardienne basée sur le produit bialterné, associée à $A$

## Modélisation du vol

$G$	Centre de gravité de l'avion
$T$	Point d'application de la force de propulsion
$O$	Point de référence du centre de masse de l'avion
$\Delta_x$	Position de $G$ par rapport à $O$ suivant l'axe longitudinal
$\Delta_m$	Incertitude sur la masse
$m$	Masse de l'avion
$I$	Matrice d'inertie de l'avion

- Repères

$(O_Iy_Iz_I)$	Repère Earth Centered Inertial
$(O_b y_b z_b)$	Repère Avion
$(O_e y_e z_e)$	Repère Géographique
$(O_a y_a z_a)$	Repère Aérodynamique
$(O_s y_s z_s)$	Repère Stabilité
$R_{R_j/R_i}$	Matrice de passage du repère $i$ au repère $j$

- Forces et Moments

$F_p$	Force de propulsion
$M_F$	Moment de la force de propulsion
$L$	Force de portance
$D$	Force de trainée
$C$	Force aérodynamique latérale
$M_F$	Moment des forces aérodynamiques

- Grandeurs :

$U$	vitesse longitudinale (suivant l'axe $X_b$ )
$V$	vitesse latérale (suivant l'axe $Y_b$ )

$W$	vitesse verticale (suivant l'axe $Z_b$ )
$P$	vitesse de rotation en roulis (autour de l'axe $X_b$ )
$Q$	vitesse de rotation en tangage (autour de l'axe $Y_b$ )
$R$	vitesse de rotation en lacet (autour de l'axe $Z_b$ )
$\Theta$	Angle d'assiette longitudinale
$\Phi$	Angle de gîte
$\Psi$	Angle de cap

- Angles caractéristiques :

$\alpha$	Angle d'attaque
$\beta$	Angle de dérapage

- Grandeur linéarisées :

$\tau$	Constante de temps de l'actionneur de la gouverne de profondeur
$\delta_e$	Angle de braquage
$\delta_t$	Position de la manette des gaz
$u$	variations de la vitesse autour de l'équilibre
$\alpha_x$	Angle d'attaque
$\theta$	Angle d'assiette
$q$	Vitesse en tangage

- Modélisation du *Short Period*

$N_z$	Facteur de charge de l'avion
$a_n$	Accélération normale de l'avion
$(A_{SP}, B_{SP}, C_{SP})$	Dynamique du <i>Short Period</i> en boucle ouverte
$(A_K, B_K, C_K)$	Dynamique du contrôleur
$(A_{BF}, B_{BF}, C_{BF})$	Dynamique du <i>Short Period</i> en boucle fermée

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	DYNAMIQUE DE VOL LONGITUDINAL . . . . .	88
Annexe B	Code Matlab utilisé pour l'analyse de vol . . . . .	98

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Contexte

L'étude de la stabilité généralisée des matrices ou des polynômes paramétrés est un des problèmes les plus importants en automatique. En effet, certaines performances peuvent être assurées à un système linéaire stationnaire si toutes les valeurs propres de sa matrice jacobienne sont confinées à l'intérieur d'un domaine  $\Omega$  du plan complexe. Parmi les domaines d'intérêt les plus importants, on retrouve le demi-plan gauche qui assure la stabilité des systèmes dans le cas continu, et le disque unitaire qui assure celle du cas discret.

De nombreux chercheurs se sont intéressés à développer des outils qui permettent d'étudier la stabilité généralisée. Le pionnier fut Kharitonov (Kharitonov, 1981) qui apporta une solution à la stabilité Hurwitz des polynômes paramétrés. Sept ans plus tard, le théorème des bords (*edge theorem*) (Bartlett et al., 1988) permit d'adresser d'autres types de stabilité. Cependant cette méthode se limitait à l'étude des polynômes dont les coefficients sont des fonctions affines des paramètres. La méthode des applications gardiennes introduite par Saydy (Saydy et al., 1990), représente une solution simple à ce problème. En effet, celle-ci associe à chaque domaine de stabilité  $\Omega$  une application, qui s'annule pour toute matrice ayant une valeur propre à la frontière de  $\Omega$ . De ce fait, pour un système paramétrique, l'ensemble des points pour lesquels l'application gardienne s'annule, divise l'espace des paramètres en plusieurs ensembles stables ou instables relativement à  $\Omega$ .

Bien qu'elle adresse théoriquement tous les systèmes linéaires stationnaires, cette dernière méthode rencontre des difficultés quant à son utilisation. Pour un système dépendant de deux paramètres, une analyse graphique du domaine d'annulation des applications gardiennes permet de déterminer la stabilité par rapport au domaine  $\Omega$ . Mais au-delà de deux paramètres, l'analyse graphique devient problématique. En revanche, s'assurer que l'application gardienne demeure de signe constant sur le domaine d'incertitude, nous permet d'assurer la stabilité généralisée. Pour une paramétrisation polynomiale du système, l'application gardienne est un polynôme multivariable en les paramètres et on retombe ainsi sur le problème classique de positivité d'un polynôme sur un domaine.

L'intégrale de dilatation (Barmish et al., 2009) s'avère alors un outil intéressant pour tester la positivité d'un polynôme multivariable. Cette méthode permet d'obtenir une borne supérieure du volume de violation (domaine sur lequel le polynôme est négatif) par un simple calcul intégral. Dans ce cadre, si on démontre que le volume de violation est inférieur à un seuil

tolérable, on peut juger que le risque de perte des performances est négligeable, et donc le système est considéré “pratiquement” robuste (*practically robust*) en performances sur l’ensemble de variation des paramètres.

On s’est ainsi intéressé à traduire le problème de stabilité par rapport aux domaines usuels en un problème de positivité de polynômes multivariables dépendant des paramètres du système. Ceci a pour effet de simplifier l’analyse de la stabilité généralisée sur un hyperrectangle de variation des paramètres, quel que soit le nombre de paramètres.

## 1.2 Objectifs

L’objectif de ce projet de Maîtrise est double : le principal est de construire une nouvelle méthode permettant d’analyser la stabilité généralisée d’une matrice ou d’un polynôme paramétrés, quel que soit le nombre des paramètres. L’objectif secondaire est d’appliquer cette nouvelle méthode pour l’analyse des qualités de vol longitudinal d’un F-16 en considérant les incertitudes sur la masse et le centrage.

La nouvelle méthode d’analyse de la stabilité généralisée sera basée sur l’intégrale de dilatation qui consiste en un calcul intégral pour estimer la positivité d’un polynôme multivariable sur un domaine donné. Plusieurs étapes sont alors nécessaires : une étude approfondie des applications gardiennes, ensuite une maîtrise de l’intégrale de dilatation et des méthodes d’intégrations numériques permettant de compléter la mise en œuvre de la nouvelle méthode.

La méthode obtenue doit être utilisée pour l’analyse des qualités de manœuvrabilité pour une condition de vol longitudinal. En effet, les lois de commande sont synthétisées en considérant un modèle nominal de la condition de vol. En réalité, la masse et le centrage sont des paramètres incertains qui changent en cours de vol, et donc pour des raisons de sécurité et de confort il est indispensable de s’assurer que les qualités de vol demeurent bonnes en présence des incertitudes.

## 1.3 Plan du mémoire

Le mémoire est divisé en 4 chapitres principaux. Le chapitre 2 s’intéresse à la méthode de Smolyak (Smolyak, 1963) qui sera utilisée pour calculer l’intégrale de dilatation. Étant donné l’importance de cette méthode d’intégration numérique, surtout en matière de réduction du nombre d’évaluations de l’intégrande, une attention particulière lui sera accordée. En effet, une description sur l’approximation est détaillée, partant de l’approximation polynomiale d’une fonction, jusqu’au calcul intégral d’une fonction multivariable. Les formules de qua-

dratures unidimensionnelles les plus importantes seront présentées au passage. Le chapitre 3 introduit la méthode de l'intégrale de dilatation. Le concept de cette méthode ainsi que ses propriétés y sont détaillés ; des critiques ainsi que de probables améliorations notamment en termes de convergence de calcul sont proposées. Le chapitre 4 présente les applications gardiennes, et leur utilisation pour analyser la robustesse d'un système. Enfin, le chapitre 5 aborde l'application de notre approche à un système de commandes de vol. Le problème de robustesse en masse et centrage est traitée dans un premier temps de façon graphique avec les applications gardiennes, et ensuite, par la méthode de l'intégrale de dilatation.

## CHAPITRE 2 MÉTHODE DE SMOLYAK

On s'intéresse tout d'abord aux méthodes de quadrature, et notamment à la méthode de Smolyak, pour évaluer numériquement les intégrales simples et multiples. Ce chapitre se veut un préliminaire mathématique dans lequel on présente les outils numériques qui seront essentiels pour le reste de ce mémoire.

### 2.1 Approximation polynomiale d'une fonction

Les formules d'interpolation dites de quadrature unidimensionnelle ont été introduites pour répondre au problème de calcul des intégrales simples ; elles servent de base à la méthode de Smolyak pour le calcul des intégrales multiples. Ces méthodes se basent sur l'approximation de l'intégrande par son polynôme interpolant, et présentent une solution adéquate lorsque les fonctions à intégrer n'ont pas de primitives, e.g.,  $e^{x^2}$ ,  $\frac{\sin x}{x}$ ,  $\frac{1}{\ln x}$ ,  $\sqrt{1+x^3}$ . Avant d'aborder les formules de quadrature, nous rappelons brièvement ce qu'est une interpolation polynomiale.

#### 2.1.1 Interpolation polynomiale

**Définition 2.1.1.** *On dit qu'un polynôme à coefficients réels  $p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$  est une interpolation d'une fonction  $f(x)$  aux  $n+1$  points d'interpolation  $x_j$  si :*

$$p(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n \quad (2.1)$$

Le Théorème 2.1.1 d'approximation de Weierstrass nous assure qu'une approximation polynomiale d'une fonction continue existe toujours, et ce, quelle que soit l'erreur d'interpolation désirée (Kopecky, 2007).

**Théorème 2.1.1.** *Soit  $f$  une fonction continue définie sur l'intervalle  $[a, b]$  à valeurs réelles alors :*

$$\forall \xi > 0, \exists p(x) \text{ tel que } |f(x) - p(x)| < \xi, \forall x \in [a, b] \quad (2.2)$$

Afin d'identifier les coefficients du polynôme interpolant, il faut résoudre le système linéaire

résultant 2.3 de  $n + 1$  équations à  $n + 1$  inconnues :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}}_{V_n} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_C = \underbrace{\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}}_f \quad (2.3)$$

où la matrice  $V_n$  est communément appelée matrice de Vandermonde. Son déterminant est donné par :

$$\det(V_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad (2.4)$$

En se basant sur cette expression, on déduit le théorème de Vandermonde :

**Théorème 2.1.2.** *Pour  $n + 1$  points d'interpolation  $\{x_0, \dots, x_n\}$  différents, la matrice de Vandermonde est inversible, et il existe un unique polynôme d'ordre  $n$  qui satisfait les conditions d'interpolation sur les  $n + 1$  points :*

$$p(x) = \sum_{i=0}^n (V_n^{-1} f)_i x^i \quad (2.5)$$

Bien que le théorème nous assure l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation, il implique l'inversion de la matrice de Vandermonde  $V_n$ , ce qui peut représenter un calcul lourd en nombre d'opérations. La section suivante présente une formule d'interpolation plus simple que (2.5) et mieux adaptée à l'interpolation polynomiale.

### 2.1.2 Interpolation de Lagrange

Soit une séquence de  $n + 1$  points distincts  $\{x_0, \dots, x_n\}$ . On définit les polynômes de la base de Lagrange associée sous la forme :

$$L_{0,0}(x) = 1, L_{n,j}(x) = \prod_{j \neq k=0}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad j = 0, \dots, n \quad (2.6)$$

Ces polynômes vérifient la propriété suivante :

$$L_{n,j}(x_j) = 1 \quad \text{et} \quad L_{n,j}(x_i) = 0, \quad \forall i \neq j \quad (2.7)$$

En se basant sur cette propriété fondamentale, on peut alors trouver une alternative à la formule 2.5.

**Théorème 2.1.3.** Pour  $n + 1$  points d'interpolation  $\{x_0, \dots, x_n\}$  différents, le polynôme d'interpolation de Lagrange est donné par

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) L_{n,j}(x) \quad (2.8)$$

où les polynômes de Lagrange  $\{L_{n,j} : j = 0, \dots, n\}$  sont donnés par (2.6).

L'erreur d'approximation commise par l'interpolation de Lagrange est définie comme suit :

**Théorème 2.1.4.** Soit  $f(x)$  de classe  $C^{n+1}$  sur  $[a, b]$ , et  $p_n(x)$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f(x)$  pour les  $n + 1$  points  $\{x_0, \dots, x_n\}$ . L'erreur d'interpolation est alors :

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \text{ avec } \xi \in [a, b] \quad (2.9)$$

Il s'agit alors de bien choisir le nombre de points et leur répartition pour diminuer l'erreur d'interpolation. On rappelle notamment qu'augmenter le nombre de points ne conduit pas nécessairement à une meilleure approximation et peut entraîner le phénomène de Runge.

## 2.2 Méthodes de quadrature

Les méthodes de quadrature permettent d'approximer la valeur numérique d'une intégrale ; le calcul explicite de l'intégrale est alors remplacé par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration. Par exemple, dans le cas d'un polynôme de degré  $2n - 1$ , la méthode de quadrature de Gauss est une méthode de quadrature exacte avec  $n$  points pris sur le domaine d'intégration. Nous verrons dans la suite que les méthodes de quadrature les plus précises se basent sur un choix judicieux des points du domaine d'intégration

### 2.2.1 Formule de quadrature d'interpolation

Considérons le cas général du calcul d'une intégrale de la forme suivante :

$$I(f) = \int_a^b \varpi(x) f(x) dx \quad (2.10)$$

où la fonction  $f(x)$  est continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , et  $\varpi(x)$  est une fonction de pondération positive sur cet intervalle. En prenant en compte le polynôme de Lagrange interpolant la fonction  $f$  en  $n + 1$  points distincts, on obtient l'approximation de  $I(f)$  sous la forme

(De Villiers, 2012) :

$$I(f) = \int_a^b \varpi(x)f(x)dx \approx \int_a^b \varpi(x) \sum_{j=0}^n f(x_j)L_{n,j}(x)dx \quad (2.11)$$

$$\approx \sum_{j=0}^n f(x_j) \int_a^b \varpi(x)L_{n,j}(x)dx \quad (2.12)$$

D'où la formule de quadrature résultante :

$$I(f) \approx Q_n(f) = \sum_{j=0}^n f(x_j)w_j(x_j) \quad (2.13)$$

avec

$$w_j(x_j) = \int_a^b \varpi(x)L_{n,j}(x)dx, \quad j = 0, \dots, n \quad (2.14)$$

Ainsi, une formule de quadrature est caractérisée par les points  $x_i$  en lesquels on évalue la fonction et les poids  $w_i$  correspondants, obtenus par intégration des polynômes de la base de Lagrange (Eq. 2.14).

Les quadratures sont généralement calculées sur un domaine d'intégration par défaut, en général  $[-1, 1]$ . On procède donc à un changement de variable pour changer le domaine d'intégration  $[a, b]$  en  $[-1, 1]$ . On a ainsi :

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)dx \quad (2.15)$$

Donc, si une quadrature est donnée sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par :

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i)w_i \quad (2.16)$$

alors pour un autre intervalle  $[a, b]$  on a :

$$Q_n(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^n f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right) w_i \quad (2.17)$$

On associe à la formule de quadrature le résidu de l'approximation  $R(f)$  défini par :

$$R(f) = I(f) - Q_n(f) \quad (2.18)$$

On définit aussi le degré d'exactitude  $l$  de la méthode qui est le degré maximal des polynômes pour lesquels la formule est exacte, i.e.,  $R(f) = 0$ .

Si l'on n'adopte pas un choix particulier des points d'interpolation, alors le degré d'exactitude des formules de type interpolation est de  $n$ , puisque on spécifie à l'avance les  $n + 1$  points et on calcule par conséquent les poids associés.

### 2.2.2 Formule de quadrature de Gauss

Pour maximiser le degré d'exactitude des formules de quadrature, Gauss proposa de laisser la liberté du choix des points ainsi que des poids correspondants.

#### Exemple 2.2.1.

Pour le cas de l'intégrale d'un polynôme d'ordre 3, cet exemple montre comment on peut trouver simultanément les points et les poids d'une formule de quadrature à deux points, telle que l'erreur d'approximation soit nulle. Soit  $f(x)$  le polynôme d'ordre 3 :

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (2.19)$$

On souhaite trouver une formule exacte de quadrature à deux points :

$$Q_2 = w_1f(x_1) + w_2f(x_2) \quad (2.20)$$

Ceci implique l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^1 (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3)dx = w_1f(x_1) + w_2f(x_2) \quad (2.21)$$

Ce qui implique l'égalité suivante :

$$c_0(w_1 + w_2 - \int_{-1}^1 dx) + c_1(w_1x_1 + w_2x_2 - \int_{-1}^1 xdx) + c_2(w_1x_1^2 + w_2x_2^2 - \int_{-1}^1 x^2dx) + c_3(w_1x_1^3 + w_2x_2^3 - \int_{-1}^1 x^3dx) = 0$$

Pour des  $c_i$  quelconque, on trouve la quadrature en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = \int_{-1}^1 dx \\ w_1x_1 + w_2x_2 = \int_{-1}^1 xdx \\ w_1x_1^2 + w_2x_2^2 = \int_{-1}^1 x^2dx \\ w_1x_1^3 + w_2x_2^3 = \int_{-1}^1 x^3dx \end{cases} \quad (2.22)$$

On trouve ainsi :  $w_1 = w_2 = 1$ ,  $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , et  $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Donc la quadrature  $Q_2 = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  permet de calculer exactement l'intégrale de tout polynôme d'ordre inférieur ou égal à 3.

Le théorème 2.2.1 de Gauss donne la condition sur le choix des points d'interpolation, afin de maximiser le degré d'une quadrature.

**Théorème 2.2.1** (Golub and Welsch (1969)). *Si l'on choisit les points d'interpolation comme étant les zéros du polynôme  $V_n$  qui vérifie la condition suivante :*

$$\int_{-1}^1 x^p V_n(x) \varpi(x) dx = 0, \quad p = 0, \dots, n \quad (2.23)$$

*alors la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme d'ordre inférieur ou égal à  $2n - 1$ .*

**Définition 2.2.1.** *On dit que la suite de polynômes  $V_n$  qui vérifient la condition 2.23 est une suite de polynômes orthogonaux par rapport à la fonction de pondération  $\varpi(x)$  dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .*

**Théorème 2.2.2** (Piessens et al. (1983)). *Les racines des polynômes  $V_i$  sont toutes réelles, et appartiennent à l'intervalle  $[-1, 1]$  :*

$$V_i(x) = K \prod_{j=0}^i (x - x_j) \text{ avec } -1 < x_1 \dots < x_i < 1 \quad (2.24)$$

Donc en se basant sur le théorème de Gauss, pour obtenir une formule de quadrature de degré  $n$  qui a une précision maximale de  $2n - 1$ , il faut calculer les zéros du polynôme qui vérifie la condition de Gauss, puis calculer les poids correspondants.

On s'intéresse à présent à la construction d'un polynôme orthogonal d'ordre  $n$  qui vérifie la condition de Gauss.

### Construction de polynômes orthogonaux

Pour n'importe quelle fonction de pondération  $\varpi(x)$ , on se base sur la Proposition 2.2.1 ci-dessous pour construire une suite de polynômes orthogonaux.

**Proposition 2.2.1** (De Villiers (2012)). *Pour l'intervalle  $[-1, 1]$ , les polynômes orthogonaux sont construits selon la relation de récurrence suivante :*

$$V_{-1} = 0, \quad V_0 = 1 \quad (2.25)$$

$$V_{k+1}(x) = xV_k(x) - \beta_k V_k(x) - \alpha_k V_{k-1}(x) \quad (2.26)$$

avec

$$\beta_k = \frac{\int_{-1}^1 x V_k^2(x) \varpi(x) dx}{\int_{-1}^1 V_k^2(x) \varpi(x) dx} \quad \text{et} \quad \alpha_k = \frac{\int_{-1}^1 x V_k(x) \varpi(x) dx}{\int_{-1}^1 V_k(x) \varpi(x) dx}. \quad (2.27)$$

**Exemple 2.2.2. Polynômes de Gauss-Tchebychev.** Pour la fonction de pondération  $\varpi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  et l'intervalle  $]-1, 1[$ , les polynômes orthogonaux dits de Tchebychev sont donnés par :

$$\begin{cases} T_0 = 1, T_1 = x \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \end{cases} \quad (2.28)$$

**Exemple 2.2.3. Polynômes de Gauss-Legendre.** Pour la fonction de pondération  $\varpi(x) = 1$  et l'intervalle  $[-1, 1]$ , les polynômes orthogonaux dits de Legendre sont donnés par :

$$\begin{cases} L_0 = 1, L_1 = x \\ L_n(x) = xL_{n-1}(x) - \frac{(n-1)^2}{(2n-3)(2n-1)}L_{n-2}(x) \end{cases} \quad (2.29)$$

### 2.2.3 Séquences de Clenshaw-Curtis

Les séquences de Clenshaw-Curtis, notées  $Q_{CC}$ , sont des formules de quadrature emboîtées. Pour le premier type de ces séquences, les points d'interpolation sont les zéros des polynômes de Tchebychev, auxquelles on ajoute les extrémités de l'intervalle d'intégration. Le deuxième type consiste à choisir les points d'interpolation étant les valeurs pour lesquelles le polynôme de Tchebychev atteint ses extrémités -1 et 1 (Gerstner and Griebel, 1998).

Les valeurs des points où le  $n^{\text{e}}$  polynôme de Tchebychev atteint ses extrémités sont données par :

$$x_i = \cos\left(\frac{n-i}{n}\pi\right) \quad (2.30)$$

On calcule les poids relatifs à chaque point en intégrant le polynôme de Lagrange qui lui est associé :

$$w_i = \int_{-1}^1 L_{n,i}(x) dx \quad (2.31)$$

En se référant au livre de Johan Devilliers (De Villiers, 2012, Chapitre 8), on arrive à des expressions simples dans le cas général en exprimant le polynôme de Lagrange  $L_{n,j}$  en fonction des polynômes de Tchebychev, puis en exploitant les propriétés intégrales de ceux-ci.

Les expressions des poids de la quadrature de Clenshaw-Curtis sont données par :

- Pour  $n$  pair, on a :

$$w_0 = w_n = \frac{1}{n^2 - 1} \quad (2.32)$$

$$w_j = \frac{2}{n} \left[ 1 - 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos\left(\frac{2jk}{n}\pi\right) + \frac{(-1)^j}{1-n^2} \right], \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (2.33)$$

- Pour  $n$  impair, on a :

$$w_0 = w_n = \frac{1}{n^2} \quad (2.34)$$

$$w_j = \frac{2}{n} \left[ 1 - 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos \left( \frac{2jk}{n} \pi \right) \right], \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (2.35)$$

Comme pour les quadratures de Gauss, les poids calculés sont tous positifs. Pour obtenir des séquences emboîtées, on fixe  $m_i = 2^{i-1} + 1$ , avec  $m_1 = 1$  et cette quadrature est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à  $m_i - 1$ .

**Remarque :** Bien que l'exactitude de cette formule pour  $n + 1$  points soit de  $n$ , inférieure à celle des formules de Gauss, plusieurs auteurs montrent que pour le cas des fonctions non polynomiales elle présente une approximation aussi bonne que la méthode de Gauss. L'erreur d'intégration est donnée par :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - Q_{CC}^{(n)} \right| \leq 2 \frac{(b-a)^2}{n+1} \|f'\|_\infty \quad (2.36)$$

#### 2.2.4 Séquences de Kronrod-Patterson

La plus grande motivation derrière l'extension des séquences de Gauss est d'atteindre une meilleure précision en gardant les calculs déjà obtenus pour les points précédents (Patterson, 1968). Kronrod (1965) fut le premier à étendre la formule de quadrature de Gauss à  $n$  points en lui ajoutant  $n + 1$  points, de telle sorte que la séquence à  $2n + 1$  points obtenue est de degré d'exactitude maximale de  $3n + 2$  si  $n$  est impair et  $3n + 1$  si  $n$  est pair. On notera  $Q_{KP}$  les séquences de Kronrod-Patterson.

Les points ajoutés sont symétriques par rapport au milieu de l'intervalle, et se situent entre les points initiaux de la formule de Gauss. Ce sont les zéros du polynôme de Steiltjes  $F_{n+1}$  qui vérifie la condition suivante :

$$\int_{-1}^1 x^j L_n(x) F_{n+1}(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, n \quad (2.37)$$

Pour obtenir la formule de Kronrod, il faut donc construire le polynôme orthogonal  $F_{n+1}$ , suivant la technique 2.2.1 présentée précédemment, en imposant comme fonction de pondération le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ . Des méthodes de calcul des points et poids de cette formule sont notamment présentés dans (Calvetti et al., 2000; Laurie, 2001).

Patterson (Patterson, 1968) a ensuite réitéré la technique de Kronrod récursivement pour obtenir des séquences de quadratures emboîtées avec degré d'exactitude maximal. Cette construction comprend une séquence de polynômes  $G_k(x)$  de degré  $2^{k-1}$  ( $n+1$ ) satisfaisants :

$$\int_{-1}^1 x^j L_n(x) \left( \prod_{i=1}^{k-1} G_i(x) \right) G_k(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, 2^{k-1}(n+1)-1 \quad (2.38)$$

avec  $G_1(x) = F_{n+1}$  et  $G_k$  orthogonal à tous les polynômes de degré inférieur ou égal à  $2^{k-1}(n+1)-1$  par rapport à la fonction de pondération  $L_n(x)(\prod_{j=1}^{k-1} G_j(x))$ .

Les  $2^k(n+1)-1$  points de quadrature obtenus incluent les zéros du polynôme de Legendre  $L_n$  et les points de tous les  $G_j, j = 1, \dots, k-1$ . Le degré d'exactitude théorique de la formule obtenue est  $(3 \cdot 2^{k-1} - 1)(n+1) + \bar{n}$  où  $\bar{n} = n$  si  $n$  est impair et  $n-1$  autrement (Gerstner and Griebel, 1998).

Le calcul des points et des poids est similaire au cas de l'extension de Kronrod.

Pour le cas  $n = 2$ , on utilise la formule de Gauss-Legendre à 3 points, et pour les quadratures à précision  $l$ , on utilise la  $(l-2)^{\text{e}}$  extension de Patterson, où le nombre de points devient  $2^l - 1$ . Le degré d'exactitude est alors  $3 \cdot 2^{(l-1)} - 1$ .

Enfin, pour une fonction  $f$  de classe  $C^r$ , l'erreur est donnée par :

$$\left| \int f(x) dx - Q_{KP}^{(l)} \right| = O(2^{-rl}) \quad (2.39)$$

## 2.2.5 Séquences retardées de Petras

Les séquences retardées de Petras<sup>1</sup>, notées  $Q_{Pd}$  sont inspirées de celles de Patterson et utilisent moins de points. Pour une précision souhaitée de la formule de Smolyak, on a la proposition 2.2.2 :

**Proposition 2.2.2** (Petras (2003)). *Si les quadratures unidimensionnelles sont telles que  $\deg(Q_i) \geq 2i - 1$ ; alors la formule de Smolyak sera exacte pour tout polynôme d'ordre total inférieur ou égal à  $\deg(Q(d+k, d)) > 2k + 1$ .*

Comme  $\deg(Q_{KP}^{2^i-1}) = 3 \cdot 2^{(i-1)} - 1$  alors la séquence particulière de Petras 2.40 (Petras, 2003) satisfait la condition de la proposition 2.2.2 précédente.

$$Q_{\text{Petras}}^{(i)} = Q_{KP}^{(j)} \text{ avec } 3 \cdot 2^j < 8i \leq 6 \cdot 2^j, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.40)$$

---

1. Petras delayed sequences.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} Q_{Pd}^{(1)} &= Q_{KP}^{(1)} \\ Q_{Pd}^{(2)} &= Q_{Pd}^{(3)} = Q_{KP}^{(2)} \\ Q_{Pd}^{(4)} &= Q_{Pd}^{(5)} = Q_{Pd}^{(6)} = Q_{KP}^{(3)} \\ &\dots \end{aligned}$$

Il est recommandé d'utiliser cette quadrature au lieu de celle de Kronrod-Patterson pour réduire le nombre d'évaluations de l'intégrande avec la formule de Smolyak tout en garantissant le même degré d'exactitude.

### 2.3 Approximation d'une intégrale multiple

Pour remédier au problème de croissance exponentielle du nombre de points nécessaires pour approximer une intégrale, on utilise la formule de Smolyak basée sur les séquences à précision croissante présentées précédemment ; en particulier les séquences de Clenshaw-Curtis, Kronrod-Patterson et de Petras.

