

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

INVARIANCE POSITIVE ET OBSERVATEUR INTERVALLES APPLIQUÉS AUX  
SYSTÈMES LINÉAIRES À RETARDS SOUS CONTRAINTES

HASSAN BENSALAH  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
AOÛT 2015

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

INVARIANCE POSITIVE ET OBSERVATEUR INTERVALLES APPLIQUÉS AUX  
SYSTÈMES LINÉAIRES À RETARDS SOUS CONTRAINTES

présentée par : BENSALAH Hassan

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. ACHICHE Sofiane, Ph. D., président

M. BARON Luc, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. ZHU Guchuan, Doctorat, membre

M. TOORANI Mohammad, Ph. D., membre externe

**DÉDICACE**

*À mon père, à ma mère  
À ma femme,  
À mes enfants Doha, Adam et Malak,  
À toute la famille et à tous mes amis,  
Merci pour votre soutien . . .*

## REMERCIEMENTS

Je tiens, tout d'abord, à remercier mon directeur de recherche, monsieur Luc Baron, professeur à l'École Polytechnique de Montréal, pour sa disponibilité, son soutien, ses conseils et ses critiques qui ont été indispensables pour la réussite de ce travail. Je lui suis reconnaissant.

Je remercie vivement messieurs Sofiane Achiche, Guchuan Zhu, Professeurs à l'École Polytechnique de Montréal et Monsieur Mohammad Toorani, professeur au Collège Conestoga Cambridge Ontario, pour avoir bien voulu examiner ce travail et accepter de participer au jury de soutenance.

Je ne terminerai pas sans remercier tous ceux qui ont contribué directement ou indirectement à cet ouvrage, je tiens ici à remercier tous ceux qui m'ont aidé par leur enseignement, leurs critiques, leurs encouragements ou simplement par leur exemple.

Finalement, je remercie ma femme Hind qui m'a soutenu tout le temps qu'a duré cette thèse.

## RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur l'étude du problème de la commande avec contraintes des systèmes linéaires continus à retards. Deux approches dans la littérature se sont données à développer des méthodes adéquates pour examiner la stabilité et contribuer à des procédures et outils de stabilisation. La première, considère l'effet de la saturation, tandis que la deuxième approche, basée sur la théorie d'invariance positive, repose principalement sur la conception d'une loi de contrôle non saturante ayant un comportement linéaire dans le domaine des contraintes. Des résultats concernant l'application du concept d'invariance positive à la stabilisation des systèmes à retards soumis à des contraintes ont été développés, mais restent restrictifs, de fait qu'ils sont indépendants du retard, un paramètre essentiel du système.

On développe alors, dans la première partie de cette thèse des conditions nécessaires et suffisantes dépendantes du retard afin de garantir l'invariance positive de domaine des contraintes par rapport aux trajectoires de systèmes autonomes à retard. Ce résultat repose sur la transformation de premier ordre, basée sur la formule de Newton-Leibniz, de système original à retard discret, en un système à retard distribué. Une fonction de Lyapunov-Razumikhin associée au système à retard distribué garantissant la stabilité asymptotique dépendante de retard de système original est proposée.

L'objectif principal visé dans la deuxième partie de cette thèse est d'appliquer le résultat du concept d'invariance positive dépendante du retard au problème de la commande sous contraintes, dissymétriques ainsi que symétriques, des systèmes à retards. Ainsi des conditions permettant la synthèse d'un régulateur par retour d'état stabilisant le système en boucle fermée en présence des contraintes, sont données. Ces conditions permettent de formuler un algorithme basé sur des schémas de Programmation Non Linéaire (NLP), ayant pour objectif la détermination du régulateur stabilisant le système en boucle fermée avec une borne maximale du retard. En effet la loi de retour d'état calculée assure, d'une part, la stabilité asymptotique de système sans retard, et d'autre part, la maintenir pour une valeur d'une borne maximale de retard, tout en respectant les contraintes : c'est la loi de commande sous contrainte robuste vis à vis le retard. Les résultats obtenus sont intéressants et plus généraux que ceux développés dans la littérature.

La troisième partie de cette thèse montre, pour la première fois à notre connaissance, que les observateurs intervalles, en appliquant le concept d'invariance positive, peuvent apporter des réponses intéressantes au problème de la commande sous contraintes des systèmes linéaires à retards, variable dans le temps. L'originalité de notre démarche consiste à proposer une tech-

nique de synthèse des deux gains d'observateurs intervalles majorant et minorant en résolvant un système d'équations matricielle de Sylvester. Des conditions assurent la positivité et la stabilité d'erreurs d'observation intervalle sont données. La loi de commande sous contraintes est alors construite à partir des états des bornes inférieur et supérieur de l'observateur intervalle. L'application de concept d'invariance positive sera porté donc sur le système augmenté formé par la dynamique de système original et celle des erreurs minorant et majorant d'observations intervalle. Par un choix judicieux d'une fonction de Lyapunov-Krasovskii, on propose des conditions garantissant la stabilité asymptotique de système en boucle fermée tout en respectant les contraintes imposées sur la commande. En effet ces conditions assurent, d'une part, l'existence d'un plus grand domaine(ellipsoïde), inclus dans l'ensemble des commandes admissibles, positivement invariant par rapport aux trajectoires de système augmenté et, garantissent, d'autre part, la stabilité asymptotique en boucle fermée de système augmenté pour une borne maximale de retard. La synthèse de la loi de commande est donnée finalement par un algorithme de calculs, basé sur la technique de l'inégalité matricielle linéaire (LMI). Les résultats obtenus montrent une belle performance de design de la loi de commande sous contraintes des systèmes linéaires à retards, variable dans le temps.

## ABSTRACT

In this thesis, the stabilization problem of linear continuous-time delay system with constrained control is studied. There are two main approaches in the literature dealing with the problem of performance and stability of dynamical constrained control systems. The first one considers the effect of saturation while guaranteeing asymptotic stability. The second one, so-called positive invariance approach, is based on the design of the control law which works inside a region of linear behavior where saturations do not occur. Most of the works related to positive invariance concept have been developed for time delay systems with constrained control, but remain so restrictive, given that they are independent of delay, which is an essential parameter of the system.

In the first part of this thesis, the necessary and sufficient algebraic conditions with delay dependence allowing to obtain the largest positively invariant set of delay system are given. The results can include information on the size of delay, and therefore, can be delay dependence positively invariant conditions. Based on the Newton-Leibniz formula, these results use a transformation from an original system with discrete delay to a system with distributed delay. A Lyapunov-Razumikhin function for system with distributed delay, in order to guarantee the asymptotic stability of the original system is proposed.

The second part of this thesis, is to apply the concept of the delay dependent positive invariance to the robust regulator problem of continuous time delay system with symmetric and non-symmetric constraints. In fact the synthesis of state-feedback controllers is solved based on delay-dependent positively invariant set of system in closed-loop. We first obtain the necessary and sufficient algebraic conditions with delay dependence allowing to obtain the largest positively invariant set of delay systems, then we convert the constrained control problem into a Non-Linear Programming (NLP) problem with delay the objective function to be maximized. Indeed the control is firstly chosen in order to stabilize the closed loop system, free of delay, then to guarantee the asymptotic stability of the closed loop system with delay-dependence.

To the best of our knowledge, it is the first time, that the output stabilization problem for time-varying delay systems with constrained control based on the interval observer technique by using the dependent delay positive invariance concept is studied. Hence, first both matrices observer gain, the lower and the upper, are obtained by solving a Sylvester's matrix equation. Second, the interval observer is developed and guaranteed the positivity of the upper and lower observations errors. The design of the controller for given lower and

upper observer respectively, which dependent on the states of interval observer system is developed. By a reasonable choice of a Lyapunov-Krasovskii functional, we propose the conditions that guarantee the asymptotic stability of closed loop system respecting control constraints. However these conditions, provide, first the existence of the largest ellipsoid that is positively invariant set with respect to augmented closed-loop system and also included in the set of admissible controls. Second, they guarantee the depend delay asymptotic stability of the augmented closed-loop system. Finally an LMI algorithm is proposed to compute the stabilizing control laws for time-varying delay systems with constraints. The results show a good performance design of constrained control for time-varying delay systems.



## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES FIGURES . . . . .	xi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xiii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Problématique . . . . .	3
1.1.1 Synthèse de retour d'état . . . . .	3
1.1.2 Synthèse de retour de sortie . . . . .	4
1.2 Objectifs de recherches . . . . .	7
1.2.1 Objectifs spécifiques . . . . .	8
1.3 Hypothèses . . . . .	8
CHAPITRE 2 REVUE DE LA LITTÉRATURE . . . . .	9
2.1 Stabilité des systèmes à retards . . . . .	11
2.1.1 Approche fréquentielle . . . . .	11
2.1.2 Approche temporelle . . . . .	13
2.2 Propriétés et applications d'invariance positive pour les systèmes à retards .	17
2.3 Observateurs intervalles . . . . .	20
CHAPITRE 3 ORGANISATION GÉNÉRALE . . . . .	23
CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : Robust Constrained Control of Linear Continuous-Time Delay System : Non-Linear Optimization Approach . . . . .	25
4.1 abstract . . . . .	25

4.2	Introduction . . . . .	25
4.3	Preliminary results . . . . .	26
4.4	Delay dependence positively invariant and stability conditions . . . . .	28
4.4.1	Delay-dependent asymmetrical positively invariant set . . . . .	28
4.4.2	Delay-dependent stability condition . . . . .	30
4.5	Constrained regulator of unknown delay differential system . . . . .	31
4.6	Examples . . . . .	35
4.6.1	Unbounded case( $m < n$ ) . . . . .	36
4.6.2	Bounded case( $m = n$ ) . . . . .	37
4.7	Conclusion . . . . .	39
CHAPITRE 5 ARTICLE 2 : Constrained Interval Observer-based Control for linear		
	Continuous Time-Varying Delay Systems . . . . .	40
5.1	abstract . . . . .	40
5.2	Introduction . . . . .	40
5.3	Problem statement and preliminary results . . . . .	42
5.4	Interval observer design . . . . .	44
5.5	Controller design . . . . .	48
5.6	Example . . . . .	52
5.7	Conclusion . . . . .	56
CHAPITRE 6 DISCUSSION GÉNÉRALE . . . . .		
		57
CHAPITRE 7 CONCLUSION ET PERSPECTIVES . . . . .		
		59
RÉFÉRENCES . . . . .		
		61
ANNEXES . . . . .		
		66

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Écart de température pour $k = 1.6$ . (réalisé par un programme développé dans le cadre de cette thèse) . . . . .	10
Figure 2.2	Écart de température pour $k = 2$ . (réalisé par un programme développé dans le cadre de cette thèse) . . . . .	11
Figure 2.3	Système asymptotiquement stable pour $h = 0.8$ . (L'entier positif $N$ est le paramètre de discrétisation donné par D.Breda et al (voir Loiseau et al., 2009)) . . . . .	12
Figure 2.4	Système instable pour $h = 1.8$ . (L'entier positif $N$ est le paramètre de discrétisation donné par D.Breda et al (voir Loiseau et al., 2009)) . .	13
Figure 2.5	Domaine $D_1$ symétrique ellipsoïdal associé à $V_1$ , avec $c_1 = 1$ . . . . .	15
Figure 2.6	$D_2$ et $D_3$ sont respectivement de forme losange et rectangulaire associés à $V_2$ et à $V_3$ avec $c_1 = c_2 = 1$ . . . . .	16
Figure 2.7	Domaine $D_1$ positivement invariant et asymptotiquement stable (réalisé par un programme développé dans le cadre de cette thèse) . . . .	18
Figure 2.8	Domaine $D(F, q_1, q_2)$ positivement invariant et le système en boucle fermée est asymptotiquement stable. Les solutions du système en boucle fermée sont données pour $h = 1$ . (réalisé par un programme développé dans le cadre de cette thèse) . . . . .	20
Figure 2.9	Commande sous contrainte $-5 \leq u \leq 4$ (Réalisé par un programme développé dans le cadre de cette thèse. Condition initial $\phi = \begin{pmatrix} 1.8594 \\ 0.4854 \end{pmatrix} \in D(F, q_1, q_2)$ et retard $h = 1$ ) . . . . .	21
Figure 4.1	State trajectories of system (4.29) in closed-loop are obtained for $\tau = \tau_{\max} = 8.4438$ with random initial values emanating from $D(F, r_1, r_2)$ ( $r_1 = r_2 = 1.6$ ). $D(F, r_1, r_2)$ is an unbounded positively invariant set. .	37
Figure 4.2	State trajectories of system (4.33) in closed-loop are obtained for $\tau = \tau_{\max} = 0.2529$ with initial values emanating from the vertices of the set $D(F, r_1, r_2)$ . $D(F, r_1, r_2)$ is a bounded positively invariant set. . . . .	39
Figure 5.1	The projection of the positive invariant ellipsoid $D(P)$ and the set of admissible initial conditions $\Xi_0$ on z-plan. . . . .	54
Figure 5.2	State trajectories of system (5.32) in closed-loop are obtained for $h = h_{\max} = 0.7010$ with initial values emanating from a specified set of admissible initial conditions $[\bar{x}_0 \quad \underline{x}_0]$ . . . . .	56

Figure 5.3	Evolution of state trajectories of system (5.32) for an initial condition $\phi(\theta) = [-0.62 \ 0.92]^T$ with a maximum delay of $h_{max} = 0.7010$ . . . . .	56
Figure 5.4	Control signal for an initial condition $\phi(\theta) = [-0.62 \ 0.92]^T$ with a maximum delay of $h_{max} = 0.7010$ . . . . .	56
Figure C.1	The invariant polyhedron set for initial different states $\phi \in D(\mathbb{I}_2, r_1, r_2)$ . The trajectories starting from set are given for $\tau = \tau_{max} = 1.331$ . . . . .	77
Figure C.2	$D(\mathbb{I}_2, r_1, r_2)$ is not positively invariant for delay $\tau = 1.431$ . The trajectories starting from set are given for three initials conditions $\phi$ . . . . .	77

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

## SIGLES :

$\subset$	Contenu dans
$\in$	Appartient à
$\notin$	n'appartient pas à
$\forall$	Quelque soit
$\exists$	Il existe
$\nexists$	Il n'existe pas
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Ensemble des matrices complexes à n lignes et m colonnes
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles à n lignes et m colonnes
$IntD$	L'intérieure d'un domaine $D$
$\mathcal{C}_{h_m}^n = \mathcal{C}([-h_m, 0], \mathbb{R}^n)$	Ensemble des fonctions continûment différentiables de $[-h_m, 0]$ dans $\mathbb{R}^n$
$\mathbf{M}$	Matrice réelle ou complexe, définie par les composantes : $m_{ij}$
$\mathbf{M} \in \mathbb{M}_n$	Matrice réelle définie par : $m_{ij} \geq 0, i \neq j = 1, \dots, n$
$\mathbf{M} \geq 0$	Matrice réelle dont les composantes $m_{ij} \geq 0, i, j = 1, \dots, n$
$\mathbf{M}^+$	Matrice réelle définie par : $m_{ij}^+ = \sup(m_{ij}, 0), i, j = 1, \dots, n$
$\mathbf{M}^-$	Matrice réelle définie par : $m_{ij}^- = \sup(-m_{ij}, 0), i, j = 1, \dots, n$
$\mathbf{M}_1$	Matrice réelle définie par : $(m_{ii}, i = j \text{ et } m_{ij}^+, i \neq j),$ $i, j = 1, \dots, n$
$\mathbf{M}_2$	Matrice réelle définie par : $(0, i = j \text{ et } m_{ij}^-, i \neq j),$ $i, j = 1, \dots, n$
$ \mathbf{M} $	Matrice absolue ( $ \mathbf{M}  =  m_{ij} $ )
$\mathbf{M}^T$	Transposée de la matrice réelle $\mathbf{M}$
$\ \mathbf{M}\ .$	Norme de $\mathbf{M}, \cdot = 1, 2, \infty$
$\det(\mathbf{M})$	Déterminant de $\mathbf{M}$
$Ker(M)$	Noyau de $M$
$rang(M)$	Rang de $M$
$\lambda_i(\mathbf{M})$	Valeur propre de la matrice $\mathbf{M}$
$\mathcal{R}e(\lambda_i(\mathbf{M}))$	Partie réelle de $\lambda_i(\mathbf{M})$
$\mathcal{I}m(\lambda_i(\mathbf{M}))$	Partie imaginaire de $\lambda_i(\mathbf{M})$
$\lambda_{\max}(\mathbf{M})$	Valeur maximum de $\lambda_i(\mathbf{M}), i = 1, \dots, n$
$\lambda_{\min}(\mathbf{M})$	Valeur minimum de $\lambda_i(\mathbf{M}), i = 1, \dots, n$

$\mathcal{Ker}(\mathbf{M})$	Espace nul de la matrice $\mathbf{M}$
$\mathbb{I}_n$	Matrice identité de dimension $n \times n$
$x \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^n)$	Vecteur $x$ dont les composantes $x_i > 0$ , $i = 1, \dots, n$
$\dot{x}(t)$	Dérivée du vecteur $x$ par rapport au temps $t$
$x^T$	Transposée du vecteur $x$
$x \leq y$ , ( $x < y$ )	Deux vecteurs réels dont les composantes sont données par $x_i \leq y_i$ , ( $x_i < y_i$ ), $i, j = 1, \dots, n$
$\sum_{i=n}^m$	Somme de $i = n$ à $i = m$

### ABRÉVIATIONS :

NLP	Programmation Non Linéaire
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
PI	Positivement invariant par rapport aux trajectoires du système
DP	Définie positive
DN	Définie négative
US	Uniformément stable
AS	Asymptotiquement stable
UAS	Uniformément asymptotiquement stable
CS	Condition suffisante
CNS	Condition nécessaire et suffisante

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	PROOF Of COROLLARY 4.4.4 . . . . .	66
Annexe B	PROOF OF THE THEOREM 5.5.2 . . . . .	68
Annexe C	ARTICLE 3 : Positive Invariance of constrained linear continuous-time delay system with delay dependence . . . . .	71

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

La synthèse de lois de commande pour des systèmes dynamiques linéaires sans prendre en compte explicitement les contraintes, entraîne une dégradation de performances du système et peut même déstabiliser le processus considéré. En effet, ces contraintes sont inévitables, elles sont dû soit à la limitation physique inhérente de système à comportement linéaire, soit au domaine de validité de la linéarisation du système non linéaire. Un organe du système est faiblement dimensionné limitant ainsi l'énergie disponible pour la commande. En pratique les actionneurs et les capteurs sont bien des exemples des limitations physiques. Donc dès l'étape de la modélisation du système et de la conception de la commande, l'ingénieur est dans l'obligation de prendre en compte des contraintes liées à l'amplitude du contrôle et/ou d'états du système. Une façon simple de garantir le respect de ces contraintes est de forcer toutes les trajectoires du système à appartenir au domaine des contraintes et d'y rester, c'est le concept d'invariance positive.

Vue l'effet indésirable que peut causer le retard sur les systèmes dynamiques, plusieurs recherches se sont données à développer des méthodes adéquates pour examiner la stabilité et contribuer à des procédures et outils de stabilisation. Le retard a été toujours considéré comme un des problèmes les plus difficiles rencontrés dans la commande des systèmes. Sa présence a une influence considérable sur le comportement d'un système en boucle fermée et peut même être l'origine d'instabilité.

En effet dans les années 90, l'application du concept d'invariance positive à l'étude de la commande avec contraintes pour les systèmes continus à retard a été faite (voir Hmamed et al., 1995). La méthode repose principalement sur la détermination d'une loi de contrôle linéaire garantissant l'invariance positive et la stabilité asymptotique du domaine de contraintes préalablement choisi. Par conséquent, le concept d'invariance positive est étroitement lié à celui des fonctions de Lyapunov (fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii; fonction de Lyapunov-Razumikhin). Cette approche présente toutefois quelques limitations importantes. Premièrement, la faisabilité du problème est liée au choix adéquat du domaine. Deuxièmement, la conception de la loi de commande est indépendante du retard, paramètre essentiel du système. En dépit de son importance pratique, le problème d'invariance positive dépendante du retard n'a fait l'objet jusqu'à présent que d'un nombre très limité d'études. Cela s'explique sans doute par la complexité des systèmes à retards classés dans la catégorie des systèmes de



dimension infini et le manque d'outils suffisamment adéquats pour les résoudre.