#### 2.3.1 Formule de Smolyak

Pour le calcul des intégrales multiples, on peut généraliser les formules de quadrature unidimensionnelle présentées précédemment au cas d'une intégrale de dimension  $d$ , ou comme présenté dans l'article de Dabbene (Dabbene, 2007), si on utilise un produit tensoriel de  $d$  formules de quadrature unidimensionnelle 2.41 de degré de précision  $\deg(Q_N) \geq \nu$  :

$$(Q_N \otimes \cdots \otimes Q_N)[f] \doteq \sum_{k_1=1}^N \cdots \sum_{k_d=1}^N (w_{k_1} w_{k_2} \cdots w_{k_d}) f(x_{k_1}, \dots, x_{k_d}) \quad (2.41)$$

alors ce produit sera une approximation exacte pour tout polynôme de dimension  $d$ , dont le degré total<sup>2</sup> est inférieur ou égal  $\nu$ . Cependant, une telle extension devient rapidement intractable du fait de la croissance exponentielle avec  $d$  du nombre d'évaluations de la fonction. En effet, la formule 2.41 revient à évaluer la fonction sur la grille multidimensionnelle :

$$\mathbb{H}_{\nu,d} = (\mathbb{X} \times \cdots \times \mathbb{X}) \subset \Omega_d \quad (2.42)$$

---

2. Le degré total d'un monôme  $m(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$  est la somme de ses exposants  $\deg(m(x)) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$ . Le degré total d'un polynôme multivariable est le plus grand des degrés totaux de ses monômes.

dont la cardinalité est  $|\mathbb{H}_{\nu,d}| = N^d$ .

Pour éviter la croissance exponentielle du nombre d'évaluations, la construction apportée par Smolyak permet d'utiliser de manière plus efficace les méthodes de quadrature de dimension 1 pour obtenir une méthode de quadrature en dimension quelconque.

Tout d'abord le produit tensoriel précédent 2.41 est donnée sous une forme récursive :

$$\Theta_{l,d} = Q^{(l)} \otimes Q^{(l)} \otimes \dots Q^{(l)} = Q^{(l)} \otimes \Theta_{l,d-1} \quad (2.43)$$

En posant  $\Theta_{l,1} = Q^{(l)}$  et  $Q^{(0)} = 0$  cette formule peut s'écrire sous la nouvelle forme suivante :

$$\Theta_{l,d} = \sum_{k=1}^l (Q^{(k)} - Q^{(k-1)}) \otimes \Theta_{l,d-1} = \sum_{k=1}^l \Delta^{(k)} \otimes \Theta_{l,d-1} \quad (2.44)$$

avec  $\Delta^{(k)} \doteq Q^{(k)} - Q^{(k-1)}$ .

En définissant  $\mathbf{i} = [i_1 \dots i_d]^\top$ ,  $\mathbf{i} \in N_+^d$  ce produit tensoriel devient :

$$\Theta_{l,d} = \sum_{\|\mathbf{i}\|_\infty \leq l} \Delta^{(k_1)} \otimes \dots \otimes \Delta^{(k_d)} \quad (2.45)$$

La modification apportée par Smolyak consiste à définir récursivement  $\Theta_{l,d}$  en fonction des indices de précision inférieurs à  $l$  (Frank and Heinrich, 1996)

$$A_{l,d} = \sum_{k=1}^{l+1} \Delta^{(k)} \otimes \Theta_{l-k+1,d-1} \quad (2.46)$$

Ainsi la formule de Smolyak est une troncature de la somme établie pour le cas du produit tensoriel directe, elle considère uniquement les produits tensoriels dont la somme des indices est inférieure ou égal à l'indice de précision  $l$ . La nouvelle formule de quadrature de Smolyak est notée  $A_{l,d}$  et elle est donnée par 2.47 (Conrad and Marzouk, 2013) :

$$A_{l,d} = \sum_{|\mathbf{i}| \leq l+d} (\Delta^{(i_1)} \otimes \Delta^{(i_2)} \otimes \dots \otimes \Delta^{(i_d)}) = A_{l-1,d} + \sum_{|\mathbf{i}|=l+d} (\Delta^{(i_1)} \otimes \Delta^{(i_2)} \otimes \dots \otimes \Delta^{(i_d)}) \quad (2.47)$$

La même formule est donnée en fonction des quadratures explicitement cette fois (Novak and Ritter, 1996) :

$$A_{l,d} = \sum_{l+1 \leq |\mathbf{i}| \leq l+d} (-1)^{l+d-|\mathbf{i}|} \binom{d-1}{l+d-\mathbf{i}} (Q^{(i_1)} \otimes Q^{(i_2)} \otimes \dots \otimes Q^{(i_d)}) \quad (2.48)$$

Suivant cette formule, pour approximer une intégrale multiple on doit évaluer l'intégrande sur l'union des grilles correspondantes à l'ensemble des produits tensoriels possibles.

$$\mathbb{H}_{l,d} = \bigcup_{l+1 \leq |\mathbf{i}| \leq l+d} (\mathbb{X}^{(i_1)} \otimes \mathbb{X}^{(i_2)} \otimes \cdots \otimes \mathbb{X}^{(i_d)}) \quad (2.49)$$

Ou dans le cas des quadratures unidimensionnelles emboîtées  $\mathbb{X}_i \subset \mathbb{X}_{i+1}$ , le nombre de points diminuerait puisque la grille d'évaluation serait réduite à :

$$\mathbb{H}_{l,d} = \bigcup_{|\mathbf{i}|=l+d} (\mathbb{X}^{(i_1)} \otimes \mathbb{X}^{(i_2)} \otimes \cdots \otimes \mathbb{X}^{(i_d)}) \quad (2.50)$$

Donc avec les séquences emboîtées, le nombre de points est réduit, d'où l'importance accordée à ce type de quadratures dans ce mémoire.

### 2.3.2 Nombre de points d'une grille

Soit  $N_{l,d} \doteq |\mathbb{H}_{l,d}|$  le cardinal de la grille  $\mathbb{H}_{l,d}$ . Pour  $d = 1$ , on a  $N_{l,1} = N_{l+1}$ , avec  $N_{l+1}$  le nombre de points requis pour une formule de quadrature unidimensionnelle d'index de précision  $l + 1$ . Pour  $d \geq 1$ , la récurrence suivante permet de calculer le nombre de points :

$$N_{l,d+1} = \sum_{k=1}^{l+1} N_{l-k+1,d} (N_k - N_{k-1}) \doteq \sum_{k=1}^{l+1} \delta_k N_{l-k+1,d} \quad (2.51)$$

où  $N_{0,1} = N_0 = 0$  et  $\delta k \doteq N_k - N_{k-1}$  (Dabbene, 2007).

Une formule alternative pour calculer  $N_{l,d}$  a été proposée par Petras (Petras, 2003). Elle a l'avantage d'être plus facilement implémentable.

**Lemme 2.3.1.** *Le nombre  $N_{l,d}$  de nœuds dans la formule de Smolyak  $A_{l,d}$  est donné par :*

$$N_{l,d} = \delta_1^d \sum_{k=0}^l c_{k,l} \binom{d}{k} \quad (2.52)$$

où  $\binom{d}{k} = 0$  si  $k > d$ ,  $c_{0,l} = 1$  et

$$c_{k,l} = \sum_{\eta=1}^{l-k+1} \frac{\delta_{\eta+1}}{\delta_1} c_{k-1,l-\eta}, \quad k = 1, \dots, l \quad (2.53)$$

Les tableaux 2.1 et 2.2 donnent  $N_{l,d}$  pour quelques valeurs de  $l$  et  $d$  pour les séquences de

Clenshaw-Curtis et de Kronrod-Patterson ( $\delta_1 = N_1 = 1$ ).

Tableau 2.1  $N_{l,d}$  pour les séquences de Clenshaw-Curtis

$l \backslash d$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
2	5	13	25	41	61	85	113	145	181	221
3	9	29	69	137	241	389	589	849	1177	1581
4	17	65	177	401	801	1457	2465	3937	6001	8801
5	33	145	441	1105	2433	4865	9017	15713	26017	41265
6	65	321	1073	2929	6993	15121	30241	56737	100897	171425
7	129	705	2561	7537	19313	44689	95441	190881	361249	652065

Tableau 2.2  $N_{l,d}$  pour les séquences de Kronrod-Patterson

$l \backslash d$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
2	7	17	31	49	71	97	127	161	199	241
3	15	49	111	209	351	545	799	1121	1519	2001
4	31	129	351	769	1471	2561	4159	6401	9439	13441
5	63	321	1023	2561	5503	10625	18943	31745	50623	77505
6	127	769	2815	7937	18943	40193	78079	141569	242815	397825
7	255	1793	7423	23297	61183	141569	297727	580865	1066495	1862145

### Remarque :

Avec la formule de Smolyak, on évite le “fléau de la dimension” qui représente la croissance exponentielle du nombre de points quand la dimension croît. En effet, le nombre de points de la formule de Smolyak croît de façon polynomiale en fonction de  $d$ .

**Proposition 2.3.1** (Dabbene (2007)). *Si l'on suppose que les séquences utilisées pour la formule de Smolyak sont telles que  $N_1 = 1$  et  $N_l = 2^l - 1$ , alors pour un degré de précision  $l$  fixé, le nombre de points est un polynôme en  $d$  et croît comme  $N_{l,d} \approx \frac{2^l}{l!} d^l$ .*

### 2.3.3 Degré d'exactitude

#### Erreur d'intégration

Pour la classe de fonctions  $f \in \mathbb{R}_d^r$  continues et continument différentiable à l'ordre  $r$  et dont toutes les dérivées partielles vérifient la propriété suivante :

$$\left\{ f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}, \left\| \frac{\partial^{|s|_1} f}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_d^{s_d}} \right\| < \infty, s_i < r \right\} \quad (2.54)$$

Alors si on utilise des quadratures unidimensionnelles comme celles de Clenshaw-Curtis, ou bien Petras telles que leurs erreurs d'intégration satisfont  $|f - Q_i| = O((N_l)^{-r})$  où  $N_l \approx 2^l$  est le nombre de points de la formule de quadrature unidimensionnelle, alors l'erreur d'intégration de la formule de Smolyak est donnée par (Gerstner, 2007) :

$$|I^d - A_{l,d}| = O(N^{-r} \log(N)^{(d-1)(r+1)}) \quad (2.55)$$

avec  $N$  le nombre de points de la grille de Smolyak correspondante.

#### Degré d'exactitude polynomial

Dans le cas particulier des polynômes, on définit le degré d'exactitude  $S$  où l'intégration sera exacte pour tout polynôme de degré total inférieur ou égal à  $S$ .

**Proposition 2.3.2.** *Si les quadratures unidimensionnelles sont telles que  $\deg(Q_i) \geq l$  donc exactes pour tous les polynômes d'ordre inférieur ou égal à  $l$ ; alors la formule de Smolyak sera exacte pour tout polynôme d'ordre total inférieur ou égal à  $\deg(A_{l,d}) = l+d-1$  (Gerstner and Griebel, 1998).*

De plus pour les séquences sur lesquelles on se base dans ce mémoire, la Proposition 2.3.3 a été donnée dans (Dabbene, 2007).

**Proposition 2.3.3.** *Si les séquences utilisées pour la formule de Smolyak sont telles que  $\deg(Q_i) \geq 2i-1$  alors la formule de Smolyak sera exacte pour tout polynômes d'ordre inférieur ou égal à  $2l+1$ .*

### 2.3.4 Algorithme de calcul des points et leurs poids

Une propriété très importante quant à l'utilisation de la formule de Smolyak, est que pour approximer une intégrale de dimension  $d$ , avec un indice de précision  $l$ , il faut à chaque fois évaluer l'intégrande aux mêmes points de la grille  $\mathbf{x}_i = (x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$ ,  $i = 1, \dots, N_{l,d}$ . Il est

ainsi plus judicieux de calculer ces points et les poids correspondants de telle sorte à éviter de le refaire à chaque fois.

L'approximation de l'intégrale devient plus simple, et on l'obtient plus rapidement par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration :

$$A_{l,d}[f] = \sum_{j=1}^{N_{l,d}} w_j f(x_j) \quad (2.56)$$

où  $N_{l,d}$  est le nombre de points pour une dimension  $d$  avec une précision  $l$ .

**Exemple 2.3.1.** Soit à trouver les points et poids correspondants à la formule  $A_{2,2}$  :

$$\begin{aligned} A_{2,2} &= \sum_{3 \leq |\mathbf{i}| \leq 4} (-1)^{4-|\mathbf{i}|} \binom{1}{4-|\mathbf{i}|} (Q^{(i_1)} \otimes Q^{(i_2)}) \\ &= \sum_{|\mathbf{i}|=4} \binom{1}{0} (Q^{(i_1)} \otimes Q^{(i_2)}) - \sum_{|\mathbf{i}|=3} \binom{1}{1} (Q^{(i_1)} \otimes Q^{(i_2)}) \\ &= (Q^{(1)} \otimes Q^{(3)}) + (Q^{(3)} \otimes Q^{(1)}) + (Q^{(2)} \otimes Q^{(2)}) - (Q^{(1)} \otimes Q^{(2)}) - (Q^{(2)} \otimes Q^{(1)}) \\ &= 2 \sum_{i_2=1}^5 w_{i_2,5} f(0, x_{i_2, N_3}) + \sum_{i_1=1}^5 w_{i_1,5} 2 f(x_{i_1, N_3}, 0) + \sum_{i_1=1}^3 w_{i_1,3} \sum_{i_2=1}^3 w_{i_2,3} f(x_{i_1,3}, x_{i_2,3}) \\ &\quad - 2 \sum_{i_2=1}^3 w_{i_2,3} f(0, x_{i_2,3}) - \sum_{i_1=1}^3 w_{i_1,3} 2 f(x_{i_1,3}, 0) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Comme on s'intéresse aux séquences emboîtées qui partagent la propriété  $\mathbb{X}_{N_1} \subset \mathbb{X}_{N_2} \subset \mathbb{X}_{N_3}$ , en particulier  $x_{1,1} = x_{3,5} = x_{2,3}$  et  $x_{3,3} = x_{5,5} = -x_{1,3} = -x_{1,5}$ , on peut alors réécrire  $A_{2,2}$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} A_{2,2} &= [2w_{3,5} + w_{3,5}2 + w_{2,3}w_{2,3} - 2w_{2,3} - w_{2,3}2] f(x_{3,5}, x_{3,5}) + [2w_{1,5} + w_{2,3}w_{1,3} - 2w_{1,3}] f(x_{3,5}, x_{1,5}) + \\ &\quad [w_{1,5}2 + w_{1,3}w_{2,3} - w_{1,3}2] f(x_{1,5}, x_{3,5}) + [2w_{5,5} + w_{2,3}w_{3,3} - 2w_{3,3}] f(x_{3,5}, x_{5,5}) + [w_{5,5}2 + w_{3,3}w_{2,3} - w_{3,3}2] f(x_{5,5}, x_{3,5}) + [2w_{2,5}] f(x_{3,5}, x_{2,5}) + [w_{2,5}2] f(x_{2,5}, x_{3,5}) + [2w_{4,5}] f(x_{3,5}, x_{4,5}) + [w_{4,5}2] f(x_{4,5}, x_{3,5}) + [w_{1,3}w_{1,3}] f(x_{1,5}, x_{1,5}) + [w_{3,3}w_{3,3}] f(x_{5,5}, x_{5,5}) + [w_{1,3}w_{3,1}] f(x_{1,5}, x_{5,5}) + [w_{3,1}w_{1,3}] f(x_{5,5}, x_{1,5}) \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à écrire :

$$A_{2,2}[f] = \sum_{j=1}^{N_{2,2}=13} w_j f(x_j) \quad (2.58)$$

Et puis d'évaluer l'intégrande sur la grille 2.1 correspondante, obtenue pour le cas des quadratures de Clenshaw Curtis :

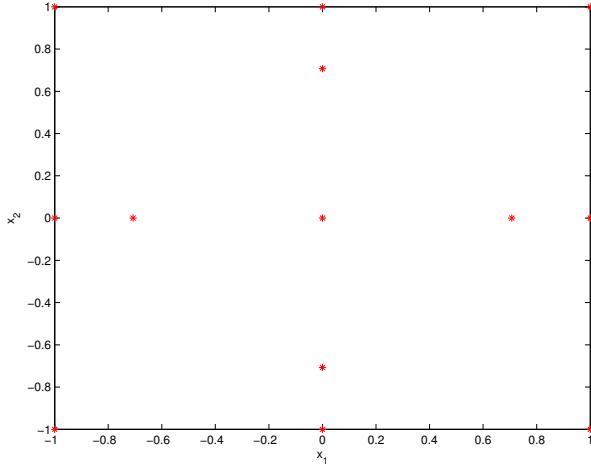


Figure 2.1 Grille de points correspondante à  $A_{2,2}$

Il existe déjà des fonctions Matlab qui permettent d'obtenir les points ainsi que les poids correspondants à une formule de Smolyak. Celle écrite par Von Winckel se base sur les séquences unidimensionnelles de Clenshaw-Curtis. Une autre fonction écrite par Florian Heiss et Viktor Winschel se base sur les séquences de Petras, de Gauss et de Patterson.

Les quadratures pour des dimensions inférieures à 60 et des degrés d'exactitudes raisonnables ont déjà été calculées et enregistrés dans des tables “The Smolyak formulae package”<sup>3</sup>.

De notre côté, pour pouvoir élargir ces tables au besoin, nous avons exploité la rapidité de calcul de l'algorithme de Heiss pour obtenir des formules de Smolyak pour n'importe quel ordre et n'importe quel degré d'exactitude.

L'algorithme de calcul des points et des poids, qui repose sur la formule (2.48) est donné dans le Tableau 2.3.

### 2.3.5 Exemples numériques

**Exemple 2.3.2** (Intégrale simple). *Soit à calculer l'intégrale*

$$I = \int_{-3}^1 (x^2 - 1) dx \quad (2.59)$$

L'intégrande est de degré total 2 ; il faut donc appliquer la formule de Smolyak d'ordre 1 et de précision  $l = 2$  pour l'intégrer exactement, ce qui revient à utiliser une formule à  $N = 3$  points dans le cas des séquences de Clenshaw-Curtis.

---

3. <http://www.personal.psu.edu/cml18/kinship/>

Tableau 2.3 Algorithme de calcul des points et des poids

```

Pour  $k = l + 1 \dots l + d$ 
générer tous les  $i = (i_1, i_2, \dots, i_d)$  tels que  $|i| < k$ 
pour chaque indice  $i$  former la grille de points correspondante
 $\mathbb{X} = (\mathbb{X}^{(i_1)}, \mathbb{X}^{(i_2)}, \dots, \mathbb{X}^{(i_d)})$ 
Pour chaque élément de cette grille ;
    si l'élément existe déjà, actualiser le poids correspondant
         $w_{nouveau} = w_{ancien} + (-1)^{l+d-|i|} \binom{d-1}{l+d-i} \prod_{j=1}^{k-1} w_j$ 
    Sinon ajouter ce nouveau point et calculer son poids
         $w_{nouveau} = (-1)^{l+d-|i|} \binom{d-1}{l+d-i} \prod_{j=1}^{k-1} w_j$ 
    Fin si
Fin pour
Fin pour
Fin

```

Pour l'intervalle  $[-1, 1]$  la quadrature est donnée par :

$$Q^{(3)} \equiv \{x = [-1, 0, 1], w = [1/3, 4/3, 1/3]\} \quad (2.60)$$

Pour l'intervalle  $[-3, 1]$  on calcule la quadrature correspondante :

$$Q^{(3)} \equiv \left\{ \frac{1 - (-3)}{2} x + \frac{1 - 3}{2}, \frac{1 - (-3)}{2} w \right\} \quad (2.61)$$

$$\equiv \{[-3, -1, 1], w = [2/3, 8/3, 2/3]\} \quad (2.62)$$

On applique cette formule pour le calcul intégral :

$$I = \frac{2}{3}f(-3) + \frac{8}{3}f(-1) + \frac{2}{3}f(1) = \frac{16}{3} \quad (2.63)$$

Le calcul direct de l'intégrale donne bien le même résultat :

$$I = \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_{-3}^1 = \frac{16}{3} \quad (2.64)$$

**Exemple 2.3.3** (Intégrale double). Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 (1 + x^2 + xy + y^7 + x^3y) dx dy \quad (2.65)$$

L'intégrande est de degré total 7 ; il faut donc appliquer la formule de Smolyak d'ordre 2 et de précision  $2l - 1 \geq 7 \rightarrow l = 4$  pour l'intégrer exactement. Cela revient à évaluer l'intégrande aux  $N = 65$  points de la grille de la figure 2.2.

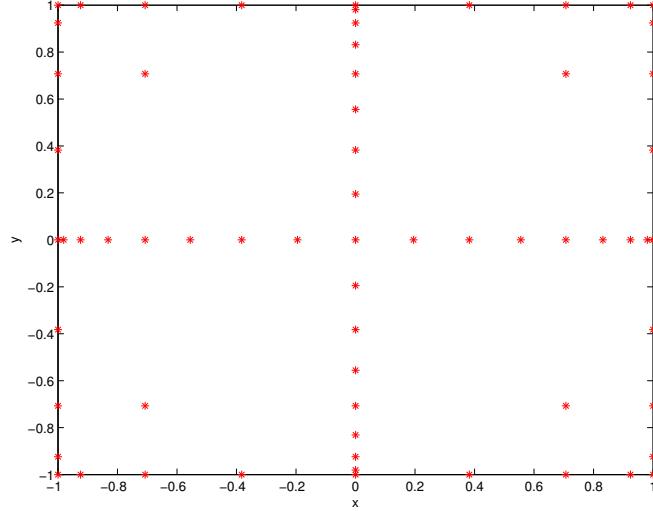


Figure 2.2 Grille de points correspondant à  $A_{2,4}$

En appliquant la formule de quadrature correspondante, on trouve  $I = 37.3333$  égal à la valeur exacte de l'intégrale obtenue par le calcul :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} + x y^7 + \frac{x^4 y}{4} \right]_{-2}^2 dy = \int_{-2}^2 \left( \frac{28}{3} + 4y^7 \right) dy \\ &= \left[ \frac{28}{3}y + \frac{y^8}{2} \right]_{-2}^2 = \frac{112}{2} = 37.\bar{3} \end{aligned} \quad (2.66)$$

**Exemple 2.3.4** (Intégrale double non polynomiale). Soit à calculer l'intégrale de la fonction

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (e^x + e^y) dx dy \quad (2.67)$$

L'intégrande n'est pas un polynôme. Il faut donc appliquer une formule de Smolyak d'ordre 2 et de degré de précision assez grand pour obtenir une approximation satisfaisante. Nous effectuons le calcul pour des degrés de précision  $l$  allant de 1 à 4. Le tableau 2.4 résume les résultats obtenus.

Tableau 2.4 Résultats

$l$	$N$	$I$
1	5	9.448215026173983
2	13	9.401501507725918
3	29	9.401609549068558
4	65	9.401609549150408

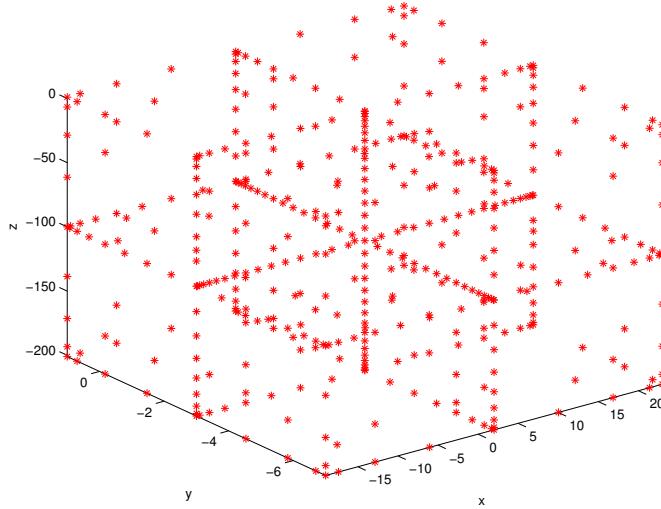
La valeur exacte de l'intégrale est :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 [e^x + xe^y]_{-1}^1 dy = \int_{-1}^1 (e - e^{-1} + 2e^y) dy \\ &= [(e - e^{-1}) y + 2e^y]_{-1}^1 = 4(e - e^{-1}) \approx 9.401609549150413 \end{aligned} \quad (2.68)$$

**Exemple 2.3.5** (Intégrale triple). Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_{-201}^1 \int_{-7}^1 \int_{-19}^{23} (1 + x^2 + xyz + y^9 + y^3x) dx dy dz \quad (2.69)$$

Cette fonction est de degré total 9, il faut donc appliquer la formule de Smolyak d'ordre 3 et de précision  $2l-1 \geq 9 \rightarrow l = 5$  pour l'intégrer exactement. Cela revient à évaluer l'intégrande aux  $N = 441$  points de la grille de la figure 2.3.

Figure 2.3 Grille de points correspondante à  $A_{3,5}$ 

En appliquant la formule de quadrature correspondante, on trouve  $I = -2.3961 \times 10^{11}$ , pratiquement égal à la valeur exacte de l'intégrale, dont on ne détaillera pas le calcul.

## 2.4 Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis d'aborder les points suivants :

On a fait un rappel sur l'interpolation polynomiale en insistant sur la méthode de Lagrange qui permet d'obtenir facilement l'expression d'un polynôme interpolant.

On a présenté les formules de quadratures qui permettent de calculer les intégrales unidimensionnelles en approximant l'intégrande par son polynôme interpolant. On s'est ensuite intéressé à quelques-unes des formules les plus précises.

On a vu comment obtenir une formule de quadrature de n'importe quelle dimension au moyen d'un produit tensoriel de formules unidimensionnelles. On a ensuite introduit la formule de Smolyak qui évite la croissance exponentielle du nombre de points lorsque la dimension augmente. Cette formule permet de calculer l'intégrale exacte des polynômes si on utilise un degré de précision assez élevé.

Enfin, on a donné des exemples sur l'utilisation de la formule de Smolyak pour calculer différentes intégrales.

## CHAPITRE 3 INTÉGRALE DE DILATATION

Lorsqu'on étudie les systèmes incertains, il est souvent question de déterminer si les performances souhaitées demeurent respectées à l'intérieur du domaine de variation des paramètres. Il est donc nécessaire de quantifier ou borner l'ensemble des paramètres où les performances sont violées.

La méthode de l'intégrale de dilatation traite les cas où le respect des performances peut être traduit par un problème de positivité ; elle permet de borner le volume de violation au moyen de la minimisation d'une intégrale polynomiale, elle peut donc être calculée exactement avec la méthode de Smolyak vue dans le chapitre précédent. Le principe est de prouver que le volume de violation est inférieur à un seuil tolérable pour juger du respect au sens pratique des performances. Entre autres, si par exemple les spécifications de performances sont satisfaites pour l'ensemble des paramètres excepté 1% par exemple, on peut dire que ce pourcentage représente un faible risque pour le système. On parle donc de robustesse pratique, traduit de l'expression anglaise *practically robust*.

### 3.1 Intégrale de dilatation

Cette méthode concerne le cas des systèmes qui dépendent non linéairement des paramètres, où les spécifications de performances sont traduites par un critère basé sur le signe d'un polynôme non linéaire  $f(q) > 0$  fonction des paramètres (Barmish and Shcherbakov, 2003).

Pour un hyperrectangle de variation des paramètres  $\mathcal{Q}$ , le calcul du volume de violation des performances  $\mathcal{Q}_{bad} = \{q \in \mathcal{Q} : f(q) \leq 0\}$  se ramène au calcul de l'intégrale  $\int_{\mathcal{Q}_{bad}} dq$ . Mais comme le fait de tester le signe de  $f$  pour tout  $q \in \mathcal{Q}$  est une solution pratiquement impossible, une approximation du volume de violation des performances est nécessaire.

Il se trouve qu'en introduisant une fonction positive indicatrice de violation (voir définition ci-après), on obtient une borne supérieure au volume de violation (Barmish and Shcherbakov, 2000).

**Définition 3.1.1.** *Une fonction continue  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une indicatrice approximative de faisabilité si elle a les propriétés suivantes :*

1.  $\phi(f) \geq 0$  pour tout  $f \in \mathbb{R}$  ;
2.  $\phi(f) > 1$  si et seulement si  $f < 0$  ;

Pour de nombreux problèmes d'analyse de robustesse, l'intégrale de dilatation a permis d'ob-

tenir un bon jugement (Babayigit et al., 2004). Cette méthode consiste à utiliser la fonction positive  $\phi(f) = (1 - \alpha f(q))^k$ . Ainsi, l'intégrale reste sous une forme polynomiale pouvant être calculée exactement avec la formule de Smolyak, et le paramètre  $\alpha$  introduit transforme le calcul du volume de violation en un problème de minimisation de fonction convexe.

Pour tout polynôme multivariable  $f(q)$ , la formule de l'intégrale de dilatation associée est donnée par :

$$\epsilon_k(\alpha) \doteq \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} (1 - \alpha f(q))^k dq \quad (3.1)$$

où  $k$  est un nombre entier positif pair, et  $\alpha$ , un nombre réel non négatif.

Pour tout  $\alpha$  positif, l'inégalité ci-dessous est vérifiée :

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{Q}_{bad})}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \leq \epsilon_k(\alpha) \quad (3.2)$$

Si on définit à présent :

$$\epsilon_k \doteq \min_{\alpha \geq 0} \epsilon_k(\alpha) \quad (3.3)$$

alors l'intégrale de dilatation vérifie les propriétés du théorème 3.1.1 donné ci-dessous :

**Théorème 3.1.1** (Barmish et al. (2009)). *Pour toute paire  $(f, \mathcal{Q})$  et les intégrales de dilatation associées*

$$\epsilon_k(\alpha) \doteq \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} (1 - \alpha f(q))^k dq \quad (3.4)$$

*définies pour tout entier pair  $k$ , les minimums  $\epsilon_k$  successifs sont atteints, et les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Le pourcentage de violation satisfait*

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{Q}_{bad})}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \leq \epsilon_k \quad (3.5)$$

2. *Si la paire  $(f, \mathcal{Q})$  est une paire positive alors  $\epsilon_k \rightarrow 0$ .*

3. *Si  $\epsilon_k \rightarrow 0$  alors la paire  $(f, \mathcal{Q})$  est non négative avec  $\text{Vol}(\mathcal{Q}_{bad}) = 0$ .*

Au vu de ce théorème, dans le cas des polynômes positifs sur le domaine de variation des paramètres, le minimum  $\epsilon_k$  converge vers 0.

Comme on s'intéresse à la positivité d'un point de vue pratique, il suffit de démontrer que pour un certain  $k$  le pourcentage de violation est inférieur à un seuil tolérable, e.g.,  $\epsilon_k \leq 0.001$ .

Dans le cas où le pourcentage de violation est supérieur au seuil tolérable, on ne pourra pas juger la robustesse du polynôme avec  $\epsilon_k$ . Pour y arriver, un paramètre de conditionnement  $\theta$

sera introduit.(voir Section 3.2).

**Démonstration du Théorème 3.1.1 :**

Pour démontrer que  $\epsilon_k(\alpha)$  est convexe pour  $\alpha \geq 0$ , il suffit de démontrer que la dérivée seconde est positive :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_k(\alpha)}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \frac{\partial^2 (\int_{\mathcal{Q}} (1 - \alpha f(q))^k dq)}{\partial \alpha^2} \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} k(k-1) f(q)^2 (1 - \alpha f(q))^{k-2} dq \quad (3.7)$$

Pour des valeurs de  $k$  paires et  $\alpha \in ]0, +\infty[$ , l'intégrande est toujours positive.

Pour démontrer la propriété 1, on note que pour un  $\alpha$  arbitraire on a :

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{Q}_{bad})}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \int_{f(q) \leq 0} dq \quad (3.8)$$

$$\leq \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \int_{f(q) \leq 0} (1 - \alpha f(q))^k dq \quad (3.9)$$

$$\leq \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} (1 - \alpha f(q))^k dq \quad (3.10)$$

$$\doteq \epsilon_k(\alpha) \quad (3.11)$$

La deuxième propriété est une conséquence directe du fait que  $(f, \mathcal{Q})$  est une paire positive.

Soit  $f_{\min} = \min_{q \in \mathcal{Q}} f(q)$  et  $f_{\max} = \max_{q \in \mathcal{Q}} f(q)$ . Si on définit  $f_0 = \frac{1}{2}(f_{\max} + f_{\min})$  alors les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\epsilon_k = \min_{\alpha > 0} \epsilon_k(\alpha) \leq \epsilon_k \left( \frac{1}{|f_0|} \right) \quad (3.12)$$

$$\leq \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} \max_{q \in \mathcal{Q}} \left( 1 - \frac{1}{|f_0|} f(q) \right)^k dq \quad (3.13)$$

$$= \max_{q \in \mathcal{Q}} \left( 1 - \frac{1}{|f_0|} f(q) \right)^k \quad (3.14)$$

Comme  $(f, \mathcal{Q})$  est une paire positive alors  $\forall q \in \mathcal{Q}$ ,  $0 < \max_{q \in \mathcal{Q}} \left( 1 - \frac{1}{|f_0|} f(q) \right)^k < 1$ , et donc  $\epsilon_k \rightarrow 0$ .

La troisième propriété peut être démontrée en procédant par contradiction.

En effet, si  $(f, \mathcal{Q})$  n'est pas une paire positive alors  $\exists \mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{Q}$  tel que la propriété de positivité

ne sera pas vérifiée, et donc :

$$\epsilon_k \geq \frac{\text{Vol}(\mathcal{Q}_{bad})}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \geq \frac{\text{Vol}(\mathcal{Q}_0)}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} > 0 \quad (3.15)$$

Ceci contredit l'hypothèse  $\epsilon_k \rightarrow 0$ , ainsi  $(f, \mathcal{Q})$  est forcément une paire non négative.

**Exemple 3.1.1.** On considère l'exemple de Motzkin pris de l'article Barmish et al. (2009) pour démontrer l'efficacité de l'intégrale de dilatation. Le polynôme est donné par :

$$f(x) = 1 + x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2 - 3) \quad (3.16)$$

On représente ce polynôme sur le domaine  $\mathcal{Q} = [-1, 1]^2$  :

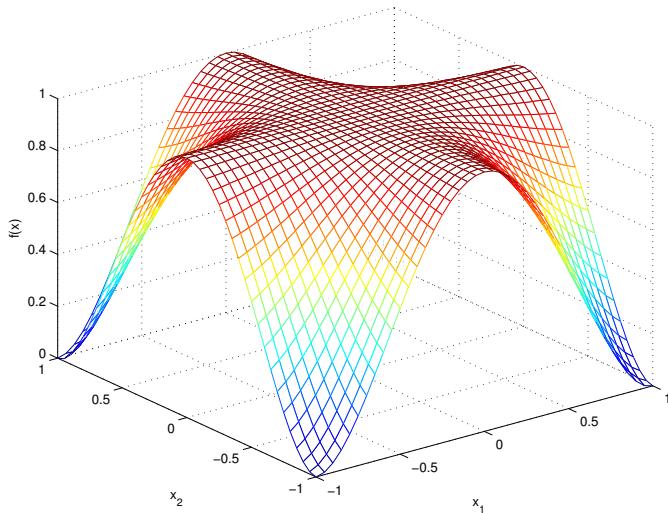


Figure 3.1 Polynôme de Motzkin

À partir de la figure 3.1 il est clair que ce polynôme est positif sur tout le domaine excepté aux extrémités où il est égal à 0. Ainsi, pour tout  $\mathcal{Q} = [-r, r]^2$  avec  $0 < r < 1$  la paire  $(f, \mathcal{Q})$  est positive.

Afin d'illustrer comment l'intégrale de dilatation retrouve ce résultat, on prend  $r = 0.75$  et on calcule l'expression symbolique de  $\epsilon_6(\alpha)$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_6(\alpha) &= \frac{1}{(2 \cdot 0.75)^2} \int_{0.75}^{0.75} \int_{0.75}^{0.75} (1 - \alpha f(x))^k dx_1 dx_2 \\ &\approx 0.7054\alpha^6 - 4.40175\alpha^5 + 11.5030\alpha^4 - 16.13601\alpha^3 + 12.8394\alpha^2 - 5.5096\alpha + 1.0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

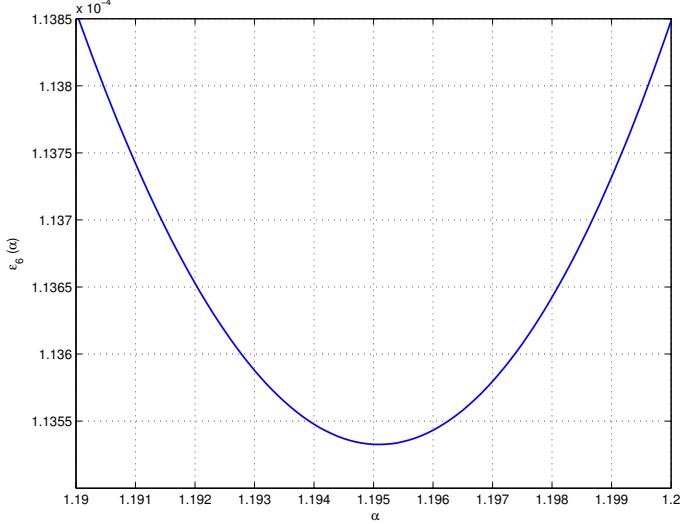


Figure 3.2 Intégrale de dilatation du polynôme de Motzkin pour  $k=6$

À partir du tracé de cette fonction à la figure 3.2 on obtient le minimum  $\epsilon_6 = 0.0001355$ . Ainsi, on garantit que la positivité est violée sur un ensemble dont le volume est au pire des cas 0.0001355. Si une plus grande précision est nécessaire, des intégrations similaires permettent d'obtenir de plus petites valeurs de  $\epsilon_k$  données au tableau 3.1 :

Tableau 3.1 Convergence des calculs pour l'exemple de Motzkin

$k$	$\epsilon_k$
2	0.0149
4	0.0011010
6	0.0001135
8	$1.36 \cdot 10^{-5}$
10	$1.77 \cdot 10^{-6}$
12	$2.44 \cdot 10^{-7}$
14	$3.45 \cdot 10^{-8}$
16	$5.3 \cdot 10^{-9}$

### 3.2 Conditionnement des calculs

L'objectif essentiel c'est de permettre d'arrêter les calculs si pour un certain  $k$  on atteint une valeur de  $\epsilon_k$  inférieure à un  $\varepsilon$  jugé acceptable. D'autre part, si on n'arrive pas à atteindre ce petit  $\epsilon_k$ , on doit pouvoir arrêter les calculs quand même, et juger que le système ne satisfait pas les performances d'un point de vue pratique.

Pour cela on définit le conditionneur comme étant le pourcentage maximum de variation de  $f(q)$  autour de sa valeur médiane (Barmish and Shcherbakov, 2003). Soit

$$f(\mathcal{Q}) \doteq \{f(q) : q \in \mathcal{Q}\} \doteq [f_{\min}, f_{\max}] \quad (3.18)$$

correspondant à la minimisation et la maximisation de  $f(q)$ , on obtient

$$\theta \doteq \frac{\sigma}{|f_0|} \quad (3.19)$$

Avec

$$f_0 = \frac{1}{2} (f_{\max} + f_{\min}) \quad (3.20)$$

étant le médian des valeurs de  $f(q)$  et

$$\sigma = \frac{1}{2} (f_{\max} - f_{\min}) \quad (3.21)$$

On a alors

$$\theta = \frac{(f_{\max} - f_{\min})}{|f_{\max} + f_{\min}|} \quad (3.22)$$

**Remarque :**

Si la condition de positivité est vérifiée pour le point nominal, alors  $f_{\max} > 0$ , et dans ce cas on peut rencontrer les trois possibilités suivantes :

1.  $\forall q \in \mathcal{Q}, f(q) > 0$  alors  $\theta < 1$ .
2.  $\forall q \in \mathcal{Q}, f(q) \geq 0$  alors  $\theta = 1$ .
3.  $\exists q_0 \in \mathcal{Q}, f(q_0) < 0$  alors  $\theta > 1$ .

Donc la positivité du polynôme, et en l'occurrence le respect des performances se ramène à avoir un  $\theta < 1$ . Cependant, comme nous ne pouvons évaluer le polynôme en tout point du domaine des paramètres, on doit trouver un moyen d'estimer  $\theta$ .

### 3.2.1 Estimation du conditionneur

Pour obtenir un estimateur du conditionneur  $\theta$  on se base sur la définition de  $\epsilon_k$  :

$$\epsilon_k = \min_{\alpha \geq 0} \epsilon_k(\alpha) \quad (3.23)$$

$$\epsilon_k \leq \epsilon_k \left( \frac{1}{|f_0|} \right) \quad (3.24)$$

$$\leq \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} \max_{q \in \mathcal{Q}} \left( 1 - \frac{1}{|f_0|} f(q) \right)^k dq \quad (3.25)$$

$$= \max_{q \in \mathcal{Q}} \left( 1 - \frac{1}{|f_0|} f(q) \right)^k \quad (3.26)$$

$$= \theta^k \quad (3.27)$$

Donc on obtient une borne inférieure du conditionneur  $\epsilon_k^{1/k} \leq \theta$ .

Les inégalités précédentes suggèrent qu'on puisse considérer  $\theta_k = \epsilon_k^{1/k}$  comme un estimé du conditionneur. Mais comme  $0 \leq \epsilon_k \leq 1$ , alors l'estimation de  $\theta$  sera elle aussi bornée entre 0 et 1.

**Théorème 3.2.1.** *Shcherbakov and Barmish (2003)*

*Si la paire  $(f, \mathcal{Q})$  est positive alors*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = \theta \quad (3.28)$$

*Autrement*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = 1 \quad (3.29)$$

Ici comme on ne peut atteindre des valeurs estimées  $\theta_k$  supérieures à 1, pour conclure directement de la non positivité, alors on devra fixer un  $\theta$  proche de 1 pour juger de la non positivité pratique et arrêter les calculs.

Pour illustrer comment raisonner avec  $\theta$ , supposons que pour  $k = 10$  on trouve  $\epsilon_{10} = 0.8$ , alors on déduit que  $\theta > 0.8^{0.1} = 0.9779$ , avec un aussi grand  $\theta$  on pourrait conclure de la non positivité pratique de la paire  $(f, \mathcal{Q})$ .

En revanche si pour  $k = 4$  on trouve  $\epsilon_4 = 0.01$ , alors  $\theta > 0.01^{0.25} = 0.3162$ . Comme ce  $\theta$  est loin de 1 on peut continuer à calculer pour d'autres  $k$  avant de juger la paire  $(f, \mathcal{Q})$ .

**Remarque :**

Même dans le cas où une famille de polynômes est positive d'un point de vue théorique, avec l'introduction du conditionneur, on adopte le fait que lorsque celui-ci est proche de 1,

la différence par rapport à la valeur médiane de  $f$  croit, ce qui implique que le système est propice à perdre les performances désirées si l'intervalle des paramètres devient plus large (Babayigit et al., 2004).

**Exemple 3.2.1.** On considère l'exemple du “Track-guided bus” tiré de (Ackermann et al., 1993, p. 101). Soit un système incertain dont le polynôme caractéristique est donné par :

$$p(s, \vartheta) = \sum_{k=0}^8 a_k(\vartheta) s^k \quad (3.30)$$

avec le paramètre incertain  $\vartheta(q) \in \mathbb{R}^2$  de la forme :

$$\vartheta(q) = \vartheta^0 + \mu \delta_\vartheta q \quad (3.31)$$

où  $q = [q_1, q_2]^\top \in [-1, 1]^2$ ,  $\vartheta^0 = [11.5, 21]^\top$ ,  $\delta_\vartheta = [8.5, 11]^\top$  et  $0 \leq \mu \leq 1$  qui définit le rayon d'incertitude. Les coefficients  $a_k(\vartheta)$  sont des polynômes en  $\vartheta$  donnés par :

$$\begin{aligned} a_0 &= 4.53 \cdot 10^8 \vartheta_1^2 \\ a_1 &= 5.28 \cdot 10^8 \vartheta_1^2 + 3.64 \cdot 10^9 \vartheta_1 \\ a_2 &= 5.72 \cdot 10^6 \vartheta_1^2 \vartheta_2 + 1.13 \cdot 10^8 \vartheta_1^2 + 4.25 \cdot 10^9 \vartheta_1 \\ a_3 &= 6.93 \cdot 10^6 \vartheta_1^2 \vartheta_2 + 9.11 \cdot 10^8 \vartheta_1 + 4.22 \cdot 10^9 \\ a_4 &= 1.45 \cdot 10^6 \vartheta_1^2 \vartheta_2 + 16.8 \cdot 10^6 \vartheta_1 \vartheta_2 + 3.38 \cdot 10^8 \\ a_5 &= 15.6 \cdot 10^3 \vartheta_1^2 \vartheta_2^2 + 840 \vartheta_1^2 \vartheta_2 + 1.35 \cdot 10^6 \vartheta_1 \vartheta_2 + 13.5 \cdot 10^6 \\ a_6 &= 1.25 \cdot 10^3 \vartheta_1^2 \vartheta_2^2 + 16.8 \vartheta_1^2 \vartheta_2 + 5.39 \cdot 10^4 \vartheta_1 \vartheta_2 + 270 \cdot 10^3 \\ a_7 &= 50 \vartheta_1^2 \vartheta_2^2 + 1080 \vartheta_1 \vartheta_2 \\ a_8 &= \vartheta_1^2 \vartheta_2^2 \end{aligned}$$

On cherche à déterminer la stabilité Hurwitz de cette famille paramétrique en étudiant la positivité de la fonction :

$$f(\vartheta) = \det \mathcal{H}(\vartheta) \quad (3.32)$$

où  $\mathcal{H}(\vartheta)$  est la matrice de Hurwitz<sup>1</sup> associée au polynôme  $p(s, \vartheta)$ . La fonction  $f(\vartheta)$  est un polynôme multivariable en  $\vartheta$ . Il a été démontré dans (Ackermann et al., 1993, p. 101) que cette famille est robustement stable pour  $\mu = 1$ .

Pour le cas nominal  $\vartheta^0 = [11.5, 21]^\top$ , la stabilité Hurwitz est vérifiée. Ainsi, autour de ce point on admet que tant que  $f(\vartheta) = \det \mathcal{H}(\vartheta) > 0$  alors la stabilité est maintenue.

Les calculs ont été effectués sur un PC avec un processeur intel quad-core i7-4770 cadencé à 3.4 GHz, 12 Go de RAM et sous MATLAB R2014a. Les résultats obtenus avec l'intégrale de dilatation en utilisant la symbolic toolbox sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3.2 Problème de conditionnement pour  $\mu = 1$

k	$\epsilon_k$	$\theta_k$	Temps de calcul (s)
2	0.94793	0.9736	0.76
4	0.9292	0.9818	116.3
6	0.9166	0.9855	18127.53
8	-	-	Out of memory

Ainsi, à partir de ces résultats on juge ce système instable du fait que le conditionneur est au moins supérieur à  $\epsilon_k = 0.9855$ . Même si on veut continuer de calculer  $\epsilon_k$  pour des valeurs plus grandes de  $k$ , le temps de calcul nécessaire ainsi que la limitation en mémoire de Matlab ne le permettraient pas. On verra à la Section 3.3 comment ce problème peut être contourné en utilisant la méthode de Smolyak.

On s'intéresse à un cas moins mal conditionné, pour  $\mu = 0.3$  le conditionneur  $\theta$  est inférieur à celui du cas précédent puisqu'on s'éloigne de l'ensemble de violation. Dans un cas similaire, on devait être capable de juger le système stable avec l'intégrale de dilatation. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau ci-dessous :

- 
1. Pour un polynôme  $p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0$ , la matrice Hurwitz associée est donnée par

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Tableau 3.3 Problème de conditionnement pour  $\mu = 0.3$ 

k	$\epsilon_k$	$\theta_k$	Temps de calcul (s)
2	0.7188	0.8478	0.76
4	0.6271	0.8899	117.67
6	0.5697	0.9105	18104.76
8	-	-	Out of memory

Les résultats obtenus ne permettent pas de juger le système. On devrait donc poursuivre les calculs pour d'autres valeurs de  $k$  pour démontrer que  $\epsilon_k$  est inférieur à un seuil tolérable et juger le système robustement stable, ou bien démontrer que  $\theta_k \rightarrow 1$  et juger le système pratiquement non robustement stable.

On s'intéresse à un cas assez bien conditionné, pour  $\mu = 0.1$  on devrait observer une convergence rapide de  $\epsilon_k$  vers 0. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3.4 Problème de calcul symbolique pour  $\mu = 0.1$ 

k	$\epsilon_k$	$\theta_k$	Temps de calcul (s)
2	0.2464	0.4963	0.74
4	0.1058	0.5703	121.88
6	0.053	0.613	18213.16
8	-	-	Out of memory

Ainsi, pour des petites valeurs de  $k$  on arrive déjà à garantir que le pourcentage de violation est inférieur à  $\epsilon_6 = 0.053$ . Cependant, même avec cette petite valeur, on ne peut juger le système stable. Il fautait donc calculer pour d'autres valeurs de  $k$  et montrer que  $\epsilon_k$  converge vers 0. Hélas, avec la symbolic toolbox de Matlab on est vite confronté au problème de mémoire. Dans la section qui suit, on s'intéresse à faire les calculs symboliques avec la méthode de Smolyak.

### 3.3 Calcul de l'intégrale de dilatation avec Smolyak

L'intégrale de dilatation d'ordre  $k$  pour un polynôme multivariable de degré total  $\nu$ , peut être calculée exactement avec la formule de Smolyak en choisissant un degré de précision  $l \geq \frac{k\nu}{2}$  (Dabbene and Shcherbakov, 2007).

Pour appliquer la formule de Smolyak  $A_{l,d}$  de précision  $l$  et de dimension  $d$ , on doit évaluer l'intégrande sur la grille de points  $\mathbb{H}_{l,d} = \{x_j, j = 1 \dots N_{l,d}\}$  correspondante, et puis à partir de la somme pondérée avec les poids  $w_j$  on retrouve la valeur de l'intégrale.

Mais tout d'abord, il faut noter que l'intégrande peut s'écrire sous la forme 3.34 suivante :

$$(1 - \alpha f(q))^k = \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} f^i(q) \alpha^i \quad (3.34)$$

Si on remplace à présent l'intégrale de dilatation par l'intégrale de la somme 3.34, on peut calculer l'intégrale en faisant la somme des intégrales de chaque terme séparément par la formule de Smolyak. Pour  $i = 1 \dots k$  on a :

$$\int_{\mathcal{Q}} f^i(q) dq = \sum_{i=1}^{N_{l,d}} \mathbf{w}_i f^i(\mathbf{x}_i) \quad (3.35)$$

**Théorème 3.3.1** (Barmish et al. (2009)). *Pour le calcul de l'intégrale de dilatation avec la formule de Smolyak on définit :*

$$\mathbf{w} \doteq [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{N_{l,d}}]^\top \quad (3.36)$$

$$\mathbf{f} \doteq [f(\mathbf{x}_1) \dots f(\mathbf{x}_{N_{l,d}})]^\top \quad (3.37)$$

$$\mathbf{f}^i \doteq [f^i(\mathbf{x}_1) \dots f^i(\mathbf{x}_{N_{l,d}})]^\top \quad (3.38)$$

$$\eta^i \doteq \binom{k}{i} \mathbf{w}^\top \mathbf{f}^i \quad (3.39)$$

Alors l'intégrale de dilatation

$$\epsilon_k(\alpha) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} (1 - \alpha f(q))^k dq \quad (3.40)$$

s'écrit sous la forme :

$$\epsilon_k(\alpha) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \sum_{i=1}^k (-1)^i \eta_i \alpha^i \quad (3.41)$$

En dehors du fait d'exprimer l'intégrale sous forme d'une somme, le plus intéressant c'est de pouvoir calculer à priori le  $\alpha^*$  qui minimise l'intégrale, sans avoir à faire le calcul symbolique.

**Corollaire 3.3.1** (Dabbene and Shcherbakov (2007)). *La fonction  $\epsilon_k(\alpha)$  est convexe en  $\alpha$ , son unique minimisant*

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \geq 0} \epsilon_k(\alpha) \quad (3.42)$$

peut être calculée comme étant l'unique zéro réel de la dérivée de  $\epsilon_k(\alpha)$

$$\epsilon'_k(\alpha) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \sum_{i=1}^k (-1)^i i \eta_i \alpha^{i-1} \quad (3.43)$$

**Remarque :** Concernant la solution de  $\alpha^*$  qui minimise l'intégrale, pour les cas où le calcul de l'intégrale de dilatation requiert des  $k$  élevés, on peut utiliser la méthode de dichotomie sur la dérivée de  $\epsilon$  pour trouver  $\alpha^*$ . En effet, celle-ci représente l'unique solution pour laquelle la dérivée est nulle du fait de la convexité de  $\epsilon_k(\alpha)$ .

**Lemme 3.3.1.** *Le minimum  $\alpha^*$  est du même signe que  $\int_{\mathcal{Q}} f dq = \mathbf{w}^T \mathbf{f}$  :*

*Si  $\mathbf{w}^T \mathbf{f} > 0$  alors  $\alpha^* > 0$ .*

*Si  $\mathbf{w}^T \mathbf{f} \leq 0$  alors  $\alpha^* \leq 0$ , et puisque  $\alpha \geq 0$  alors :*

$$\alpha^* = 0 \text{ et } \epsilon_k = 1 \quad (3.44)$$

**Démonstration :**

Afin de démontrer ce théorème il suffit de calculer les limites de  $\epsilon'_k$  :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \epsilon'_k(\alpha) = k \alpha^{k-1} \int_{\mathcal{Q}} f^k dq > 0 \quad (3.45)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \epsilon'_k(\alpha) = k \alpha^{k-1} \int_{\mathcal{Q}} f^k dq < 0 \quad (3.46)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \epsilon'_k(\alpha) = - \int_{\mathcal{Q}} f dq \quad (3.47)$$

Donc si  $\int_{\mathcal{Q}} f dq > 0$  alors  $\exists \alpha_0 \in [0^+, +\infty[$  tel que  $\epsilon'_k(\alpha_0) = 0$ .

Et si  $\int_{\mathcal{Q}} f dq < 0$  alors  $\exists \alpha_0 \in ]-\infty, 0^+[$  tel que  $\epsilon'_k(\alpha_0) = 0$ .

**Exemple 3.3.1.** *Afin de démontrer l'efficacité de la méthode de Smolyak pour le calcul de l'intégrale de dilatation, on reprend l'exemple 3.2.1. On a vu qu'à cause de la limite en mémoire, la symbolic toolbox ne permettait pas de calculer  $\epsilon_k(\alpha)$  pour de grandes valeurs de  $k$ .*

*Le degré total du polynôme  $\deg(f(\vartheta)) = 26$ , ainsi pour calculer la valeur exacte de l'intégrale de dilation d'ordre  $k$ , il faut appliquer une formule de Smolyak de dimension  $d = 2$  et de degré de précision  $l \geq 13k$ . Toutefois, en admettant que l'erreur d'intégration numérique est négligeable, on utilise la formule  $A_{15,2}$  qui nécessite l'évaluation de l'intégrande sur 311 297 points.*

*On calcule les intégrales de dilatation pour différentes valeurs, les résultats obtenus pour  $\mu = 1$  ainsi que le temps de calcul nécessaire pour obtenir l'expression symbolique de  $\epsilon_k(\alpha)$  avec Matlab sont donnés dans le tableau ci-dessous :*

Tableau 3.5 Intégrale de dilatation pour  $\mu = 1$ 

k	$\epsilon_k$	$\theta_k$	Temps de calcul (s)
2	0.94793	0.9736	0.24
4	0.9292	0.9818	0.25
6	0.9166	0.9855	0.26
8	0.9068	0.9878	0.26
10	0.8987	0.9894	0.27
12	0.8917	0.9905	0.28
14	0.8856	0.9913	0.28
16	0.8802	0.9920	0.30
18	0.8752	0.9926	0.30
20	0.8707	0.9931	0.31
22	0.8666	0.9935	0.31
24	0.8627	0.9939	0.34
26	0.8591	0.9942	0.34
28	0.8557	0.9945	0.34
30	0.8526	0.9947	0.38

À partir de ces résultats on note la rapidité de calcul occasionnée par l'utilisation de la méthode de Smolyak. Cela permet de calculer l'intégrale de dilatation pour des  $k$  élevés. Toutefois, pour le cas  $\mu = 1$ , on remarque que la vitesse de convergence de  $\epsilon_k$  vers 0 est très lente, ce qui nous pousse à juger le système non robustement stable.

Puisqu'on peut désormais calculer l'intégrale de dilatation pour de grandes valeurs de  $k$ , on vérifie pour le cas  $\mu = 0.3$  si  $\epsilon_k$  converge vers 0. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3.6 intégrale de dilatation pour  $\mu = 0.3$ 

k	$\epsilon_k$	$\theta_k$	Temps de calcul (s)
2	0.7188	0.8478	0.24
4	0.6271	0.8899	0.26
6	0.5697	0.9105	0.28
8	0.5277	0.9232	0.27
10	0.4947	0.9321	0.27
12	0.4675	0.9386	0.30
14	0.4444	0.9437	0.30
16	0.4245	0.9478	0.33
18	0.4069	0.9512	0.30
20	0.3913	0.9541	0.32
22	0.3772	0.9566	0.31
24	0.3644	0.9588	0.34
26	0.3527	0.9607	0.34
28	0.3419	0.9624	0.37
30	0.3325	0.9639	0.38
40	0.3427	0.973	1.39

À partir des résultats obtenus, on remarque la lenteur de convergence de  $\epsilon_k$  vers 0 causée par le mauvais conditionnement  $\theta \geq \theta_{30} = 0.9639$ . Même si on pense que pour de plus grandes valeurs de  $k$ ,  $\epsilon_k$  convergera vers 0, il ne faut pas oublier qu'on est limité par la précision numérique lorsqu'on utilise des formules à très grand nombre de points, e.g., la valeur de  $\epsilon_{40}$  qui semble fausse, car au lieu de décroître, elle est plus grande que  $\epsilon_{30}$ . Ainsi, pour les cas mal conditionnés, l'amélioration de la convergence est indispensable si l'on ne veut pas commettre une erreur de jugement.

Pour les cas bien conditionnés, le problème ne se pose pas. En effet si on calcule l'intégrale de dilatation pour de grandes valeurs de  $k$ ,  $\epsilon_k$  convergera vers 0.