Néanmoins, dans la plupart des applications réelles, l'état du système dynamique n'est pas entièrement accessible à la mesure. Dans ce cas, seule une loi de commande dépendant de l'état estimé, déduit généralement à partir des mesures d'entrée et de sortie, peut être utilisée. Il s'agit d'une loi de commande par retour de sortie, réalisée à partir d'un observateur. Récemment, une approche basée sur la structure de Lunberger appelée observateur intervalle, composé de deux observateurs inférieur et supérieur a été développée pour des systèmes linéaires et non linéaires à temps discret et continu (voir Moisan et al., 2009; Bernard and Gouzé, 2004; Tarek et al., 2012). L'idée est de choisir des gains d'observateurs afin d'imposer à l'erreur d'observation une dynamique positive (généralement, on parle d'un système d'erreur coopératif) (voir Gouzé et al., 2000). Cette technique a été appliquée par (Mazenc. et al., 2012a,b; Efimov. et al., 2013a) pour l'étude et l'analyse de certaines classes d'observateurs pour les systèmes linéaires continus et discrets avec retard. Le concept d'observateur intervalle a été aussi utilisé pour résoudre le problème de la stabilisation des systèmes linéaires à retard variable dans le temps et bornés (voir Polyakov et al., 2013). Sauf que dans toutes ces études, les contraintes physiques ou/et de sécurité de cette classe des systèmes n'ont pas été prises en considération. Ce qui nous oriente, dans la deuxième partie de cette thèse, vers l'étude de la stabilisation des systèmes linéaires continus à retard inconnu variable dans le temps, par retour de sortie saturé basé sur la technique d'observateur intervalle.

Notre travail, se veut alors une contribution à la synthèse d'une loi de commande avec contraintes stabilisante pour des systèmes linéaires continus à retards. Dans un premier temps une loi de retour d'état a été déterminée afin de rendre le système en boucle fermée asymptotiquement stable dépendante de retard. Lorsque l'état du système n'est pas entièrement accessible, une loi de commande par retour de sortie basée sur l'observateur intervalle a été développée. Notre approche se base principalement sur le concept d'invariance positive dépendante de retard.

Notre principal objectif est de donner des conditions d'invariance positive et de stabilité asymptotique dépendantes de retard du domaine lié aux contraintes par rapport aux trajectoires des systèmes à retards. Ces conditions permettent d'élaborer la loi de commande stabilisante du système en boucle fermée tout en respectant les contraintes.

## 1.1 Problématique

En générale, lors de la conception de lois de commande (design) d'un système asservi, nous cherchons toujours à assurer à celui-ci certaines performances souhaitées. L'approximation par des modèles linéaires a permis l'obtention des résultats pratiques qu'on estime suffisants, il n'en va plus de même aujourd'hui où le souci de performances devient de plus en plus exigeant. En effet, un système physique n'est jamais rigoureusement linéaire, mais il est possible de le considérer comme tel si l'amplitude d'entrée (commande) est comprise dans certaines limites définissant le domaine de linéarité du système. Donc, ne pas prendre en compte ces contraintes lors de la synthèse de lois de contrôle, entraîne la dégradation de performances, voire même la déstabilisation du système.

À l'étude de ce problème, se rajoute donc l'étude des systèmes linéaires à retards afin de se rapprocher suffisamment de la réalité physique. La question principale de cette thèse est donc la suivante :

*Peut-on garantir l'existence d'une loi de commande soumise à des contraintes stabilisant les systèmes linéaires dépendants de retards?.*

Afin d'éclaircir d'avantage, nous allons formaliser notre problème dans un contexte mathématique qui nous servira par la suite dans la discussion de notre thèse.

### 1.1.1 Synthèse de retour d'état

Nous nous intéressons dans un premier temps au problème de synthèse de retour d'état avec contrainte des systèmes linéaires continus à retard décrits par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t), \quad t > 0; \quad x(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0]. \quad (1.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  représentent respectivement le vecteur d'état instantané, supposé complètement accessible à la mesure, et le vecteur de commande du système. Soient  $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  deux matrices réelles d'états constantes, la matrice réelle constante liée à la commande est donnée par  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Soit  $h > 0$  est le retard du système et la condition initial  $\phi(\theta)$  est définie sur l'intervalle  $-h \leq \theta \leq 0$ .

La commande  $u$  est sous contraintes telle que :

$$u \in \Delta \subset \mathbb{R}^m; \quad m \leq n \quad (1.2)$$

où  $\Delta$  est un ensemble des commandes admissibles défini par :

$$\Delta = \left\{ u \in \mathbb{R}^m / -q_2 \leq u \leq q_1, q_1, q_2 \in \text{Int}\mathbb{R}_+^m \right\} \quad (1.3)$$

Les matrices  $A, A_d$  et  $B$  sont supposées vérifier la condition suivante :

$$(A + A_d, B) \text{ est stabilisable} \quad (1.4)$$

La loi de contrôle par retour d'état statique est donnée par :

$$u(t) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{ avec } \text{rang}F = m \quad (1.5)$$

Le système en boucle fermée, pour cette loi de commande, est décrit par l'équation dynamique suivante :

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + A_dx(t - h), \quad t > 0 \quad (1.6)$$

Le problème consiste alors à déterminer une loi de commande  $u(t)$  rendant le système en boucle fermée asymptotiquement stable dépendante du retard tout en respectant les contraintes (1.3). Cela revient à trouver la matrice de gain  $F$  qui, d'une part, assure la stabilité asymptotique du système (1.6) sans retard, c'est-à-dire, tous les  $\mathcal{R}e(\lambda_i(A + A_d + BF))$  sont strictement négatifs pour tous  $i = 1, \dots, m$  et, d'autre part, garantit pour une valeur d'une borne maximale de retard  $h_{\max}$ , la stabilité asymptotique du système (1.6), dite la stabilité asymptotique dépendante de retard, c'est à dire, pour tout  $\mathcal{R}e(s)$  positif et pour un retard positif fixe,  $h > 0$ , le  $\det(s\mathbb{I}_n - A - A_de^{-sh} - BF)$  est toujours non nul.

### 1.1.2 Synthèse de retour de sortie

Dans ce cas, nous considérons la synthèse des lois de commande sous contraintes par retour de sortie pour des systèmes dynamiques continus à retard décrits par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_dx(t - h(t)) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad t > 0 \quad (1.7)$$

où  $y \in \mathbb{R}^p$  représente la sortie.  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  est une matrice connue constante.  $h(t)$  est un retard inconnu, cette fois-ci, variable dans le temps, mais borné :

$$0 \leq h(t) \leq h_m, \quad \dot{h}(t) \leq \mu < 1 \quad (1.8)$$

La condition initiale de système (1.7) à l'instant  $t_0$  est donné par :

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta) \text{ for } \theta \in [-h_m, 0], \quad (1.9)$$

où  $\phi(\cdot) \in \mathcal{C}_{h_m}^n$ . Nous supposons que l'ensemble des conditions initiales,  $x(t_0 + \theta)$  noté  $x_0$ , du système (1.7) est borné :

$$\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0 \quad (1.10)$$

dont  $\underline{x}_0, \bar{x}_0 \in \mathcal{C}_{h_m}^n$  sont respectivement des conditions initiales de l'observateur supérieur et inférieur régie par le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = (A - \bar{L}C)\bar{x}(t) + A_d\bar{x}(t - h(t)) + Bu(t) + \bar{L}Cx(t) \\ \dot{\underline{x}}(t) = (A - \underline{L}C)\underline{x}(t) + A_d\underline{x}(t - h(t)) + Bu(t) + \underline{L}Cx(t), \end{cases} \quad (1.11)$$

Avec  $\bar{L}$  et  $\underline{L}$  deux gains d'observateur intervalle (1.11) qui ne sont pas forcément les mêmes. Leurs synthèses dépendent à un certain nombre de propriétés de stabilité et de positivité des erreurs d'observabilité majorant et minorant de système (1.11) définies respectivement par  $\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - x(t)$  et  $\underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t)$ . L'observateur (1.11) est alors dit intervalle si pour tout  $t > 0$ , l'inégalité  $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$  est toujours vraie sachant que le domaine d'état initial vérifiant auparavant la condition (1.10). Donc les gains  $\bar{L}$  et  $\underline{L}$  sont choisis tels que la dynamique de système des erreurs :

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{e}}(t) \\ \dot{\underline{e}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \bar{L}C & 0 \\ 0 & A - \underline{L}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}(t) \\ \underline{e}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_d & 0 \\ 0 & A_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}(t - h(t)) \\ \underline{e}(t - h(t)) \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

est positive et asymptotiquement stable, ceci, ne peut être réalisable que si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- La matrice  $A_d$  est positive ;
- $(A - \bar{L}C)$  et  $(A - \underline{L}C)$  sont deux matrices Metzler ;
- $(A - \bar{L}C + A_d)$  et  $(A - \underline{L}C + A_d)$  sont matrices Hurwitz ;

On note que la première et la deuxième conditions garantissent la positivité de système (1.12) tandis que la troisième assure sa stabilité asymptotique pour un intervalle de retard  $[0, h_{\max}[$ , (voir le principe de continuité, Niculescu, 2001). Notons que selon la structure des matrices  $A_d$ ,  $(A - \bar{L}C)$  et  $(A - \underline{L}C)$ , les matrices  $(A - \bar{L}C + A_d)$  et  $(A - \underline{L}C + A_d)$  ne sont pas seulement des matrices Hurwitz, mais se sont aussi Metzler. Le choix de gains sera donc difficile, voire impossible, pour satisfaire toutes ces conditions, et surtout si les

deux gains ne sont pas identiques, c'est l'un des problèmes que l'on va résoudre dans cette thèse : En procédant par un changement de variable qui projette le système original (1.7) dans une nouvelle base et par conséquent un nouveau observateur intervalle (voir Tarek et al., 2012), qui nous facilite respectivement le calcul des gains  $\bar{L}$  et  $\underline{L}$ . Cette technique est basée sur la résolution d'un système d'équations matriciel de Sylvester (Yu-Peng Qiao and Cheng, 2010). La loi de commande  $u$  peut être alors construite en fonction des bornes supérieure et inférieure ( $\bar{x}$ ,  $\underline{x}$ ) de l'observateur intervalle (1.11). On pose  $u$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= F_1 \bar{x}(t) + F_2 \underline{x}(t), \\ &= (F_1 + F_2)x(t) + F_1 \bar{e}(t) - F_2 \underline{e}(t) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Dans un soucis de simplicité de l'exposé, nous supposons que la loi de commande  $u$  satisfait des contraintes symétriques, cela revient à dire que  $u \in \Delta$  avec  $q_1 = q_2 = u_{\max}$  ( $\Delta$  est donné par (1.2)). L'ensemble des commandes admissibles dans l'espace des états  $\begin{pmatrix} x \\ \bar{e} \\ \underline{e} \end{pmatrix}$  sera donc représenté sous forme :

$$D(F_1, F_2) = \left\{ (x \ \bar{e} \ \underline{e})^T \in \mathbb{R}^{3n} : \left| \left( (F_1 + F_2 \ F_1 \ -F_2)(x \ \bar{e} \ \underline{e})^T \right)_i \right| \leq u_{\max_i}, i = 1, \dots, m \right\} \quad (1.14)$$

Les hypothèses structurelles suivantes sont requises :

$H_1$  : Condition (1.10) ;

$H_2$  : Condition (1.4) ;

$H_3$  :  $(A + A_d, C)$  est observable.

Si on veut que le système (1.7) en boucle fermée soit asymptotiquement stable dépendante de retard sans que notre loi de commande (1.13) viole les contraintes symétriques imposées par (1.14), il suffit alors d'appliquer le concept d'invariance positive, utilisé dans la section précédente, mais cette fois-ci pour la synthèse d'une loi de commande  $u$  par retour de sortie. Le problème revient à déterminer le couple de gain  $(F_1, F_2)$  pour que d'une part, le domaine  $D(F_1, F_2)$  soit positivement invariant par rapport aux trajectoires de système augmenté en boucle fermé définit par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\bar{e}}(t) \\ \dot{\underline{e}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B(F_1 + F_2) & BF_1 & -BF_2 \\ 0 & A - \bar{L}C & 0 \\ 0 & 0 & A - \underline{L}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \bar{e}(t) \\ \underline{e}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_d & 0 & 0 \\ 0 & A_d & 0 \\ 0 & 0 & A_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t-h(t)) \\ \bar{e}(t-h(t)) \\ \underline{e}(t-h(t)) \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

D'autre part, le système (1.15) demeure asymptotiquement stable pour une borne maximale

de retard  $h_{\max}$  (c'est-à-dire qu'au premier lieu, le couple de gain  $(F_1, F_2)$  calculé, stabilise le système original en boucle fermée (1.15) sans retard et par la suite assure sa stabilité, pour un intervalle  $[0, h_{\max}[$ ).

$D(F_1, F_2)$  est un domaine symétrique et contient l'origine à son intérieur. Il est alors, toujours possible de l'approximer par une ellipse  $D(P) \supset \{0\}$ , engendrée par une fonction de Lyapunov telle que :

$$D(P) = \left\{ \left( x \ \bar{e} \ \underline{e} \right)^T \in \mathbb{R}^{3n} : \left( x \ \bar{e} \ \underline{e} \right)^T P \begin{pmatrix} x \\ \bar{e} \\ \underline{e} \end{pmatrix} \leq 1 \right\} \subset D(F_1, F_2), \quad (1.16)$$

avec  $P$  une matrice réelle symétrique DP. Une très bonne approximation nous oblige de trouver un plus grand domaine  $D(P)$  positivement invariant par rapport aux trajectoires de système (1.15).

En effet, après avoir déterminé le système intervalle (1.11) de système original (1.7) et calculer le couple de gain  $(\bar{L}, \underline{L})$ , la solution de notre problème consiste alors à trouver une loi de contrôle  $u$  (1.13), une matrice  $P$  définie positive et un retard maximale  $h_{\max}$  tels que :

1. Le système en boucle fermée est asymptotiquement stable pour tout retard  $h(t)$  défini sur l'intervalle  $[0, h_{\max}[$ ;
2.  $D(P) \subset D(F_1, F_2)$ ;
3.  $D(P)$  est positivement invariant dépendant de retard par rapport aux trajectoires de système en boucle fermée (1.15) ;
4.  $D(P)$  est maximal.

## 1.2 Objectifs de recherches

L'objectif de cette thèse est de développer des techniques de régulation des systèmes linéaires continus à retards ayant des contraintes sur l'entrée en utilisant le concept d'invariance positive dépendante de retard. Afin de résoudre le problème de la commande sous contraintes par retour de sortie pour des systèmes dynamique à retard variable dans le temps, nous proposons la possibilité d'appliquer le concept d'observateur intervalle pour le système original et par la suite développer des techniques liées au calcul de couple de gain d'observateur intervalle ainsi que des méthodes d'optimisation relatives à la synthèse de la loi de commande soumis aux contraintes.

### 1.2.1 Objectifs spécifiques

- Déterminer des conditions d'existence d'invariance positive dépendante de retard, pour des systèmes à retards ayant des contraintes sur les états ;
- Déterminer des conditions de stabilité asymptotique dépendante de retard, pour les systèmes à retards ayant des contraintes ;
- Appliquer le concept d'invariance positive dépendante de retard aux systèmes non autonomes ;
- Montrer l'existence d'une loi de commande contrainte stabilisante pour des systèmes à retards en boucle fermée ;
- Appliquer le concept d'observateur intervalle aux systèmes à retard variable dans le temps ayant des contraintes sur l'entrée ;
- Développer une méthode pour la synthèse de couple de gain d'observateur (inférieur et supérieur) ;
- Implémenter une technique d'optimisation pour calculer le retard maximum et la loi de commande contrainte garantissant la stabilité asymptotique dépendante de retard du système en boucle fermée.

### 1.3 Hypothèses

- L'invariance positive dépendante de retard repose sur la transformation de premier ordre du système original : En utilisant la formule de Newton-Leibniz (voir Hale and Lunel, 1993) ;
- Des conditions relient les paramètres (essentiellement les bornes supérieures) d'un ensemble donné et ceux du système considéré (y compris le retard) garantissent l'invariance positive dépendante de retard ;
- L'invariance positive dépendante de retard de l'ensemble de lois de commande pour les systèmes en boucle fermé à retards, oblige le contrôle à respecter les contraintes ;
- La synthèse de couple de gain d'observateur intervalle est assurée par la positivité et la stabilité asymptotique de la dynamique d'erreurs d'observateurs inférieure et supérieure du système original ;
- L'existence d'un ensemble positivement invariant, inclus dans le domaine des commandes admissibles, par rapport aux trajectoires du système augmenté régit par le vecteur d'état  $(x \ \bar{e} \ \underline{e})^T$ .

## CHAPITRE 2 REVUE DE LA LITTÉRATURE

Dans ce chapitre, nous allons présenter différents résultats rencontrés dans la littérature s'avérant nécessaires et fondamentaux dans la réalisation de notre étude. À la lumière de ces outils et techniques, nous avons été inspiré dans la formulation de nos hypothèses. Cette recherche bibliographique nous a aidé tout au long de nos travaux à élaborer une méthodologie à suivre pour répondre à notre problématique et réaliser nos objectifs escomptés. Sans oublier les travaux réalisés dans le cas des systèmes continus sans retards qui nous ont été toujours une source d'inspiration constante et permanente. Nous introduisons alors, quelques concepts usuels tels que stabilité (stabilité asymptotique), fonctions de Lyapunov-Razumikhin, fonctionnelles de Layapunov-Krasovskii et d'autres moins classiques tels que l'invariance positive et observabilité intervalle. Nous n'exposerons pas toute la théorie associée à la modélisation des systèmes à retards ni à l'existence et l'unicité de leurs solutions.

Contrairement aux systèmes dynamiques ordinaires, modélisés en général par l'équation mathématique  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ , dont l'évolution de leurs états  $x$  est déterminée à partir de la valeur de leurs variables à l'instant présent  $t$ . Celle des systèmes à retards dépend de la valeur des états passés  $x(t - h)$ ,  $h > 0$ . Dans ce cas, il est nécessaire d'initialiser une partie de l'historique du système pour connaître son évolution. Les systèmes ordinaires (systèmes sans retards) ne sont en pratique que des modèles simplifiés des systèmes à retards.

On retrouve ce type de systèmes dans plusieurs domaines tels que : mécanique, mécanique des fluides, chimique, biologique, transport, communication et électrique. Nous allons donner l'exemple classique de la douche chaude, le plus connue dans la littérature (voir Zhong, 2006) afin de montrer le comportement et le modèle physique de ce type de systèmes.

Le modèle est alors décrit par :

$$\dot{x}(t) = -kx(t - h)$$

avec l'état  $x(t)$  est l'écart entre la température d'eau au niveau des manettes à régler et la température réelle de celle qu'on ressent, le retard  $h = \frac{l}{v}$ ,  $l$  est la distance entre les deux niveaux et  $v$  la vitesse d'eau dans les tuyau qui est considérée constante. Nous remarquons que le comportement du système change selon la valeur  $k$ , considérée ici comme régulateur, et aussi selon celle du retard  $h$ . Mais dans ce cas la valeur du retard  $h$  est supposée constante. Quoique le modèle de ce système est simple, sa résolution nécessite une connaissance d'un état initial sur tout le segment  $[-h, 0]$ . La solution du système décrit plus haut, est basée sur la méthode dite « step by step » introduite par (Bellman and Cooke, 1963; El'sgol'ts and Norkin, 1973). Cette technique a été aussi utilisée pour la démonstration de la partie



suffisante du théorème 4.4.1.

Il est à noter que la convergence de la trajectoire vers le point d'équilibre ( $x_e = 0$ ) de ce système dépend du paramètre régulateur  $k$  et du retard  $h$ . Dans notre exemple, le retard est considéré comme un paramètre fixe  $h = 0.8$  et on fait varier celui de  $k$ , voir figures (2.1) et (2.2). Le système est stable dans le premier cas ( $k = 1.6$ ), par contre, il ne l'est pas dans le second ( $k = 2$ ). Ce qui nous amène au concept de stabilité des systèmes à retards, qui va être brièvement rappelé dans les paragraphes suivants.