Pour  $\mu = 0.1$ , Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3.7 Convergence de l'intégrale de dilatation pour  $\mu = 0.1$

$k$	$\epsilon_k$	$\theta_k$	Temps de calcul (s)
2	0.2464	0.4963	0.23
4	0.1058	0.5703	0.25
6	0.053	0.613	0.25
8	0.029	0.6424	0.25
10	0.0166	0.663	0.26
12	0.0098	0.6802	0.27
14	0.00595	0.6935	0.28
16	0.00368	0.7045	0.30
18	0.00232	0.7138	0.30
20	0.00148	0.7219	0.31
22	0.00095	0.7290	0.32
24	0.00062	0.7352	0.33
26	0.00041	0.7410	0.34
28	0.00032	0.7502	0.34
30	0.00034	0.766	0.35

La convergence des valeurs de  $\epsilon_k$  pour différentes valeurs du paramètre  $\mu$  est représentée dans la figure ci-dessous :

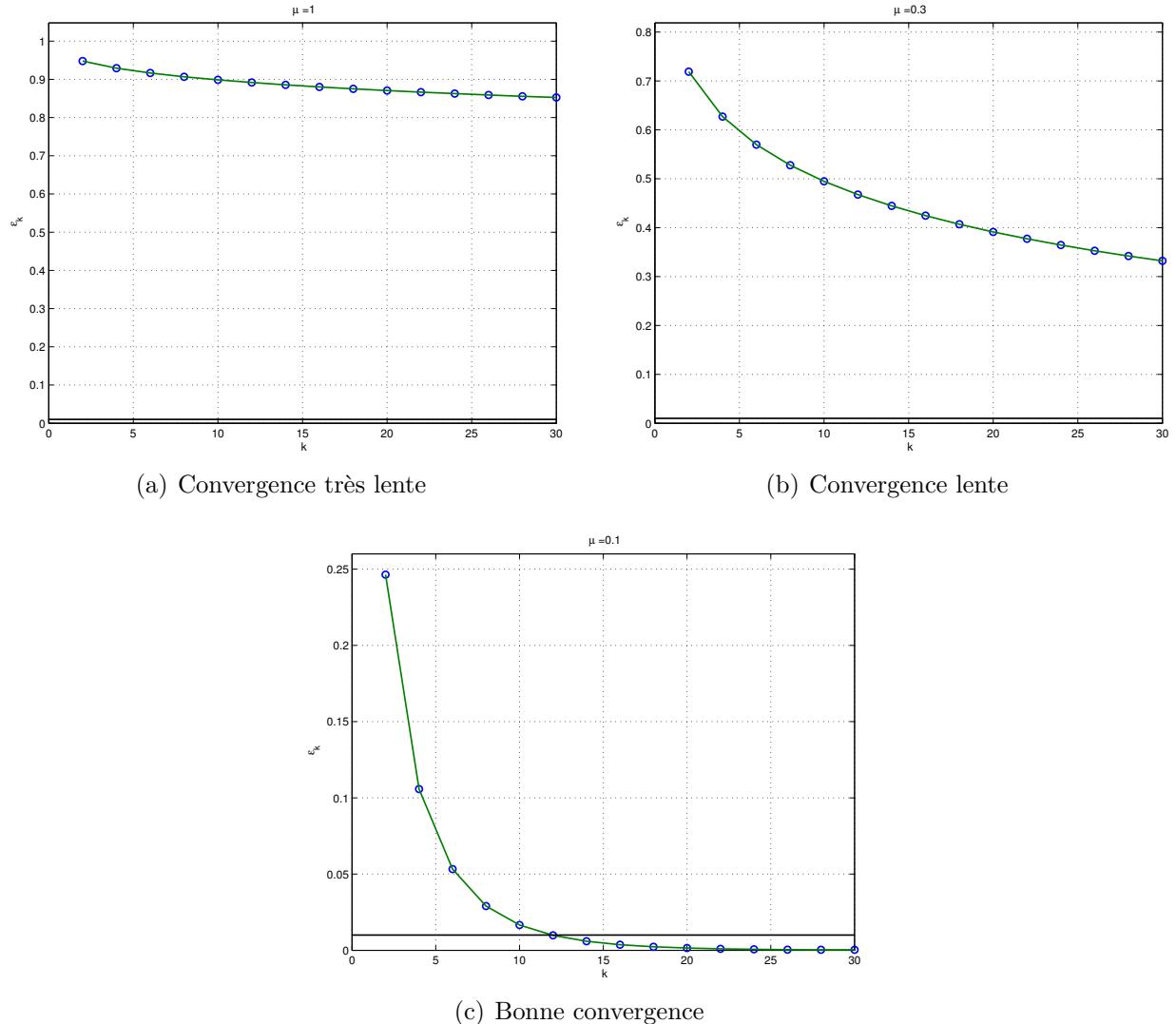


Figure 3.3 Convergence des calculs pour l'exemple d'Ackermann

### 3.4 Algorithme de calcul

Algorithme de la méthode de l'intégrale de dilatation
Fixer le pourcentage de violation tolérable $\varepsilon$ et le $\theta_{max}$ .
Donner ou calculer le degré total du polynôme $\nu = \deg$ .
Initialiser $k = 2$ .
Tant que $\epsilon_k > \varepsilon$ et $\theta_k < \theta_{max}$ faire :
Générer les points et poids de la formule de Smolyak correspondante $[W, X] = A_{l,d}$ avec $l = \frac{k\nu}{2}$
Evaluer et sauvegarder la valeur du polynôme aux points de la grille $F = f(X)$ .
Calculer les zéros du polynôme dérivé de l'intégrale de dilatation.
$P(\alpha) = \sum_{i=1}^k (-1)^i i \binom{k}{i} W^T F^i \alpha^{i-1}$
$\alpha$ = l'unique racine réelle de $P(\alpha)$
Calculer l'intégrale de dilatation.
$\epsilon_k = \frac{1}{Q} W^T (1 - \alpha F)^k$
Si $\epsilon_k > \varepsilon$
Calculer $\theta_k = \sqrt[k]{\epsilon_k}$ .
Si $\theta_k < \theta_{max}$
$k = k + 2$
Sinon juger de la violation des performances
Fin si.
Sinon juger du respect des performances.
Fin si.
Fin Tant que.

### 3.5 Amélioration de la convergence des calculs

L'objectif ici est d'améliorer la convergence des calculs fournis par l'intégrale de dilatation pour les paires  $(f, \mathcal{Q})$  positives, de sorte à éviter le recours à des  $k$  élevés pour juger le système, ce qui implique notamment le gain de temps de calcul en réduisant le nombre de points à évaluer par la méthode de Smolyak.

#### 3.5.1 Introduction d'une fonction convexe

La première solution consiste à introduire un paramètre additionnel dans l'intégrale de dilatation elle-même, de telle sorte à accélérer la convergence des calculs (Barmish et al., 2009).

Soit une fonction  $g(a, q)$  telle que :

$$g(a, q) > 0, \forall a \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^l, \forall q \in \mathcal{Q} \quad (3.48)$$

Et soit la fonction

$$f^a(q) = g(a, q) f(q) \quad (3.49)$$

dont l'ensemble de violation est définie par

$$\mathcal{Q}_{bad}^a = \{q \in \mathcal{Q} : f^a(q) \leq 0\} \quad (3.50)$$

Les deux ensembles de violation de  $f$  et de  $f^a$  sont les mêmes :

$$\mathcal{Q}_{bad} = \mathcal{Q}_{bad}^a \quad (3.51)$$

Par ailleurs, les nouveaux paramètres  $a$  introduits par  $g(a, q)$  permettent d'avoir d'autres degrés de liberté quant à la minimisation de l'intégrale de dilatation. Ainsi pour tout  $a \in \mathcal{A}$ , la quantité

$$\epsilon_k(\alpha, a) \doteq \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} (1 - \alpha f^a(q))^k dq \quad (3.52)$$

est une borne supérieure aux volumes de violation de  $f$  et de  $f^a$ , et l'inégalité

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{Q}_{bad})}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \leq \epsilon_k(\alpha, a) \quad (3.53)$$

est vérifiée pour tout  $a \in \mathcal{A}$  et  $\alpha \geq 0$ .

Pour atteindre des valeurs plus proches du pourcentage de violation de  $f$ , on considère

$$\epsilon_k^* = \min_{\alpha \geq 0} \min_{a \in \mathcal{A}} \epsilon_k(\alpha, a) \quad (3.54)$$

Où en imposant une simple condition sur la fonction polynomiale  $g(a, q)$ , on peut améliorer la convergence des calculs. En effet, si

$$\exists a_0 \in \mathcal{A} \text{ tel que } g(a_0, x) = Const \quad (3.55)$$

alors l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{Q}_{bad})}{\text{Vol}(\mathcal{Q})} \leq \epsilon_k^* \leq \epsilon_k \quad (3.56)$$

Un choix particulier de fonction  $g(a, q)$  est donné dans le lemme 3.5.1.

**Lemme 3.5.1.** (*Barmish et al., 2009*)

Soit  $g(a, q) = 1 + a^T \cdot q$  et  $\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{R}^n : \|a\|_1 < 1 - \delta\}$ .

Pour  $\delta < 1$  la fonction  $\epsilon_k(\alpha, a)$  est convexe en  $a$ ,  $\forall \alpha \geq 0$ .

**Exemple 3.5.1.** Toujours avec l'exemple du “ Track-guided bus ” d'Ackermann. On a vu qu'en utilisant la formule de Smolyak on pouvait calculer  $\epsilon_k$  pour de grands  $k$ . Cependant, à cause du mauvais conditionnement, on n'a pas réussi à juger le système pour  $\mu = 0.3$ .

En se basant sur le Lemme 3.5.1, on introduit la fonction  $q(a, q) = 1 + a_1 q_1 + a_2 q_2$  qui est positive pour  $a_1 \in [-\frac{0.5}{11.5-8.5\mu}, \frac{0.5}{11.5-8.5\mu}]$  et  $a_2 \in [-\frac{0.5}{21-11\mu}, \frac{0.5}{21-11\mu}]$ , et on cherche les valeurs de  $a_1$  et  $a_2$  qui minimisent  $\epsilon_2(\alpha, a_1, a_2)$ . Les résultats obtenus pour différentes valeurs de  $\mu$  sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3.8 Amélioration de la convergence avec ajout de paramètres

$\mu$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\epsilon_2$	0.2464	0.5500	0.7188	0.8095	0.8617	0.8939	0.9151	0.9297	0.9401	0.9479
$\epsilon_2^*$	0.0328	0.1982	0.4083	0.5647	0.6686	0.7387	0.7880	0.8232	0.8493	0.8693
$a_1$	-0.0469	-0.0507	-0.0515	-0.0473	-0.0431	-0.0408	-0.0381	-0.0365	-0.0361	-0.0333
$a_2$	-0.0188	-0.0147	-0.0120	-0.0123	-0.0129	-0.0124	-0.0124	-0.0118	-0.0106	-0.0112

À partir des résultats obtenus on remarque que plus le polynôme est mal conditionné plus il est difficile d'améliorer la convergence. Pour approximer numériquement la valeur de  $\epsilon_k^*$ , on génère des points aléatoires dans le domaine  $\mathcal{A}$ . Dans le cas  $k = 2$ , pour chaque  $a_0 \in \mathcal{A}$ , le minimum  $\epsilon_k(a_0)$  est donné par :

$$\epsilon_k(a_0) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \frac{(\int_{\mathcal{Q}} f^a dq)^2}{\text{vol}(\mathcal{Q}) \int_{\mathcal{Q}} f^{a^2} dq}} & \text{si } \int_{\mathcal{Q}} f^a dq \leq 0 \\ \min_{\alpha \geq 0} \epsilon_k(\alpha, a_0) & \text{si } \int_{\mathcal{Q}} f^a dq > 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

Dans les autres cas, les calculs sont plus complexes, et nécessitent pour chaque  $a_0$  la minimisation de  $\epsilon_k(\alpha, a_0)$

$$\epsilon_k(a_0) = \begin{cases} \frac{1}{\min_{\alpha \geq 0} \epsilon_k(\alpha, a_0)} & \text{si } \int_{\mathcal{Q}} f^a dq \leq 0 \\ \min_{\alpha \geq 0} \epsilon_k(\alpha, a_0) & \text{si } \int_{\mathcal{Q}} f^a dq > 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

### 3.5.2 Interpolation de la fonction sign(f)

Le mieux qu'on puisse espérer avec l'intégrale de dilatation, est qu'elle converge vers zéro pour le cas des familles de polynômes strictement positifs pour de petites valeurs de  $k$ . Soit

$$f(\mathcal{Q}) \doteq \{f(q) : q \in \mathcal{Q}\} \doteq [f_{\min}, f_{\max}] \quad (3.59)$$

correspondant à la minimisation et la maximisation de  $f(q)$ , et soit

$$p(q) = \sum_{j=0}^n \text{sign}(x_j) L_{n,j}(f(q)) \quad (3.60)$$

l'interpolation de la fonction  $sign(f)$  sur l'intervalle  $[-f_{\max}; f_{\max}]$ .

Si l'approximation  $p(q)$  est telle que

$$sign(p(q)) = sign(f(q)), \forall q \in \mathcal{Q} \quad (3.61)$$

alors les volumes de violation de  $p(q)$  et de  $f(q)$  sont les mêmes.

L'avantage d'utiliser l'interpolation  $p(q)$  est de garder l'intégrande sous forme polynomiale, tout en diminuant le conditionneur dans le cas des familles  $(f, \mathcal{Q})$  positives.

La qualité de l'interpolation dépend du choix des points d'interpolation. Afin de garantir une bonne approximation on choisit les points d'interpolations comme étant les zéros du polynômes de Tchebychev d'ordre  $n$ , pour l'intervalle  $[-f_{\max}; f_{\max}]$ .

Les interpolations de la fonction signum sur l'intervalle  $[-1, 1]$  pour différentes valeurs de  $n$  sont donnés dans la figure ci-dessous :

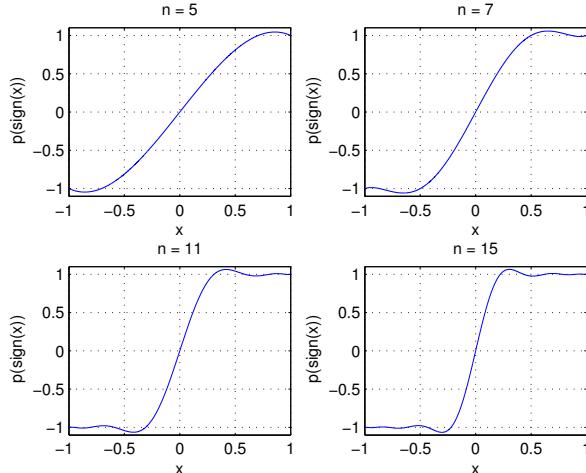


Figure 3.4 Qualité d'interpolation de la fonction signum

**Exemple 3.5.2.** Soit un polynôme  $f(q) = q^4 + 1$  défini sur le domaine  $\mathcal{Q} = [-1.5, 1]$ .

Pour  $n = 7$  points d'interpolation on choisit  $x_j = 7 \cos\left(\frac{(6-j)}{6}\pi\right)$ ,  $j = 0, \dots, 6$ . L'approximation de la fonction  $sign(f)$  est représentée dans la figure 3.5 ci-dessous :

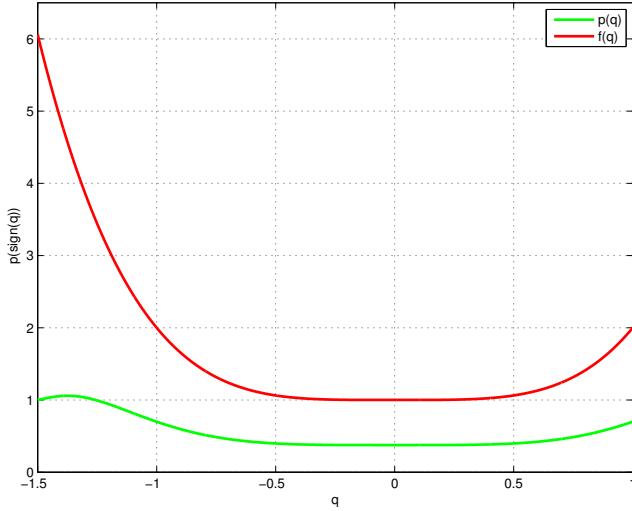


Figure 3.5 Interpolation de la fonction  $sign(q^4 + 1)$

**Exemple 3.5.3.** Considérons de nouveau le même exemple du “Track-guided bus”, où on est confronté au problème de la lenteur de convergence. Pour montrer l’efficacité de l’interpolation de la fonction  $sign$ , on a effectué des calculs pour différentes valeurs du nombre de points d’interpolation  $n$ . Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3.9 Amélioration de la convergence avec l’interpolation

$\mu \backslash n$	0.1			0.3			1		
$\mu$	$\epsilon_2$	$\epsilon_4$	$\epsilon_6$	$\epsilon_2$	$\epsilon_4$	$\epsilon_6$	$\epsilon_2$	$\epsilon_4$	$\epsilon_6$
0	0.2464	0.1058	0.0532	0.7188	0.6271	0.5697	0.9479	0.9292	0.9166
5	0.2306	0.0929	0.0441	0.7106	0.6147	0.5553	0.9463	0.9265	0.9132
7	0.2085	0.0763	0.0331	0.6986	0.5972	0.5350	0.9439	0.9227	0.9084
15	0.1041	0.0216	0.0055	0.6323	0.5113	0.4413	0.9302	0.9024	0.8843

À partir de ces résultats, on remarque que plus le problème est mal conditionné plus il est difficile d’améliorer la convergence avec l’interpolation.

### 3.5.3 Subdivision du domaine d’intégration

Une solution pour améliorer la convergence de l’intégrale de dilatation vers le volume de violation réel serait de subdiviser le domaine d’intégration en plusieurs parties.

Soit un domaine de variation  $\mathcal{Q}$  subdivisé en  $N$  sous domaines  $\mathcal{Q}_i$  tels que :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \cup \dots \cup \mathcal{Q}_N \text{ et } \forall i \neq j, \mathcal{Q}_i \cap \mathcal{Q}_j = \emptyset \quad (3.62)$$

Si on définit

$$\mathcal{Q}_{bad_i} = \{q \in \mathcal{Q}_i : f(q) \leq 0\}$$

et

$$\epsilon_{ki} = \min_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\mathbf{Vol}(\mathcal{Q}_i)} \int_{\mathcal{Q}_i} (1 - \alpha f(q))^k dq \quad (3.63)$$

alors les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\mathbf{Vol}(\mathcal{Q}_{bad}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{Vol}(\mathcal{Q}_{bad_i}) \quad (3.64)$$

$$\leq \sum_{i=1}^N \epsilon_{ki} \mathbf{Vol}(\mathcal{Q}_i) \quad (3.65)$$

Avec la subdivision on ne peut utiliser le conditionneur pour juger la stabilité de  $\mathcal{Q}$ . Par contre, chaque  $\mathcal{Q}_i$  est caractérisé par son propre conditionneur  $\theta_{ki} = \epsilon_{ki}^{1/k}$  qui permet de conclure sur la non robustesse de  $\mathcal{Q}_i$  si  $\theta_{ki} \rightarrow 1$ .

**Exemple 3.5.4.** Nous voulons tester la subdivision du domaine d'intégration sur l'exemple du "Track-guided bus". Les résultats obtenus dans le cas  $\mu = 0.3$  pour différents nombres de subdivisions sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3.10 Convergence des calculs en fonction des subdivisions

N	$\epsilon_2$	$\epsilon_4$	$\epsilon_6$
1	0.7188	0.6271	0.5697
16	0.1605	0.0485	0.0179
49	0.0598	0.0073	0.0011
100	0.0303	0.0019	0.00016
900	0.0035	0.000026	0.00000025

À partir de ces résultats on relève l'efficacité de la subdivision compte tenu de la convergence des calculs. Cependant, avec la subdivision on ne peut utiliser que  $\epsilon_k$  pour juger le système. On doit donc montrer que  $\epsilon_k$  est inférieur à un seuil tolérable et qu'il n'y a pas d'ensembles  $\mathcal{Q}_i$  tels que  $\theta_{ki} \rightarrow 1$  pour juger la robustesse pratique.

À titre illustratif, pour  $N = 4$ , les subdivisions d'un domaine dans  $\mathbb{R}^2$  sont représentés dans la figure 3.6.

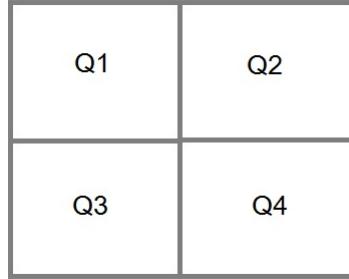


Figure 3.6 subdivisions d'un domaine dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $N=4$

### 3.6 Exemples numériques

**Exemple 3.6.1** (Problème de Saydy). Soit à étudier la stabilité Hurwitz de la famille matricielle  $A(q) = A_0 + A_1 q + A_2 q^2$  avec la méthode de l'intégrale de dilatation.

$$A_0 = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, q \in [0, 1]$$

La stabilité est assurée si le déterminant Hurwitz correspondant est positif :

$$f(q) = \det \mathcal{H}(q) = 34 q^4 - 68 q^3 + 203 q^2 - 169 q + 72 \quad (3.66)$$

On fixe le pourcentage de violation tolérable à  $\varepsilon = 10^{-4}$  et le conditionneur maximum à  $\theta_{max} = 0.93$ .

Les résultats de calculs obtenus sont donnés dans le tableau 3.11 ci-dessous :

Tableau 3.11 Résultats obtenus pour le test de stabilité

$k$	$\alpha^*$	$\epsilon_k$	$\theta_k$	Jugement
2	0.0208	0.0652	0.2553	Tester pour k=4
4	0.0203	0.0068	0.2876	Tester pour k=6
6	0.0200	$8 \cdot 10^{-4}$	0.3056	Tester pour k=8
8	0.0199	$1.02 \cdot 10^{-4}$	0.3173	Tester pour k=10
10	0.0198	$1.3 \cdot 10^{-5}$	0.3257	Performances assurées

Donc on a réussi à démontrer que cette famille est stable en nous basant sur l'intégrale de dilatation après 5 itérations.

**Exemple 3.6.2** (Problème d'Ackermann). Soit à étudier la stabilité Hurwitz d'un système dont le polynôme caractéristique est donné par :

$$P(s, q) = s^3 + (q_1 + q_2 + 1)s^2 + (q_1 + q_2 + 3)s + (1 + d_2 + 6q_1 + 6q_2 + 2q_1q_2) \quad (3.67)$$

$$q_1 \in [0.3, 2.5], \quad q_2 \in [0, 1.7], \quad d = 0.5.$$

Il a été démontré que cette famille est stable si :

$$f(q_1, q_2) = (q_1 - 1)^2 + (q_2 - 1)^2 - d^2 > 0 \quad (3.68)$$

On fixe le pourcentage de violation tolérable  $\varepsilon = 10^{-4}$  et le  $\theta_{max} = 0.93$ .

Les résultats des calculs obtenus sont donnés dans le tableau 3.12.

Tableau 3.12 Résultats obtenus pour le test de stabilité

k	$\alpha^*$	$\epsilon_k$	$\theta_k$	Jugement
2	0.7310	0.5785	0.7606	Tester pour k=4
4	0.6846	0.5141	0.8468	Tester pour k=6
6	0.5744	0.5114	0.8943	Tester pour k=8
8	0.4317	0.5174	0.9209	Tester pour k=10
10	0.3431	0.5212	0.9369	Performances violées

Donc on a réussi à démontrer que cette famille n'est pas robustement stable en nous basant sur l'intégrale de dilatation après 5 itérations.

## CHAPITRE 4 STABILITÉ GÉNÉRALISÉE

En automatique, il est souvent question de parler du respect ou non de certaines performances, celles-ci incluent notamment le problème de la stabilité généralisée des systèmes linéaires, qui se traduit par le confinement des valeurs propres de la matrice jacobienne associée à l'intérieur d'un domaine  $\Omega$  du plan complexe.

Les travaux de Saydy (Saydy et al., 1988, 1990) ont permis d'apporter un nouvel outil pour l'étude de la stabilité généralisée. En effet, les applications gardiennes conçues pour des domaines  $\Omega$  du plan complexe, associent à toute matrice une fonction scalaire des paramètres de celle-ci, qui s'annule lorsque les valeurs propres de la matrice sont à la frontière de  $\Omega$ . De ce fait, l'espace des paramètres est divisé en plusieurs ensembles, tels que chacun conserve la propriété de respect ou de violation du confinement de toutes les valeurs propres de la matrice à l'intérieur du domaine  $\Omega$  (Saussie, 2010).

Cette étude a permis d'élaborer une nouvelle méthode pour étudier la stabilité généralisée, celle-ci repose sur la positivité des applications gardiennes autour d'un point nominal stable. Ainsi dans le cas des familles polynomiales l'analyse de robustesse peut être faite en utilisant la méthode de l'intégrale de dilatation décrite au chapitre précédent.

Dans ce chapitre, on traite essentiellement le cas des matrices paramétrées, mais celui-ci peut facilement être adapté au cas des polynômes. En effet, les familles de polynômes peuvent être vues comme des polynômes caractéristiques d'une famille de matrices sous forme compagnie associée (Saydy et al., 1990).

### 4.1 Préliminaires Mathématiques

On présente d'abord les outils algébriques nécessaires pour la construction des applications gardiennes, c'est-à-dire le produit de Kronecker et le produit bialterné, dont les propriétés spectrales sont particulièrement intéressantes.

#### 4.1.1 Produit de Kronecker

Le produit de Kronecker de deux matrices carrées  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , noté  $A \otimes B$ , est donné par la matrice carrée de taille  $nm$  :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La somme de Kronecker de deux matrices carrées  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est, quant à elle, donnée par :

$$A \oplus B = A \otimes I_m + I_n \otimes B \quad (4.2)$$

où  $I_m$  et  $I_n$  désignent les matrices identités de dimensions respectives  $m$  et  $n$ .

Les valeurs propres de  $A \otimes B$  et  $A \oplus B$  sont respectivement les  $nm$  produits  $\lambda_i(A) \lambda_j(B)$  et les  $nm$  sommes  $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$  selon tous les couples possibles  $(i, j)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Ceci dérive d'un résultat plus général concernant les valeurs propres d'un polynôme matriciel (Stephanos, 1900) :

**Lemme 4.1.1.** *Soit  $p$  un polynôme de variables complexes  $x_1$  et  $x_2$  donné par :*

$$p(x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^{i+j=N} p_{ij} x_1^i x_2^j \quad (4.3)$$

*et la fonction associée de deux matrices carrées complexes  $A$  et  $B$ ,*

$$P(A, B) := \sum_{i,j=0}^{i+j=N} p_{ij} A^i \otimes B^j \quad (4.4)$$

*Les valeurs propres de  $P(A, B)$  sont les  $nm$  valeurs  $p(\lambda_i(A), \lambda_j(B))$  selon tous les couples possibles  $(i, j)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ .*

$$\lambda_{ij}(P_A) = P(\lambda_i(A), \lambda_j(B)), \quad \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \quad (4.5)$$

#### 4.1.2 Produit bialterné

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de dimension  $n$  et  $V^n$ , le  $\frac{n(n-1)}{2}$ -tuple constitué des paires d'entiers  $(p, q), p = 2, \dots, n, q = 1, \dots, p-1$ , listé lexicalement, c'est-à-dire :

$$V^n = [(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), \dots, (n, n-1)] \quad (4.6)$$

Soit  $V_i^n$  la  $i^{\text{e}}$  composant de  $V_n$  et

$$f((p, q); (r, s)) = \frac{1}{2} \left( \det \begin{bmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ b_{qr} & b_{qs} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{pr} & b_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{bmatrix} \right) \quad (4.7)$$

Le produit bialterné de  $A$  et  $B$ , noté  $A \odot B$ , est la matrice carrée de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$  dont les éléments sont donnés par :

$$(A \odot B)_{ij} = f(V_i^n; V_j^n) \quad (4.8)$$

Tout comme le produit et la somme de Kronecker, le produit bialterné possède des propriétés spectrales intéressantes dans le cas des polynômes matriciels (Stephanos, 1900) :

**Lemme 4.1.2.** *Soit  $\Psi$  le polynôme matriciel défini pour une matrice carrée  $A$  de taille  $n$*

$$\Psi(A, A) = \sum_{p,q} \psi_{pq} A^p \odot A^q, \quad (4.9)$$

et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les  $n$  valeurs propres de  $A$ .

Les valeurs propres de  $\Psi(A, A)$  sont les  $\frac{n(n-1)}{2}$  valeurs

$$\Psi(\lambda_i, \lambda_j) := \frac{1}{2} \sum_{p,q} \psi_{pq} (\lambda_i^p \lambda_j^q + \lambda_i^q \lambda_j^p), \quad i = 2, \dots, n, \quad j = 1, \dots, i-1. \quad (4.10)$$

Par exemple, si  $A$  est une matrice carrée de dimension 3, on a :

$$\sigma(A \odot A) = \{\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_2 \lambda_3\} \quad (4.11)$$

Dans le cas du produit de Kronecker, on obtient

$$\sigma(A \otimes A) = \{\lambda_1^2, \lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_2 \lambda_1, \lambda_2^2, \lambda_2 \lambda_3, \lambda_3 \lambda_1, \lambda_3 \lambda_2, \lambda_3^2\} \quad (4.12)$$

## 4.2 Applications gardiennes et semi-gardiennes

Maintenant qu'on a introduit les outils algébriques précédents, on passe à la méthode des applications gardiennes. En effet, cet outil permet d'identifier les frontières des ensembles de l'espace des paramètres pour lesquels la stabilité relativement à un domaine  $\Omega$  est conservée.

### 4.2.1 Définitions et propriétés

Les définitions et les propositions données dans cette section proviennent essentiellement de l'article (Saydy et al., 1990). Et pour plus de détails sur l'application ainsi que sur les propriétés des applications gardiennes consulter notamment (Saydy et al., 1990; Saussie, 2010; Dubanchet, 2012).

**Définition 4.2.1.** Pour tout ouvert  $\Omega$  du plan complexe, on définit  $\mathcal{S}(\Omega)$  étant l'ensemble des matrices carrées dont toutes les valeurs propres appartiennent à  $\Omega$

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \sigma(A) \subset \Omega\} \quad (4.13)$$

Dans la suite, on désigne par  $\bar{\Omega}$ ,  $\partial\Omega$  et  $\overset{\circ}{\Omega}$  respectivement l'adhérence, la frontière et l'intérieur de l'ensemble  $\Omega$ , tels que  $\bar{\Omega} = \partial\Omega \cup \overset{\circ}{\Omega}$

**Définition 4.2.2.** Soit  $\mathbb{R}^{n \times n}$  l'ensemble des matrices carrées réelles de taille  $n$ , et soit  $\mathcal{S}$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Soit  $\nu$  une application de  $\mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{C}$ , on dit que  $\nu$  garde  $\mathcal{S}$  si :

$$\forall x \in \bar{\mathcal{S}} : \nu(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \partial\mathcal{S} \quad (4.14)$$

$\nu$  est appelée application gardienne pour  $\mathcal{S}$ .

Ainsi une application est dite gardienne si et seulement si elle s'annule seulement lorsqu'une des valeurs propres est à la frontière du domaine  $\Omega$ .

**Proposition 4.2.1.** Soit une matrice paramétrée  $A(r)$ ,  $r = (r_1, r_2, \dots, r_m) \in \mathcal{U}$ .

Soit  $\mathcal{S}$  gardé par l'application  $\nu$ . On suppose que  $\exists r_0 \in \mathcal{U}$  tel que  $A(r_0) \in \mathcal{S}$ . Alors

$$\begin{aligned} A(r) \in \mathcal{S} \quad \forall r \in \mathcal{U} &\Leftrightarrow \forall r \in \mathcal{U} \quad \nu(A(r)) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall r \in \mathcal{U} \quad \nu(A(r)) \nu(A(r_0)) > 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ainsi, partant de la proposition 4.2.1, on peut démontrer que la stabilité est conservée dans un ensemble de paramètres, s'il n'entraîne pas de points d'annulation de l'application gardienne.

Si l'on s'assure que l'application gardienne ne comporte pas de multiplicité paire, alors pour prouver que celle-ci ne s'annule pas il suffit de démontrer qu'il n'y pas de changement de signe sur l'ensemble des paramètres.

Généralement les applications gardiennes issues du produit de Kronecker se mettent sous la forme  $\nu = \nu_1 \times \nu_2^2$ , et dans ce cas il est plus prudent de vérifier la conservation de signe pour

les deux termes du produit :

$$A(r) \in \mathcal{S} \quad \forall r \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall r \in \mathcal{U} \begin{cases} \nu_1(A(r)) \times \nu_1(A(r_0)) > 0 \\ \nu_2(A(r)) \times \nu_2(A(r_0)) > 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

**Proposition 4.2.2.** Soit  $\mathcal{S}$  gardé par l'application  $\nu = \nu_1 \times \nu_2^2$ . On suppose que  $\exists r_0 \in \mathcal{U}$  tel que  $A(r_0) \in \mathcal{S}$ .

Dans un voisinage proche du nominal  $r_0$ , on peut adopter la relation 4.17 pour juger la stabilité d'un point :

$$\begin{cases} \nu_1(A(r)) \times \nu_1(A(r_0)) > 0 \\ \nu_2(A(r)) \times \nu_2(A(r_0)) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(r) \in \mathcal{S} \quad (4.17)$$

**Définition 4.2.3.** Soit  $\mathcal{S}$  et  $\nu$  définis précédemment. L'application  $\nu$  est dite semi-gardienne pour  $\mathcal{S}$  si :

$$\forall x \in \bar{\mathcal{S}} \quad x \in \partial\mathcal{S} \Rightarrow \nu(x) = 0 \quad (4.18)$$

Un élément  $x \in \overset{\circ}{\mathcal{S}}$  pour lequel  $\nu(x) = 0$  est appelé Blind spot pour  $(\nu, \mathcal{S})$ .

Ainsi, à la différence des applications gardiennes, une application semi-gardienne peut s'annuler pour des points en dehors de la frontière de stabilité. De ce fait, l'étude de la stabilité devient plus sensible que précédemment.

**Proposition 4.2.3.** : Soit  $\mathcal{S}$  semi-gardé par l'application  $\nu$ . On suppose que  $\exists r_0 \in \mathcal{U}$  tel que  $A(r_0) \in \mathcal{S}$ , et soit  $\mathcal{U}_{cr} = \{r \in \mathcal{U} : \nu(A(r)) = 0\}$ . On a alors la relation suivante

$$A(r) \in \mathcal{S} \quad \forall r \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \forall r \in \mathcal{U}_{cr}, \quad A(r) \in \mathcal{S} \quad (4.19)$$

Ainsi, autour d'un nominal, on peut démontrer que la stabilité est conservée en démontrant que pour tous les points d'annulation de l'application, la matrice demeure stable.

Bien sûr, cette solution est très difficile à suivre, car en plus de la complexité de déterminer les points d'annulation, tester la stabilité sur tout l'ensemble est impraticable.

Le corollaire 4.2.1 qui suit, présente une solution à l'étude de la stabilité généralisée. En effet, puisque la stabilité est conservée sur un ensemble continu ne contenant pas de points d'annulation, alors pour tester la stabilité d'un tel ensemble il suffit de la tester pour un seul élément y appartenant.

**Corollaire 4.2.1** (Saussie (2010)). Soit  $\mathcal{S}(\Omega)$  gardé par l'application  $\nu_\Omega$  et la famille  $\{A(r) : r \in \mathcal{U}\}$ .

Alors l'ensemble  $\mathcal{C}$  défini par

$$\mathcal{C} = \{r \in \mathcal{U} : \nu(A(r)) = 0\}$$

divide l'espace  $\mathcal{U}$  en composantes  $\mathcal{C}_i$  qui sont stables ou instables par rapport à  $\Omega$ .

Il suffit de tester un vecteur  $r_i$  de chacune des composantes  $\mathcal{C}_i$  pour savoir si elle est stable ou pas.

#### 4.2.2 Construction pour un domaine à frontière polynomiale

La technique présentée ici concerne la construction d'applications gardiennes pour les domaines  $\Omega$  dont la frontière est décrite par un polynôme, en fonctions des variables  $x$  et  $y$  du plan complexe.

$$\Omega = \{s = x + i y : p(x, y) < 0\} \quad (4.20)$$

Le domaine  $\Omega$  doit être symétrique par rapport à l'axe des réels puisque les pôles d'une matrice réelle sont réels ou conjugués complexes.

Pour respecter cette symétrie, les polynômes prennent la forme suivante :

$$p(x, y) = \sum_{k,l} p_{kl} x^k y^{2l} \quad (4.21)$$

On associe à  $p(x, y)$  le polynôme à valeurs réelles suivant :

$$\begin{aligned} q(\lambda, \mu) &= p\left(\frac{\lambda + \mu}{2}, \frac{\lambda - \mu}{2i}\right) \\ &= \sum_{k,l} q_{kl} \lambda^k \mu^l \end{aligned} \quad (4.22)$$

Avec cette notation,  $\Omega$  et  $\partial\Omega$  sont exprimés de façon alternative

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : q(\lambda, \lambda^*) < 0\}, \quad (4.23)$$

$$\partial\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : q(\lambda, \lambda^*) = 0\}. \quad (4.24)$$

Si on définit à présent

$$\mathcal{F}(A) = \sum_{k,l} q_{kl} A^k \otimes A^l \quad (4.25)$$

$$\mathcal{M}(A) = \sum_{k,l} q_{kl} A^k \odot A^l \quad (4.26)$$

$$\mathcal{P}(A) = \prod_{p(\alpha,0)=0} (A - \alpha I) \quad (4.27)$$

alors on a la proposition 4.2.4 suivante :

**Proposition 4.2.4** (Saydy et al. (1990)). *En admettant qu'elles ne sont pas identiquement nulles, les applications 4.29 et 4.28*

$$\nu_1 : A \mapsto \det \mathcal{F}(A) \quad (4.28)$$

$$\nu_2 : A \mapsto \det \mathcal{M}(A) \det \mathcal{P}(A) \quad (4.29)$$

sont semi gardiennes pour  $S(\Omega)$ .

**Proposition 4.2.5** (Saydy et al. (1990)). *Pour que  $\nu$  garde  $S(\Omega)$  il suffit que  $q$  satisfasse la condition de transformabilité 4.30 suivante :*

$$q(\lambda, \lambda^*) < 0 \text{ et } q(\mu, \mu_*) < 0 \Rightarrow q(\lambda, \mu) \neq 0 \quad (4.30)$$

Ainsi pour certains domaines l'application est gardienne et pour d'autres elle n'est que semi gardienne, cependant, ceci ne doit aucunement se voir comme un obstacle si on se base sur le corrolaire 4.2.1 pour analyser la stabilité. Mis à part qu'on aura plus d'ensembles à tester, le principe reste le même, on devra toujours tester la stabilité d'un point appartenant à chaque ensemble délimité par les points d'annulations pour conclure de la stabilité des différents ensembles.

Néanmoins, pour des problèmes résolus en termes de positivité, l'application semi-gardienne cause un grand problème, puisqu'il y aura un changement de signe au niveau des blind spot malgré que la stabilité soit conservée.

Une autre proposition permet de déterminer si une application est gardienne ou pas.

**Proposition 4.2.6** (Saydy et al. (1990)). *Supposons que*

$$q_{kk} \geq 0, \quad \forall k \geq 1 \quad (4.31)$$

$$q_{kl} = 0 \quad \forall k \neq l, \quad kl \neq 0 \quad (4.32)$$

alors  $q$  satisfait la condition de l'équation 4.30 précédente.

### 4.2.3 Applications usuelles

À partir des techniques de construction précédentes, on peut déterminer des applications gardiennes pour les domaines usuels présentés à la figure 4.1

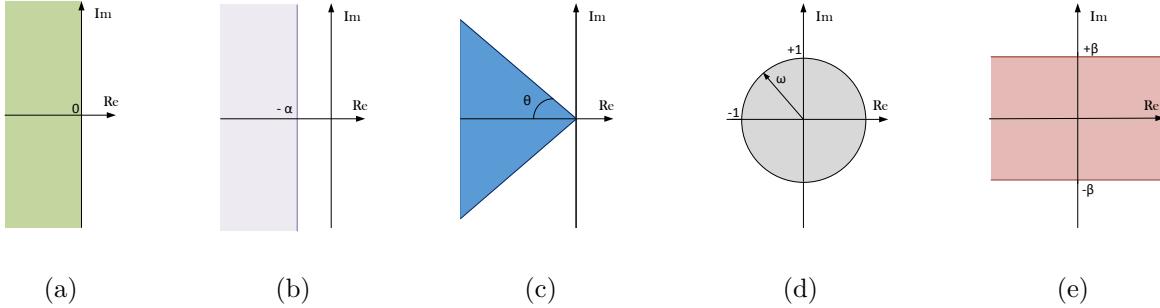


Figure 4.1 Domaines usuels de stabilité

- Stabilité Hurwitz :

Soit  $\Omega = \mathbb{C}_-$ , le demi-plan gauche complexe ouvert (Fig. 4.1.a).  $\mathcal{S}(\Omega)$  est gardé par (4.33) et par (4.34) :

$$\nu_1 : A \mapsto \det(A \oplus A) \quad (4.33)$$

$$\nu_2 : A \mapsto \det(A) \det(A \odot I) \quad (4.34)$$

- Abscisse spectrale :

Soit  $\Omega$  le demi-plan gauche complexe décalé de  $\alpha$  (Fig. 4.1.b).  $\mathcal{S}(\Omega)$  est gardé par (4.35) et par (4.36) :

$$\nu_1 : A \mapsto \det\left(\frac{1}{2}A \oplus A - \alpha I\right) \quad (4.35)$$

$$\nu_2 : A \mapsto \det(A - \alpha I) \det((A - \alpha I) \odot I) \quad (4.36)$$

- Cône d'amortissement :

Soit  $\Omega$  le cône d'amortissement  $\xi$  d'angle  $2\theta$  où  $\xi = \cos \theta$  (Fig. 4.1.c).  $\mathcal{S}(\Omega)$  est gardé par

(4.37) et par (4.38) :

$$\nu_1 : A \mapsto \det\left(\frac{1}{2}A \oplus A + (1 - 2\xi^2)A \otimes A\right) \quad (4.37)$$

$$\nu_2 : A \mapsto \det(A) \det(A^2 \odot I + (1 - 2\xi^2)A \odot A) \quad (4.38)$$

- Disque :

Soit  $\Omega$  le disque ouvert de rayon  $\omega$  (Fig. 4.1.d).  $\mathcal{S}(\Omega)$  est gardé par (4.39) et par (4.40) :

$$\nu_1 : A \mapsto \det(A \otimes A - \omega^2 I) \quad (4.39)$$

$$\nu_2 : A \mapsto \det(A + \omega I) \det(A - \omega I) \det(A \odot A - \omega^2 I \odot I) \quad (4.40)$$

Pour  $\omega = 1$ , on retrouve le cas de la stabilité Schur pour les systèmes discrets.

- Limite en partie imaginaire :

Soit  $\Omega$  la bande de largeur  $2\beta$  (Fig. 4.1.e).  $\mathcal{S}(\Omega)$  est gardé par (4.41) et par (4.42) :

$$\nu_1 : A \mapsto \det\left(\frac{1}{2}A \otimes A - \frac{1}{4}A^2 \oplus A^2 - \beta^2 I\right) \quad (4.41)$$

$$\nu_2 : A \mapsto \det\left(\frac{1}{2}A \odot A - \frac{1}{2}A^2 \odot I - \beta^2 I \odot I\right) \quad (4.42)$$

#### 4.2.4 Construction à partir d'applications usuelles

Généralement, un même système doit satisfaire plusieurs conditions simultanément. Il est alors intéressant d'avoir une application gardienne permettant de délimiter le domaine rencontrant la totalité des conditions.

La proposition 4.2.1 qui suit énoncée dans (Saydy et al., 1990), propose de combiner des applications gardiennes usuelles, afin d'obtenir une application gardienne pour un domaine issu de l'intersection des domaines usuels.

**Lemme 4.2.1.** Soit  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ . Si

$$\mathcal{S}(\Omega_1) \text{ est gardé par } \nu_1 \text{ et } \mathcal{S}(\Omega_2) \text{ par } \nu_2 \quad (4.43)$$

Alors

$$\mathcal{S}(\Omega) \text{ est gardé par } \nu = \nu_1 \nu_2 \quad (4.44)$$

**Exemple 4.2.1. :**

Supposons qu'on veuille qu'un système d'ordre 2 ait les performances suivantes :

- Temps de pic inférieur à 1 seconde :

$$Tp = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} < 1 \Rightarrow \beta = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} > \pi \quad (4.45)$$

À partir de 4.41,  $\mathcal{S}(\Omega_1)$  est gardé par l'application  $\nu_1 : A \mapsto \det(\frac{1}{2}A \otimes A - \frac{1}{4}A^2 \otimes A^2 - \beta^2 I)$ .

- Dépassement inférieur à 4.6% :

$$\xi > \sqrt{\frac{\ln(D)^2}{\pi^2 + \ln(D)^2}} = 0.7 \Rightarrow \theta < 45^\circ \quad (4.46)$$

À partir de 4.37,  $\mathcal{S}(\Omega_2)$  est gardé par l'application  $\nu_2 : A \mapsto \det(\frac{1}{2}A \oplus A + (1 - 2\xi^2)A \otimes A)$ .

Suivant la proposition 4.2.1 précédente le domaine  $\Omega$  est gardé par  $\nu = \nu_1 \nu_2$ .

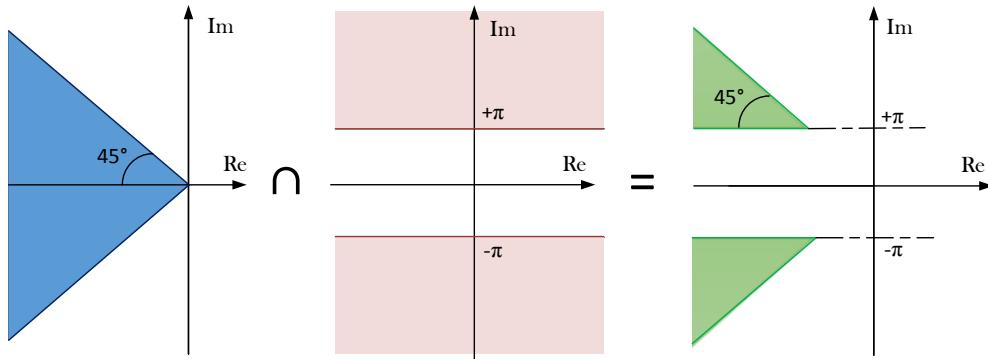


Figure 4.2 Construction d'un domaine à partir des domaines usuels

#### 4.2.5 Exemple d'analyse par applications gardiennes

Soit une famille de matrices dépendant de deux paramètres  $r_1$  et  $r_2$  :

$$A(r_1, r_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6r_2 + r_1 & 5r_1 + 6 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Nous voulons étudier la stabilité de cette famille relativement au demi-plan gauche décalé de  $\alpha = -2$ , ainsi que la stabilité en amortissement pour  $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Les expressions des applications gardiennes correspondant à ces deux domaines sont :

$$\nu_1 = \det\left(\frac{1}{2}A \oplus A - \alpha I\right) = \frac{25}{4}(r_1 + 2)^2(9r_1 - 6r_2 + 16) \quad (4.48)$$

$$\nu_2 = \det\left(\frac{1}{2}A \oplus A + (1 - 2\xi^2)A \otimes A\right) = \frac{1}{64}(r_1 + 6r_2)^2 \times (25r_1^2 + 62r_1 + 12r_2 + 36)^2 \quad (4.49)$$

On se base sur la Proposition 4.2.1 précédente pour obtenir l'expression de l'application gardienne du domaine :

$$\nu = \nu_1 \nu_2 = \frac{25}{256}(r_1 + 2)^2(9r_1 - 6r_2 + 16)(r_1 + 6r_2)^2(25r_1^2 + 62r_1 + 12r_2 + 36)^2 \quad (4.50)$$

La première méthode que nous allons utiliser se base sur le Corrolaire 4.2.1, où l'espace des paramètres est divisé en plusieurs ensembles stables ou instables.

Les points d'annulations de l'application gardienne sont représentés dans la figure 4.3 ci-dessous : On sélectionne un point de chaque ensemble (figure 4.3), puis on calcule les valeurs

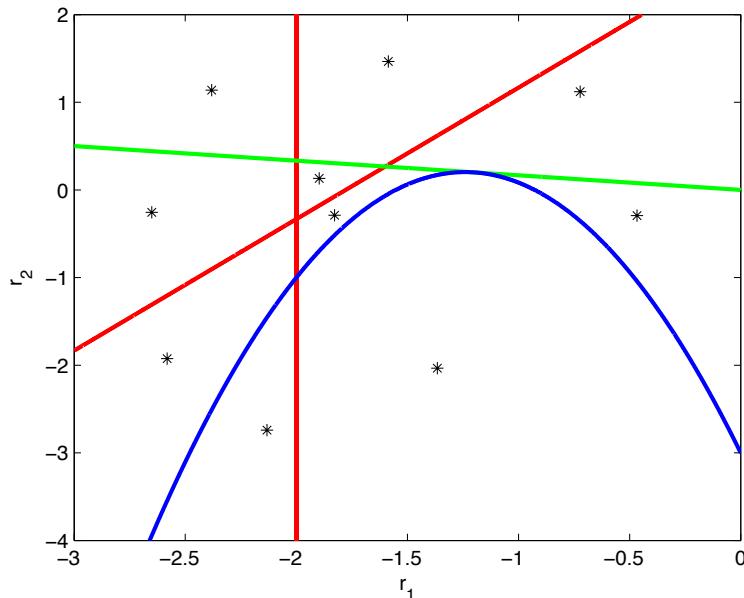


Figure 4.3 Points d'annulation de  $\nu$

propres de la matrice correspondante, si elles appartiennent toutes au domaine de stabilité alors l'ensemble contenant le point est stable sinon il est instable.

Tableau 4.1 Valeurs propres de la famille matricielle aux points sélectionnés

$(r_1, r_2)$	Valeurs propres de $A(r_1, r_2)$
(-2.6094, -2.0088)	$-3.5236 \pm 1.4987i$
(-2.1532, -2.7456)	$-2.3831 \pm 3.5983i$
(-1.3790, -2.3246)	$-0.4476 \pm 3.8892i$
(-0.4459, -0.2544)	0.6274, 3.1433
(-0.6671, 1.1667)	-1.5151, 4.1799
(-1.5657, 1.4474)	1.9062, -3.7345
(-2.4021, 1.0965)	0.6291, -6.6395
(-2.6647, -0.3070)	-0.6782, -6.6456
(-1.8975, 0.1316)	-0.3536, -3.1338
(-1.8145, -0.2368)	$-1.5363 \pm 0.9356i$

Donc à partir des résultats obtenus, on déduit que l'ensemble contenant le premier point du tableau 4.1 satisfait les deux conditions de stabilité, à savoir une marge supérieure à 2 et un amortissement supérieur à  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

L'ensemble de stabilité est représenté dans la figure 4.4 ci-dessous :

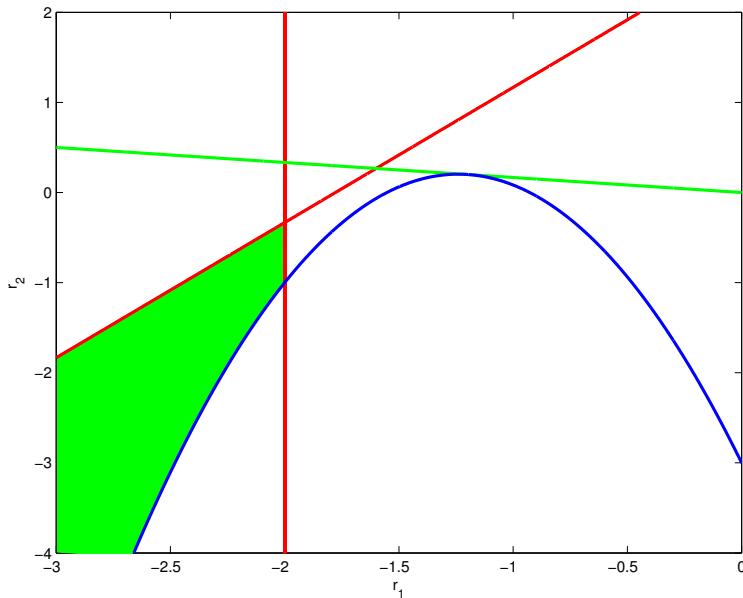


Figure 4.4 Représentation de l'ensemble stable

## Méthodologie

Afin de démontrer la robustesse avec l'intégrale de dilatation, nous devons démontrer que l'ensemble des paramètres où l'application gardienne change de signe à l'intérieur du domaine de variation des paramètres est pratiquement insignifiant.

Pour calculer l'expression exacte de l'intégrale de dilatation d'ordre  $k$  d'un polynôme multivariable de degré  $\nu$ , nous devons utiliser une formule de Smolyak de degré de précision  $l = \frac{k\nu}{2}$ . Cependant, dans de nombreux cas, calculer l'expression symbolique de l'application gardienne mène à un problème de mémoire. Dans de tels cas, il est préférable d'estimer le degré à partir des coefficients de la matrice gardienne.

Une fois que le degré est estimé et la formule de Smolyak  $A_{l,d}$  correspondante calculée ou chargée, on évalue numériquement l'application gardienne sur l'ensemble des points de la grille. On retrouve ensuite l'expression symbolique de l'intégrale de dilatation à travers la somme pondérée

$$\epsilon_k(\alpha) = w'(1 - \alpha F(x))^k \quad (4.51)$$

On calcule le  $\alpha^*$  étant l'unique zéro réel de la dérivée de  $\epsilon_k(\alpha)$ . Et on déduit

$$\epsilon_k = \epsilon_k(\alpha^*) \quad (4.52)$$

et

$$\theta_k = \epsilon_k^{1/k} \quad (4.53)$$

- Estimer le degré total  $\nu$  de l'application gardienne :

Soit une matrice carrée de taille  $n$ . La formule de Laplace permet de ramener le calcul du déterminant à  $n$  calculs de déterminants de taille  $n - 1$ .

Le développement de l'expression du déterminant par rapport à une colonne  $j$  est donné par :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{(i+j)} a_{i,j} A_{i,j} \quad (4.54)$$

Où  $A_{i,j}$  est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la i-ème ligne et la j-ème colonne de  $A$ , et  $a_{i,j}$  est l'élément de la i-ème ligne j-ème colonne de  $A$ .

Ainsi, pour une matrice paramétrée, si on définit

$$v_j = \max(\deg(a_{i,j})), i = 1, \dots, n \quad (4.55)$$

alors le degré total du déterminant vérifie

$$\deg(\det(A)) \leq \sum_{i=1}^n v_i \quad (4.56)$$

Nous appliquons la méthode décrite précédemment au cas de l'exemple précédent.

Nous commençons par estimer le degré du polynôme

$$F = \det(A + 2I) \det((A - 2I) \odot I) \det(A) \det(A^2 \odot I) \quad (4.57)$$

Avec

$$\deg(A + 2I) = \deg \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ r_1 + 6r_2 & 5r_1 + 8 \end{pmatrix} \leq 1 + 1 \quad (4.58)$$

$$\deg(A) = \deg \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6r_2 + r_1 & 5r_1 + 6 \end{pmatrix} \leq 1 + 1 \quad (4.59)$$

$$\deg((A - 2I) \odot I) = \deg((5r_1)/2 + 5) = 1 \quad (4.60)$$

$$\deg(A^2 \odot I) = \deg(r_1 + 6r_2 + (5r_1 + 6)^2/2) = 2 \quad (4.61)$$

Ainsi, le degré total de  $F$  est inférieur à la somme des degrés de ces matrices :

$$\deg(F) \leq 2 + 2 + 1 + 2 = 7 \quad (4.62)$$

Dans ce qui suit, pour calculer l'expression exacte de l'intégrale de dilatation d'ordre  $k$  du polynôme  $F$ , nous utiliserons une formule de Smolyak de degré  $l = \frac{7k}{2}$ .

À partir de la figure 4.4, il est clair que le système est robustement stable si  $r_1 \in [-3, -2.5]$  et  $r_2 \in [-3, -2]$ . Les résultats obtenus en utilisant la méthode de l'intégrale de dilatation sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 4.2 Analyse de la robustesse en stabilité pour  $r_1 \in [-3, -2.5]$  et  $r_2 \in [-3, -2]$ 

$k$	$\epsilon_k$	$\theta_k$
2	0.24371937379195	0.493679424112399
4	0.102597930404974	0.565958582367785
6	0.0517985111891197	0.610547625022725
8	0.0288232044605034	0.641900601741312
10	0.0171038069631238	0.665747092812684
12	0.0106424948766768	0.684836586884761
14	0.00687564064522846	0.70068427223772
16	0.00458326606371481	0.714205913622604
18	0.00313878188324659	0.725990895421448

À partir de ces résultats, on arrive à démontrer que le pourcentage du volume de violation est au pire des cas égal à  $\epsilon_{18} = 0.00314$ , dans un tel cas on peut juger que le système est robustement stable.

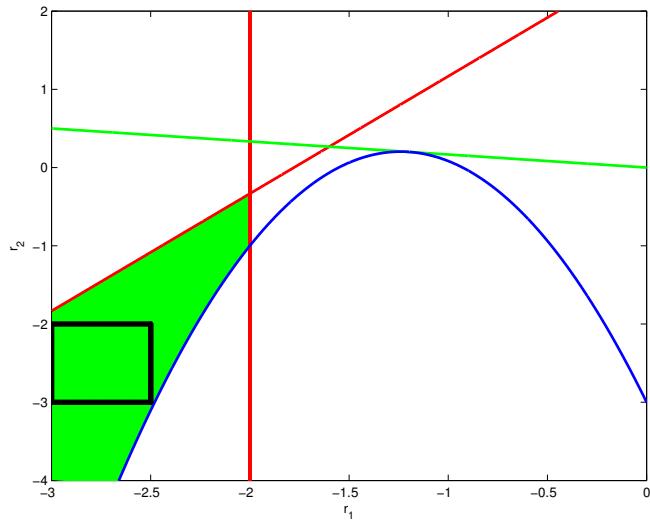
Pour  $r_1 \in [-3, -2]$  et  $r_2 \in [-4, -2]$ , le système n'est pas robustement stable. Les résultats obtenus en utilisant la méthode de l'intégrale de dilatation sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Tableau 4.3 Analyse de la robustesse en stabilité pour  $r_1 \in [-3, -2]$  et  $r_2 \in [-4, -2]$ 

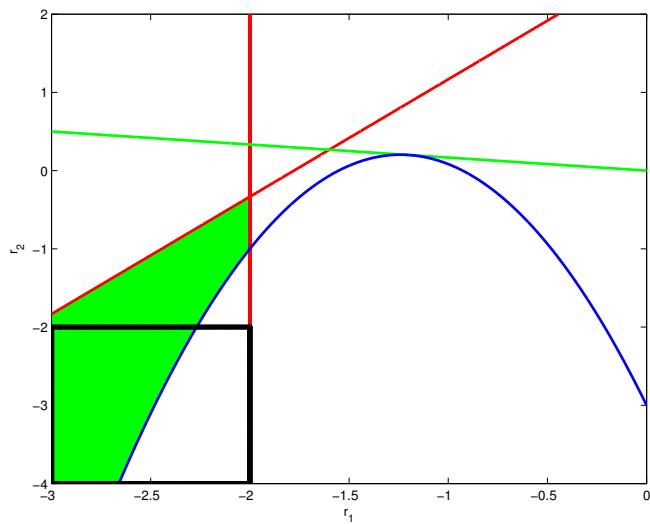
$k$	$\epsilon_k$	$\theta_k$
2	0.885655275041311	0.941092596422537
4	0.911012192258841	0.976969593625873
6	0.917890318402956	0.985821907003421
8	0.921000317706769	0.989765866586581
10	0.922768525413683	0.991994529731037
12	0.92390845974132	0.993426510384613

À partir de ces résultats, on arrive à constater que le conditionneur se rapproche de 1 ( $\theta \geq \theta_{12} = 0.99342$ ), dans un tel cas on peut juger que le système n'est pas robustement stable.