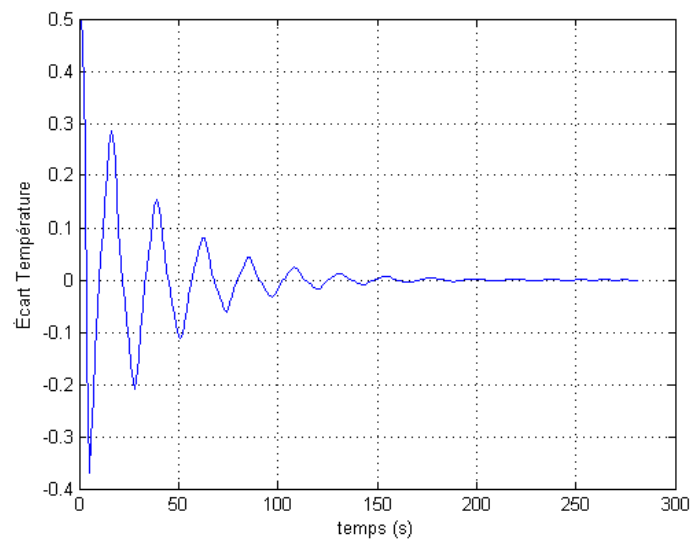


Figure 2.1 Écart de température pour  $k = 1.6$ . (réalisé par un programme développé dans le cadre de cette thèse)

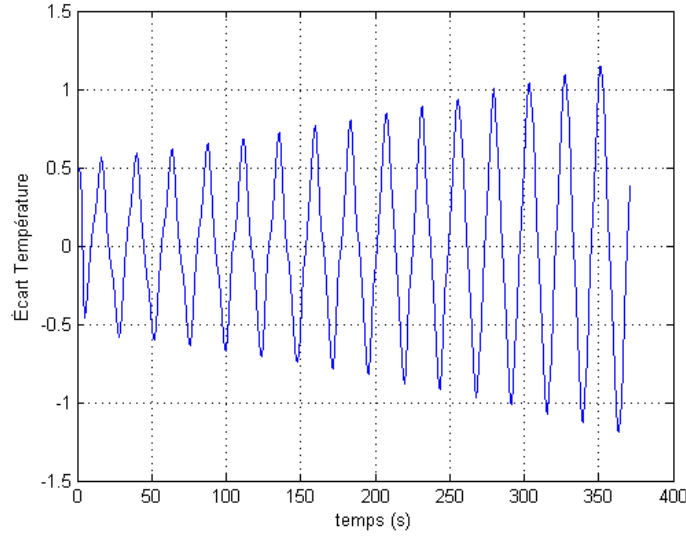


Figure 2.2 Écart de température pour  $k = 2$ . (réalisé par un programme développé dans le cadre de cette thèse)

## 2.1 Stabilité des systèmes à retards

Dans cette section, nous allons donner quelques résultats de bases relatifs à la stabilité (stabilité asymptotique) des systèmes à retards pour deux approches explorées plus ou moins parallèlement, une fréquentielle et l'autre temporelle.

### 2.1.1 Approche fréquentielle

Considérons le modèle du système linéaire continu à retard suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) & t > 0 \\ x(\theta) = \phi(\theta) & \theta \in [-h, 0] \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état instantané.  $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  deux matrices réelles d'état constantes. Le retard est défini par  $h > 0$  et finalement la condition initial  $\phi(\theta)$  est définie sur l'intervalle  $-h \leq \theta \leq 0$ .

L'équation caractéristique du système est donnée par :

$$P(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I}_n - A - A_d e^{-\lambda h}) = 0 \quad (2.2)$$

avec  $P(\lambda)$  est le polynôme caractéristique. On dit que le système (2.1) est asymptotiquement stable (voir Diekmann et al., 1995) si et seulement si :

$$P(\lambda) \neq 0, \quad \text{pour } \mathcal{Re}(\lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (2.3)$$

En d'autres termes si toutes les racines du polynôme caractéristique se trouvent dans la partie gauche du plan complexe, le système est asymptotiquement stable. Si la relation (2.3) est vérifiée, pour tout  $h > 0$ , on dit que le système est asymptotiquement stable indépendant de retard. En fait, pour bien mettre en évidence ces deux concepts de stabilité dépendante et indépendante du retard, nous allons revenir à notre exemple précédent, en fixant cette fois ci la valeur  $k = 1.6$  et on fait varier la valeur de retard. Pour  $h = 0.8$ , toutes les racines de l'équation caractéristique se trouvent dans la partie gauche du plan complexe, le système est alors asymptotiquement stable voir figure (2.3) (ce qui est conforme au résultat trouvé plus haut voir figure (2.1)). Pour  $h = 1.8$ , deux racines conjuguées  $\lambda = 0.2428 \pm j1.004$  de l'équation (2.2) se trouvent en dehors du plan complexe gauche, il est suffisant alors de conclure que le système est instable voir figure (2.4). La technique utilisée pour tracer les spectres se base sur l'approche de discrétisation développée par D. Breda et al (voir Loiseau et al., 2009).

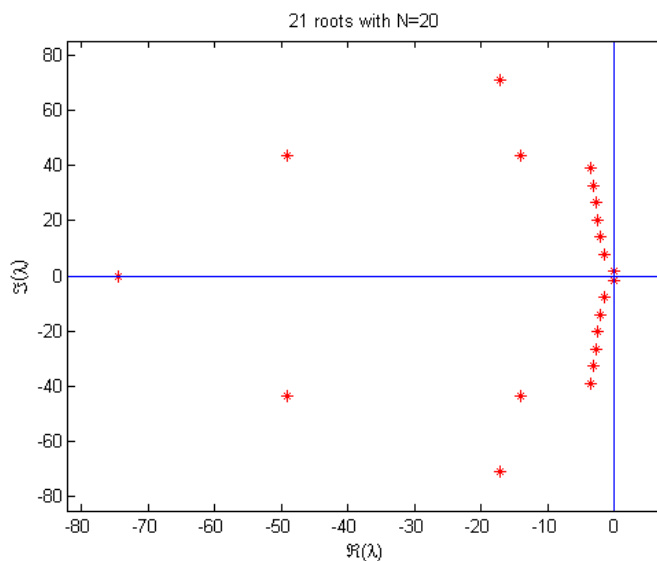


Figure 2.3 Système asymptotiquement stable pour  $h = 0.8$ . (L'entier positif  $N$  est le paramètre de discrétisation donné par D. Breda et al (voir Loiseau et al., 2009))

En général, dans le cas temporel, le concept de stabilité (stabilité asymptotique) est souvent lié à la seconde méthode de Lyapunov. Nous allons donc aborder des résultats qui sont les

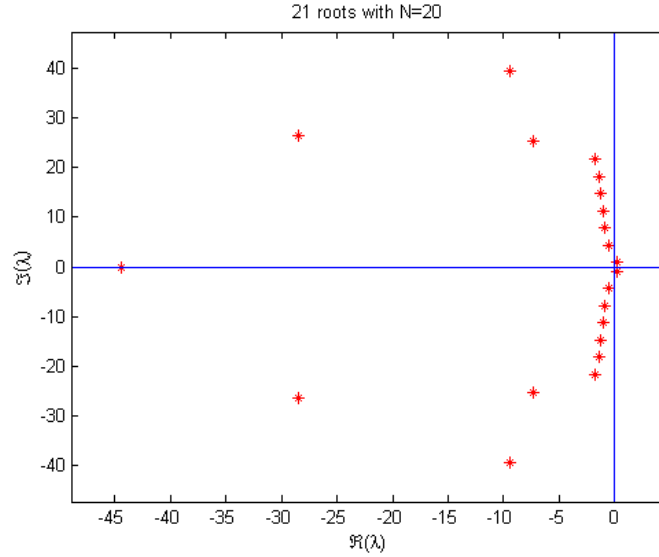


Figure 2.4 Système instable pour  $h = 1.8$ . (L'entier positif  $N$  est le paramètre de discrétisation donné par D.Breda et al (voir Loiseau et al., 2009))

plus couramment utilisés et qui nous serviront de base pour futurs travaux développés.

### 2.1.2 Approche temporelle

Deux extensions à la seconde méthode de Lyapunov ont été développées pour l'étude de stabilité et stabilisation des systèmes à retards : La méthode de Lyapunov-Krasovskii qui utilise des fonctionnelles de Lyapunov et la méthode de Lyapunov-Razumikhin qui emploie des fonctions classiques.

#### Approche par fonctions de Razumikhin

Dans cette approche, la stabilité de système à retard se base sur la vérification de la décroissance d'une fonction de Lyapunov  $V(x(t))$  classique, utilisée pour les équations différentielles ordinaires. Cela revient à vérifier que  $\dot{V}(x(t)) \leq 0$  le long de toutes les trajectoires de système (2.1).

**Theorem 2.1.1** (Kolmanovskii and Myshkis (1999)). *Soient  $u, v$  et  $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  des fonctions croissantes, telles que :  $u(\theta)$  et  $v(\theta)$  soient strictement positives pour  $\theta > 0$ . S'il existe une fonction continue  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que :*

- a)  $u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|)$  ,
- b)  $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$  pour toutes les trajectoires de (2.1) vérifiant :

$$V(t + \theta, \phi(t + \theta)) \leq V(t, \phi(t)), \quad \forall \theta \in [-h, 0], \quad (2.4)$$

alors la solution nulle de (2.1) est US.

Sous les mêmes hypothèses et s'il existe une fonction  $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  strictement croissante avec  $p(\theta) > 0$  pour tout  $\theta > 0$ , de plus si  $w(\theta) > 0$ , pour  $\theta > 0$  telle que :

– c)  $\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$  pour toutes les trajectoires de (2.1) vérifiant :

$$V(t + \theta, \phi(t + \theta)) \leq p(V(t, \phi(t))), \quad \forall \theta \in [-h, 0] \quad (2.5)$$

alors la solution nulle de (2.1) est UAS et la fonction  $V$  est appelée fonction de Lyapunov-Razumikhin.

Dans le sens physique, la fonction  $V$  est considérée comme une quantité d'énergie interne d'un système dynamique. À l'équilibre (phase statique) elle doit être minimum. Nous donnons, dans ce qui suit, un exemple de trois fonctions de Lyapunov-Razumikhin souvent utilisées dans la synthèse de stabilité pour des systèmes continus à retards (voir Cao et al., 2002) et (Dambrine et al., 1995a). La première fonction est la plus usuelle de forme :

$$V_1(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad P \text{ une matrice réelle symétrique } DP$$

Les deux autres moins utilisées sont données respectivement par :

$$V_2 = q^T|x|, \quad q \text{ un vecteur positif}$$

$$V_3 = \max_i \frac{|x_i|}{q_i}, \quad q \text{ un vecteur positif}$$

Comme dans le cas des systèmes ordinaires (sans retards) (voir Burgat and Cheganca.J., 1985), on peut aussi, dans le cas des systèmes à retards, lier ces fonctions à des domaines de stabilité qui sont en général donnés par :

$$D_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \quad V_i(x) \leq c_i, \quad c_i \text{ scalaire positif} \right\}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

Il est facile de constater que, ces différents ensembles sont respectivement ellipsoïdaux et parallélépipédiques, en plus symétriques. Pour mieux illustrer ces formes, nous allons présenter dans  $\mathbb{R}^2$  les exemples suivants :

L'ensemble  $D_1$  associé à la fonction  $V_1$  figure (2.5) est donné par :

$$D_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, \quad x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} \leq 1 \right\}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Les domaines  $D_2$  et  $D_3$  associés aux fonctions  $V_2$  et  $V_3$  respectivement figure (2.6) sont

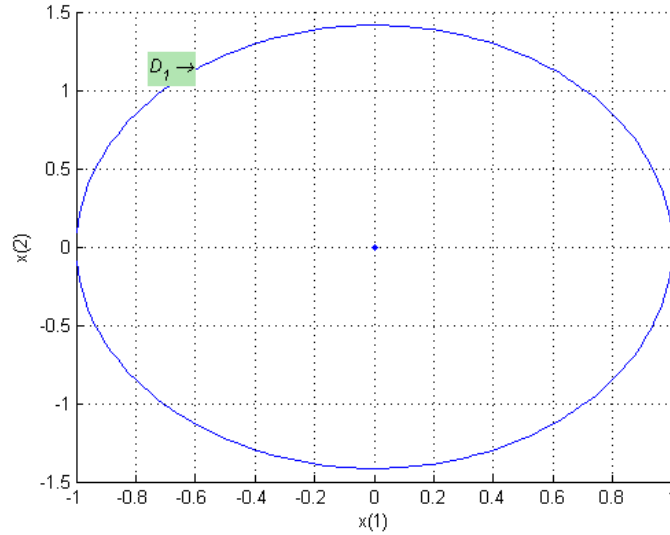


Figure 2.5 Domaine  $D_1$  symétrique ellipsoïdal associé à  $V_1$ , avec  $c_1 = 1$

données par :

$$D_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, \quad 2|x_1| + 2.6|x_2| \leq 1 \right\}, \quad q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.6 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, \quad \max \left( \frac{|x_1|}{1}; \frac{|x_2|}{0.45} \right) \leq 1 \right\}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

En fait, plusieurs études ont montré qu'un ensemble engendré par une fonction de Lyapunov contenant l'origine à son intérieure est un domaine positivement invariant stable (asymptotiquement stable). La notion d'invariance positive joue un rôle très important dans l'analyse de stabilité et dans la régulation des systèmes dynamiques, de sorte que le problème de la commande est étudié à partir des propriétés de stabilité. L'idée de base de ce concept est de restreindre les états du système à un ensemble et que ses trajectoires ne le quitteront pas quel que soit le temps  $t > 0$ . Nous allons donner dans ce qui suit des résultats préliminaires d'invariance positive.

### Approche par fonctionnelles de Krasovskii

Par contre pour cette approche, l'étude de stabilité des systèmes à retard se base sur la détermination d'une fonctionnelle  $V(x(t))$  définie positive dont sa dérivée est négative le long des trajectoires de système (2.1). Cette approche conduit à des résultats moins conservatifs

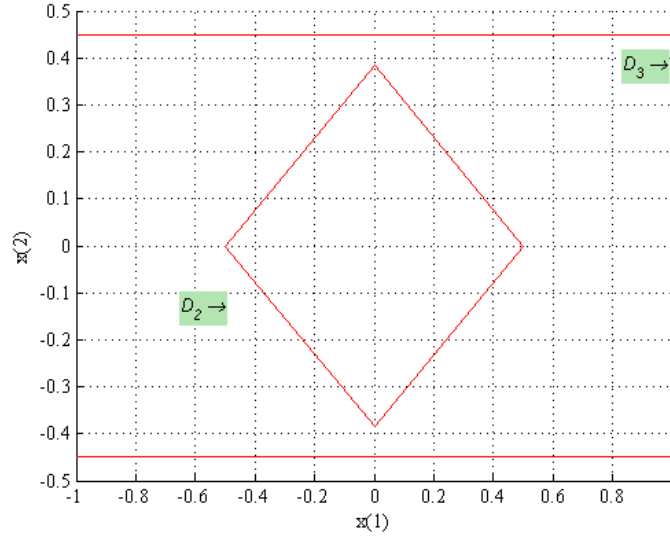


Figure 2.6  $D_2$  et  $D_3$  sont respectivement de forme losange et rectangulaire associés à  $V_2$  et à  $V_3$  avec  $c_1 = c_2 = 1$

que ceux donnés par la première. Généralement cette fonctionnelle est donnée sous la forme suivante (voir Wu et al., 2010) :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta, \quad (2.7)$$

avec  $P, Q$  et  $R$  sont des matrices réelles symétriques DP. Plusieurs auteurs (voir Richard, 2003) ont développé leur analyse en simplifiant (2.7) par la fonctionnelle suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h}^t x^T(s)Qx(s)ds \quad (2.8)$$

En utilisant alors, la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovkii (2.8), le système (2.1) est AS (voir Richard, 2003) s'il existe des matrices  $P, Q$  et  $R$  symétrique DP sachant que :

$$A^T P + PA + PA_d Q^{-1} A_d^T P + Q + R = 0. \quad (2.9)$$

Cette équation matricielle algébrique de Riccati est équivalente à l'inégalité matricielle linéaire (LMI) suivante :

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + Q & PA_d \\ A_d^T P & -Q \end{pmatrix} < 0 \quad (2.10)$$

## 2.2 Propriétés et applications d'invariance positive pour les systèmes à retards

Dans cette section, on présente quelques résultats développés dans la littérature, (voir Hennes and Tarbouriech, 1997; Hmamed et al., 1995; Dambrine et al., 1995b; Klai et al., 1994), concernant le concept d'invariance positive pour les systèmes à retards, quoiqu'ils ne sont pas nombreux en comparaison avec ceux réservés aux systèmes sans retards.

**Definition 2.2.1** (Hmamed et al. (1995)). *Un sous ensemble  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  est positivement invariant par rapport aux trajectoires du système (2.1) si pour chaque condition initial  $\phi(s) \in D$  ( $s \in [t_0 - h, t_0]$ ), la solution  $x(t, t_0, \phi) \in D, \forall t > t_0$ .*

En effet, cette définition n'est autre qu'une extension directe de celle de Lasalle (1976). D'une manière très simple et comme nous l'avons vu, l'idée est de déterminer un ensemble des états initiaux d'un système dynamique à retards sachant que son évolution demeure et y reste quel que soit le temps  $t > 0$ . Nous donnons l'exemple illustratif suivant :

**Exemple 5.1** Considérons le système étudié par Louisell (2001) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}; A_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

son point d'équilibre  $x_e = (0, 0)$  et soit le domaine  $D_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2, \quad x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} \leq 1 \right\}$  engendré par la fonction  $V_1$  décrite précédemment.

La figure (2.7) montre que le domaine  $D_1$  est positivement invariant. D'autre part toutes les trajectoires du système, initiées dans  $D_1$  (condition initial  $\phi \in D_1$ ) tendent asymptotiquement vers l'origine (point d'équilibre). Il est alors un ensemble asymptotiquement stable au sens de Lyapunov puisque le point d'équilibre est à l'intérieure du  $D_1$ . Le système (4.6.2) est résolu pour un retard choisi  $h = 1.2$ .

Il est à noter que dans la littérature, on trouve plusieurs conditions d'invariance qui sont essentiellement équivalentes à celles données dans cette thèse. Une condition nécessaire et suffisante indépendante de retard d'invariance positive pour le système à retard est donnée par Dambrine et al. (1995b), elle se base sur la vérification d'une inégalité vectorielle entre les paramètres du système et ceux du domaine.

**Theorem 2.2.2.** *Le domaine  $D(\mathbb{I}_n, q_1, q_2) = \left\{ \phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) : \forall s \in [-h, 0], -q_2 \leq \phi(s) \leq q_1 \right\}$*



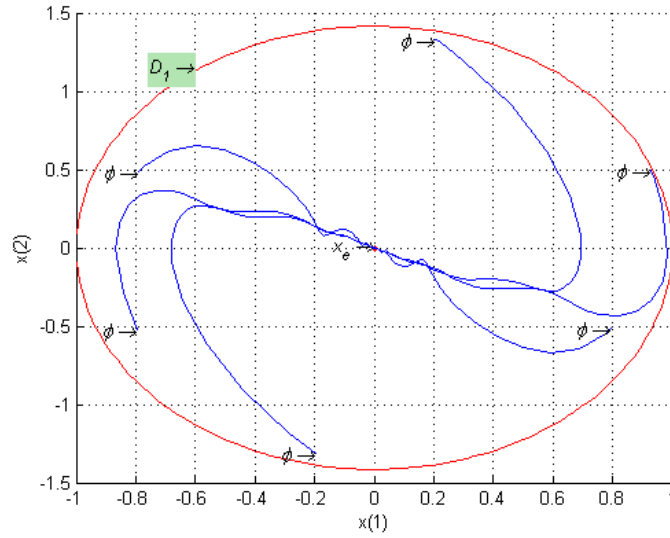


Figure 2.7 Domaine  $D_1$  positivement invariant et asymptotiquement stable (réalisé par un programme développé dans le cadre de cette thèse)

*est positivement invariant par rapport aux trajectoires du système (2.1) si et seulement si :*

$$\left( \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_d^+ & A_d^- \\ A_d^- & A_d^+ \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \leq 0 \quad (2.12)$$

avec  $q_1, q_2 \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^n)$  et  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions continues de  $[-h, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$

Une des applications de ce théorème réside dans l'analyse et la synthèse des systèmes incertains en déterminant la marge nécessaire et suffisante de paramètres perturbés garantissant la robustesse vis à vis l'invariance positive, appelée « robust positive invariance » en anglais, (voir Blanchini, 1999).

Par ailleurs l'extension de ce concept est facilement obtenue pour les systèmes à retards en présence d'une entrée  $u$ . En effet, dans les années 90 le problème de la commande contrainte pour les systèmes à retards a été étudié (Hennet and Tarbouriech (1997); Hmamed et al. (1995)). La méthode repose sur la détermination d'une loi de contrôle linéaire garantissant l'invariance positive et la stabilité asymptotique du polyèdre préalablement fixé.