Les deux figures ci-dessous montrent l'emplacement des deux rectangles de variations considérés par rapport aux domaines stables colorés en vert :



(a)



(b)

Figure 4.5 Emplacement des rectangles par rapport au domaine stable

## CHAPITRE 5 APPLICATION AUX COMMANDES DE VOL

Les qualités de vol et de manœuvrabilité d'un avion représentent les caractéristiques de stabilité et de contrôle de l'appareil, ainsi que le degré de difficulté éprouvé par le pilote pour accomplir une tâche spécifique. Les commandes de vol électriques contribuent d'ailleurs grandement à améliorer ces qualités.

Le système de commandes de vol doit être performant sur l'ensemble de l'enveloppe de vol, qui est définie en termes d'altitudes et de vitesses atteignables par l'avion. Une approche classique de conception des commandes de vol consiste à choisir un certain nombre de conditions de vol, d'y synthétiser des contrôleurs linéaires respectant localement les performances demandées, et enfin, d'interpoler les contrôleurs obtenus pour recouvrir tout le domaine de vol.

La masse et le centre de gravité sont deux paramètres incertains qui varient en cours de vol, ce qui cause un changement de la dynamique de l'avion, et donc entraîne une modification des qualités de manœuvrabilités. Dans ce contexte, il devient impératif d'assurer que le système demeure robuste vis-à-vis de ces variations, et conserve le niveau de performance exigé.

Ainsi, on propose dans ce chapitre d'analyser la robustesse d'un système de commandes de vol grâce à l'intégrale de dilatation. Plus précisément, on considère la robustesse d'une loi de contrôle de l'accélération normale face à des variations de masse et de centrage de l'avion. La satisfaction des qualités de vol et de manœuvrabilité se traduit dans notre cas au confinement des pôles dans une zone du plan complexe.

### 5.1 Contrôle longitudinal d'un F-16

On considère le contrôle longitudinal d'un F-16 étudié dans (Lhachemi, 2013) dont on a retenu les architectures de commande ainsi que les valeurs numériques. Le but est de valider sur un point de l'enveloppe de vol la robustesse de la loi de commande face à des variations de masse et de centrage.

#### 5.1.1 Modèle et architecture de commande

La dynamique longitudinale est caractérisée par deux modes oscillatoires qui se distinguent l'un de l'autre. Le *Short Period* constitue la réponse à court terme de l'avion ; il est dominé par la dynamique de l'angle d'attaque  $\alpha$  et de la vitesse en tangage  $q$ . Le mode Phugoid constitue la réponse à moyen terme de l'avion ; il est dominé par la vitesse  $u$  et d'angle de tangage  $\theta$ .

Le contrôle du mode *Short Period* est indispensable pour assurer un bon comportement de l'appareil. L'étude faite sur le F-16 a montré que le mode Short Period est particulièrement sensible aux variations de masse et de centrage (Lhachemi, 2013). Du fait de la séparation naturelle entre les modes *Short Period* et Phugoïde, il est courant de réduire le modèle longitudinal de l'avion au mode *Short Period* pour synthétiser la boucle de contrôle. L'entrée privilégiée pour contrôler ce mode est la gouverne de profondeur.

On considère le modèle linéarisé de l'avion autour d'une condition de vol. Ainsi, à partir du modèle longitudinal A.19, on obtient le modèle réduit d'ordre 2 décrivant les variations de l'angle d'attaque  $\alpha$  et de la vitesse en tangage  $q$  :

$$\begin{bmatrix} U_e & -\Delta_x \cos(\alpha_e) \\ 0 & 1 - \frac{(m_0 + \Delta_m)\Delta_x^2}{I_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & U_e + Z_q \\ M_\alpha & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (5.1)$$

avec

- $U_e$ , la vitesse à l'équilibre ;
- $\alpha$ , la variation d'angle d'attaque ;
- $q$ , la vitesse de tangage ;
- $\delta_e$ , le braquage de la gouverne de profondeur ;
- $\alpha_e$ , l'angle d'attaque à l'équilibre ;
- $m_0$ , la masse nominale ;
- $\Delta_m$ , la variation de masse ;
- $I_y$ , Moment d'inertie autour de l'axe des y ;
- $\Delta_x$ , la variation de centrage ;
- $Z_\alpha, Z_q, M_\alpha, M_q, Z_{\delta_e}, M_{\delta_e}$ , les dérivées de stabilité qui dépendent elles aussi de la masse et du centrage.

Du fait de la consommation de kérosène ou du largage abrupt de matériel dans le cas d'un avion militaire, la masse de l'avion est considérée comme incertaine (variation  $\Delta_m$ ). La position du centre de gravité (ou centrage) est aussi une autre incertitude dont il faut tenir compte lors de la conception des lois de commande (variation  $\Delta_x$ ).

Le pilote contrôle le facteur de charge  $n_z$  défini comme le rapport entre l'accélération normale de l'appareil et l'accélération gravitationnelle. Son expression est donnée par :

$$n_z = (U_e \dot{\alpha} - U_e q - l_x \dot{q})/g \quad (5.2)$$

où  $l_x$  désigne la distance entre le centre de gravité de l'appareil et la position de l'accéléro-

mètre. L'équation d'état (5.1) peut alors être réécrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = A(\Delta_x, \Delta_m) \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + B(\Delta_x, \Delta_m) \delta_e \quad (5.3)$$

où les matrices  $A$  et  $B$  sont paramétrées selon les variations de masse et de centrage. On notera :

$$\begin{bmatrix} n_z \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{n_z}(\Delta_x, \Delta_m) \\ C_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{n_z}(\Delta_x, \Delta_m) \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e \quad (5.4)$$

avec les matrices de sorties relatives à  $n_z$  que l'on peut déduire de l'équation (5.2), et  $C_q = [0 \ 1]$ . La gouverne de profondeur est modélisée par une fonction de transfert du 1<sup>er</sup> ordre avec une constante de temps  $\tau = 0.05$  :

$$F_{act}(s) = \frac{\delta_e}{\delta_{e_c}} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad (5.5)$$

L'architecture de contrôle utilisée est représentée à la figure 5.1. Une boucle interne en  $q$  (gain  $K_q$ ) permet généralement d'améliorer l'amortissement du mode *Short Period* et un contrôleur PI ( $K_p + K_i/s$ ) sur l'erreur  $n_{z_c} - n_z$  assure la précision. Un filtre *roll-off* d'ordre 2 limite les variations de commande envoyée à l'actionneur pour éviter de le fatiguer ou de l'endommager inutilement ; il se présente sous la forme d'un filtre passe-bas d'ordre 2 :

$$F_{roll}(s) = \frac{\delta_{e_c}}{u} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.6)$$

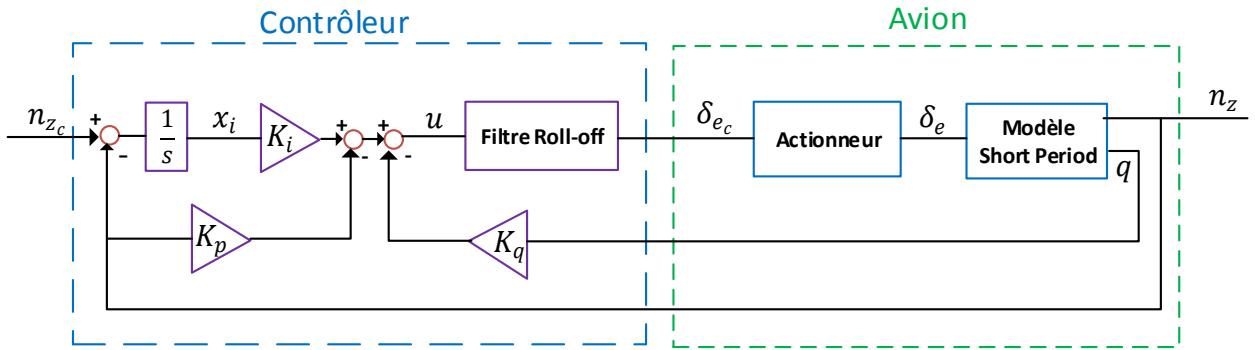


Figure 5.1 Architecture du contrôleur utilisé

### 5.1.2 Système à analyser

En reprenant les notations de la figure 5.1, le modèle d'état en boucle fermée peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = A_{BF}x + B_{BF}n_{zc} \quad (5.7)$$

$$n_z = C_{BF}x \quad (5.8)$$

avec le vecteur d'état  $x = [\alpha \ q \ \delta_e \ x_i \ \delta_{e_c} \ \dot{\delta}_{e_c}]^\top$ , et les matrices :

$$A_{BF} = \begin{bmatrix} A(\Delta_x, \Delta_m) & | & B(\Delta_x, \Delta_m) & | & 0 & | & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & -1/\tau & | & 0 & | & 0 & | & 0 \\ \hline -C_{n_z}(\Delta_x, \Delta_m) & | & -D_{n_z}(\Delta_x, \Delta_m) & | & 0 & | & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & 0 & | & 0 & | & 0 & | & 1 \\ \hline -K_p\omega_n^2 C_{n_z}(\Delta_x, \Delta_m) - K_q\omega_n^2 C_q & | & -K_p\omega_n^2 D_{n_z}(\Delta_x, \Delta_m) & | & K_i\omega_n^2 & | & -\omega_n^2 & | & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$B_{BF} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^\top \quad (5.10)$$

$$C_{BF} = [C_{n_z}(\Delta_x, \Delta_m) \ D_{n_z}(\Delta_x, \Delta_m) \ 0 \ 0 \ 0] \quad (5.11)$$

Généralement, les coefficients des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C_{n_z}$  et  $D_{n_z}$  ne dépendent pas de façon polynomiale des paramètres  $\Delta_x$  et  $\Delta_m$ . Afin de pouvoir utiliser l'intégrale de dilatation, il s'agit donc, dans un premier temps, d'obtenir une approximation polynomiale de ces matrices. Une interpolation quadratique des matrices s'avère suffisante pour le modèle du *Short Period* (Saussie, 2010; Lhachemi, 2013) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\Delta_x, \Delta_m) \approx A_{00} + A_{10}\Delta_x + A_{01}\Delta_m + A_{11}\Delta_x\Delta_m + A_{20}\Delta_x^2 + A_{02}\Delta_m^2 \\ B(\Delta_x, \Delta_m) \approx B_{00} + B_{10}\Delta_x + B_{01}\Delta_m + B_{11}\Delta_x\Delta_m + B_{20}\Delta_x^2 + B_{02}\Delta_m^2 \\ C_{n_z}(\Delta_x, \Delta_m) \approx C_{00} + C_{10}\Delta_x + C_{01}\Delta_m + C_{11}\Delta_x\Delta_m + C_{20}\Delta_x^2 + C_{02}\Delta_m^2 \\ D_{n_z}(\Delta_x, \Delta_m) \approx D_{00} + D_{10}\Delta_x + D_{01}\Delta_m + D_{11}\Delta_x\Delta_m + D_{20}\Delta_x^2 + D_{02}\Delta_m^2 \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Pour la condition de vol (altitude  $h_e = 5000$  m, vitesse Mach = 0.9), les valeurs numériques tirées de (Lhachemi, 2013) sont données en Annexe A.7. Une synthèse multi-modèles de type

$\mathcal{H}_\infty$  structurée<sup>1</sup> (Lhachemi, 2013) a fourni les gains suivants :

$$K_p = 1.491, K_i = 4, K_q = -9.94, \omega_n = 54.073, \xi = 0.75 \quad (5.13)$$

Il s'agit donc d'analyser la stabilité et la performance robuste de ce contrôleur pour des variations  $\Delta_x \in [-0.15, 0.15]\text{m}$ , et  $\Delta_m \in \times[-1000, 1000]\text{kg}$ .

## 5.2 Analyse graphique basée sur l'annulation des applications gardiennes

On propose d'abord une analyse graphique de la stabilité en traçant les points d'annulation des applications gardiennes d'intérêt. Comme le système dépend de deux paramètres, une représentation graphique se révèle pratique. Pour des systèmes dépendant de trois paramètres ou plus, une telle analyse devient plus complexe.

### 5.2.1 Méthodologie

En se basant sur le Corrolaire 4.2.1, les points d'annulation de l'application gardienne divisent l'espace des paramètres en ensembles stables ou instables. Il est en général difficile de déterminer analytiquement les points d'annulation ; on va donc recourir à une méthode numérique pour les estimer. On utilisera essentiellement la fonction `contour` de MATLAB, qui, à partir des valeurs d'une fonction sur une grille de points de l'espace des paramètres, permet d'estimer les points pour lesquels la fonction s'annule. Cette fonction trace en fait des lignes de niveaux.

Les étapes à suivre pour réaliser cette analyse sont alors :

1. Choisir un maillage du domaine de variation des paramètres.
2. Évaluer l'application gardienne sur ce maillage.
3. Tracer les lignes de niveau nul avec la fonction `contour`.
4. Choisir des points appartenant à chaque composante délimitée par les points d'annulation.
5. Tester la stabilité des points sélectionnés et conclure sur la stabilité des composantes.

**Remarque :** Il peut s'avérer nécessaire de raffiner le maillage afin d'améliorer la précision du tracé.

---

1. Plusieurs modèles avec des cas de masse et de centrage différents ont été considérés simultanément lors de la synthèse.

La fonction `contour` repose sur le principe suivant : si pour deux points consécutifs, l'application gardienne change de signe, il existe alors, par continuité, un point entre ces deux sommets tel que l'application gardienne s'annule. Les applications gardiennes obtenues avec le produit de Kronecker présentent en général un facteur au carré qui peut s'avérer problématique avec l'utilisation de la fonction `contour`. Ce même facteur n'apparaît pas au carré quand on utilise les formules basées sur le produit bialterné.

Considérons ainsi les expressions des applications gardiennes obtenues pour l'exemple de la Section 4.2.5 :

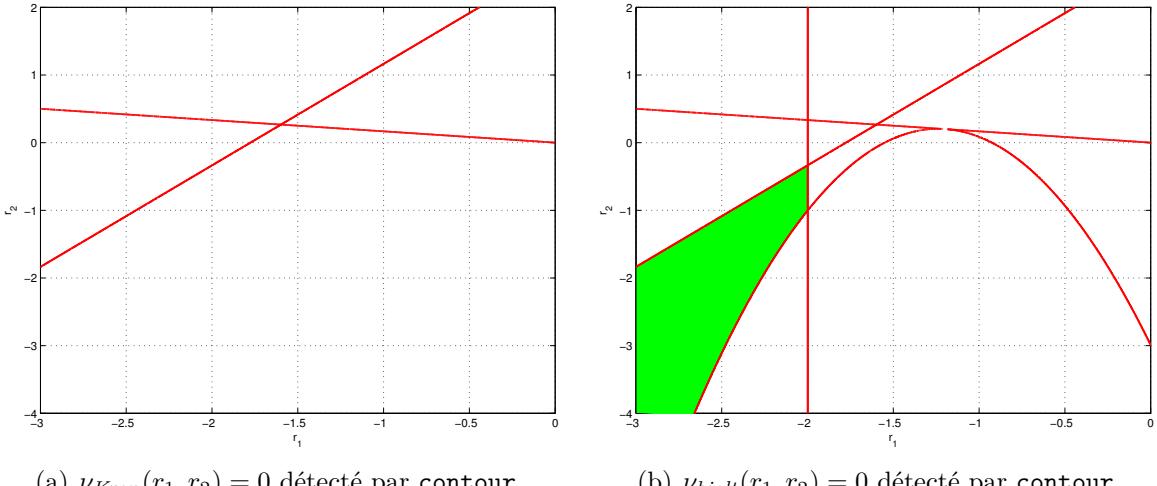
- Application gardienne basée sur le produit de Kronecker

$$\nu_{Kron} = \frac{25}{256}(r_1 + 2)^2(9r_1 - 6r_2 + 16)(r_1 + 6r_2)^2(25r_1^2 + 62r_1 + 12r_2 + 36)^2 \quad (5.14)$$

- Application gardienne basée sur le produit bialterné

$$\nu_{Bialt} = -\frac{5}{4}(r_1 + 2)(9r_1 - 6r_2 + 16)(r_1 + 6r_2)(25r_1^2 + 62r_1 + 12r_2 + 36) \quad (5.15)$$

On retrouve les mêmes facteurs dans les deux expressions mais certains sont au carré dans l'expression basée sur le produit de Kronecker. L'inconvénient est donc que la fonction `contour` ne détectera pas *a priori* la ligne de niveau 0 et ne tracera pas les bonnes composantes. La figure 5.2 vient confirmer cela ; seul le tracé de  $\nu_{bialt}$  donne la bonne composante stable.



(a)  $\nu_{Kron}(r_1, r_2) = 0$  détecté par `contour`

(b)  $\nu_{bialt}(r_1, r_2) = 0$  détecté par `contour`

Figure 5.2 Comparaison des tracés des applications gardiennes avec `contour`

On privilégiera donc les applications gardiennes obtenues avec le produit bialterné pour utiliser la fonction `contour`. Ceci vaudra aussi lors de la validation par l'intégrale de dilatation.

### 5.2.2 Marge de stabilité

Nous débutons par l'étude de la robustesse en marge de stabilité  $\alpha < 0$  de la matrice  $A_{BF}(\Delta_x, \Delta_m)$  (Eq. 5.9) sur le domaine incertain  $(\Delta_x, \Delta_m) \in [-0.15, 0.15] \times [-1000, 1000]$ .

On applique ici la méthodologie décrite dans la section précédente sur l'application gardienne suivante :

$$\nu(A_{BF}(\Delta_x, \Delta_m)) = \det(A_{BF} - \alpha I) \det((A_{BF} - \alpha I) \odot I) \quad (5.16)$$

pour différentes valeurs de  $\alpha$ . On va chercher ainsi à tester si les pôles en boucle fermée ont une partie réelle inférieure à  $\alpha$ . Cette application gardienne est évaluée sur un domaine de variation plus grand ( $(\Delta_x, \Delta_m) \in [-0.2, 0.2] \times [-1500, 1500]$ ) afin de bien visualiser l'évolution des composantes avec  $\alpha$ . Après quelques essais, on choisit une grille avec un pas de 0.01 pour  $\Delta_x$  et un pas de 10 pour  $\Delta_m$  pour avoir un tracé suffisamment précis avec la fonction `contour`.

Les résultats obtenus pour différentes valeurs de  $\alpha$  sont représentés sur la figure 5.3. Un carré vert indique une composante stable alors qu'une croix rouge signifie une composante instable. La configuration nominale  $(\Delta_x, \Delta_m) = (0, 0)$  est toujours testée pour savoir si on satisfait nominalement la condition de marge de stabilité testée. Pour  $\alpha = 0$ , le système est robustement stable au sens de Hurwitz sur le domaine considéré. Il en va de même pour  $\alpha = -1.5$ , ce qui indique que pour le domaine de variation considéré, tous les pôles en boucle fermée ont une partie réelle inférieur à  $-1.5$ . Dès  $\alpha = -1.75$ , le coin supérieur gauche du domaine n'est plus stable ; pour ces configurations de centrage et de masse, un ou des pôles en boucle fermée ont une partie réelle supérieure à  $-1.75$ . Pour des valeurs inférieures jusqu'à  $\alpha = -3$ , on voit l'évolution de la composante instable.

On voit ainsi qu'avec un  $\alpha$  diminuant de  $-1.75$  à  $-2.5$ , la frontière d'annulation de l'application gardienne balaye le domaine vers le bas,

### 5.2.3 Cône d'amortissement

Nous procédons de façon similaire pour tester la stabilité du système en amortissement. On cherche à savoir si les pôles du système en boucle fermée sont confinés à l'intérieur du cône d'amortissement  $\xi$ . Pour la limite en amortissement, l'application gardienne exprimée en fonction du produit bialterné est donnée par :

$$\nu(A_{BF}(\Delta_x, \Delta_m)) = \det(A_{BF}) \det(A_{BF}^2 \odot I + (1 - 2\xi^2)A_{BF} \odot A_{BF}) \quad (5.17)$$

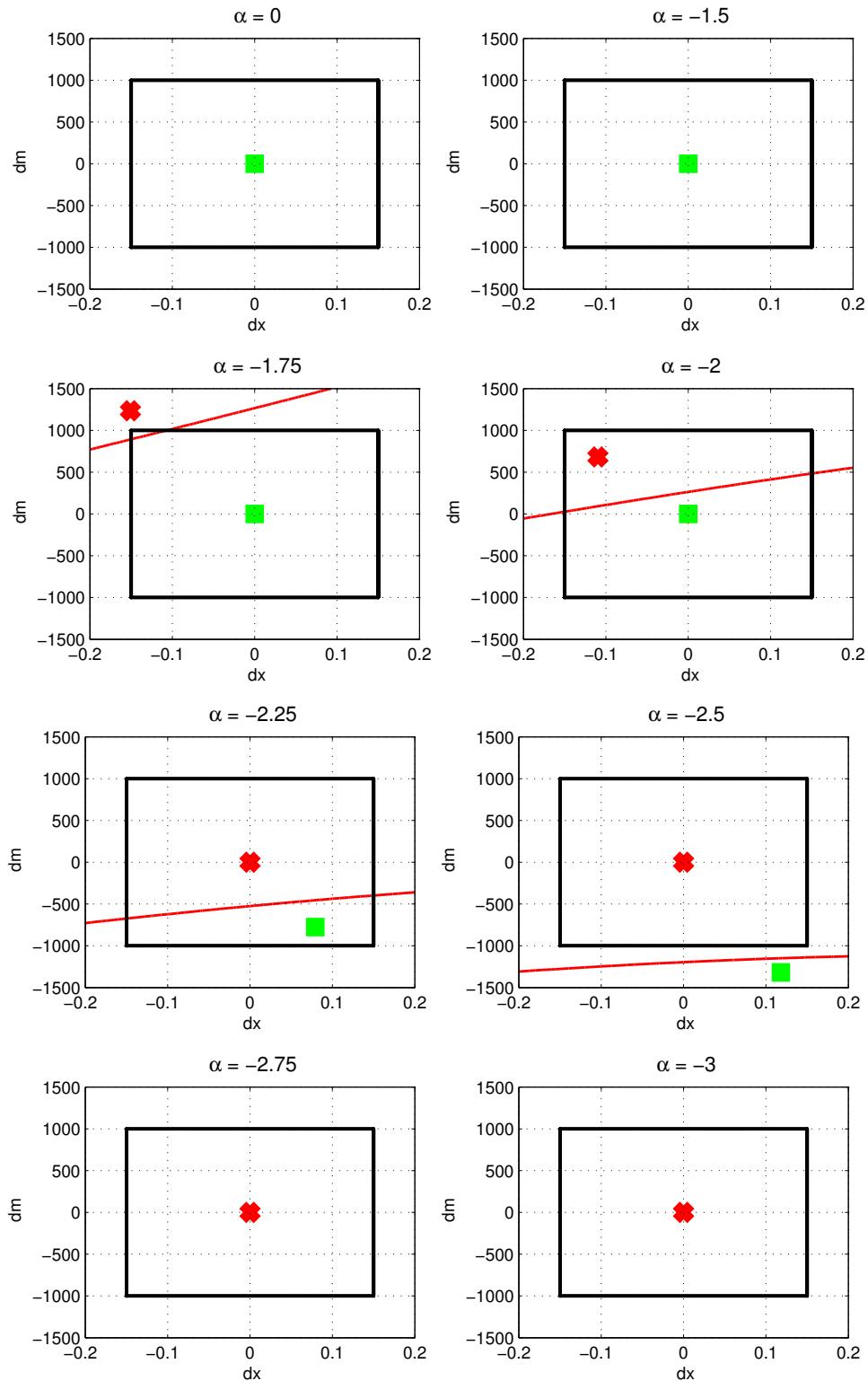


Figure 5.3 Analyse graphique de la marge de stabilité

Comme précédemment, nous traçons l'annulation de cette application gardienne pour différentes valeurs de  $\xi$  (Fig. 5.4). Au vu des quatre premiers graphiques, on peut conclure que sur le domaine paramétrique, tous les pôles en boucle fermée ont un amortissement supérieur à 0.575. Dès  $\xi = 0.6$ , le coin supérieur gauche du domaine n'est plus stable ; pour ces configurations de centrage et de masse, des pôles complexes conjugués ont un amortissement inférieur à 0.6. Pour des valeurs plus grandes jusqu'à  $\xi = 0.675$ , on voit le domaine de stabilité diminuer. De plus en plus de configurations ne satisfont plus la condition d'amortissement testée.

### 5.3 Analyse de la robustesse basée sur la positivité des applications gardiennes

L'analyse graphique précédente nous a permis d'estimer la stabilité robuste du système en boucle fermée pour des conditions en marge de stabilité et en amortissement. Nous allons à présent essayer de valider ces résultats par la méthode de l'intégrale de dilatation.

La première étape lors de l'analyse d'un système incertain est de s'assurer que les objectifs sont atteints pour le cas nominal. On vérifie ensuite si les performances demeurent satisfaites sur le domaine de variation des paramètres.

La méthode basée sur l'intégrale de dilatation ne donne pas une réponse définitive sur la stabilité robuste du système mais indique plutôt si le système est pratiquement robuste (*practically robust*) avec un risque associé que l'on juge tolérable. En effet, on cherche à démontrer que si le volume de violation des performances est inférieur à un seuil tolérable (par exemple  $\varepsilon = 0.001$ ), alors on peut juger que le pourcentage de violation représente un risque négligeable de perte des performances.

#### 5.3.1 Remarques préliminaires

##### Positivité de l'application gardienne

Comme mentionné dans la Section 5.2.1, les applications gardiennes construites à partir du produit de Kronecker font apparaître un facteur au carré dû à la répétition “inutile” de certaines valeurs propres. L'évaluation de la robustesse en positivité risque d'en être affecté puisque sur ce facteur, il n'y aura pas de changement de signe possible même en présence d'une perte de stabilité. On utilisera donc les applications gardiennes dérivées à partir du produit bialterné.

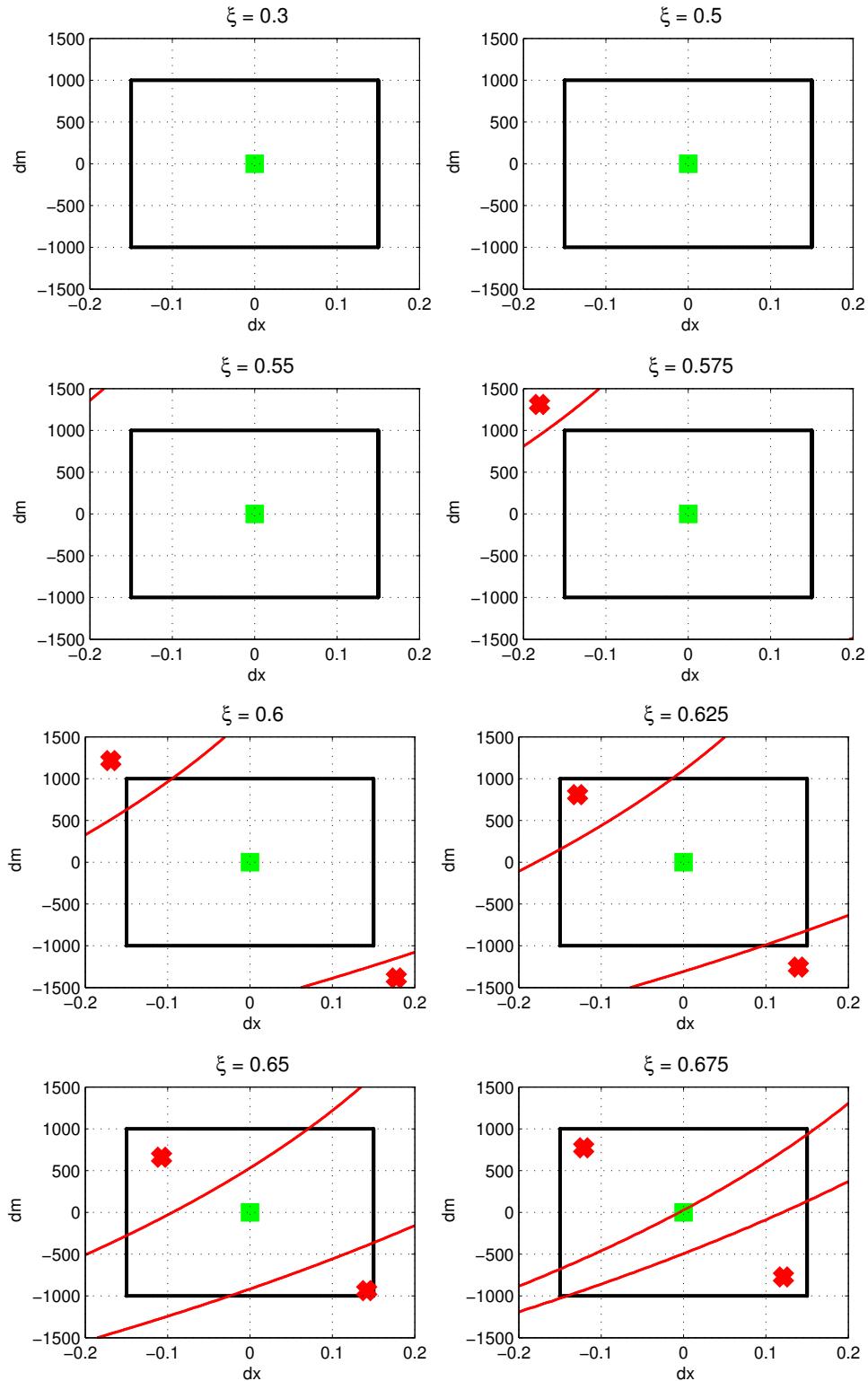


Figure 5.4 Analyse graphique de la limite en amortissement

## Jugement de la positivité de l'application gardienne

Les applications gardiennes pour les domaines classiques, obtenues avec le produit bialternée, sont en général composées de deux éléments, l'un détectant la violation du domaine par les valeurs propres réelles, l'autre détectant la violation par les pôles complexes conjugués. Nous proposons donc d'étudier le signe de chaque facteur séparément afin de diminuer le degré de précision nécessaire à la formule de Smolyak pour calculer la valeur exacte.