### Commentaires

- Cette approche reste limitée du fait que la faisabilité du problème est liée au choix adéquat du domaine ;
- La structure des pôles (nombre infini) des systèmes à retards (systèmes de dimension

infinie) rend l'application de la méthode de placement des pôles pour ce genre de problème très difficile et complexe ;

- Elle est conservatrice puisque le retard n'intervient pas.

En présence d'une entrée  $u \in \mathbb{R}^m$ , le système autonome (2.1) devient :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t) \quad (2.13)$$

avec la loi de retour d'état  $u(t) = Fx(t) \in D(F, q_1, q_2) = \{x \in \mathbb{R}^m, -q_2 \leq Fx \leq q_1\}$ ,  $q_1, q_2 \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^m)$  et  $\text{rang}(F) = m \leq n$ .

Nous allons présenter la technique développée par Hmamed et al. (1995). Elle a été utilisée dans la synthèse de la loi de commande  $u = Fx$  sous contrainte stabilisant le système (2.13) en boucle fermée indépendamment du retard. On se limite au cas où la matrice  $A$  liée à l'état  $x(t)$  possédant  $n - m$  valeurs propres stables. Les étapes suivantes résument la technique utilisée par ces auteurs :

**Étape.1** Si la matrice  $A$  possède  $m$  valeurs propres instables, on va à l'étape suivante ;

**Étape.2** Calcul du gain  $F$  pour que la matrice en boucle fermé  $A + BF$  soit Hurwitz (stable) ;

**Étape.3** Si  $\text{rang} \begin{pmatrix} FA \\ F \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} FA_d \\ F \end{pmatrix} = m$ , on va à l'étape suivante, sinon on va à l'étape 2 et on recalcule la matrice  $F$  ;

**Étape.4** Calcul des matrices  $H$  et  $G$  tel que  $F(A + BF) = HF$  et  $FA_d = GF$

**Étape.5** Si la condition  $\left( \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2 & H_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G^+ & G^- \\ G^- & G^+ \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \leq 0$  est vérifiée alors le système en boucle fermée est AS et le domaine  $D(F, q_1, q_2)$  est PI, sinon, on va à l'étape 4 et on recalcule les matrices  $H$  et  $G$  .

Dans le cas où la matrice  $A$  ne possède pas  $m$  valeurs propres instables, les auteurs ont utilisé une autre méthode appelée « technique d'augmentation » que ne nous présentons pas dans cette thèse.

L'exemple de simulation suivant traité par les mêmes auteurs nous montre bien, que le régulateur  $F$  trouvé par cette technique et qui s'articule sur le concept d'invariance positive, stabilise le système sans que la commande viole ses contraintes imposées au préalable voir figure 2.8 (cette figure est tracée pour quatre conditions initiales  $\phi \in D(F, q_1, q_2)$  arbitrairement choisies) .

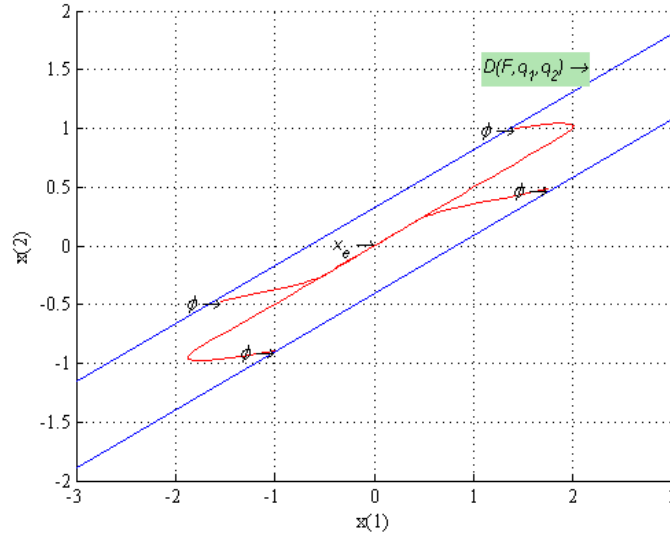


Figure 2.8 Domaine  $D(F, q_1, q_2)$  positivement invariant et le système en boucle fermée est asymptotiquement stable. Les solutions du système en boucle fermée sont données pour  $h = 1$ . (réalisé par un programme développé dans le cadre de cette thèse)

**Exemple 5.2** Soit le système (2.13) décrit par :

$$A = \begin{pmatrix} -0.57 & 0.93 \\ -0.46 & 0.82 \end{pmatrix}; A_d = \begin{pmatrix} -0.0803 & -0.0398 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

La contrainte imposée au départ sur l'entrée  $u$  est :  $-5 \leq u \leq 4$ .

Le gain  $F = (-6.092 \quad 12.315)$  et les matrices  $H$  et  $G$  sont respectivement données par  $-4.5$  et  $-0.0803$  (voir Hmamed et al., 1995).  $H$  et  $G$  sont des scalaires puisque la dimension du contrôle  $u$  est  $m = 1$ . La figure 2.9 présente l'évolution de la commande  $u$  au cours de temps  $t$ .

### 2.3 Observateurs intervalles

Dans cette section, nous présentons le concept d'observateurs intervalles, récemment développé, pour l'estimation des systèmes dynamiques linéaire. Ce concept est basé sur le contexte d'erreurs inconnues mais bornées (voir Gouzé et al., 2000). Les deux dynamiques des états estimés, majorant et minorant, du système original sont souvent données par des observateurs classiques du type Luenberger. L'objectif est de garantir, le long du temps, un encadrement de la trajectoire de l'état de système par les deux bornes, inférieure et supérieure, des états estimés. On cherche finalement un bon estimateur qui tends vers l'état du système original.

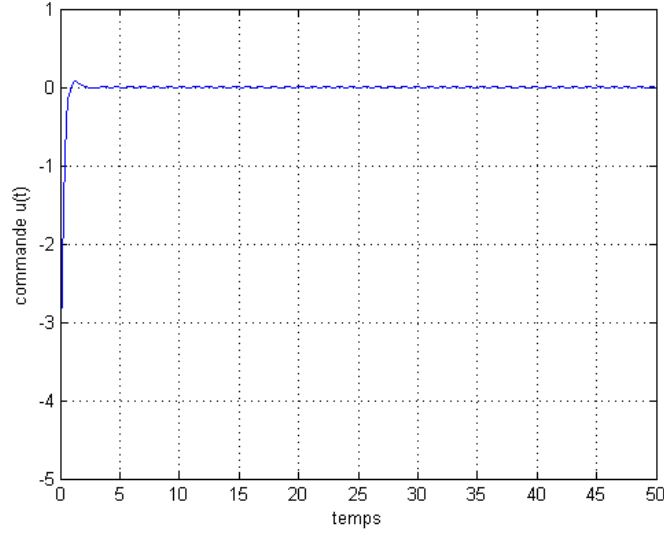


Figure 2.9 Commande sous contrainte  $-5 \leq u \leq 4$  (Réalisé par un programme développé dans le cadre de cette thèse. Condition initial  $\phi = \begin{pmatrix} 1.8594 \\ 0.4854 \end{pmatrix} \in D(F, q_1, q_2)$  et retard  $h = 1$ )

Pour expliquer les étapes de la construction d'un observateur intervalle, nous allons traiter par la suite, un cas simple (voir Gouzé et al., 2000) qui a été développé pour des systèmes sans retard décrits par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \psi(t, y(t)), \quad y(t) = Cx(t), \quad (2.15)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  représente la sortie et la fonction  $\psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction non-linéaire par rapport à  $y$  sachant qu'ils existent deux fonctions  $\bar{\psi}, \underline{\psi} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ , mesurables telles que :

$$\underline{\psi}(t, y) \leq \psi(t, y) \leq \bar{\psi}(t, y), \quad \text{pour tout } (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \quad (2.16)$$

L'observateur intervalle associé aux système (2.15) donné par (Gouzé et al., 2000) est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + \bar{\psi}(t, y(t)) + L(y(t) - C\bar{x}(t)) \\ \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{\psi}(t, y(t)) + L(y(t) - C\underline{x}(t)) \end{cases} \quad (2.17)$$

Notons bien que la construction de cette dynamique (2.17) nécessite quatre hypothèses :

*Hypothèse 1.* Condition (2.16) ;

*Hypothèse 2.*  $(A, C)$  est détectable ;

*Hypothèse 3.*  $(A - LC)$  est Metzler ;

*Hypothèse 4.*  $\underline{x}(t_0) \leq x(t_0) \leq \bar{x}(t_0)$ .

Le système (2.17) est dite observateur intervalle pour le système (2.15) si la dynamique d'erreurs d'observation  $(\underline{e}(t), \bar{e}(t))^T$  est positive  $(\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - x(t), \underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t))$ . D'après Gouzé et al. (2000) la dynamique de l'erreur d'observation supérieure et celle d'observation inférieure sont données par :

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{e}}(t) \\ \dot{\underline{e}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - LC & 0 \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}(t) \\ \underline{e}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{b}(t) \\ \underline{b}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

avec  $\bar{b}(t) = \bar{\psi}(t) - \psi(t)$  et  $\underline{b}(t) = \psi(t) - \underline{\psi}(t)$ . Or selon, l'hypothèse 1 le vecteur  $\begin{pmatrix} \bar{b}(t) \\ \underline{b}(t) \end{pmatrix}$  est positif et d'après l'hypothèse 3 et l'hypothèse 4, le vecteur d'erreurs  $(\underline{e}(t), \bar{e}(t))^T$  est toujours positifs pour tout  $t > 0$ . Cela implique que la relation  $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$  est remplie,  $\forall t > t_0$ .

En fin, la convergence d'observateur intervalle (2.17) est assurée par le théorème suivant :

**Theorem 2.3.1** ( Gouzé et al. (2000)). *s'il existe  $L$  tel que  $A - LC$  soit une matrice Metzler et stable et s'il existe un vecteur  $B$  positif constant tel que  $b(t) \leq B$ , alors l'erreur total  $e(t) = \bar{e}(t) - \underline{e}(t)$  converge asymptotiquement vers une valeur  $e_{\max}$  inférieure (terme par terme), avec :*

$$\begin{aligned} b(t) &= \bar{\psi}(t, y(t)) - \underline{\psi}(t, y(t)), \\ e_{\max}(t) &= -(A - LC)^{-1}B. \end{aligned}$$

### CHAPITRE 3 ORGANISATION GÉNÉRALE

Après l'introduction qui définit la problématique, les hypothèses et les objectifs, le chapitre 1 traite le cadre théorique et présente une revue assez pertinente sur la stabilité dépendante et indépendante des systèmes continus à retard. Des conditions nécessaires et suffisantes d'invariance positive indépendantes de retard sont présentées. Une technique de synthèse de la loi de commande par retour d'état est revue. Des travaux concernant le concept d'observabilité intervalle pour des systèmes dynamiques sans retard, ainsi que des méthodes de synthèse sont proposés. Cette thèse est présentée suivant une approche par article. Ainsi, les deux chapitres qui précèdent la conclusion et les annexes présentent les articles soumis à des publications avec comité de lecture dans le cadre de cette recherche. Un article présenté à la conférence, mis en annexe C, est un résultat de travail effectué dans le développement des deux articles de revues cités précédemment.

Le présent chapitre, expose la méthodologie de recherche et l'organisation générale de cette thèse. Le lien entre les articles qui constituent le corps de l'ensemble de ce travail est présenté. La cohérence de ces articles par rapport aux objectifs de cette recherche est discutée.

Le chapitre 4, présente le premier article intitulé " Robust Constrained Control of Linear Continuous-Time Delay System : Non-Linear Optimization Approach " est soumis pour publication au journal *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Dans cet article, nous avons étudié le problème de la stabilisation robuste pour les systèmes linéaires continus à retard discret constant dans le temps soumis à des contraintes. La synthèse de la loi de retour d'état est basée sur le concept d'invariance positive dépendante de retard. Une condition suffisante garantit la stabilité asymptotique robuste de système à retard en boucle fermée est donnée. La complexité de la résolution des équations matricielles avec des contraintes de formes d'inégalités vectorielles non-linéaires en déterminant un régulateur sous contrainte stabilisant le système avec un retard maximum nous a obligé de convertir ce problème en un problème de programmation non-linéaire. La procédure pour calculer la loi de retour d'état robuste sous contrainte est donnée par un algorithme.

La validation de notre approche est faite pour deux exemples, le premier traite le cas d'un polyèdre non borné (la dimension de vecteur d'entrée et inférieure à celle de vecteur d'état). Dans le deuxième exemple, le polyèdre est choisi borné, c'est le cas où les deux vecteurs ont la même dimension. Les résultats montrent la stabilité de système en boucle fermée pour

un retard maximum, sans que la loi de commande viole ses contraintes, ce qui appuie bien notre approche proposée pour la résolution de problème de régulation robuste des systèmes à retard sous contraintes.

Mais généralement, dans le cas pratique, l'état de système n'est pas entièrement accessible à la mesure. La commande dépend alors d'un état estimé, qu'on peut construire à partir des mesures d'entrée et de sortie. C'est une loi de commande par retour de sortie calculée à partir d'un observateur. D'autre part, le retard dans la plupart des applications réelles est un paramètre inconnu et variable dans le temps. Cela nous pousse à étudier le problème de la stabilisation des systèmes à retard, inconnu variable dans le temps, par retour de sortie sous contraintes basé sur la technique d'observateur intervalle tout en utilisant le concept d'invariance positive développé dans le chapitre précédent. Nous avons étudié ce problème dans le chapitre 5, qui est l'objet de notre deuxième article intitulé "Constrained Interval Observer-based Control for linear Continuous Time-Varying Delay Systems " soumis pour publication au journal *IEEE Transactions on Automatic Control*. Cet article décrit la deuxième partie des travaux planifiés pour cette thèse. Des conditions d'existence d'observateur intervalle associé au système à retard variable dans le temps sont données. Un algorithme lié au calcul de couple de gain d'observateur intervalle est établi. Une fonction de Lyapunov Krasovskii assurant la stabilité asymptotique de système en boucle fermée est proposée. Finalement la synthèse d'une loi de commande est donnée, un autre algorithme résumant la procédure de calcul de gain de contrôleur en se basant sur la technique de LMI est développé. Pour la simulation de notre approche, un exemple numérique est proposé. Les résultats obtenus montrent une belle performance de design de la loi de commande, sous contraintes, par retour de sortie basé sur l'observateur intervalle proposée dans cette thèse.

En annexe C, une condition nécessaire et suffisante d'invariance positive dépendante de retard, pour des systèmes linéaires continus à retard ayant des contraintes sur les états est donnée. La transformation de système à retard discret, système original, en un système à retard distribué en utilisant la formule de Newton-Leibniz permet de rendre cette condition moins restrictive que celle donnée dans la littérature. Un autre objectif de cet article était la détermination d'un intervalle maximale du retard pour que les trajectoires de système original initialisées dans l'ensemble des contraintes y restent et ne le quitteront jamais. Pour bien montrer l'effet de retard sur l'invariance positive des systèmes linéaires continus à retard, un exemple numérique est donnée.

## CHAPITRE 4    ARTICLE 1 : Robust Constrained Control of Linear Continuous-Time Delay System : Non-Linear Optimization Approach

H. Bensalah and L. Baron

Department of Mechanical Engineering, École Polytechnique de Montréal QC H3C 3A7,  
Canada

Submitted for publication to " International Journal of Robust and Nonlinear Control", 6  
January 2014

### 4.1 abstract

In this paper, the robust stabilization problem of linear continuous-time delay system with constrained control is studied. The synthesis of state-feedback controllers is solved based on delay-dependent positively invariant set of system in closed-loop. We first obtain the necessary and sufficient algebraic conditions with delay dependence allowing to obtain the largest positively invariant set of delay systems, then we convert the constrained control problem into a non-linear optimization problem. Numerical examples are given to illustrate this approach.

### keywords

Robust constrained stabilization ; non-linear constrained optimization problem ; positive invariance ; delay systems.

### 4.2 Introduction

Motivated by many practical problems, especially in the field of dynamic systems subject to constraints, the positive invariance approach have played a crucial role in analysis and synthesis of both discrete-time and continuous-time linear systems (see Khalil, 2002; Blanchini, 1999, and the references therein). Recently, it was shown that this approach can be exploited to obtain an explicit characterization of global switching behaviors of piecewise affine systems (Shen, 2012) and extended to the study of saturated singular switching systems (Benzaouia, 2012). A main problem inherent to constrained control systems is the possible presence of delay. It is well known that delay may cause undesirable behaviors to closed-loop systems, like instability and oscillation (Mahmoud, 2010; Niculescu, 2001). Indeed, this problem has



been an active area of research in control engineering for many years (Hmamed et al., 1995; Cao et al., 2002; Yakoubi and Chitour, 2007; Dambrine et al., 1995b). However, only a few works were interested in robust linear constrained regulation problem of continuous-time delay systems, while tacking into account the size of the delay (Hmamed, 2000; Dambrine et al., 1995a). Moreover, no methodology was introduced for finding the state feedback control law for this class of systems. Based on positive invariance concept, a technique that offers a solution to the latter problem is investigated here.

In this paper, robust constrained control of delay system problem is converted to non-linear optimization problem. By using delay-dependent positively invariant sets of continuous-time delay system, it becomes possible to obtain the control gain of linear feedback control law by solving a minimization problem.

This paper is structured as follows. In section 4.3, we define the positive invariance and give some preliminary results. In section 4.4, we derive necessary and sufficient algebraic conditions with delay dependence for a polyhedral set to be positively invariant of linear continuous-time delay system, a sufficient condition of delay stability is also given. The synthesis of robust stabilizing state feedback controller respecting control constraints is then presented in section 4.5. Finally two examples are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

*Notation* : If  $M$  denotes a matrix of  $\mathbb{R}^{n \times n}$  and  $x, y$  vectors of  $\mathbb{R}^n$  then :  $M^+$  (respectively  $M^-$ ) is the matrix whose components are given by  $M_{ij}^+ = \max(M_{ij}, 0)$  (respectively  $M_{ij}^- = \max(-M_{ij}, 0)$ ),  $M_1$  (respectively  $M_2$ ) is the matrix whose components are given by  $M_{ii}$  if  $i = j$  and  $M_{ij}^+$  if  $i \neq j$  (respectively 0 if  $i = j$  and  $M_{ij}^-$  if  $i \neq j$ ),  $|M|$  is the matrix whose components are given by  $|M_{ij}|$ , for  $i, j = 1, \dots, n$ , and  $\lambda_i(M)$  is an eigenvalue of  $M$ .  $\mathbb{I}_n$  is the identity matrix of  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .  $x \leq y$  if  $x_i \leq y_i$ , for  $i = 1, \dots, n$ ,  $\partial D$  is the boundary of the set  $D$  and  $IntD$  is the interior of set  $D$ .

### 4.3 Preliminary results

In this section, we present some definitions and useful results for the sequel. Consider the following linear continuous-time delay system

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Hz(t) + Gz(t - \tau), & \text{for } t > 0 \\ z(\theta) = \phi(\theta), & \text{for } \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (4.1)$$

where  $z \in \mathbb{R}^m$ ;  $\tau > 0$  is an unknown time delay and  $H, G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . It is assumed that for any continuous function  $\phi$  bounded and measurable, the time delay system (4.1) has unique

solution denoted by  $z(t, \phi)$ .

**Definition 4.3.1.** *A set  $D$  of  $\mathbb{R}^m$  is said to be positively invariant for motions of system (4.1), if for every  $\phi(\theta) \in D$  ( $\theta \in [-\tau, 0]$ ), the motion  $z(t, \phi) \in D$ , for every  $t > 0$ .*

Let us define the candidate invariant set by the following

$$D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2) = \left\{ z \in \mathbb{R}^m \mid -r_2 \leq z \leq r_1 \right\} \quad (4.2)$$

with  $r_1$  and  $r_2$  being  $m$  dimensional real vectors with positive components.

By using the Newton-Leibniz formula (Hale and Lunel, 1993), we have

$$\begin{aligned} z(t - \tau) &= z(t) - \int_{-\tau}^0 \dot{z}(t + s) ds \\ &= z(t) - \int_{-\tau}^0 \left[ Hz(t + s) + Gz(t - \tau + s) \right] ds \end{aligned} \quad (4.3)$$

Using (4.3), the original system (4.1) can be rewritten as

$$\dot{z}(t) = (H + G)z(t) - G \int_{-\tau}^0 \left[ Hz(t + s) + Gz(t - \tau + s) \right] ds \quad (4.4a)$$

under arbitrary continuous initial condition

$$z(\theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in [-2\tau, 0]. \quad (4.4b)$$

It is noteworthy that the solution of the system with discrete delay (4.1) is also the solution of system with distributed delay (4.4), and the asymptotic stability of the system (4.4) can guarantee the asymptotic stability of the original system (4.1) (see Hale and Lunel, 1993; Niculescu, 2001). For the sake of simplicity and without loss of generality, the system with distributed delay is now used to obtain the stability or, in this case, the positive invariant conditions for the original system with discrete delay (or point-wise delay) (4.1).

The polyhedral set  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  can be written as a set defined as

$$D(\mathbb{I}_{2m}, r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{2m} \mid y \leq r; r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.5)$$

where  $y(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ -z(t) \end{pmatrix}$ . Therefore, the following proposition is straightforward.

**Proposition 4.3.2.** *The positive invariance of polyhedral set  $D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2)$  for system (4.4)*

is equivalent to the positive invariance of the set  $D(\mathbb{I}_{2m}, r)$  for the system defined by

$$\dot{y}(t) = \tilde{M}y(t) + \int_{-\tau}^0 \left[ \tilde{Q}y(t+s) + \tilde{R}y(t-\tau+s) \right] ds. \quad (4.6a)$$

under arbitrary continuous initial condition

$$y(\theta) = \begin{pmatrix} \psi(\theta) \\ -\psi(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [-2\tau, 0]. \quad (4.6b)$$

with

$$M = H + G \quad (4.7a)$$

$$Q = GH \quad (4.7b)$$

$$R = G^2 \quad (4.7c)$$

where  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{Q}$  and  $\tilde{R}$  are such that

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q^- & Q^+ \\ Q^+ & Q^- \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} R^- & R^+ \\ R^+ & R^- \end{pmatrix}. \quad (4.7d)$$

**Proof 1.** By increasing the size of system (4.4) and observing that  $M = M_1 - M_2$ ,  $Q = Q^+ - Q^-$  and  $R = R^+ - R^-$  the associated system to polyhedral set  $D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2)$  can be defined by (4.6). Since the set  $D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2)$  can be written as (4.5), then the proof is completed.

**Remark 4.3.3.** The matrix  $\tilde{M}$  is Metzler, since its off diagonal components are nonnegative (Ait-Rami and Tadeo, 2007), and both matrices  $\tilde{Q}$  and  $\tilde{R}$  are nonnegative (Haddad and Chelleboina, 2005). In this case, the system (4.6) can be seen as a positive system for any nonnegative initial condition  $0 \leq y(\theta) \leq r$ ,  $\theta \in [-2\tau, 0]$  (Kaczorek, 2006).

## 4.4 Delay dependence positively invariant and stability conditions

### 4.4.1 Delay-dependent asymmetrical positively invariant set

A necessary and sufficient condition for the non-symmetrical domain  $D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2)$  to be positively invariant for original system (4.1) with delay dependence is herein proposed.

**Theorem 4.4.1.** The polyhedral set  $D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2)$  defined by (4.2) is a delay-dependent positively invariant set for system (4.1) if and only if the following condition holds

$$\left( \tilde{M} + \tau(\tilde{Q} + \tilde{R}) \right) r \leq 0 \quad (4.8)$$

where  $\widetilde{M}$ ,  $\widetilde{Q}$ ,  $\widetilde{R}$  are given in (4.7d), and  $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ .

**Proof 2. Necessity :** We show this by contradiction. Suppose  $D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2)$  is positively invariant for system (4.1) but (4.8) does not hold, then there exists  $i \in [1, m]$  such that

$$M_{ii}r_1^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (M_{ij}^+ r_1^j + M_{ij}^- r_2^j) + \tau \sum_{j=1}^m \left( (Q_{ij}^- + R_{ij}^-) r_1^j + (Q_{ij}^+ + R_{ij}^+) r_2^j \right) > 0 \quad (4.9a)$$

Consider the particular states  $z_p(t)$ ,  $z_p(t+s)$  and  $z_p(t-\tau+s) \in \partial D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2)$  ( $-\tau \leq s \leq 0$ ) such that

$$z_p(t) = \begin{cases} r_1^i, & \text{for } j = i \\ r_1^j, & \text{if } M_{ij} > 0 \text{ for } j \neq i \\ -r_2^j, & \text{if } M_{ij} < 0 \text{ for } j \neq i \\ 0, & \text{if } M_{ij} = 0 \end{cases}, \quad z_p(t+s) = \begin{cases} r_1^j, & \text{if } Q_{ij} < 0 \\ r_2^j, & \text{if } Q_{ij} > 0 \\ 0, & \text{if } Q_{ij} = 0 \end{cases} \quad j = 1, \dots, m \quad \text{and}$$

$$z_p(t-\tau+s) = \begin{cases} r_1^j, & \text{if } R_{ij} < 0 \\ r_2^j, & \text{if } R_{ij} > 0 \\ 0, & \text{if } R_{ij} = 0 \end{cases} \quad j = 1, \dots, m \quad (4.9b)$$

By using the system (4.4), the derivative of  $i^{\text{th}}$  component of particular vector  $z_p(t)$ ,  $\forall t > 0$ , can satisfy the following

$$\dot{z}_{p_i}(t) = M_{ii}r_1^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (M_{ij}^+ r_1^j + M_{ij}^- r_2^j) + \tau \sum_{j=1}^m \left( (Q_{ij}^- + R_{ij}^-) r_1^j + (Q_{ij}^+ + R_{ij}^+) r_2^j \right) > 0$$

this implies that for all scalar  $\varepsilon > 0$ ,  $z_{p_i}(t+\varepsilon) > z_{p_i}(t)$ . Hence  $z_{p_i}(t+\varepsilon) \notin D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2)$ , a contradiction.

**Sufficiency :** It is shown in proposition C.0.2, that system (4.6) is associated to set  $D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2)$ . It follows from Lagrange's formula that the solution of (4.6) is given by

$$y(t) = e^{\widetilde{M}t} y(0) + \int_0^t e^{\widetilde{M}(t-\theta)} \left( \int_{-\tau}^0 (\widetilde{Q}y(\theta+s) + \widetilde{R}y(\theta+s-\tau)) ds \right) d\theta; \quad t > 0.$$

where  $\widetilde{M}$ ,  $\widetilde{Q}$  and  $\widetilde{R}$  are given by (4.7d). If we consider  $y(s) \leq r$  for  $s \in [-2\tau, 0]$ , then in same way found in (El'sgol'ts and Norkin, 1973) and (Hmamed et al., 1995), we obtain  $y(t) \leq r$  on the intervals  $[0, 2\tau]$ ,  $[2\tau, 4\tau]$ , ...

If there exist a vector  $\rho > 0$  such that  $r_1 = r_2 = \rho$ , then the asymmetric set  $D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2)$  can be transformed to symmetric set  $D(\mathbb{I}_m, \rho, \rho)$  such that

$$D(\mathbb{I}_m, \rho, \rho) = \left\{ z \in \mathbb{R}^m \mid -\rho \leq z \leq \rho, \rho > 0 \right\}$$

Thus symmetrical case can be easily deduced and the following corollary is given by

**Corollary 4.4.2.** *The polyhedral set  $D(\mathbb{I}_m, \rho, \rho)$  is a delay-dependent positively invariant set for system (4.1) if and only if the following condition holds*

$$\left( \overline{M} + \tau(|Q| + |R|) \right) \rho \leq 0 \quad (4.10)$$

where  $\overline{M}$  is the matrix whose components are given by  $M_{ii}$  if  $i = j$  and  $|M_{ij}|$  if  $i \neq j$

**Proof 3.** *By observing again that  $\overline{M} = M_1 + M_2$ ,  $|Q| = Q^+ + Q^-$ , and  $|R| = R^+ + R^-$ , the condition (4.8) becomes the condition (4.10), proving our result.*

**Remark 4.4.3.** *When delay time  $\tau = 0$ , the condition (4.8) becomes equal to  $\widetilde{M}r \leq 0$ , where  $M = H + G$ . The result of positive invariance of the polyhedral set  $D(\mathbb{I}_m, r_1, r_2)$  with respect to continuous system without delay is obviously obtained (Benzaouia and Hmamed, 1993).*

#### 4.4.2 Delay-dependent stability condition

**Corollary 4.4.4.** *If there exist a nonnegative vector  $q \in \mathbb{R}^{2m}$  such that :*

$$\left( \widetilde{M} + \tau(\widetilde{Q} + \widetilde{R}) \right) q < 0 \quad (4.11)$$

then system (4.1) is asymptotically stable with  $\widetilde{M}$ ,  $\widetilde{Q}$  and  $\widetilde{R}$ , are given as in proposition C.0.2

**Proof 4.** *See appendix A.*

Let us pre-multiply the inequality (4.11) by  $q^T$ , which gives

$$q^T \left( \widetilde{M} + \tau(\widetilde{Q} + \widetilde{R}) \right) q < 0 \quad (4.12)$$

Hence, in symmetrical case the inequality (4.12) can be easily written as

$$q^T \left( \overline{M} + \tau(|Q| + |R|) \right) q < 0 \quad (4.13)$$

this implies that a matrix  $K = \overline{M} + \tau(|Q| + |R|)$  is negative-definite that is all real part of the eigenvalues of the matrix  $K$  are negative. This is a delay-dependent asymptotic sta-

bility criteria given by theorem 2 in (Goubet-Bartholoméus et al., 1997) in the case of no disturbance delay system and without decomposing the delayed matrix  $G$  defined in system (4.1).

#### 4.5 Constrained regulator of unknown delay differential system

In this section, we apply the main result of the previous section for controlling the differential non-autonomous system, that is

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t), & \text{for } t > 0 \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \text{for } \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (4.14)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $\tau > 0$  is an unknown time delay,  $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  and  $u \in \Delta \subset \mathbb{R}^m$  is the constrained control, such that :

$$\Delta = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \mid -r_2 \leq u \leq r_1, r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^m \right\} \quad (4.15)$$

When a linear memoryless state feedback

$$u(t) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \text{with } \text{rank}(F) = m \leq n \quad (4.16)$$

is applied to the non-autonomous system, the resulting closed-loop system reads

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + A_d x(t - \tau) \quad (4.17)$$

**Assumption 4.5.1.** *The pair  $(A + A_d, B)$  is stabilizable.*

Now, the problem becomes how to design a matrix  $F$  such that

1. the closed-loop time-delay system (4.17) is robustly asymptotically stable for all  $0 < \tau \leq \tau_{max}$ ;
2. the delay-dependent positively invariant set with respect to closed-loop system is the largest;
3. the control constraints (4.15) is respected.

**Remark 4.5.2.** *(i) Generally the form of the feedback law (4.15, 4.16) can be presented in two possible cases : The first one, is where the saturation takes effect, while the second one is where the controller works in region of linear behavior, without any saturation. In this paper, only the linear model is considered.*

(ii) *The above assumption, which is equivalent to the stabilization of the system (4.17) without time-delay, is necessary for the existence of a stabilizing linear memoryless state feedback law.*

On the continuity properties with respect to the delay parameter (Niculescu, 2001), the matrix  $F$  is firstly chosen in order to stabilize the system (4.17) free of delay,  $\tau = 0$ , by virtue the second part of remark (4.5.2), namely,

$$\mathcal{R}e(\lambda_i(A + A_d + BF)) < 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.18)$$

then to guarantee the asymptotic stability of the system with delay-dependence, the stability is ensured for a delay-interval of the form  $[0, \tau_{max})$ , such as

$$\det(s\mathbb{I}_n - A - A_d e^{-s\tau} - BF) \neq 0, \quad \mathcal{R}e(s) \geq 0, \quad \tau \text{ fixed} \quad (4.19)$$

At the same time, the choice of this robust asymptotically stable control law of unconstrained closed-loop system (4.17) has to be satisfied (4.15). This is only possible if for every  $\phi(s) \in D(F, r_1, r_2)$  ( $s \in [-\tau, 0]$ ), the motion  $x(t, \phi) \in D(F, r_1, r_2)$ ,  $\forall t > 0$ , where

$$D(F, r_1, r_2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid -r_2 \leq Fx \leq r_1 \right\} \quad (4.20)$$

with  $r_1$  and  $r_2$  being  $m$  dimensional real vectors with positive components. So, one way to solve this problem is to give a necessary and sufficient conditions under which the asymmetrical polyhedral set (4.20) is delay-dependent positively invariant for system (4.17). However, under assumption (4.16), positive invariance of  $D(F, r_1, r_2)$  with respect to system (4.17) can be characterized as follows.

**Proposition 4.5.3.** *The polyhedral set (4.20) is delay-dependent positively invariant for system (4.17) if and only if there exist two square matrices  $H$  and  $G$  in  $\mathbb{R}^{m \times m}$ , such that*

$$F(A + BF) = HF \quad (4.21a)$$

$$FA_d = GF \quad (4.21b)$$

and

$$\left( \widetilde{M} + \tau(\widetilde{Q} + \widetilde{R}) \right) r \leq 0 \quad (4.21c)$$

where matrices  $\widetilde{M}$ ,  $\widetilde{Q}$ ,  $\widetilde{R}$  and vector  $r$  are given in theorem 4.4.1.

**Proof 5.** *Let us use theorem 4.4.1 and the change in state  $z(t) = Fx(t)$ , the proof follows*

along similar lines of the proof given by (Hmamed et al., 1995) and here the details are omitted.

Applying now proposition 4.5.3, we obtain the following theorem.

**Theorem 4.5.4.** *The closed-loop system (4.17) and (4.15,4.16) with assumption 4.5.1 is robustly asymptotically stable for every  $\phi(\theta) \in D(F, r_1, r_2)$ ,  $\theta \in [-\tau, 0]$  if there exist matrices  $H, G$  in  $\mathbb{R}^{m \times m}$  and a scalar  $\delta > 0$ , such that*

$$F(A + BF) = HF \quad (4.22a)$$

$$FA_d = GF \quad (4.22b)$$

and

$$\left(\tilde{M} + \tau(\tilde{Q} + \tilde{R})\right)r \leq -\delta r \quad (4.22c)$$

**Proof 6.** *According to (4.22c) and using the same proof given in corollary 4.4.4, one can deduce*

$$D^+(V(x(t))) \leq -\delta V(x(t)) \quad (4.23)$$

where  $D^+(V(x(t)))$  and  $V(x(t))$  are defined by (A.4) and (A.1), respectively. The rest of the proof is readily obtained from proposition 4.5.3. This completes the proof.

The application of the theorem 4.5.4 to solve the robust constrained control, only requires the existence of a maximum delay guaranteed the asymptotic stability of closed loop system and a feasible solution  $F$  satisfying all relations of theorem 4.5.4. The problem can be seen as an optimization problem of both linear and non linear constrained. Therefore, we construct the following Non-Linear Programming (NLP) with  $\tau$  the objective function to be maximized.

$$\max(\tau) \quad (4.24a)$$

subject to



$$-\tau < 0 \quad (4.24b)$$

$$-\delta < 0 \quad (4.24c)$$

$$F(A + BF) = HF \quad (4.24d)$$

$$FA_d = GF \quad (4.24e)$$

$$\left(\tilde{M} + \tau(\tilde{Q} + \tilde{R})\right)r \leq -\delta r \quad (4.24f)$$

$$\mathcal{R}e(\lambda_i(A + A_d + BF)) < 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.24g)$$

There are many numerical algorithms for solving the NLP problem, such as Lagrange multipliers technique, interior point method and so on (see Economou et al. (1994) and the references therein). In many cases, the main difficulty of this problem lies in identifying the feasible region where the constraints are satisfied. However, in this section a non-linear programming approach is proposed to solve (4.21a), (4.21b) and (4.21c).

---

Algorithm 1 parametric procedure to find a robust constrained state feedback law

- 1: Choose a matrix  $G$  in  $\mathbb{R}^{m \times m}$  according to (4.27).
  - 2: Compute the parametric solution  $F$  of equation (4.25)
  - 3:  $F \leftarrow \text{vec}(F) = \sum_{i=1}^l \alpha_i v_i$
  - 4: Solve the algebraic equation (4.24d)
  - 5:  $H \leftarrow FAF^T \left( FF^T \right)^{-1} + FB \quad \triangleright \text{rank}(F) = m$
  - 6: **for** a given vector  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \neq 0$  **do**
  - 7:      $\tilde{M} \leftarrow M \leftarrow H + G$ ;
  - 8:      $\tilde{Q} \leftarrow Q \leftarrow GH$ ;
  - 9:      $\tilde{R} \leftarrow R \leftarrow G^2$ ;
  - 10:     Check the feasibility of  $\Pi$
  - 11:      $\Pi = \left\{ (\tau, \delta, \alpha) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \mid (4.24f), (4.24g) \right\}$
  - 12:     **if**  $\Pi$  is feasible **then**
  - 13:         **return** The maximal time delay  $\tau_{\max}$ , the scalar  $\delta$
  - 14:         and the vector  $\alpha \quad \triangleright F$  is obtained
  - 15:     **else**
  - 16:         Change the vector  $\alpha$
  - 17:     **end if**
  - 18: **end for**
-

## Non-Linear Programming Technique

It is worth noting that (4.24e) is equivalent to

$$S \text{vec}(F) = 0 \quad (4.25)$$

where  $S = \left( A_d^T \otimes \mathbb{I}_m - \mathbb{I}_n \otimes G \right)$ ,  $\otimes$  denotes for the Kronecker product and  $\text{vec}(F)$  is vector valued function of matrix  $F$  defined as  $\text{vec}(F) = \left( F_{11} \ F_{21} \ \dots \ F_{m1} \ \dots \ F_{1n} \ F_{2n} \ \dots \ F_{mn} \right)^T$ . The solution  $F$  of system (4.25) can easily be obtained by finding a basis  $(v_1, v_2, \dots, v_l)$  for the null subspace of the matrix  $S$ ,  $\ker S$ , that is for all a scalar  $\alpha_i \neq 0$ ,  $i = 1 \dots l$

$$\text{vec}(F) = \sum_{i=1}^l \alpha_i v_i, \quad l = \dim(\ker S) \quad (4.26)$$

**Remark 4.5.5.** (i) *The equation (4.25) have a nontrivial solution if and only if (Neudecker, 1969)*

$$\lambda_i(A_d) - \lambda_j(G) = 0 \quad \text{for some } i \text{ and } j \quad (4.27)$$

(ii) *The solution (4.26) is not unique, so the matrix  $F$  is selected by choosing the vector  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ .*

Hence, by choosing a matrix  $G$  satisfying (4.27), by virtue the above remark, solution (4.26) is straightforward to obtain from equation (4.25). Note that matrix  $F$  is full rank and  $FF^T$  is invertible, solve the equality (4.24d) giving matrix  $H$  such as

$$H = FAF^T \left( FF^T \right)^{-1} + FB \quad (4.28)$$

The NLP can be solved whenever it is possible to find  $(\tau, \alpha, \delta)$  such that all conditions (4.24b)–(4.24g) are satisfied. This numerical procedure discussed above is summarized in algorithm 1 which is implemented in MATLAB with the *fmincon* function from Optimization Toolbox (Coleman et al., 1999).

## 4.6 Examples

In order to apply the results of theorem 4.5.4, two examples are considered in this section to show the effectiveness of the proposed method. The first one deals with the case where polyhedral set  $D(F, r_1, r_2)$  (4.20) is a unbounded set ( $m < n$ ). The second one aims the bounded set case, when  $m = n$ , this is in general the practical case.

#### 4.6.1 Unbounded case( $m < n$ )

Let us consider the following system :

$$A = \begin{pmatrix} -0.57 & 0.93 \\ -0.46 & 0.82 \end{pmatrix}, \quad A_d = \begin{pmatrix} -0.0803 & -0.0398 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

with constrained control as  $-1.6 \leq u \leq 1.6$ .

The two eigenvalues of  $(A + A_d)$  are given by  $\lambda_1 = -0.21$  and  $\lambda_2 = 0.2797$ . Note that  $\lambda_2 > 0$ , therefore the open-loop system without delay is unstable. We address the problem of finding a state feedback controller for stabilizing the closed-loop system with free delay and guaranteeing stability of the above system such that the constrained control is satisfied. Let us choose  $G = -0.0803$  satisfying (4.27). Compute the solution of (4.25), the state feedback  $F$  is given by :

$$F = \begin{pmatrix} -0.4436\alpha_1 & 0.8962\alpha_1 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Note that in this case  $\alpha = \alpha_1 \neq 0$  is a scalar and by solving (4.24d) we find  $H$  as

$$H = 0.3596 - 0.354\alpha_1 \quad (4.31)$$

At this step, we properly set the NLP problem. We obtain the largest bound of time delay for which the system is robustly asymptotically stable satisfying the constrained control. By applying algorithm 1, we find the feasibility of the conditions (4.24b) to (4.24g) with following upper bound  $\tau_{\max} \leq 8.4438$  and  $\alpha_1 = 0.9740$ . The control law is obtained according the above results stabilizing the closed-loop system without delay

$$u(t) = -0.4327x_1(t) + 0.874x_2(t) \quad (4.32)$$

The eigenvalues of the closed-loop system with free delay are  $\lambda_1 = -0.2099$  and  $\lambda_2 = -0.0656$ . Obviously, as shown in Fig.4.1, the stability is guaranteed for the closed-loop system with delay within the constraints.