Afin de statuer sur la robustesse pratique avec l'intégrale de dilatation, on choisit un volume de violation inférieur à  $\varepsilon = 0.001$ , avec un conditionneur inférieur à  $\theta_{max} = 0.95$ . On débutera les calculs avec  $k = 2$  et des valeurs supérieures si nécessaires. On donnera pour chaque  $k$  :

- le minimum  $\varepsilon_k$ ,
- le conditionneur  $\theta_k$ ,
- le nombre de points de la grille de Smolyak,  $N_{l,d}$ ,
- le temps  $t_1$  nécessaire pour évaluer l'application gardienne sur la grille de Smolyak,
- le temps  $t_2$  pour calculer l'intégrale de dilatation.

### 5.3.2 Marge de stabilité

On rappelle l'application gardienne d'intérêt :

$$\nu(A_{BF}(\Delta_x, \Delta_m)) = \det(A_{BF} - \alpha I) \det((A_{BF} - \alpha I) \odot I) \quad (5.18)$$

Pour les différentes valeurs de  $\alpha$  qui vont être testées, on vérifie d'abord que le cas nominal  $(\Delta_x, \Delta_m) = (0, 0)$  satisfait la condition de stabilité. On étudie ensuite séparément la positivité des termes :

$$F_1 = \det(A_{BF} - \alpha I) / \det(A_{BF}(0, 0) - \alpha I) \quad (5.19)$$

$$F_2 = \det((A_{BF} - \alpha I) \odot I) / \det((A_{BF}(0, 0) - \alpha I) \odot I) \quad (5.20)$$

où la multiplication (ou division) par la valeur nominale de l'application gardienne permet d'assurer le critère de positivité.<sup>2</sup>

Pour notre application numérique, les degrés totaux des polynômes  $F_1$  et  $F_2$  sont respectivement 6 et 22. On utilise alors des formules de Smolyak de dimension 2 et de degré de précision respectivement  $l_1 = 3k$  et  $l_2 = 11k$  pour calculer la valeur exacte de l'intégrale de dilatation d'ordre  $k$ .

---

2. D'un point de vue numérique, il est préférable de diviser par la valeur nominale.

### Stabilité Hurwitz $\alpha = 0$

On s'intéresse dans un premier temps à la stabilité Hurwitz de  $A_{BF}(\Delta_x, \Delta_m)$ . Pour le polynôme  $F_1$ , les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 5.1 :

Tableau 5.1 Analyse de la robustesse de  $F_1$  pour  $\alpha = 0$

$k$	$\epsilon_k$	$\theta_k$	$N_{l,d}$	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)
2	0.00457	0.0676	241	0.002	0.0215
4	$3.7 \cdot 10^{-5}$	0.078	1913	0.014	0.009
6	$3.5 \cdot 10^{-7}$	0.084	6457	0.047	0.02
8	$3.7 \cdot 10^{-9}$	0.088	15569	0.122	0.0207
10	$4.0 \cdot 10^{-11}$	0.091	30889	0.245	0.046

À partir de ces résultats, on juge que le premier terme de l'application gardienne est robustement positif sur le domaine de variation des paramètres incertains. Dès  $k = 4$ , on garantit déjà que  $\varepsilon_4 \leq \varepsilon$ ; les calculs supplémentaires ne servent qu'à conforter le lecteur dans la convergence de  $\varepsilon_k$  vers 0. La robustesse du terme  $F_1$  reflète le fait qu'aucune valeur propre réelle ne passe par l'origine.

Pour le polynôme  $F_2$ , les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 5.2 :

Tableau 5.2 Analyse de la robustesse de  $F_2$  pour  $\alpha = 0$

$k$	$\epsilon_k$	$\theta_k$	$N_{l,d}$	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)
2	0.009	0.0949	11769	1.483	0.0183
4	0.000183	0.116	98609	11.93	0.04174
6	$4.99 \cdot 10^{-6}$	0.1307	341009	40.5	0.221
8	$1.57 \cdot 10^{-7}$	0.141	817569	97.73	0.713
10	$5.4 \cdot 10^{-9}$	0.149	1616849	263.68	2.4

À partir de ces résultats on juge que le terme  $F_2$  de l'application gardienne est robustement positif sur le domaine de variation des paramètres incertains. Dès  $k = 4$ , on garantit déjà que  $\varepsilon_4 \leq \varepsilon$ , les calculs supplémentaires ne servent qu'à rassurer le lecteur sur la convergence de  $\varepsilon_k$  vers 0. La robustesse du terme  $F_2$  reflète le fait qu'aucune valeur propre complexe ne traverse l'axe des imaginaires.

On peut donc conclure à la stabilité Hurwitz robuste pratique de  $A_{BF}$  pour le domaine paramétrique considéré. Ceci est en accord avec le résultat graphique obtenu précédemment.

### Marge de stabilité $\alpha = -1.5$

On s'intéresse à analyser la marge de stabilité pour  $\alpha = -1.5$ . Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 5.3.

Tableau 5.3 Analyse de la robustesse de  $F_1$  pour  $\alpha = -1.5$

$k$	$\varepsilon_k$	$\theta_k$	$N_{l,d}$	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)
2	0.00278	0.0527	241	0.0014	0.0137
4	$1.8 \cdot 10^{-5}$	0.065	1913	0.01107	0.00657

À partir de ces résultats, on juge que le premier terme de l'application gardienne est pratiquement robuste sur le domaine de variation des paramètres incertains. En effet, on garantit que  $\varepsilon_4 \leq \varepsilon$ . La robustesse pratique du terme  $F_1$  reflète le fait qu'aucune valeur propre réelle ne traverse le point  $-1.5$ .

Pour le polynôme  $F_2$ , les résultats sont donnés dans le tableau 5.4.

Tableau 5.4 Analyse de la robustesse de  $F_2$  pour  $\alpha = -1.5$

$k$	$\varepsilon_k$	$\theta_k$	$N_{l,d}$	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)
2	0.0842	0.2903	11769	1.60	0.0194
4	0.0154	0.3526	98609	12.77	0.041
6	0.0037	0.3939	341009	65.05	0.32
8	0.0010	0.424	817569	163.51	0.96
10	0.00032	0.447	1616849	269.95	2.37

À partir de ces résultats on juge que le terme  $F_2$  de l'application gardienne est robustement positif sur le domaine de variation des paramètres incertains. En effet, on garantit que  $\varepsilon_8 \leq \varepsilon$ . La robustesse du terme  $F_2$  reflète le fait qu'aucune valeur propre complexe ne traverse la droite verticale d'abscisse  $\alpha = -1.5$ .

On peut donc conclure à la robustesse pratique du système quant à la marge de stabilité  $\alpha = -1.5$ . Cela est conforme à notre analyse graphique.

### Marge de stabilité $\alpha = -2$

On s'intéresse enfin à analyser la marge de stabilité pour  $\alpha = -2$ . Les résultats obtenus pour le polynôme  $F_1$  sont donnés dans le tableau 5.5 :

Tableau 5.5 Analyse de la robustesse de  $F_1$  pour  $\alpha = -2$ 

$k$	$\varepsilon_k$	$\theta_k$	$N_{l,d}$	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)
2	0.0027	0.052	241	0.00141	0.01384
4	$1.3 \cdot 10^{-5}$	0.060	1913	0.011	0.00645

À partir de ces résultats on juge que le premier terme de l'application gardienne est robustement positif sur le domaine de variation des paramètres incertains. En effet, on garantit que  $\varepsilon_4 \leq \varepsilon$ . La robustesse du terme  $F_1$  reflète le fait qu'aucune valeur propre réelle ne traverse le point  $-2$ .

Les résultats obtenus pour le polynôme  $F_2$  sont donnés dans le tableau 5.6.

Tableau 5.6 Analyse de la robustesse de  $F_2$  pour  $\alpha = -2$ 

$k$	$\varepsilon_k$	$\theta_k$	$N_{l,d}$	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)
2	0.813	0.9015	11769	2.68	0.028
4	0.85	0.9619	98609	20.19	0.067
6	0.867	0.9766	341009	70.8	0.352
8	0.873	0.9831	817569	161.642	0.78
10	0.8757	0.9868	1616849	262.66	2.00
12	0.877	0.989	2821937	758.5	6.57

À partir de ces résultats on juge que le terme  $F_2$  de l'application gardienne n'est pas robustement positif sur le domaine de variation des paramètres incertains. En effet, avec  $k$  croissant le terme  $\varepsilon_k$  ne semble pas converger vers 0 et  $\theta_{k \geq 4} \geq \theta_{max}$ . La non robustesse pratique du terme  $F_2$  indique que sur une certaine partie du domaine, la fonction est négative et donc que certains pôles complexes ont une partie réelle supérieur à  $-2$ .

On peut finalement conclure à la non robustesse pratique de la famille pour la marge de stabilité  $\alpha = -2$ .

---

1.  $t_1$  est le temps nécessaire pour évaluer l'application gardienne sur la grille de Smolyak.  
 2.  $t_2$  est le temps nécessaire pour calculer l'intégrale de dilatation.

### 5.3.3 Cône d'amortissement

On rappelle l'application gardienne d'intérêt :

$$\nu(A_{BF}(\Delta_x, \Delta_m)) = \det(A_{BF}) \det(A_{BF}^2 \odot I + (1 - 2\xi^2)A_{BF} \odot A_{BF}) \quad (5.21)$$

Pour les différentes valeurs de  $\xi$  qui vont être testées, on vérifie d'abord que le cas nominal  $(\Delta_x, \Delta_m) = (0, 0)$  satisfait la condition de stabilité. On étudie ensuite séparément la positivité des termes :

$$G_1 = \det(A_{BF}) / \det(A_{BF}(0, 0)) \quad (5.22)$$

$$G_2 = \det(A_{BF}^2 \odot I + (1 - 2\xi^2)A_{BF} \odot A_{BF}) / \dots \quad (5.23)$$

$$\dots \det(A_{BF}(0, 0)^2 \odot I + (1 - 2\xi^2)A_{BF}(0, 0) \odot A_{BF}(0, 0))$$

où la multiplication (ou division) par la valeur nominale de l'application gardienne permet d'assurer le critère de positivité.

L'étude de la positivité du polynôme  $G_1$  n'est pas nécessaire puisqu'elle revient à l'étude du polynôme  $F_1$  avec  $\alpha = 0$ . On sait donc que la fonction  $G_1$  est pratiquement robuste sur le domaine incertain. Le degré total du polynômes  $G_2$  est 44. On utilise alors des formules de Smolyak de dimension 2 et de degré de précision respectivement  $l = 22k$  pour calculer la valeur exacte de l'intégrale de dilatation d'ordre  $k$ .

#### Cône d'amortissement $\xi = 0.3$

On s'intéresse tout d'abord au cône d'amortissement  $\xi = 0.3$ . Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 5.7 et permettent de conclure quant à la robustesse pratique de la famille. En effet, on a  $\varepsilon_6 \leq \varepsilon$ . Les pôles conservent un amortissement supérieur à 0.3 pour l'ensemble du domaine incertain.

Tableau 5.7 Analyse de la robustesse de  $G_2$  pour  $\xi = 0.3$

$k$	$\varepsilon_k$	$\theta_k$	$N_{l,d}$	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)
2	0.03686	0.19199	98609	21.1	0.023
4	0.00302	0.2343	817569	183.15	0.327
6	0.00032	0.2622	2821937	1020.04	2.385

### Cône d'amortissement $\xi = 0.5$

Pour un cône d'amortissement  $\xi = 0.5$ , on peut aussi conclure à la robustesse pratique de la famille. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 5.8 et assure  $\varepsilon_6 \leq \epsilon$ . Ceci reste consistant avec l'analyse graphique.

Tableau 5.8 Analyse de la robustesse de  $G_2$  pour  $\xi = 0.5$

$k$	$\varepsilon_k$	$\theta_k$	$N_{l,d}$	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)
2	0.0496	0.2228	98609	39.33	0.029
4	0.00599	0.2782	817569	229.62	0.3885
6	0.000975	0.3149	2821937	783.41	1.715

### Cône d'amortissement $\xi = 0.6$

On sait d'après l'étude graphique que le système n'est pas robustement stable pour un amortissement de 0.6 ; une petite partie du domaine ne satisfait pas la condition. Les résultats obtenus avec l'intégrale de dilatation sont donnés dans le tableau 5.9 et on constate que pour  $k = 12$ , la valeur de  $\varepsilon_{12}$  n'est pas en-dessous du seuil toléré.

Tableau 5.9 Analyse de la robustesse de  $G_2$  pour  $\xi = 0.6$

$k$	$\varepsilon_k$	$\theta_k$	$N_{l,d}$	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)
2	0.1274	0.3569	98609	20.77	0.016
4	0.0692	0.5130	817569	171.53	0.32
6	0.0579	0.6220	2821937	765.15	1.79
8	0.0579	0.7004	6752009	1802.96	5.86
10	0.0591	0.7536	13325209	2386.3	14.32
12	0.0599	0.7909	23142049	6502.36	30.22

On pourrait ainsi conclure à la non robustesse pratique par rapport à un amortissement de 0.6 selon notre seuil de  $\varepsilon = 0.001$ . Prendre des valeurs de  $k$  plus élevées nécessitent un nombre de points  $N_{l,d}$  de plus en plus grands et donc des temps de calcul plus importants pour évaluer exactement l'intégrale de dilatation. Cependant, si on prend une formule de précision moindre (donc avec moins de points), on peut éventuellement avoir une évaluation fiable de l'intégrale de dilatation. Ainsi, on refait les calculs précédents avec une formule de Smolyak de dimension 2 est de degré 40 fixe, peu importe la valeur de  $k$ . Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 5.10.

Tableau 5.10 Analyse de la robustesse de  $G_2$  pour  $\xi = 0.6$  - Degré de précision moindre

$k$	$\varepsilon_k$	$\theta_k$	$N_{l,d}$	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)
2	0.1274	0.3569	73321	18.00	0.02
4	0.0692	0.5130	73321	17.85	0.04
6	0.0579	0.6221	73321	17.96	0.05
8	0.0579	0.7004	73321	17.76	0.07
10	0.0591	0.7536	73321	18.66	0.09
12	0.0599	0.7909	73321	17.83	0.11
14	0.0605	0.8185	73321	17.95	0.13
16	0.0610	0.8396	73321	17.85	0.15
18	0.0614	0.8564	73321	17.68	0.17
20	0.0617	0.8700	73321	18.15	0.18

Ainsi, on remarque que l'utilisation d'une formule de Smolyak de moindre précision nous a permis de retrouver des résultats extrêmement proches des valeurs précédentes supposées exactes (erreur inférieure à  $10^{-4}$ ). De plus cela nous a permis d'évaluer rapidement l'application gardienne sur la grille de Smolyak jusqu'à  $k = 20$ , et au-delà possiblement.

En supposant que ces résultats sont suffisamment proches des valeurs exactes, il semble que  $\varepsilon_k$  ne tende pas vers 0 et nous devons conclure à la non robustesse du système. De plus, on peut voir que l'estimé du conditionneur continue d'augmenter avec par exemple, pour  $k = 44$ ,  $\theta_{44} = 0.9671$ . Ce résultat est conforme à l'analyse graphique (Fig. 5.4) où une petite partie du domaine était instable.

### Cône d'amortissement $\xi = 0.65$

Enfin pour  $\xi = 0.65$ , les résultats du tableau 5.11 montrent dès  $k = 2$  que le conditionneur est proche de 1. Au vu du résultat avec  $\xi = 0.6$ , il n'est pas nécessaire de poursuivre ; la famille est non robuste.

Tableau 5.11 Analyse de la robustesse de  $G_2$  pour  $\xi = 0.65$ 

$k$	$\varepsilon_k$	$\theta_k$	$N_{l,d}$	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)
2	0.9851	0.9925	98609	23.07	0.018

### Conclusion

Ce dernier chapitre a permis finalement de valider l'utilisation de l'intégrale de dilatation sur un problème de commandes de vol d'un avion. Il s'agissait, pour une condition de vol donnée,

d'analyser la robustesse du contrôleur face à des variations de centrage et de masse. Nous avons d'abord testé la robustesse en marge de stabilité et en amortissement par une méthode graphique basée sur l'annulation des applications gardiennes. Ensuite, nous avons analysé le système avec la nouvelle méthode basée sur la positivité des applications gardiennes. La seconde méthode a donné des résultats similaires à l'analyse graphique, suggérant ainsi la validité de notre démarche sur ce cas particulier. Il faudrait bien évidemment étendre cette analyse au reste de l'enveloppe de vol, et considérer éventuellement d'autres paramètres incertains.

## CHAPITRE 6 CONCLUSION

### 6.1 Synthèse des travaux

L'objectif principal de cette recherche était d'élaborer une nouvelle méthode d'analyse de la stabilité généralisée des systèmes incertains. On peut ainsi dire qu'on a réussi à l'atteindre, puisqu'on a présenté et éprouvé une méthode d'analyse complète basée sur le test de positivité avec l'intégrale de dilatation. Cette méthode se base sur le test de positivité de l'application gardienne autour d'un nominal stable. En effet, il a été démontré que s'il n'y a pas de multiplicité paire dans l'application gardienne, celle-ci change de signe dès qu'une des valeur propre sort du domaine de stabilité.

La base de la méthode consiste à traduire le problème de stabilité en un problème de positivité, grâce à une étude approfondie sur les applications gardiennes ainsi que les propriétés remarquables du produit de Kronecker et du produit Bialterné.

Pour résoudre le problème de jugement de positivité d'un polynôme multivariable, la méthode de l'intégrale de dilatation a été minutieusement étudiée. Des améliorations de cette méthode ont été proposées pour faire face à ses lacunes, surtout en termes de convergence des calculs et de réduction du nombre d'itérations nécessaires.

Pour calculer les volumes de violations des conditions, la méthode de Smolyak peu connue dans le milieu de l'ingénierie a été présentée en détail dans un chapitre entier qui lui a été consacré. Cette méthode présente des avantages considérables surtout en termes de précision de calcul et de réduction de nombre de points.

Le deuxième objectif était d'analyser le confinement des valeurs propres du modèle Short Period de la dynamique de vol longitudinal en boucle fermée, linéarisée autour d'une condition de vol de type croisière. Dans un premier temps, une présentation et une modélisation de la dynamique de vol longitudinal tenant compte explicitement de la masse et de l'incertitude sur le centrage a été présentée. En utilisant la méthode graphique basée sur les applications gardiennes, une première analyse a été faite sur le système, elle permet de valider le respect des performances assignées sur le domaine de variation des paramètres. Ensuite, l'analyse avec la nouvelle méthode a permis de retrouver les mêmes résultats qu'avec la méthode de référence. Ceci a d'une part validé le respect des performances assignées, mais surtout confirmé que bel et bien la nouvelle méthode proposée représente un outil performant d'analyse de la stabilité généralisée.

## 6.2 Perspectives

De manière à prolonger le travail effectué lors de ce projet, plusieurs perspectives mèriraient d'être explorées. La première des pistes serait d'exploiter encore plus la nouvelle méthode pour le cas de la commande de vol longitudinal, ainsi il serait intéressant d'analyser la dynamique en considérant d'autres incertitudes comme celles portant sur les coefficients aérodynamiques. Cette méthode pourrait également être utilisée pour valider à priori le séquencement de gains, permettant de rencontrer l'ensemble des contraintes liées aux valeurs propres sur l'ensemble de l'enveloppe de vol.

Bien que la nouvelle méthode élaborée soit destinée à l'analyse, elle peut être exploitée dans le cadre de la synthèse de lois de commande robustes. En effet, puisque le respect de la stabilité généralisée est traduit par un problème de positivité, il devient possible de trouver les gains d'un contrôleur linéaire optimal, en trouvant les gains minimisants l'intégrale de dilatation des conditions sur le domaine de variation des paramètres.

$$K_{opt} \equiv \min \int_Q (1 + \alpha \cdot f(K, q))^2 dq$$

De plus puisqu'on peut calculer l'expression symbolique exacte de cette intégrale, alors le problème se transforme en un problème de minimisation d'un polynôme multivariable.

$$K_{opt} \equiv \min F(K, \alpha)$$

Concernant le jugement de positivité avec la méthode de l'intégrale de dilatation, on s'est intéressé à améliorer la convergence des calculs pour les cas des familles stables. Or, au cours de l'étude faite sur la dynamique de vol il s'est avéré que dans certains cas non robustes, la convergence du conditionneur vers 1 est lente, ce qui nous oblige à faire plusieurs itérations avant de pouvoir juger la robustesse du système. Ainsi, il serait intéressant de trouver une solution qui permet d'accélérer la convergence du conditionneur vers 1 dans les cas des systèmes non robustement stables.

Pour conclure, ce projet fortement multidisciplinaire a permis de toucher à plusieurs domaines avant d'élaborer la nouvelle méthode d'analyse de la stabilité généralisée. Passant par une maîtrise des méthodes numériques de calcul intégral, d'une étude minutieuse de la méthode de l'intégrale de dilatation, ainsi qu'un travail laborieux concernant la stabilité généralisée. Ce projet s'est achevé par une présentation puis une analyse de la dynamique longitudinale du Short Period en boucle fermée d'un avion militaire.

## RÉFÉRENCES

“Greg von winckel”, <http://www.uni-graz.at/~vonwinck/>, accessed : 2014-08-15.

J. Ackermann, “Notes on robust control”, 2000.

J. Ackermann, A. Bartlett, D. Kaesbauer, et W. Sienel, “Robust control : systems with uncertain physical parameters”, *Communications*, 1993.

D. Alliche, “Commande par placement de structure propre appliquée à la dynamique latérale de l'avion”, Mémoire de maîtrise, École de technologie supérieure, 2003.

A. H. Babayigit, B. R. Barmish, et P. S. Shcherbakov, “On robust stability with nonlinear parameter dependence : Some benchmark problems illustrating the dilation integral method”, dans *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, vol. 3. IEEE, 2004, pp. 2671–2673.

B. Barmish et P. S. Shcherbakov, “A dilation method for robustness problems with nonlinear parameter dependence”, dans *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*, vol. 5. IEEE, 2003, pp. 3834–3839.

B. R. Barmish et P. S. Shcherbakov, “On avoiding vertexization of robustness problems : the approximate feasibility concept”, dans *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, vol. 2. IEEE, 2000, pp. 1031–1036.

—, “On avoiding vertexization of robustness problems : the approximate feasibility concept”, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 5, pp. 819–824, 2002.

B. R. Barmish, P. S. Shcherbakov, S. R. Ross, et F. Dabbene, “On positivity of polynomials : The dilation integral method”, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 5, pp. 965–978, 2009.

V. Barthelmann, E. Novak, et K. Ritter, “High dimensional polynomial interpolation on sparse grids”, *Advances in Computational Mathematics*, vol. 12, no. 4, pp. 273–288, 2000.

A. C. Bartlett, C. V. Hollot, et H. Lin, “Root locations of an entire polytope of polynomials : It suffices to check the edges”, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 1, no. 1, pp. 61–71, 1988.

- A. Borzì et G. von Winckel, “Multigrid methods and sparse-grid collocation techniques for parabolic optimal control problems with random coefficients”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 31, no. 3, pp. 2172–2192, 2009.
- C. Brezinski, *Analyse numérique discrète*. Université des sciences et techniques, Laboratoire de calcul, 1978.
- D. Calvetti, G. Golub, W. Gragg, et L. Reichel, “Computation of gauss-kronrod quadrature rules”, *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, vol. 69, no. 231, pp. 1035–1052, 2000.
- F. Chao, F. Dabbene, et C. Lagoa, “Repository for optimal polynomial kinship functions and smolyak quadrature formulae”, <http://www.personal.psu.edu/cml18/kinship/>, accessed : 2014-09-03.
- P. R. Conrad et Y. M. Marzouk, “Adaptive smolyak pseudospectral approximations”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 35, no. 6, pp. A2643–A2670, 2013.
- F. Dabbene, “Exact solution of uncertain convex optimization problems”, dans *Proc. Amer. Control Conf*, 2007, pp. 2654–2659.
- F. Dabbene et P. Shcherbakov, “Fast computation of dilation integrals for robustness analysis”, dans *American Control Conference, 2007. ACC'07*. IEEE, 2007, pp. 2660–2665.
- P. J. Davis et P. Rabinowitz, *Methods of numerical integration*. Courier Dover Publications, 2007.
- J. De Villiers, *Mathematics of approximation*. Springer, 2012, vol. 1.
- V. Dubanchet, “Controle d’attitude d’un lanceur en phase atmosphérique approche par applications gardiennes”, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2012.
- K. Frank et S. Heinrich, “Computing discrepancies of smolyak quadrature rules”, *Journal of Complexity*, vol. 12, no. 4, pp. 287–314, 1996.
- F. R. Gantmakher, *The theory of matrices*. American Mathematical Soc., 1959, vol. 131.
- T. Gerstner, “Sparse grid quadrature methods for computational finance”, *Habilitation, University of Bonn*, 2007.
- T. Gerstner et M. Griebel, “Numerical integration using sparse grids”, *Numerical algorithms*, vol. 18, no. 3-4, pp. 209–232, 1998.

- G. H. Golub et J. H. Welsch, “Calculation of gauss quadrature rules”, *Mathematics of Computation*, vol. 23, no. 106, pp. 221–230, 1969.
- J. Hahn et T. F. Edgar, “An improved method for nonlinear model reduction using balancing of empirical gramians”, *Computers & chemical engineering*, vol. 26, no. 10, pp. 1379–1397, 2002.
- F. Heiss et V. Winschel, “Quadrature on sparse grids”, <http://www.sparse-grids.de/>, accessed : 2014-08-15.
- D. Henrion, O. Bachelier, et M. Šebek, “D-stability of polynomial matrices”, *International Journal of Control*, vol. 74, no. 8, pp. 845–856, 2001. DOI : 10.1080/00207170110041006. En ligne : <http://dx.doi.org/10.1080/00207170110041006>
- D. Henrion, O. Bachelier, et M. Šebek, “D-stability of polynomial matrices”, *International Journal of Control*, vol. 74, no. 8, pp. 845–856, 2001.
- K. Hentabli, “Conception de lois de pilotage robustes et séquencement de gains par l’ap-proche des systèmes linéaires à paramètres variants”, Thèse de doctorat, École de technologie supérieure, 2006.
- A. Hinrichs, E. Novak, et M. Ullrich, “A tractability result for the clenshaw curtis smolyak algorithm”, *arXiv preprint arXiv :1309.0360*, 2013.
- D. Jackson, “A proof of weierstrass’s theorem”, *American Mathematical Monthly*, pp. 309–312, 1934.
- V. L. Kharitonov, “The problem of distribution of roots for the characteristic polynomial of a control system”, *Avtomatika i telemekhanika*, no. 5, pp. 42–47, 1981.
- K. A. Kopecky, “Function approximation”, *Eco*, vol. 613, p. 614, 2007.
- A. S. Kronrod, “Nodes and weights of quadrature formulas”, 1965.
- I. Krykova, “Evaluating of path-dependent securities with low discrepancy methods”, Thèse de doctorat, Worcester Polytechnic Institute, 2003.
- P. Lancaster et M. Tismenetsky, *The theory of matrices : with applications*. Academic press, 1985.
- D. P. Laurie, “Computation of gauss-type quadrature formulas”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 127, no. 1, pp. 201–217, 2001.