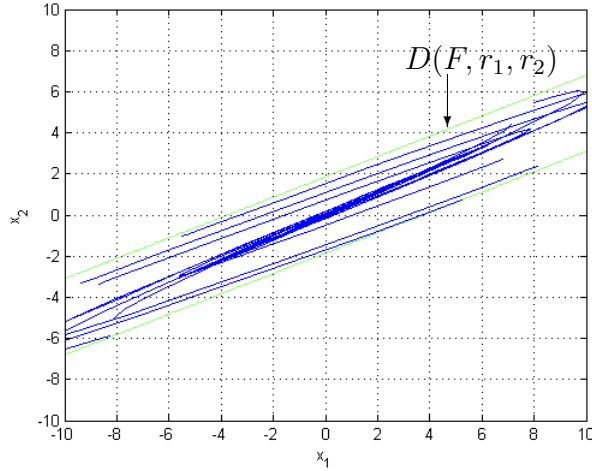


Figure 4.1 State trajectories of system (4.29) in closed-loop are obtained for  $\tau = \tau_{\max} = 8.4438$  with random initial values emanating from  $D(F, r_1, r_2)$  ( $r_1 = r_2 = 1.6$ ).  $D(F, r_1, r_2)$  is an unbounded positively invariant set.

#### 4.6.2 Bounded case ( $m = n$ )

Now, we simulate the following third order system

$$A = \begin{pmatrix} -4.9524 & 2.2280 & 0 \\ -0.0252 & -2.5464 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_d = \begin{pmatrix} -2.3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

The control satisfy the following constraints

$$-r_2 \leq u \leq r_1$$

with

$$r_1 = (0.0031 \ 5.25 \ 14.4)^T \quad \text{and} \quad r_2 = (0.0031 \ 5.25 \ 8.72)^T.$$

Note that the open system without delay is unstable, its eigenvalues are

$$\lambda_1 = -7.2303, \quad \lambda_2 = -3.5685, \quad \lambda_3 = 0.5000$$

If we choose matrix  $G$  satisfying (4.27) as

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & -2.3 \end{pmatrix},$$

the parametric solution of (4.25) is given as

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -0.9285\alpha_1 & 0.3714\alpha_1 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 \\ -0.7917\alpha_3 & 0.609\alpha_3 & 0.048\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Through the same technical developed for the unbounded case, we find the upper bound of delay  $\tau_{\max} \leq 0.2529$  and the vector  $\alpha = (-0.0014 \quad 2.3367 \quad 1.0121)$  corresponding to matrix  $H$  given by

$$H = \begin{pmatrix} -2.5654 & 0.0011 & 0 \\ -2.337 & -3.3363 & 0 \\ -239.9906 & -0.1643 & -4.9325 \end{pmatrix}$$

Finally, the asymptotic stability and the constrained control are guaranteed, see Fig.4.2 for the evolution of the states of the closed-loop system

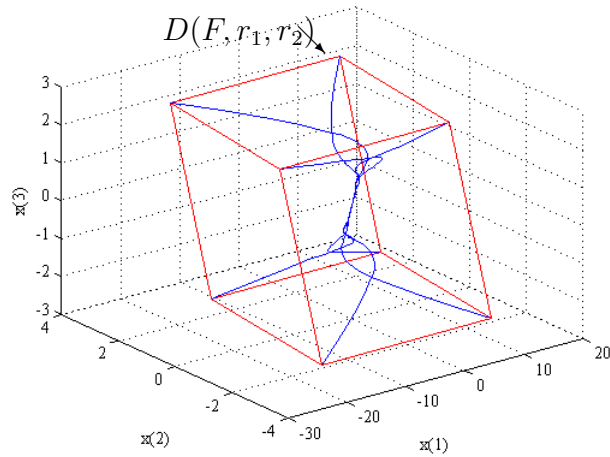


Figure 4.2 State trajectories of system (4.33) in closed-loop are obtained for  $\tau = \tau_{\max} = 0.2529$  with initial values emanating from the vertices of the set  $D(F, r_1, r_2)$ .  $D(F, r_1, r_2)$  is a bounded positively invariant set.

#### 4.7 Conclusion

In this paper, the necessary and sufficient algebraic conditions with delay dependence for a given polyhedral set to be positively invariant for linear continuous-time delay system are established. The robust constrained control of such system is studied. State feedback controller of linear constrained system is designed by solving a non-linear optimization problem under non linear equality and inequality constraints. An algorithm is given allowing the computation of such controller.

## CHAPITRE 5    ARTICLE 2 : Constrained Interval Observer-based Control for linear Continuous Time-Varying Delay Systems

H. Bensalah and L. Baron

Department of Mechanical Engineering, École Polytechnique de Montréal QC H3C 3A7,  
Canada

Submitted for publication to " IEEE Transactions on Automatic Control ", 26 march 2015.

### 5.1 abstract

The output stabilization problem for time-varying delay systems with constrained control is studied. First, by a coordinates transformation, an interval state observer is designed. Both matrices observer gain, the lower and the upper, are obtained by solving a Sylvester's matrix equation. Second, the interval observer allows to design a linear controller providing a novel delay-dependent conditions to guarantee at the same time the asymptotic stability and the constraints. the control design procedure is based on Linear Matrix Inequalities (LMI). Numerical example is given to illustrate this approach.

### keywords

Time-varying delay systems, actuator saturation, output feedback, interval observers, LMI.

### 5.2 Introduction

In practical applications, it is well known that, the control limitation is present in almost all physical systems and the state variables of the dynamical systems are often not all accessible. However, if this limitation is ignored or not treated carefully in the design, the stability of closed loop system and its performance cannot be guaranteed, even for linear systems Tarbouriech. et al. (2011). In order to avoid these undesirable behaviors, some considerable research has been carried out on the control of linear systems subject to input constraints, with or without time delay, see for example, Blanchini (1999) and references therein. Hence there are two main approaches in the literature dealing with the problem of performance and stability of dynamical constrained control systems. The first one considers the effect of saturation while guaranteeing asymptotic stability Galeani et al. (2009). The second one, so-called positive invariance approach, is based on the design of the control law which works

inside a region of linear behavior where saturations do not occur Benzaouia and Hmamed (1993).

On the other hand, time-varying delay systems constitute a special class of dynamical systems, they are abundant in nature, frequently encountered in mechanic, robotic, engineering, chemical and economic systems, see for example, Richard (2003), Wu et al. (2010). Time-varying delay is often lead to instability or performance degradation of corresponding systems. For this reason, in the last few years a considerable attention has been devoted to the time varying delay systems with input constraint.

Most of the works related to positive invariance concept have been developed for time delay systems with constrained control. In Hmamed et al. (1995) and Hennes and Tarbouriech (1997), the regulator problem of continuous time delay system with symmetric and non-symmetric constrained control has been formulated and solved, where the synthesis of state feedback has been handled. Since the state of the system is often not fully available for measurement, output feedback has to be pursued, which is the general standard case in most practical problems. Thus, many works found in the literature have dealt with the output feedback constrained control Benzaouia et al. (2010); Xu et al. (2012). It is worth stressing that this problem has been recognized as a hard problem and is still one the open problems in control theory Blanchini and Miani (2008), Benzaouia (2012).

Motivated by the above discussion, we deal with the problem of dynamic output feedback for unknown time-varying delay systems subject to actuator saturations. The major aim of this paper is to design an interval state observer for a given time-varying delay system with constrained control. The interval observer approach is recently developed and applied in many works, see for example Gouzé et al. (2000); Rapaport and Gouzé (2003); Tarek et al. (2012); Mazenc and Bernard (2011); Efimov. et al. (2013a), and Polyakov et al. (2013). This technique evaluates at any time lower and upper estimates of the system state, provided that bounds on the initial conditions are known Tarek et al. (2012). With those properties, the closed-loop stabilization can be guaranteed Rapaport and Harmand (2002). This paper also presents, once the information provided by the interval observer, the novel delay-dependent conditions for designing linear controller with saturation constraints, thus ensuring asymptotic stabilization for time varying delay systems. By constructing a Lyapunov-Krasovskii functional with linear matrix inequalities (LMIs) techniques, the bound of time delay to stabilize the system have been established. To the best of author's knowledge, there are really few literature about output stabilization problem for dynamical systems with actuator saturations using interval observer technique, not to mention the case of time-varying delay.

This paper is organized as follows. The problem statement and some preliminaries are given



in Section 5.3. The interval observer for time-varying delay systems is formulated in Section 5.4 with an algorithm to compute the upper and lower observer gains, which is based on a system of Sylvester matrix equation. The controller design is proposed in Section 5.5 with an algorithm to estimate the maximum admissible delay to keep the stabilization of the system. Finally, a numerical example is given in Section 5.6 to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

*Notation* : Let  $M$  and  $N$  be two matrices of  $\mathbb{R}^{n \times n}$  and  $x, y$  two vectors of  $\mathbb{R}^n$ . Then :  $M^+$  (respectively  $M^-$ ) is the matrix whose components are given by  $M_{ij}^+ = \max(M_{ij}, 0)$  (respectively  $M_{ij}^- = \max(-M_{ij}, 0)$ ). Moreover,  $|M|$  is the matrix, whose components are given by  $|M_{ij}|$ , for  $i, j = 1, \dots, n$ , and  $\lambda_i(M)$  is an eigenvalue of  $M$ .  $\mathbb{I}_n$  is the identity matrix of  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . When  $M$  and  $N$  are symmetric, the notation  $M \succeq N$  (resp.,  $M \succ N$ ), means that  $M - N$  is positive semidefinite (resp., positive definite). The symbol  $\star$  stands for symmetric block in matrix inequalities.  $M^T$  and  $\text{diag}(M)$  denote respectively, the transpose and the diagonal of  $M$ .  $x \leq y$  if  $x_i \leq y_i$ , for  $i = 1, \dots, n$ ,  $\partial D$  is the boundary of the set  $D$  and  $\text{Int}D$  is the interior of the set  $D$ .  $\mathcal{C}_{h_m}^n = \mathcal{C}([-h_m, 0], \mathbb{R}^n)$  is the set of continuous maps from  $[-h_m, 0]$  into  $\mathbb{R}^n$ .

### 5.3 Problem statement and preliminary results

Consider the following state-space linear system with time-varying delays :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - h(t)) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad t > 0, \quad (5.1)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  are, respectively the system state, the control input and the measured output. Moreover  $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  are known real constant matrices and  $h(t)$  is the unknown time varying delay, but bounded by :

$$0 \leq h(t) \leq h_m \quad \dot{h}(t) \leq \mu < 1 \quad (5.2)$$

The initial conditions of system (5.1) is given by :

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta) \text{ for } \theta \in [-h_m, 0], \quad (5.3)$$

where  $\phi(\cdot) \in \mathcal{C}_{h_m}^n$  is a vector of differentiable functions of initial values, and  $u$  is the constrained control satisfying

$$u \in \Omega = \{u \in \mathbb{R}^m : |u_i| \leq u_{\max_i}, i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}^m \quad (5.4)$$

For the sake of simplicity,  $x(t_0 + \theta)$  will be denoted as  $x_0$  in the sequel, and we assume that the set of admissible initial conditions of system (5.1) is bounded and known such that

$$\underline{x}_0 \leq x_0 \leq \bar{x}_0 \quad (5.5)$$

where  $\underline{x}_0, \bar{x}_0 \in \mathcal{C}_{h_m}^n$ .

The following assumption is needed throughout the paper.

**Assumption 5.3.1.** *The pair  $(A + A_d, B)$  is controllable and the pair  $(A + A_d, C)$  is observable.*

Assumption 5.3.1, which is equivalent to the stabilization of the system (5.1–5.5) without delay, is a necessary condition for the existence of a linear stabilizing dynamic output feedback control law for the system (5.1–5.5). Consequently, we address the following stabilization problem : Design a control law such that the system (5.1–5.3) is stabilized for all initial values satisfying the relation (5.5) while respecting the control input constraint (5.4). This problem is solved in two steps. First, design an interval observer for system (5.1–5.5)(see section 5.4), second we propose a method to design a control law for a given interval observers(see section 5.5).

Now, we recall some standard definitions of delayed systems, which will be useful the foregoing analysis and construction of the interval observer for system (5.1–5.5)(see for example Kaczorek (2006), Benzaouia et al. (2010), Efimov. et al. (2013a), et Ait-Rami et al. (2007)).

**Definition 5.3.2.** *A real square matrix  $A$  is called a positive matrix if all its elements are nonnegative, that is  $A_{ij} \geq 0$ .*

**Definition 5.3.3.** *A real square matrix  $A$  is called a Metzler matrix if all its off-diagonal elements are nonnegative, that is  $A_{ij} \geq 0$ , for  $i \neq j$ .*

**Definition 5.3.4.** *Consider the following delay system :*

$$\dot{\chi}(t) = f(t, \chi(t), \chi(t - h(t))), \quad (5.6)$$

*with an initial condition  $\phi(\theta) \in \mathcal{C}_{h_m}^n$ . The system (5.6) is said to be positive if for every initial condition  $\phi(\theta) \geq 0$ ,  $\theta \in [-h_m, 0]$ , the solution  $\chi(t)$  of (5.6) is positive, for all  $t \geq 0$ .*

**Definition 5.3.5.** An interval observer for system (5.1–5.5) is a pair of lower and upper estimation  $\{\bar{x}(t), \underline{x}(t)\}$  of the state  $x(t)$  such that

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t) \text{ for all } t > 0. \quad (5.7)$$

#### 5.4 Interval observer design

In this section, an interval observer is designed for time-varying delay system based on coordinate transformation of system (5.1). It has been shown in recent works for linear and nonlinear systems without delay Tarek et al. (2012), Mazenc and Bernard (2011) that by introducing the change of variables, the interval observer can be developed and guaranteed the positivity of the upper and lower observations errors. A full interval observer is developed of this paper. It is noteworthy that this result can be easily extended to reduced-order interval observer. For system (5.1), there exist a non-singular matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  such that

$$z = M^{-1}x, \quad (5.8)$$

Then from (5.8) the interval observer for system (5.1–5.5) is designed as follows

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}(t) = (\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C})\bar{z}(t) + \tilde{A}_d\bar{z}(t - h(t)) + \tilde{B}u(t) + \tilde{L}\tilde{C}z(t) \\ \dot{\underline{z}}(t) = (\tilde{A} - \underline{L}\tilde{C})\underline{z}(t) + \tilde{A}_d\underline{z}(t - h(t)) + \tilde{B}u(t) + \underline{L}\tilde{C}z(t), \end{cases} \quad (5.9)$$

where  $\tilde{A} = M^{-1}AM$ ,  $\tilde{A}_d = M^{-1}A_dM$ ,  $\tilde{B} = M^{-1}B$ ,  $\tilde{C} = CM$ , and  $\tilde{L} = M^{-1}\bar{L}$ ,  $\underline{L} = M^{-1}\underline{L}$ , with  $\bar{L}, \underline{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  are the observed gains to be determined. The initial conditions of (5.9) is given by  $\bar{z}(t + \theta) \in \mathcal{C}_{h_m}^n$  and  $\underline{z}(t + \theta) \in \mathcal{C}_{h_m}^n$ , for all  $\theta \in [-h_m, 0]$ , which are denoted, respectively, by  $\bar{z}_0$  and  $\underline{z}_0$ .

**Remark 5.4.1.** It is noteworthy that in the new coordinates defined above, system (5.1) can be presented as follows

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{A}_d z(t - h(t)) + \tilde{B}u(t), \quad y(t) = \tilde{C}z(t), \quad t > 0, \quad (5.10)$$

with the initial condition given by  $z(t_0 + \theta) \in \mathcal{C}_{h_m}^n$ , for all  $\theta \in [-h_m, 0]$ , denoted by  $z_0$ .

**Proposition 5.4.2.** Assume that (5.5) and assumption 5.3.1 hold, and for all  $z_0, \bar{z}_0, \underline{z}_0 \in \mathcal{C}_{h_m}^n$  the constraint  $\underline{z}_0 \leq z_0 \leq \bar{z}_0$  is satisfied. If there exist  $\bar{L}, \underline{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  and a non-singular matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  such that the following are true :

1.  $\tilde{A}_d$  is positive ;

2.  $\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$  and  $\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$  are Metzler;
3.  $(\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} + \tilde{A}_d)$  and  $(\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} + \tilde{A}_d)$  are Hurwitz;

then for any control law  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ , we have  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  for  $t > 0$ , with each state  $\bar{z}(t)$  and  $\underline{z}(t)$  of observer (5.9) converges to  $z(t)$  that is given by (5.8), where  $x(t)$  is solution of (5.1). Furthermore, the interval estimation of  $x(t)$  is given by :

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = M^+\bar{z}(t) - M^-\underline{z}(t) \\ \underline{x}(t) = M^+\underline{z}(t) - M^-\bar{z}(t), \end{cases} \quad (5.11)$$

**Proof 7.** Consider the upper and lower observation errors of (5.9) defined by

$$\bar{e}(t) = \bar{z}(t) - z(t), \quad (5.12a)$$

$$\underline{e}(t) = z(t) - \underline{z}(t), \quad (5.12b)$$

then it follows from (5.10) and (5.9) that the augmented dynamic error system can be described by

$$\dot{e}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} & 0 \\ 0 & \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} \end{pmatrix} e(t) + \begin{pmatrix} \tilde{A}_d & 0 \\ 0 & \tilde{A}_d \end{pmatrix} e(t - h(t)), \quad (5.13a)$$

where

$$e(t) = \begin{pmatrix} \bar{e}(t) \\ \underline{e}(t) \end{pmatrix}. \quad (5.13b)$$

Since, for any  $\bar{L}, \underline{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  and non-singular matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  such that  $\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$ ,  $\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C}$  are Metzler and  $\tilde{A}_d$  is positive together with the constraint  $\underline{z}_0 \leq z_0 \leq \bar{z}_0$ , which implies  $e_0 \geq 0$  (i.e.  $e(t_0 + \theta) \geq 0$  for  $\theta \in [-h_m, 0]$ ), it follows that from (Haddad and Chelleboina, 2004) system (5.13) is always positive. Namely for any nonnegative initial condition  $e_0 \geq 0$ , the solution  $e(t) \geq 0$  for all  $t > 0$ , which is equivalent to  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  for  $t > 0$ . Note that as in (Ait-Rami et al., 2007), the system (5.13) is asymptotically stable if and only if  $(\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} + \tilde{A}_d)$  and  $(\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} + \tilde{A}_d)$  are Hurwitz with  $\tilde{A}_d$  is positive. This implies that  $e(t)$  converges to zero, so we have  $\bar{z}(t)$  tends  $z(t)$ , and  $\underline{z}(t)$  tends  $z(t)$  as  $t \rightarrow \infty$ . As in (Tarek et al., 2012) and (Bensalah and Baron, submitted for publication 2014), by observing that  $M = M^+ - M^-$  and  $|M| = M^+ + M^-$ , and substituting (5.8) into  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  we obtain

$$M^+\bar{z}(t) - M^-\underline{z}(t) \leq x(t) \leq M^+\underline{z}(t) - M^-\bar{z}(t), \quad (5.14)$$

From (5.14), we have (5.11), which completes the proof.

**Remark 5.4.3.** When matrix  $\widetilde{A}_d$  is positive, the following hold.

- If  $\widetilde{A} - \widetilde{L}\widetilde{C}$  and  $\widetilde{A} - \widetilde{\underline{L}}\widetilde{C}$  are both Metzler, then  $(\widetilde{A} - \widetilde{L}\widetilde{C} + \widetilde{A}_d)$  and  $(\widetilde{A} - \widetilde{\underline{L}}\widetilde{C} + \widetilde{A}_d)$  are also Metzler ;
- As shown in Ait-Rami et al. (2007), if  $(\widetilde{A} - \widetilde{L}\widetilde{C} + \widetilde{A}_d)$  is Hurwitz, then there exist a positive vector  $\rho \in \mathbb{R}^n$  such that  $(\widetilde{A} - \widetilde{L}\widetilde{C} + \widetilde{A}_d)\rho < 0$ . Since  $\widetilde{A}_d$  is positive, therefore  $(\widetilde{A} - \widetilde{L}\widetilde{C})\rho < 0$  and hence,  $(\widetilde{A} - \widetilde{L}\widetilde{C})$  is Hurwitz. Similarly, it can also be shown that  $(\widetilde{A} - \widetilde{\underline{L}}\widetilde{C})$  is Hurwitz ;
- According to assumption 5.3.1 an appropriate selection of the matrices  $\overline{L}$  and  $\underline{L}$  can assign a real part negative eigenvalues to matrices  $(A - \overline{L}C + A_d)$  and  $(A - \underline{L}C + A_d)$ , respectively.

The key part of proposition 5.4.2 is to show that augmented observer error system (5.13) is positive and asymptotically stable simultaneously. A natural question is : *how to find a non singular matrix  $M$ , and a both gain matrices  $(\overline{L}, \underline{L})$  guaranteeing the stability of  $(\widetilde{A} - \widetilde{L}\widetilde{C} + \widetilde{A}_d)$  and  $(\widetilde{A} - \widetilde{\underline{L}}\widetilde{C} + \widetilde{A}_d)$  respectively, also send  $A_d$  to a positive matrix  $\widetilde{A}_d$  and map  $(A - \overline{L}C)$  and  $(A - \underline{L}C)$  to Metzler matrices  $(\widetilde{A} - \widetilde{L}\widetilde{C})$  and  $(\widetilde{A} - \widetilde{\underline{L}}\widetilde{C})$ , respectively ?* This problem has been recognized by several authors as a very challenging problem, and has not been fully resolved Efimov. et al. (2013a). In this section, we show how this difficulty can be resolved by taking the same approach as in Polyakov et al. (2013), where a Sylvester equation is resolved. The main new feature in our method is based on the computation of both observe gain  $\overline{L}$  and  $\underline{L}$  matrices, unlike as in Polyakov et al. (2013). In order to show our technique, let us use two Metzler and Hurwitz matrices  $\overline{R}$  and  $\underline{R}$ , respectively, such that

$$\overline{R} = M^{-1}(A - \overline{L}C + A_d)M, \quad (5.15a)$$

$$\underline{R} = M^{-1}(A - \underline{L}C + A_d)M. \quad (5.15b)$$

It is straightforward to see that (5.15) can be rewritten as system of Sylvester matrix equation (Yu-Peng Qiao and Cheng, 2010), that is if we consider  $N = M^{-1}$ ,  $\overline{Q} = M^{-1}\overline{L}$  and  $\underline{Q} = M^{-1}\underline{L}$ , then (5.14) becomes

$$\overline{R}N - N(A + A_d) + \overline{Q}C = 0, \quad (5.16a)$$

$$\underline{R}N - N(A + A_d) + \underline{Q}C = 0. \quad (5.16b)$$

This construction appears also in Polyakov et al. (2013), but with only one equation. It amounts to the fact that, the authors have assumed in Polyakov et al. (2013) that the upper observer gain  $\overline{L}$  is equal to the lower observer gain  $\underline{L}$ , which is obviously very particular case. Here, we deal with both the upper and lower observer design, and the computation of

observer gain matrices is implemented. Let us first observe that (5.16) is equivalent to

$$S \begin{pmatrix} \eta \\ \bar{q} \\ \underline{q} \end{pmatrix} = 0, \quad (5.17)$$

where  $S = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_n \otimes A_0^T + \bar{R} \otimes \mathbb{I}_n & \mathbb{I}_n \otimes C^T & 0 \\ -\mathbb{I}_n \otimes A_0^T + \underline{R} \otimes \mathbb{I}_n & 0 & \mathbb{I}_n \otimes C^T \end{pmatrix}$ , with  $A_0 = A + A_d$ ,  $\eta = \text{vec}(N)$ ,  $\bar{q} = \text{vec}(\bar{Q})$ , and  $\underline{q} = \text{vec}(\underline{Q})$ . Let  $\otimes$  denotes the Kronecker product and  $\text{vec}(\cdot)$  is vector valued function of any matrix ( $\cdot$ ), that is  $\eta = \left( N_{11}, \dots, N_{1n}, \dots, N_{nn} \right)^T$ ,  $\bar{q} = \left( \bar{q}_{11}, \dots, \bar{q}_{1n}, \dots, \bar{q}_{nn} \right)^T$ , and  $\underline{q} = \left( \underline{q}_{11}, \dots, \underline{q}_{1n}, \dots, \underline{q}_{nn} \right)^T$ . According to assumption 5.3.1 and from Neudecker (1969) and Tarek et al. (2012), we can solve equation (5.17) by finding a basis of  $\ker S$ , the null subspace of the matrix  $S$ , such that for every element  $\alpha_i$  of a real numbers, we have

$$\begin{pmatrix} \eta & \bar{q} & \underline{q} \end{pmatrix}^T = \sum_{i=1}^l \alpha_i \beta_i, \quad l = \dim(\ker S) \quad (5.18)$$

where  $\beta_i$  is an element of the basis of  $\ker S$ . Finally, it is obvious that the proposition 5.4.2 can supply an algorithm 2 to compute effectively the observer gain matrices  $\bar{L}$  and  $\underline{L}$  and the non-singular matrix  $M$  that is related to coordinate transformation.

The result of proposition 5.4.2 means that the observer (5.9) is similar to the observer in the original coordinates defined by :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = (A - \bar{L}C)\bar{x}(t) + A_d\bar{x}(t - h(t)) + Bu(t) + \bar{L}Cx(t) \\ \dot{\underline{x}}(t) = (A - \underline{L}C)\underline{x}(t) + A_d\underline{x}(t - h(t)) + Bu(t) + \underline{L}Cx(t), \end{cases} \quad (5.19)$$

and if all their conditions are satisfied then under the relation (5.5), we have  $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t)$  for all  $t > 0$ . Note that a similar interval observer has been given in Efimov. et al. (2014) in a different context.

**Remark 5.4.4.** – From (5.15) there are several degrees of freedom in the selection of  $\bar{R}$  and  $\underline{R}$  such that both are Metzler and Hurwitz matrices. This lends many possibilities to pick the desired pole associated to the interval observer ;

– The initial conditions of interval observer (5.9) can be easily handled. In fact from (5.11), we obtain the following relation

$$\bar{z}_0 = |M^{-1}| \bar{x}_0, \quad \text{with } z_0 = -\bar{z}_0 \quad (5.20)$$

## 5.5 Controller design

As shown in (Efimov. et al., 2013b), we consider the design of the controller for given a lower  $\underline{L}$  and a upper  $\bar{L}$  observer respectively, which dependent on the interval observer in the coordinates  $\bar{z}$  and  $\underline{z}$  such that :

$$u(t) = F_1\bar{z}(t) + F_2\underline{z}(t), \quad (5.21)$$

where the matrices  $F_1$  and  $F_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  are to be found. It is easy to observe that, the input  $u(t)$  can be written in the coordinates  $z$ ,  $\bar{e}$  and  $\underline{e}$  as the following equation

$$u(t) = K\xi, \quad K = (F_1 + F_2 \quad F_1 \quad -F_2), \quad \xi = \begin{pmatrix} z \\ \bar{e} \\ \underline{e} \end{pmatrix}, \quad (5.22)$$

where the state  $z \in \mathbb{R}^n$  is defined by (5.8) and the observer error  $\bar{e}$  and  $\underline{e}$  are given by (5.12). Before going to the design of the controller, it is worth noting that inside the domain  $D(K)$  define as :

$$D(K) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{3n} : |(K\xi)_i| \leq u_{\max_i}, i = 1, \dots, m \right\} \quad (5.23)$$

the controller input remains unsaturated at all times  $\forall t \geq t_0$ , and the augmented closed-loop system is defined by the following linear model :

$$\dot{\xi}(t) = (\hat{A} + \hat{B}K)\xi(t) + \hat{A}_d\xi(t - h(t)), \quad (5.24a)$$

with initial conditions given as

$$\xi(t_0 + \theta) = \left( z(t_0 + \theta) \quad \bar{e}(t_0 + \theta) \quad \underline{e}(t_0 + \theta) \right)^T \in \mathcal{C}_{h_m}^{3n},$$

for all  $\theta \in [-h_m, 0]$ , where  $\xi(t_0 + \theta)$  is denoted by  $\xi_0$  and

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A} - \underline{L}\tilde{C} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_d = \begin{pmatrix} \tilde{A}_d & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_d & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_d \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.24b)$$

Now, we consider an ellipsoid  $D(P)$  such that for a positive definite symmetric matrix  $P \in$

$\mathbb{R}^{3n \times 3n}$ , we have

$$D(P) = \{ \xi \in \mathbb{R}^{3n} : \xi^T P \xi \leq 1 \} \subset D(K) \quad (5.25)$$

It is apparent that if the set  $D(P)$  (5.25) is positively invariant with respect to the closed-loop system (5.24), and provided a Lyapunov-Krasovskii functional such that its time derivative along the trajectories of (5.24) is negative then for every initial values  $\xi_0 \in \mathcal{C}_{h_m}^{3n}$  in the given convex sets  $\Xi_0 \subset D(P)$  we have, beside the convergence to the origin of all the trajectories of (5.24), the control constraints (5.4) are also satisfied. The set of initial conditions  $\Xi_0$  is considered as a polyhedral set described by its vertices

$$\Xi_0 = \text{conv} \{ \vartheta_1, \dots, \vartheta_r \}, \quad \vartheta_j \in \mathbb{R}^{3n} \quad (5.26)$$

**Remark 5.5.1.** *Note that the set of eigenvalues of upper triangular matrix  $(\hat{A} + \hat{A}_d + \hat{B}K)$  is the union of all poles of matrices  $(\tilde{A} + \tilde{A}_d + \tilde{B}(F_1 + F_2))$ ,  $(\tilde{A} + \tilde{A}_d - \tilde{L}\tilde{C})$ , and  $(\tilde{A} + \tilde{A}_d - \tilde{L}\tilde{C})$ , respectively. Since in the section 5.4, the observers gain  $\tilde{L}$  and  $\tilde{L}$  have been designed such that the observer errors (5.13) to be positive and stable, the stability of system (5.24) without delay is defined only by matrix  $(\tilde{A} + \tilde{A}_d + \tilde{B}(F_1 + F_2))$ .*

Now, the sufficient conditions that guarantee the asymptotic stability of system (5.1–5.5) with the control  $u(t)$  defined as (5.21) are presented as theorem 5.5.2. This achieve our main objective of computing a stabilizing controller, namely  $F_1$  and  $F_2$ .

**Theorem 5.5.2.** *If there exist matrices  $W = W^T \succ 0$ ,  $T = T^T \succ 0$ ,  $X_{33} = X_{33}^T \succ 0$ ,  $X_{11}$ ,  $X_{12}$ ,  $X_{13}$ ,  $X_{22}$ ,  $X_{23} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ ,  $Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , and  $X_1 = X_1^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$*



satisfying the following conditions :

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ \star & X_{22} & X_{23} \\ \star & \star & X_{33} \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (5.27a)$$

$$X - X_{33} \succeq 0, \quad (5.27b)$$

$$\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \star & \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \star & \star & \Pi_{33} \end{pmatrix} \prec 0, \quad (5.27c)$$

$$\begin{pmatrix} X & Y^T \\ \star & V \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (5.27d)$$

$$V_{ii} - u_{\max_i}^2 < 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5.27e)$$

$$\begin{pmatrix} X & \vartheta_j \\ \star & 1 \end{pmatrix} \succeq 0, \quad j = 1, \dots, r \quad (5.27f)$$

where

$$\Pi_{11} = X\hat{A}^T + \hat{A}X + \hat{B}Y + Y^T\hat{B}^T + h_m X_{11} + X_{13}^T + X_{13} + W,$$

$$\Pi_{12} = \hat{A}_d X + h_m X_{12} - X_{13} + X_{13}^T,$$

$$\Pi_{13} = h_m X\hat{A}^T + h_m Y^T\hat{B}^T,$$

$$\Pi_{22} = -(1 - \mu)W + h_m X_{22} - X_{23}^T - X_{23},$$

$$\Pi_{23} = h_m X\hat{A}_d^T,$$

$$\Pi_{33} = -h_m T,$$

$$X = \text{diag}(X_1, X_1, X_1),$$

$$Y = (Y_1 + Y_2 \quad Y_1 \quad -Y_2),$$

then the system (5.1–5.5) under the control law (5.21) is asymptotically stable, and the corresponding gain matrices are given by :

$$F_1 = Y_1 X_1^{-1}, \quad (5.28a)$$

$$F_2 = Y_2 X_1^{-1}, \quad (5.28b)$$

while the states  $\bar{z}$  and  $\underline{z}$  of the observer (5.9) tend to  $z$  as given by (5.8).

**Proof 8.** See appendix B

It is noteworthy that the condition (5.27c) of theorem 5.5.2 is not an LMI but rather a bilinear matrix inequality (BMI) in the decision variables  $h_m, X_{ij}, (i, j = 1, 2), X, T$  and  $Y$ . An easy way to get around this problem is to fix the parameter  $h_m$ . However, choosing an arbitrary  $h_m$  does not lead to the best result. In fact, if we scale the size of the set of initial conditions  $\Xi_0$  by a factor  $d > 0$ , and find the maximum value  $d_{\max}$  for which appropriate matrices  $W, T, X_{ij}, (i, j = 1, 2, 3), Y_1, Y_2, V$ , and  $X_1$  can be found such that all conditions of theorem 5.5.2 are met and  $d \Xi_0 \subset D(P)$ , then it is possible to obtain a convergent solution to the problem. We therefore solve the following convex optimization problem :

$$\max d \tag{5.29a}$$

subject to

$$\begin{pmatrix} X & d\vartheta_j \\ \star & 1 \end{pmatrix} \succeq 0, \quad j = 1, \dots, r \tag{5.29b}$$

$$(5.27a - 5.27e) \text{ of theorem 5.5.2} \tag{5.29c}$$

Algorithm 3 is proposed to seek for a feasible solution of the conditions in theorem 5.5.2. Note that, it is not difficult to see that value  $d_{\max} \geq 1$  is needed to fulfill the relation  $\Xi_0 \subset D(P)$  Gomes da Silva Jr. and Tarbouriech (2001).

**Remark 5.5.3.** *Since the gain matrices  $F_1 = \alpha F$  and  $F_2 = (1 - \alpha)F$ , with  $0 \leq \alpha \leq 1$  and  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , the control law, defined by (5.21), can be rewritten in the particular form  $u = F\hat{z}(t)$  Efimov. et al. (2013a), where  $\hat{z}(t) = 1/2(\bar{z}(t) + \underline{z}(t))$ , in this case the length of a scalar  $\alpha$  is a half. With a simple manipulation, the last equation can be easily reformulated in the form  $\hat{z}(t) = z(t) + 1/2(\bar{e}(t) - \underline{e}(t))$ , hence many results used respectively the center  $\hat{z}(t)$  and the radius  $1/2(\bar{e}(t) - \underline{e}(t))$  of interval estimated to study the convergence and the stability of the observer error Gouzé et al. (2000).*

According to remark 5.4.4 and some results published before Doyle and G.Stein (1979), we choose the minimum interval observer eigenvalues two times faster than the dynamic of closed-loop system. We shall do this by assigning the poles of matrix  $(\tilde{A} + \tilde{A}_d + \tilde{B}(F_1 + F_2))$  in a suitable region of the intersection to the two half complex plan,  $\mathcal{Re}(\lambda_i) < -\rho_2$  and  $\mathcal{Re}(\lambda_i) > -\rho_1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , respectively, where  $\rho_1, \rho_2$  are two real positive and  $\lambda_i$  is the eigenvalue of the above matrix. This last means that the optimization problem (5.29) is solved

by adding the following constraints Chilali and Gahinet (1996)

$$X_1(\tilde{A} + \tilde{A}_d)^T + (\tilde{A} + \tilde{A}_d)X_1 + \tilde{B}Y_1 + Y_1^T \tilde{B}^T + \tilde{B}Y_2 + Y_2^T \tilde{B}^T + 2\rho_2 X_1 \prec 0; \quad (5.30a)$$

$$X_1(\tilde{A} + \tilde{A}_d)^T + (\tilde{A} + \tilde{A}_d)X_1 + \tilde{B}Y_1 + Y_1^T \tilde{B}^T + \tilde{B}Y_2 + Y_2^T \tilde{B}^T + 2\rho_1 X_1 \succ 0. \quad (5.30b)$$

The LMI (5.30) is based on the continuity properties with respect to the delay parameter (Niculescu, 2001). In fact, the gain matrix  $K$ , (or the matrices  $F_1$  and  $F_2$ ) is firstly chosen in order to stabilize the matrix  $(\hat{A} + \hat{A}_d + \hat{B}K)$  of the closed loop system (5.24) free of delay,  $h(t) = 0$ , such that all poles of matrix  $(\tilde{A} + \tilde{A}_d + \tilde{B}(F_1 + F_2))$  lie in a suitable region as defined above, namely  $-\rho_1 < \mathcal{Re}(\lambda_i) < -\rho_2$ , thereafter to guarantee the asymptotic stability of the system with delay-dependence, the stability is ensured for a delay-interval of the form  $[0, h_{max})$ , such that the inclusion relation

$$d \Xi_0 \subset D(P) \subset D(K) \quad (5.31)$$

holds.

## 5.6 Example

Let consider the following system

$$A = \begin{pmatrix} -4.2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

with constrained control  $|u| \leq 4$ . The set of possible initial conditions is bounded and known such that for  $\theta \in [-h_m, 0]$ ,  $\phi(\theta) \in \{\phi \in \mathcal{C}([-h_m, 0], \mathbb{R}^2) : |\phi_i| \leq 1, i = 1, 2\}$ . The suitable region is chosen such that  $\rho_1 = 3$  and  $\rho_2 = 0.5332$ . Firstly, we apply algorithm 2 in order to design the interval observer  $\bar{L}$  and  $\underline{L}$ . By choosing the matrices  $\bar{R}$  and  $\underline{R}$  such that

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} -0.95 & 2.1 \\ 1.7 & -5.49 \end{pmatrix}, \quad \underline{R} = \begin{pmatrix} -0.95 & 2.1 \\ 2.73 & -9.49 \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

and solving the Sylvester matrix equation (5.15) we obtain the transition matrix :

$$M = \begin{pmatrix} 18.4668 & -71.7107 \\ -19.5044 & 21.1744 \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

---

Algorithm 2 procedure to compute the observer gain matrices  $\bar{L}$  and  $\underline{L}$

```

1: Given two Metzler and Hurwitz matrices  $\bar{R}$  and  $\underline{R}$ 
2: Compute the parametric solution  $(\eta \quad \bar{q} \quad \underline{q})$  of equation (5.17)
3: for a given vector  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \neq 0$  do
4:    $M^{-1} \leftarrow N$ ;
5:    $\bar{L} \leftarrow \bar{Q}$ ;
6:    $\underline{L} \leftarrow \underline{Q}$ ;
7:   Check the conditions of proposition 5.4.2
8:   if  $\tilde{A}_d$  is positive and both matrices  $(\tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C})$  and  $(\tilde{A} - \underline{L}\tilde{C})$  are Metzler then
9:     return
10:     $\alpha$ 
11:   else
12:     Change the vector  $\alpha$ 
13:   end if
14: end for

```

---

Algorithm 3 procedure to find  $d$  that maximizes  $h$

```

1: for a given  $(u_{\max_i}, \vartheta_j)(i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r,)$  and a sufficiently small value  $h_m = h_{m0}$ 
   to have a feasible solution for (5.27) do
2:   solve conditions (5.29–5.30)
3:   return  $d = d_{\max}$ ;
4:   if  $d_{\max} \geq 1$  then
5:      $h_{m0} = h_{m0} + \varepsilon$ , and go to line 2; ( $\varepsilon$  is a constant step size of  $h_m$ )
6:   else
7:     Stop. the maximal time delay  $h_{\max}$  and  $d_{\max}$  are obtained
8:   end if
9: end for

```

---

and

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 0.0879 \\ -0.0086 \end{pmatrix}, \quad \underline{Q} = \begin{pmatrix} 0.0879 \\ -0.0643 \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

This leads to

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} 2.2388 \\ -1.8966 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \underline{L} = \begin{pmatrix} 6.2365 \\ -3.0770 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

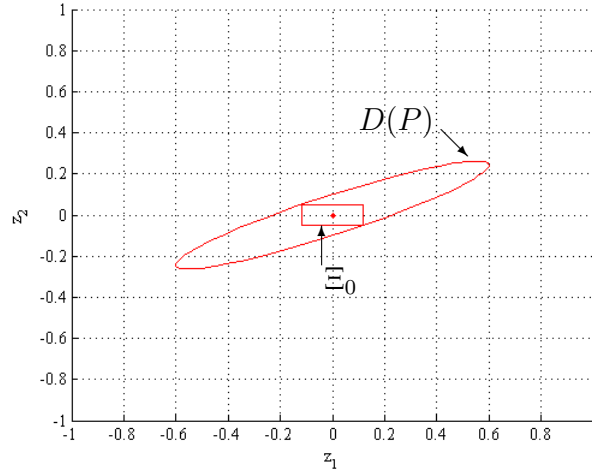


Figure 5.1 The projection of the positive invariant ellipsoid  $D(P)$  and the set of admissible initial conditions  $\Xi_0$  on  $z$ -plan.