- C. Lemieux, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling*. Springer, 2009, vol. 20.
- H. Lhachemi, “Synthèse et validation d’un système de commandes de vol robuste et auto-séquencé”, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2013.
- E. Novak et K. Ritter, “High dimensional integration of smooth functions over cubes”, *Numerische Mathematik*, vol. 75, no. 1, pp. 79–97, 1996.
- T. c. Patterson, “The optimum addition of points to quadrature formulae”, *Mathematics of Computation*, vol. 22, no. 104, pp. 847–856, 1968.
- K. Petras, “Smolyak cubature of given polynomial degree with few nodes for increasing dimension”, *Numerische Mathematik*, vol. 93, no. 4, pp. 729–753, 2003.
- G. M. Phillips, *Interpolation and approximation by polynomials*. Springer, 2003, vol. 14.
- R. Piessens, D. Doncker-Kapenga, C. Überhuber, D. Kahaner *et al.*, “Quadpack, a subroutine package for automatic integration”, *status : published*, p. 301p, 1983.
- E. Rafajłowicz et R. Schwabe, “Halton and hammersley sequences in multivariate nonparametric regression”, *Statistics & Probability Letters*, vol. 76, no. 8, pp. 803–812, 2006.
- D. A. Saussie, “Controle du vol longitudinal d’un avion civil avec satisfaction de qualies de manoeuvrabilite”, Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2010.
- L. Saydy, A. Tits, et E. H. Abed, “Robust stability of linear systems relative to guarded domains”, dans *Decision and Control, 1988., Proceedings of the 27th IEEE Conference on*. IEEE, 1988, pp. 544–551.
- L. Saydy, A. L. Tits, et E. H. Abed, “Guardian maps and the generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials”, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 345–371, 1990.
- P. S. Shcherbakov et B. Barmish, “On the conditioning of robustness problems”, dans *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, vol. 2. IEEE, 2003, pp. 1932–1937.
- S. A. Smolyak, “Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions”, dans *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 4, no. 240-243, 1963, p. 123.
- C. Stephanos, “Sur une extension du calcul des substitutions linéaires”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pp. 73–128, 1900.

F. Veyssset, “Modélisation et identification de comportements de l'avion en vol turbulent par modèles à retards”, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, 2006.

J. Waldvogel, “Fast construction of the fejér and clenshaw–curtis quadrature rules”, *BIT Numerical Mathematics*, vol. 46, no. 1, pp. 195–202, 2006.

G. W. Wasilkowski et H. Wozniakowski, “Explicit cost bounds of algorithms for multivariate tensor product problems”, *Journal of Complexity*, vol. 11, no. 1, pp. 1–56, 1995.

J. Zhang, L. Yang, et G. Shen, “Modeling and attitude control of aircraft with center of gravity variations”, dans *Aerospace conference, 2009 IEEE*. IEEE, 2009, pp. 1–11.

## ANNEXE A DYNAMIQUE DE VOL LONGITUDINAL

### A.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la dynamique longitudinale de l'avion, dans un premier temps on définit les différents repères utilisés ainsi que les forces et moments intervenants. Ensuite en adoptant les hypothèses simplificatrices classiques (Veysset, 2006) on arrive aux équations dynamiques du vol. Le modèle complet obtenu tient compte explicitement de la masse et de l'incertitude sur le centrage, à travers l'introduction d'un offset entre la position de référence et le centre de gravité réel de l'avion (Zhang et al., 2009).

La dynamique longitudinale est ensuite découpée, puis linéarisée autour d'une condition de vol de type croisière. Dernièrement, on présente le modèle réduit de la boucle fermée, fourni par (Lhachemi, 2013).

### A.2 Repères

Avant de développer le modèle de l'avion, il est important de définir les repères utilisés pour la représentation des forces et des moments, ainsi que pour établir les équations de la dynamique de vol :

#### A.2.1 Repère ECI ( $Ox_Iy_Iz_I$ )

C'est un repère à partir duquel on peut localiser la position de l'avion, on y exprime les équations de la dynamique du fait qu'il est considéré comme inertiel, son origine est le centre de la Terre, l'axe  $z_I$  est orienté vers le nord suivant la direction de rotation de la Terre, et les axes  $x_I$  et  $y_I$  se situent sur le plan équatorial.

#### A.2.2 Repère avion ( $Ox_by_bz_b$ )

Repère dont l'origine est le point de référence  $O$ , l'axe  $x_b$  est orienté vers l'avant suivant la direction longitudinale, l'axe  $z_b$  pointe vers le ventre de l'avion, l'axe  $y_b$  est perpendiculaire au plan de symétrie  $x_b - z_b$  orienté vers la droite du pilote.

### A.2.3 Repère Géographique ( $Ox_e y_e z_e$ )

Repère lié à la position de l'avion, son origine est le point  $O$ , l'axe  $z_e$  pointe vers le centre de la Terre, l'axe  $x_e$  vers le nord magnétique et  $y_e$  pointe vers l'est de façon à compléter le repère orthonormal.

On suppose ce repère inertiel pour y dériver les équations de la dynamique de l'avion.

La matrice de passage A.1  $R_{R_b/R_e}$  du repère géographique au repère avion s'obtient en exprimant les axes de  $R_e$  dans  $R_b$  en fonction de l'angle d'assiette longitudinale  $\Theta$ , de gîte  $\Phi$  et de cap  $\Psi$ .

$$R_{R_b/R_e} = \begin{bmatrix} C_\Theta C_\Psi & C_\Theta S_\Psi & -S_\Theta \\ -C_\Phi S_\Psi + S_\Theta S_\Phi C_\Psi & C_\Phi C_\Psi + S_\Theta S_\Phi S_\Psi & S_\Phi C_\Theta \\ S_\Phi S_\Psi + S_\Theta C_\Phi C_\Psi & -S_\Phi C_\Psi + S_\Theta C_\Phi S_\Psi & C_\Phi C_\Theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

La matrice de passage de  $R_b$  vers  $R_e$  est :  $R_{R_e/R_b} = (R_{R_b/R_e})^{-1}$ .

### A.2.4 Repère aérodynamique ( $Ox_a y_a z_a$ )

Ce repère sert essentiellement à exploiter les données sur les coefficients aérodynamiques obtenus expérimentalement qui sont spécifiques pour chaque avion.

L'origine de ce repère est le point  $O$ , l'axe  $x_a$  est colinéaire à la vitesse relative de  $O$  par rapport à l'air. L'axe  $z_a$  est perpendiculaire à  $x_a$ , situé dans le plan de symétrie, il pointe en direction du ventre de l'avion. L'axe  $y_a$  orienté à droite du pilote complète ce repère.

La matrice de passage A.2 vers le repère avion est donnée en fonction des angles de dérapage  $\beta$  et d'attaque  $\alpha$ .

$$R_{R_b/R_a} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) & -\cos(\alpha) \sin(\beta) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ \cos(\beta) \sin(\alpha) & -\sin(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

### A.2.5 Repère stabilité ( $Ox_s y_s z_s$ )

C'est dans ce repère que sera développée la dynamique linéarisé du vol longitudinal de type croisière.

L'origine est le point  $O$ , l'axe  $x_s$  est colinéaire à la vitesse  $V_T$  et donc décalé d'un certain angle d'attaque  $\alpha_e$  par rapport à  $x_b$ , l'axe  $z_s$  pointe vers le ventre de l'avion, l'axe  $y_s$  perpendiculaire au plan de symétrie  $x_s - z_s$  orienté vers la droite du pilote.

La matrice de passage A.1 vers le repère avion est donnée en fonction de l'angle d'attaque  $\alpha_e$ .

$$R_{R_b/R_a} = C \begin{bmatrix} \cos(\alpha_e) & 0 & \sin(\alpha_e) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_e) & 0 & \cos(\alpha_e) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

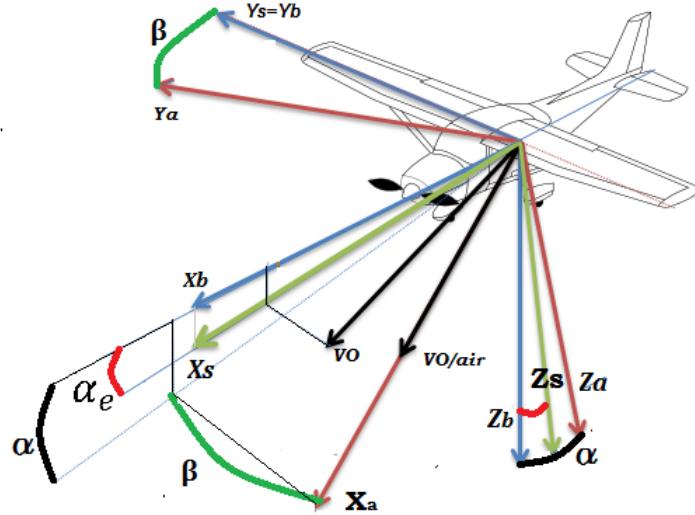


Figure A.1 Repère Aérodynamique, Avion et Stabilité

### A.3 Forces et Moments intervenants

Avant d'aborder la dynamique de vol, il est primordial de connaître quelles sont les forces qui permettent à l'avion de voler. Tout d'abord, la force de propulsion des réacteurs engendre une vitesse de déplacement horizontale, et grâce à l'écoulement de l'air autour des ailes, il apparaît une force aérodynamique proportionnelle au carré de la vitesse relative, celle-ci se décompose en deux composantes essentielles. D'une part la trainée qui s'oppose au déplacement horizontal de l'avion, et d'autre part la portance qui s'oppose au poids et permet ainsi à l'avion de voler.

### A.3.1 Force de poussée ou de propulsion

La force de propulsion des réacteurs s'exerce dans le cas du F-16 suivant l'axe longitudinal de l'avion, elle s'exprime ainsi dans  $R_b$  sous la forme A.4

$$\vec{F}_p = F_p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Le point d'application de la force de propulsion  $T$  est en général différent du centre de gravité  $G$ , le moment en résultant s'exprime alors en fonction du vecteur  $\overrightarrow{GT}$  :

$$\overrightarrow{M_F} = \overrightarrow{GT} \wedge \vec{F}$$

$$\overrightarrow{OG} = [\Delta_x \ 0 \ 0]^t$$

La position du point  $T$  est connue telle que  $\overrightarrow{OT} = [x_T \ 0 \ z_T]^t$ , ainsi  $\overrightarrow{GT} = [x_T - \Delta_x \ 0 \ z_T]^t$

Et on retrouve l'expression A.5 du moment de cette force :

$$\overrightarrow{M_F} = \begin{bmatrix} L_p \\ M_p \\ N_p \end{bmatrix} = F_p \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ z_T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

La poussée des moteurs est contrôlée au moyen de la position de la manette des gaz.

### A.3.2 Force de gravité ou de poids

La force de gravité s'exprime dans le repère terrestre par A.6 :

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

La force due au poids de l'avion s'applique sur le centre de gravité, du coup son moment est nul  $\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{0}$ .

### A.3.3 Forces aérodynamiques

Les forces aérodynamiques de portance  $L$  et de trainée  $D$  ainsi que la force latérale  $C$  sont exprimées dans le repère aérodynamique par :

$$\vec{F}_a = \begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix} = \frac{1}{2} SV^2 \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Et dans le repère avion on a

$$\vec{F}_a = \begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{OG} = [\Delta_x \ 0 \ 0]^t \quad (\text{A.8})$$

Les coefficients des forces aérodynamiques ont été calculés au point de référence  $O$ , utilisé pour la modélisation du système.

Lorsque le centre de gravité  $G$  présente une incertitude par rapport à la position de référence, le moment du aux forces aérodynamiques est donné par :

$$\overrightarrow{M_{F_a}(G)} = \overrightarrow{M_{F_a}(O)} + \overrightarrow{GO} \wedge \vec{F}_a \quad (\text{A.9})$$

Ainsi si

$$\overrightarrow{M_F(O)} = \begin{bmatrix} L_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix}$$

Alors

$$\overrightarrow{M_F(G)} = \begin{bmatrix} L_a \\ M_a + \Delta_x Z_a \\ N_a - \Delta_x Y_a \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Ces relations permettent donc de transférer les valeurs données dans les tables pour la position de référence  $O$  du centre de gravité, aux configurations pour lesquelles un offset est présent.

## A.4 Equations du mouvement

### A.4.1 Mouvement de translation de l'avion

Le théorème de la résultante dynamique  $\sum F = I \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$ , appliqué sur l'avion supposé rigide, permet d'obtenir les variations des vitesses : longitudinale  $U$ , latérale  $V$  et verticale (suivant l'axe  $Z_b$ )  $W$  en fonction des forces extérieures exprimées dans le repère avion (Zhang et al., 2009; Lhachemi, 2013).

$$\begin{cases} X_a + X_p + mg \sin(\Theta) = m(\dot{U} + WQ - RV - (Q^2 + R^2)\Delta_x) \\ Y_a + mg \cos(\Theta) \sin(\Phi) = m(\dot{V} - WP + RU + (PQ + \dot{R})\Delta_x) \\ Z_a + mg \cos(\Theta) \cos(\Phi) = m(\dot{W} + VP - QU + (PR - \dot{Q})\Delta_x) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

### A.4.2 Mouvement de rotation de l'avion

Le théorème du moment cinétique  $\sum M = m \cdot \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$ , appliqué sur l'avion supposé rigide permet d'obtenir la variation des vitesses de rotation en roulis  $P$ , en tangage  $Q$  et en lacet  $R$  autour des axes du repère avion, en fonction des moments issus des forces appliquées, exprimés dans le repère avion (Zhang et al., 2009; Lhachemi, 2013).

$$\begin{cases} L_a = I_x \dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) + (I_z - I_y)QR \\ M_a + M_p = I_y \dot{Q} - I_{xz}(P^2 - R^2) + (I_x - I_z)PR + m\Delta_x^2(PR - \dot{Q}) \\ N_a = I_z \dot{R} - I_{xz}(\dot{P} - RQ) + (I_y - I_x)QP - m\Delta_x^2(\dot{R} + PQ) \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

### A.4.3 Variation des angles d'orientation

Les variations des angles d'Euler, caractérisant l'orientation du repère avion relativement au repère géographique, sont donnés dans le repère avion par :

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = P + Q \sin(\Phi) \tan(\Theta) + R \cos(\Phi) \tan(\Theta) \\ \dot{\Theta} = Q \cos(\Phi) - R \sin(\Phi) \\ \dot{\Psi} = \frac{Q \sin(\Phi) + R \cos(\Phi)}{\cos(\Theta)} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

## A.5 Dynamique longitudinale

Afin de découpler la dynamique longitudinale et latérale on adopte les hypothèses classiques, à savoir que le mouvement longitudinal se fait en ligne droite suivant l'axe de symétrie de l'avion, et que les ailes ainsi que la gouverne de direction sont dans une position constante

qui n'induit aucune rotation en lacet ou en roulis, et pas de mouvement latéral

$$V = P = R = \Phi = 0$$

De plus comme le plan  $x_b - z_b$  est un plan de symétrie quant à la répartition de la masse de l'avion alors :

$$I_{xy} = I_{yz} = 0$$

On obtient alors les 4 équations décrivant la dynamique longitudinale dans le repère avion :

- Equation de propulsion suivant l'axe  $X_b$

$$\dot{U} = \frac{X_a + X_p}{m} + g \sin(\Theta) - WQ + Q^2 \Delta_x \quad (\text{A.14})$$

- Equation de sustentation suivant l'axe  $Z_b$

$$\dot{W} = \frac{Z_a + Z_p}{m} + g \cos(\Theta) + QU + \dot{Q} \Delta_x \quad (\text{A.15})$$

- Equation du momemt en tangage

$$\dot{Q} = \frac{M_a + M_p}{(I_y - m\Delta_x^2)} \quad (\text{A.16})$$

- Equation cinématique de la vitesse de tangage

$$\dot{\Theta} = Q \quad (\text{A.17})$$

Cette même dynamique est décrite en fonction de la vitesse totale  $V_T$ , et l'angle d'attaque  $\alpha$  cette fois A.18

$$\alpha = \arctan\left(\frac{W}{U}\right), \quad \alpha_x = \arctan\left(\frac{W_s}{U_s}\right), \quad V_T = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m\dot{V}_T = -D + \cos(\alpha)F_T + \frac{m\Delta_x \sin(\alpha)}{(I_y - m\Delta_x^2)}(M_a + M_T) - m \sin(\Theta - \alpha)g + m \cos(\alpha)\Delta_x Q^2 \\ mV_T \dot{\alpha} = -L - \sin(\alpha)F_T + \frac{m\Delta_x \cos(\alpha)}{(I_y - m\Delta_x^2)}(M_a + M_T) + m \cos(\Theta - \alpha)g - m \sin(\alpha)\Delta_x Q^2 + mV_T Q \\ \dot{Q} = \frac{M_a + M_p}{(I_y - m\Delta_x^2)} \\ \dot{\Theta} = Q \end{array} \right. \quad (\text{A.18})$$

## A.6 Linéarisation du modèle longitudinal

Le modèle linéaire pour le vol en croisière a été développé à partir des équations de la dynamique longitudinale représentées dans le repère stabilité A.18, en considérant les hypothèses relatives au vol en croisière, notamment que la vitesse et l'altitude demeurent constantes en cours de vol.

Le modèle linéarisé traduit les variations par rapport aux valeurs à l'équilibre de la vitesse  $V_T$ , de l'angle d'attaque  $\alpha_x$  et de l'angle d'assiette  $\Theta$  ainsi que de la vitesse en tangage  $q$  exprimés dans le repère stabilité.

Les entrées de commande sont l'angle de braquage  $\delta_e$  et la position de la manette des gaz  $\delta_t$

$$X = [u \ \alpha_x \ \theta \ q]^t, U = [\delta_e \ \delta_t]^t$$

Ainsi ce modèle est donné par :

$$E\dot{X} = AX + BU$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta_x \sin(\alpha_e) \\ 0 & U_e & 0 & -\Delta_x \cos(\alpha_e) \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{m\Delta_x^2}{I_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} X_u + X_{T_u} & X_\alpha & -g & X_q \\ Z_u + Z_{T_u} & Z_\alpha & 0 & U_e + Z_q \\ M_u + M_{T_u} & M_\alpha & 0 & M_q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_t} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_t} \\ M_{\delta_e} & M_{\delta_t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Pour plus de détails sur les dérivées de stabilités et les coefficients adimensionnés donnés dans les tables le lecteur peut se référer à (Lhachemi, 2013, p. 32).

### A.7 Approximation polynomiale des matrices du modèle *Short Period*

Pour la condition de vol (altitude  $h_e = 5000$  m, vitesse Mach = 0.9), le modèle d'état du Short Period est donné par :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} &= A(\Delta_x, \Delta_m) \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + B(\Delta_x, \Delta_m) \delta_e \\ \begin{bmatrix} n_z \\ q \end{bmatrix} &= C(\Delta_x, \Delta_m) \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + D(\Delta_x, \Delta_m) \delta_e\end{aligned}$$

où les matrices sont approximées par des polynômes quadratiques en  $\Delta_x \in [-0.15, 0.15]$ m et  $\Delta_m \in [-1000, 1000]$ kg :

$$\begin{cases} A(\Delta_x, \Delta_m) \approx A_{00} + A_{10}\Delta_x + A_{01}\Delta_m + A_{11}\Delta_x\Delta_m + A_{20}\Delta_x^2 + A_{02}\Delta_m^2 \\ B(\Delta_x, \Delta_m) \approx B_{00} + B_{10}\Delta_x + B_{01}\Delta_m + B_{11}\Delta_x\Delta_m + B_{20}\Delta_x^2 + B_{02}\Delta_m^2 \\ C(\Delta_x, \Delta_m) \approx C_{00} + C_{10}\Delta_x + C_{01}\Delta_m + C_{11}\Delta_x\Delta_m + C_{20}\Delta_x^2 + C_{02}\Delta_m^2 \\ D(\Delta_x, \Delta_m) \approx D_{00} + D_{10}\Delta_x + D_{01}\Delta_m + D_{11}\Delta_x\Delta_m + D_{20}\Delta_x^2 + D_{02}\Delta_m^2 \end{cases}$$

En notant

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ C_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix},$$

les valeurs numériques sont alors :

$$\begin{aligned}F_{00} &= \begin{bmatrix} -1.0170 & 0.9414 & | & -0.00952 \\ 1.1739 & -0.9445 & | & -1.2720792 \\ -24.045 & -0.9125 & | & 0.373 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \\ F_{10} &= \begin{bmatrix} 0.02394 & -0.004735 & | & -0.005637 \\ -28.172 & -1.64 & | & -0.2763 \\ 13.688 & 0.6552 & | & -0.001414 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \\ F_{01} &= \begin{bmatrix} 1.201 \cdot 10^{-4} & 6.057 \cdot 10^{-6} & | & 1.0318 \cdot 10^{-6} \\ -3.7252 \cdot 10^{-6} & -3.693 \cdot 10^{-6} & | & -9.7736 \cdot 10^{-7} \\ 2.7762 \cdot 10^{-3} & 1.4165 \cdot 10^{-4} & | & 2.4296 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$F_{11} = \begin{bmatrix} -4.4109 \cdot 10^{-7} & 2.7216 \cdot 10^{-8} & -8.3410 \cdot 10^{-9} \\ 2.803 \cdot 10^{-4} & -9.5814 \cdot 10^{-6} & -2.0562 \cdot 10^{-6} \\ -1.4088 \cdot 10^{-4} & 5.0961 \cdot 10^{-6} & 7.6601 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{20} = \begin{bmatrix} -0.125 & -0.0072 & -0.00123 \\ 0.7312 & -0.1323 & -0.1302 \\ -3.2277 & -0.1046 & 0.03232 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{02} = \begin{bmatrix} -1.3058 \cdot 10^{-8} & -6.4278 \cdot 10^{-10} & -1.1114 \cdot 10^{-10} \\ 1.476 \cdot 10^{-11} & -1.211 \cdot 10^{-10} & 2.3641 \cdot 10^{-11} \\ -3.0173 \cdot 10^{-7} & -1.4794 \cdot 10^{-8} & -2.579 \cdot 10^{-9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## ANNEXE B Code Matlab utilisé pour l'analyse de vol

### B.1 Analyse graphique de la stabilité

#### B.1.1 Marge de stabilité

Le code Matlab utilisé pour déterminer les ensembles stables et instables en marge de stabilité est donné ci-dessous :

1. Déclarer les matrices du modèle :

```
1 A00 = ; A01 = ; A10 = ; A11 = ; A02 = ; A20 = ;
```

2. Générer la grille de point sur le domaine de variation :

```
1 [dx,dm] = meshgrid(-0.2:0.001:0.2,-1500:10:1500);
```

3. Évaluer l'application gardienne sur la grille de points :

```
1 Z=[];
2 for y=-1500:10:1500
3     z=[];
4     for x=-0.2:0.002:0.2
5         A=A00+A10*x+A01*y+A11*x*y+A02*y*y+A20*x*x;
6         V=det(prod_bi(A-a*eye(6),eye(6)))*det(A-a*eye(6));
7         z=[z V];
8     end
9     Z=[Z;z];
10 end
```

4. Tracer les points d'annulation de l'application gardienne

```
1 v=[0,0];
2 contour(dx,dm,Z,v,'-k')
```

5. Choix des points sur la figure

```

1 [dx, dm] = getpts;
2 points=[dx, dm];

```

6. Jugement de la stabilité des points sélectionnés

### B.1.2 Limite en amortissement

Le code Matlab utilisé pour déterminer les ensembles stables et instables en amortissement est donné ci-dessous :

1. Déclarer les matrices du modèle :

```

1 A00 = ; A01 = ; A10 = ; A11 = ; A02 = ; A20 = ;

```

2. Générer la grille de point sur le domaine de variation :

```

1 [dx,dm] = meshgrid(-0.2:0.001:0.2,-1500:10:1500);

```

3. Évaluer l'application gardienne sur la grille de points :

```

1 Z=[];
2 for y=-1500:10:1500
3     z=[];
4     for x=-0.2:0.002:0.2
5         A=A00+A10*x+A01*y+A11*x*y+A02*y*y+A20*x*x;
6         V=det(prod_bi(A^2,I6)+(1-2*ksi^2)*prod_bi(A,A))*det(A);
7         z=[z V];
8     end
9     Z=[Z;z];
10 end

```

4. Tracer les points d'annulation de l'application gardienne

```

1 v=[0,0];
2 contour(dx,dm,Z,v,'-k')

```

5. Choix des points sur la figure

```

1 [dx, dm] = getpts;
2 points=[dx, dm];

```

6. Jugement de la stabilité des points sélectionnés

## B.2 Analyse de la stabilité avec l'intégrale de dilatation

### B.2.1 Marge de stabilité

Le code Matlab utilisé pour juger la robustesse en marge de stabilité avec l'intégrale de dilatation est donné ci-dessous :

1. Déclarer les données

```

1 A00 = ; A01 = ; A10 = ; A11 = ; A02 = ; A20 = ;
2 k= ; a = ; a1= -0.15;b1=0.15;a2=-1000;b2=1000;

```

2. Charger la formule de Smolyak correspondante

```

1 % l=3*k pour F1 et l=11*k pour F2
2 X=['Smolyak_',mat2str(2), '_',mat2str(l)]
3 load('X')

```

3. Adapter les abscisses et des poids

```

1 dx = (b1-a1)*x(:,1)+(a1);
2 dm = (b2-a2)*x(:,2)+a2;
3 w=(b1-a1)*(b2-a2)*w;

```

4. Évaluer l'application gardienne sur la grille de points :

```

1 % On calcule le signe de l'application pour le nominal
2 v1=det(prod_bi(A00-a*eye(6),eye(6)));
3 V0=sign(det(v1));
4 n=length(w);
5 % Initialiser le vecteur d
6 d=zeros(n,1);
7 % Calculer l'application sur la grille
8 tic

```

```

9  for i=1:n
10 A=A00+A10*dx(i)+A01*dm(i)+A11*dx(i)*dm(i)+A02*dm(i)^2+A20*dx(i)^2;
11 V1=det(prod_bi(A-a*eye(6),eye(6)));
12 d(i,1)=V1;
13 end
14 % t1 correspond au temps d'evaluation de l'application gardienne
15 t1=toc;

```

## 5. Calcul de l'intégrale de dilatation

```

1 % Declarer la loi binomiale
2 binomial = @(n,k) exp(gammaln(n+1)-gammaln(k+1)-gammaln(n-k+1));
3 % Calculer la derivee ek'(alpha)
4 tic
5 pdot=[];
6 for i=1:k
7     pdot=[binomial(k,i)*(-1)^i*i*w'* (d.^i) pdot ];
8 end
9 % Calculer les racines de la derivee
10 A=roots(pdot);
11 % alpha* est l'unique racine reelle positive
12 a=[];
13 for i=1:k-1
14     test= isreal(A(i));
15     if test==1
16         if A(i) < 0
17             A(i)=0;
18         end
19         a=[a A(i)];
20     end
21 end
22 % Calculer l'integrale de dilatation
23 e1=inf;
24 for s=a ;
25     e=w'* (1-s*d).^k;
26     if e<e1
27         e1=e;
28         ma=s;
29     end
30 end
31 % Retrouver les valeurs de \epsilon_k et \theta_k
32 \epsilon_k =e1/(b1-a1)/(b2-a2);
33 \theta_k=e^(1/k);

```

```

34 % t2 est le temps de calcul de l'integrale de dilatation
35 t2=toc;

```

## Limite en amortissement

Le code Matlab utilisé pour juger la robustesse en amortissement avec l'intégrale de dilatation est donné ci-dessous :

1. Déclarer les données

```

1 A00 = ; A01 = ; A10 = ; A11 = ; A02 = ; A20 = ;
2 k = ; ksi = ; a1 = -0.15;b1 = 0.15;a2 = -1000;b2 = 1000;

```

2. Charger la formule de Smolyak correspondante

```

1 l=22*k;
2 X=[ 'Smolyak_',mat2str(2), '_',mat2str(l) ]
3 load('X')

```

3. Adapter les abscisses et des poids

```

1 dx=(b1-a1)*x(:,1)+(a1);
2 dm=(b2-a2)*x(:,2)+a2;
3 w=(b1-a1)*(b2-a2)*w;

```

4. Évaluer l'application gardienne sur la grille de points :

```

1 % On calcule le signe de l'application pour le nominal
2 v1=prod_bi(A00^2,I6)+(1-2*ksi^2)*prod_bi(A00,AA0);
3 V0=sign(det(v1));
4 n=length(w);
5 % Initialiser le vecteur d
6 d=zeros(n,1);
7 % Calculer l'application sur la grille
8 tic
9 for i=1:n
10 A=A00+A10*dx(1)+A01*dm(i)+A11*dx(i)*dm(i)+A02*dm(i)^2+A20*dx(i)^2;
11 v1=prod_bi(A^2,I6)+(1-2*ksi^2)*prod_bi(A,A);
12 V1=V0*det(v1);

```

```

13 d(i,1)=v1;
14 end
15 % t1 correspond au temps d'evaluation de l'application gardienne
16 t1=toc;

```

## 5. Calcul de l'intégrale de dilatation

```

1 % Declarer la loi binomiale
2 binomial = @(n,k) exp(gammaln(n+1)-gammaln(k+1)-gammaln(n-k+1));
3 % Calculer la derivee ek'(alpha)
4 tic
5 pdot=[];
6 for i=1:k
7     pdot=[binomial(k,i)*(-1)^i*i*w'* (d.^i) pdot ];
8 end
9 % Calculer les racines de la derivee
10 A=roots(pdot);
11 % alpha* est l'unique racine reelle positive
12 a=[];
13 for i=1:k-1
14     test= isreal(A(i));
15     if test==1
16         if A(i) < 0
17             A(i)=0;
18         end
19         a=[a A(i)];
20     end
21 end
22 % Calculer l'integrale de dilatation
23 e1=inf;
24 for s=a ;
25     e=w'* (1-s*d).^k;
26     if e<e1
27         e1=e;
28         ma=s;
29     end
30 end
31 % Retrouver les valeurs de \epsilon_k et \theta_k
32 \epsilon_k =e1/(b1-a1)/(b2-a2);
33 \theta_k=e^(1/k);
34 % t2 est le temps de calcul de l'integrale de dilatation
35 t2=toc;

```