The following matrices

$$\begin{aligned} \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} &= \begin{pmatrix} -0.9717 & 1.0373 \\ 1.6799 & -6.4682 \end{pmatrix}, & \tilde{A}_d &= \begin{pmatrix} 0.0217 & 1.0626 \\ 0.02 & 0.9782 \end{pmatrix} \\ \text{and } \tilde{A} - \tilde{L}\tilde{C} &= \begin{pmatrix} -0.9717 & 1.0373 \\ 2.7099 & -10.4682 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

satisfy, respectively all conditions of Proposition 5.4.2. In this case,  $\dim(\text{Ker}S) = 1$  and  $\alpha_1 = -0.1609$ , where the real number  $\alpha_1$  can be chosen arbitrary. In the second step, we apply the algorithm 3 proposed in section 5.5 to solve LMIs (5.29–5.30). Using the Yalmip, with Sedumi.1-3 for Matlab, we obtain the maximum upper bound of the delay  $h_m = 0.7010$ , and the state feedback gain matrices  $F_1 = (-5.5669 \quad 15.6070)$ , and  $F_2 = (-5.5430 \quad 15.5789)$ .

From (5.20) and (5.12), the convex set of initial values  $\Xi_0$  for the augmented system (5.24) can be chosen as :

$$\Xi_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \bar{e} \\ \underline{e} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_{h_m}^6 : |z_0| \leq \bar{z}_0, 0 \leq \begin{pmatrix} \bar{e}_0 \\ \underline{e}_0 \end{pmatrix} \leq 2 \begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_0 \end{pmatrix} \right\},$$

where  $\bar{z}_0 = (0.0922 \quad 0.0377)^T$ . The largest domain of admissible initial state entirely contained into the ellipsoid  $D(P)$  (5.25) is obtained with an optimal values  $d_{\max} = 1.2982$  and the

positive definite matrix  $P$  associate to  $D(P)$  as follows :

$$P = \begin{pmatrix} 18.8909 & \star & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -39.8752 & 98.65 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18.8909 & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -39.8752 & 98.65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18.8909 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -39.8752 & 98.65 \end{pmatrix}.$$

The projection of the corresponding sets polyhedron  $\Xi_0$  and the ellipsoid  $D(P)$ , respectively, in the z-plane is illustrated in Fig.5.1, while Fig.5.2 depicts the states trajectories for system (5.1–5.5) with the control (5.21) for different initial values emanating from the set of admissible initial conditions  $[\underline{x}_0 \ \bar{x}_0]$ . Apparently, all trajectories converge to the origin, and the control constraints  $|u| \leq 4$  are satisfied. Figures 3 and 4 depict the time response of the state variables and the control signal for a particular condition initial  $\phi(\theta) = [-0.62 \ 0.92]^T, 0 \leq \theta \leq h_m$ , they show better performance for the constrained interval observer-based control scheme proposed in this paper.

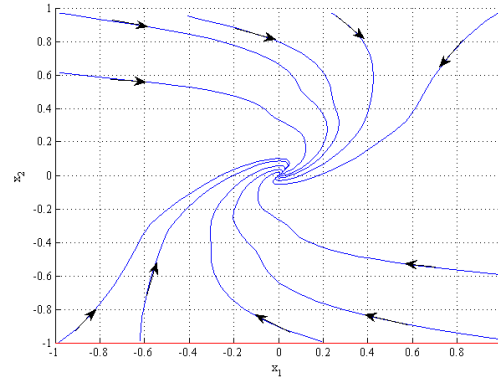


Figure 5.2 State trajectories of system (5.32) in closed-loop are obtained for  $h = h_{\max} = 0.7010$  with initial values emanating from a specified set of admissible initial conditions  $[\bar{x}_0 \quad \underline{x}_0]$ .

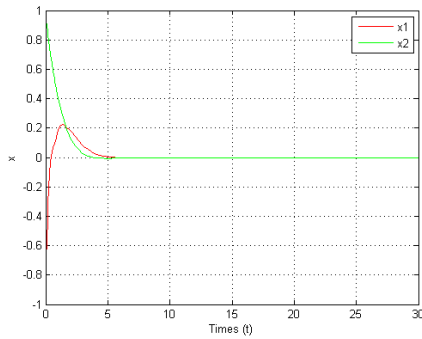


Figure 5.3 Evolution of state trajectories of system (5.32) for an initial condition  $\phi(\theta) = [-0.62 \quad 0.92]^T$  with a maximum delay of  $h_{\max} = 0.7010$ .

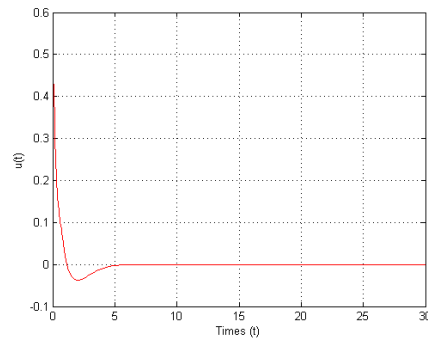


Figure 5.4 Control signal for an initial condition  $\phi(\theta) = [-0.62 \quad 0.92]^T$  with a maximum delay of  $h_{\max} = 0.7010$ .

## 5.7 Conclusion

In this paper, we deal with asymptotic stability of closed-loop time-varying delay systems with output feedback subject to actuator saturations. Based on the interval observer technique, a novel delay-dependent sufficient conditions of asymptotic stability is then established. The upper and lower observers gain require solving a system of Sylvester matrix equation. Further, by applying the Lyapunov-Krasovskii functional, an LMI algorithm was proposed in order to compute the stabilizing control laws for time-varying delay systems with constrained. Finally, a numerical example was provided in order to illustrate the effectiveness of the proposed methodology.

## CHAPITRE 6 DISCUSSION GÉNÉRALE

Cette thèse traite le problème de la commande avec contraintes des systèmes linéaires continus à retards. En effet le problème de la commande soumis à des contraintes des systèmes dynamiques est toujours considéré comme l'un des problèmes les plus difficiles et complexes dans la théorie de la commande. Designer une loi de commande sans prendre en compte des contraintes liées à l'amplitude du contrôle et/ou d'états du système, entraîne une dégradation des performances du système et peut même déstabiliser le processus considéré. Deux approches dans la littérature ont été développées pour répondre à cette problématique. La première, considère l'effet de la saturation tout en garantissant la stabilité asymptotique du système en boucle fermée. Tandis que la deuxième approche est basée sur la conception d'une loi de commande qui fonctionne à l'intérieure d'un domaine complètement linéaire où la saturation ne se produit pas. L'idée de base consiste à forcer toutes les trajectoires du système en boucle fermée à appartenir au domaine des contraintes et d'y rester pour une quelconque conditions initiales prise dans ce domaine, c'est le principe d'invariance positive, utilisé dans cette thèse. Cette technique permet la synthèse d'une loi de commande imposant l'invariance positive et la stabilité asymptotique du domaine définie dans l'espace d'états par les contraintes.

En dépit de son importance pratique, le concept d'invariance positive appliqué aux systèmes à retard n'a fait l'objet jusqu'à présent que d'un nombre très limité d'études. La condition pour que le domaine des contraintes soit positivement invariant par rapport aux trajectoires de systèmes à retard en boucle fermée reste toujours restrictive, de fait qu'elle est indépendante de retard, un paramètre essentiel du système. Nous avons alors proposé, dans cette thèse, une condition moins conservatrice, en introduisant des nouvelles variables de décision. En effet une transformation de première ordre, du système à retard discret, système original, le cas de notre modèle, en un système à retard distribué, nous a offert des degrés de liberté supplémentaires aux critères à tester. L'application de résultats d'invariance positive dépendante de retard au problème de la commande avec contraintes des systèmes à retard, nous a aidé à synthétiser une loi de retour d'état robuste, qui permet de stabiliser, avec un retard maximum, le système original en boucle fermée tout en respectant les contraintes. La complexité de la résolution des équations matricielles et des inégalités vectorielles non linéaires nous oblige à convertir ce problème en un problème de programmation non-linéaire NLP. La réponse à cette question se trouve dans le premier l'article. Une technique d'optimisation implémentée permet de calculer le retard maximum ainsi que la loi de commande



correspondante.

En pratique, il est intéressant d'étudier la stabilisation des systèmes dynamiques par retour de sorties avec contraintes. La loi de la commande est calculée à partir d'états estimés. En effet, la détermination d'une erreur bornée d'un observateur est un problème fondamental pour l'application de la technique de la loi de retour d'état, basée sur la théorie d'invariance positive, au système dynamique où son état n'est pas accessible à la mesure. Le deuxième article répond à cette question. La technique d'observateur intervalle pour le système dynamique continu à retard variable dans le temps, est développée. Ce concept est basé sur le contexte d'erreurs inconnues mais bornées. Après avoir synthétisé les gains d'observateurs, le design de la loi de retour d'état est alors déterminé par les deux états estimés du système considéré. Par un choix adéquat d'une fonction de Lyapunov-krasovskii, la commande assure la stabilité asymptotique du système tout en respectant les contraintes imposées.

## CHAPITRE 7 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce travail présente des contributions originales pour la résolution de problème de la commande avec contraintes des systèmes linéaires continus à retards. Ainsi trois principaux résultats ont été développés dans cette thèse. Le premier est centré sur le développement des conditions nécessaires et suffisantes dépendantes de retard d'invariance positive des domaines polyédraux, symétriques ainsi que dissymétriques, par rapport aux trajectoires de système autonome. L'invariance positive dépendante de retard repose sur la transformation de premier ordre du système original à retard discret en système à retard distribué. Le deuxième résultat est l'application du concept d'invariance positive au système dynamique sous contraintes non autonome à retard discret. En effet, une condition suffisante d'existence d'une loi de retour d'état garantissant la stabilité asymptotique robuste de système en boucle fermée tout en respectant les contraintes est donnée. Un algorithme calculant la commande sous contraintes stabilisant le système en boucle fermée avec un retard maximum est implémenté. Les résultats obtenus sont intéressants et plus général que ceux développés dans la littérature.

Le troisième résultat est la synthèse de la loi de commande sous contraintes pour des systèmes linéaires continus à retard, inconnu et variable dans le temps, mais borné, dont les états ne sont pas tous accessibles à la mesure. La commande par retour de sortie est calculée à partir d'un observateur intervalle, en se basant sur le concept d'invariance positive dépendante de retard. Des conditions garantissant la positivité de la dynamique d'erreurs d'observabilité sont données, ainsi le système d'observabilité intervalle associé au système original est proposé. Un algorithme lié au calcul des gains majorant et minorant d'observateur intervalle est implémenté. En suite, la synthèse de la loi de commande assurant la stabilité asymptotique de système en boucle fermée en respectant les contraintes est proposée. Un autre algorithme pour le calcul de gain de contrôleur en se basant sur la technique de LMI est développé.

Ainsi, les contributions de cette thèse se résument par les points suivant :

- Une méthode originale de résolution de l'équation matricielle algébrique non linéaire sous contraintes assurant l'invariance positive des domaines polyédraux pour des systèmes linéaires continus à retard ;
- Une procédure originale de calcul de la loi de retour d'état et de retard maximal associé, basée sur la programmation non linéaire NLP ;
- Une technique originale de calcul des gains d'observateur intervalle, axé sur la résolution de système d'équation matricielle de Sylvester ;
- Un algorithme original de synthèse de la loi de la commande par retour de sortie, pour des

classes des systèmes à retard inconnues, variable dans le temps, basé sur la technique de LMI.

Il est à noter que la plus part des résultats développés dans cette thèse peuvent être ré-établis sous une forme plus générale en étudiant les systèmes dynamiques à retards multiples.

### **Travaux futurs**

Le sujet de recherche que nous avons abordé est loin d'être épuisé et il reste encore beaucoup des points à soulever et à développer. Étant donné que les perturbations ont un effet indésirable sur la performance et la stabilité des systèmes dynamiques, on peut poser la question suivante : quelles sont les grandeurs des perturbations agissant aussi bien sur les états instantanés que retardés que le système non perturbé peut tolérer sans détériorer sa stabilité ? Ainsi, pour un travail futur on suggère l'étude de la stabilisation avec contraintes des systèmes incertains avec retard, en utilisant la même méthodologie qu'elle a été développée dans cette thèse. Le future travail sera focalisé sur la commande sous contraintes des systèmes à retards en présence d'incertitudes paramétriques bornées. C'est une classe dont les matrices du système ne sont pas connues exactement, mais appartiennent à une famille de matrices dont on connaît les matrices bornes.

## RÉFÉRENCES

- M. Ait-Rami et F. Tadeo, “Controller synthesis for positive linear systems with bounded controls,” *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 54, pp. 151–155, 2007.
- M. Ait-Rami, U. Helmke, et T. F., “Positive observation problem for linear time-delay positive systems,” dans *Mediterranean Conference on Control and Automation, July 27-29, Athens - Greece*, 2007.
- R. Bellman et K. L. Cooke, *Differential Equations*. New York Academic, 1963.
- H. Bensalah et L. Baron, “Robust constrained control of linear continuous-time delay system : Non-linear optimization approach,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, submitted for publication 2014.
- A. Benzaouia et A. Hmamed, “Regulator problem for linear continuous-time systems with nonsymmetrical constrained control,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 38, no. 10, pp. 1556–1560, 1993.
- A. Benzaouia, A. Hmamed, et F. Tadeo, “Stabilisation of controlled positive delayed continuous-time systems,” *International Journal of Systems Science*, vol. 41, no. 12, pp. 1473–1479, 2010.
- A. Benzaouia, *Saturated Switching Systems*. Springer-Verlag, 2012.
- O. Bernard et J.-L. Gouzé, “Closed loop observers bundle for uncertain biotechnological models,” *Journal of Process Control*, vol. 14, pp. 765–774, 2004.
- F. Blanchini, “Set invariance in control,” *Automatica*, vol. 35, no. 11, pp. 1747–1767, 1999.
- F. Blanchini et S. Miani, *Set-Theoretic Methods in Control*. Birkhauser Boston • Basel • Berlin, 2008.
- S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, éd. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- C. Burgat et Cheganca.J., “Stability condition for a class of time-varying discrete-time systems,” *System Control Letters*, vol. 5, pp. 273–277, 1985.
- Y.-Y. Cao, Z. Lin, et T. Hu, “Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation,” *IEEE Trans. Circuit and Systems-I : Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, pp. 233–240, 2002.
- M. Chilali et P. Gahinet, “H infinity design with pole placement constraints : An LMI approach,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 41, no. 3, pp. 358–367, 1996.

- T. Coleman, M. Branch, et A. Grace, "Optimization toolbox for use with matlab," *Math Works, Natick, MA, USA*, 1999.
- M. Dambrine, A. Goubet, et J. P. Richard, "New results on constrained stabilizing control of time-delay systems," *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, Vols 1-4*, pp. 2052–2057, 1995.
- M. Dambrine, J. P. Richard, et P. Borne, "Feedback control of time-delay systems with bounded control and state," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 1, no. 1, pp. 77–87, 1995.
- O. Diekmann, S. van Gils, S. Verduyn Lunel, et H. Walther, *Delay Equations-Functional, Complex and Nonlinear Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- J. Doyle et G. Stein, "Robustness with observers," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 24, pp. 607–611, 1979.
- G.-P. Economou, G. Anagnostopoulos, D. Theodosiou, T. Stouraitis, et C. Goutis, "Non-linear optimization : Artificial neural network solution techniques applied to the optimum linear feedback control of linear discrete-time dynamic systems," dans *Proceedings of the 20th EUROMICRO Conferene.*, 1994.
- D. Efimov., W. Perruquetti., et J.-P. Richard, "Interval estimation for uncertain systems with time-varying delays," *International Journal of Control*, vol. 86, p. 1777, 2013.
- D. Efimov., T. Raïssi., et A. Zolghadri, "Control of nonlinear and LPV systems : Interval observer-based framework," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 58, pp. 773–778, 2013.
- D. Efimov., A. Polyakov., et J.-P. Richard, "Interval estimation for systems with time delays and algebraic constraints," dans *European Control Conference (ECC) June 24-27. Strasbourg, France*, 2014, pp. 678–683.
- L. E. El'sgol'ts et S. B. Norkin, *Introduction to the theory and applications of differential equations with Deviating Arguments*. Academic Press, New York, 1973.
- S. Galeani, S. Tarbouriech, M. Turner, et L. Zaccarian, "A tutorial on modern anti-windup design," *European Journal of Control*, vol. 15, p. 418–440, 2009.
- J. M. Gomes da Silva Jr. et S. Tarbouriech, "Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls : An LMI-based approach," *IEEE Trans. Autom Control*, vol. 46, no. 1, pp. 119–125, 2001.
- A. Goubet-Bartholoméus, M. Dambrine, et J. Richard, "Stability of perturbed systems with time-varying delays," *Systems and Control Letters*, vol. 31, pp. 155–163, 1997.
- J. Gouzé, A. Rapaport, et M. Hadj-sadok, "Interval observers for uncertain biological systems," *Ecological Modelling*, vol. 133, pp. 45–46, 2000.

- W. M. Haddad et V. Chelleboina, "Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with delay," *Systems and Control Letters*, vol. 51, pp. 355–361, 2004.
- , "Stability and dissipativity theory for nonnegative dynamical systems : a unified analysis framework for biological and physiological systems," *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, vol. 6, pp. 35–65, 2005.
- J. K. Hale, *Theory of Function Differential Equation*. Springer-Verlag New York.Heidelberg . Berlin, 1977.
- J. K. Hale et S. M. V. Lunel, *Introduction to Function Differential Equations*. Springer-Verlag, 1993.
- J. C. Hennet et S. Tarbouriech, "Stability and stabilization of delay differential systems," *Automatica*, vol. 33, no. 3, pp. 347–354, 1997.
- A. Hmamed, "Constrained regulation of linear discrete-time systems with time delay : delay-dependent and delay-independent conditions," *International Journal of Systems Science*, vol. 31, no. 4, pp. 529–536, 2000.
- A. Hmamed, A. Benzaouia, et H. Bensalah, "Regulator problem for linear continuous-time delay systems with nonsymmetrical constrained control," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 40, no. 9, pp. 1615–1619, 1995.
- T. Kaczorek, "A realization problem for positive continuous-time systems with reduced numbers of delays," *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 16, no. 3, pp. 325–331, 2006.
- H. K. Khalil, *Nonlinear Systems. Third Edition*. Prentice Hall, 2002.
- M. Klai, S. Tarbouriech, et C. Burgat, "Some independent-time-delay stabilization of linear-systems with saturating controls," *International Conference on Control 94, Vols 1 and 2*, pp. 1358–1363 1594, 1994.
- V. Kolmanovskii et A. Myshkis, *Applied theory of functional differential equations*. Kluwer, 1999.
- J. Lasalle, "The stability of dynamique systems," dans *SIAM Reg. Conf. Series in Applied Math*, 1976.
- H. Lens et J. Adamy, "Observer based controller design for linear systems with input constraints ." dans *Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6-11, 2008*.
- P.-L. Liu, "Robust exponential stability for uncertain time-varying delay systems with delay dependence," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 346, pp. 958–968, 2009.
- J. Loiseau, W. Michiels, S.-I. Niculescu, et R. S. (Eds.), *Topics in Time Delay Systems. Analysis, Algorithms and Control*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

- J. Louisell, "A matrix method for determining the imaginary axis eigenvalues of a delay system," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 46, no. 12, pp. 2008–2012, 2001.
- M. S. Mahmoud, *Switched Time-Delay Systems : Stability and Control*, 2010.
- F. Mazenc et O. Bernard, "Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances," *Automatica*, vol. 47, pp. 140–147, 2011.
- F. Mazenc., T. N. Dinh., et S. I. Niculescu, "Interval observers for discrete-time systems," dans *51st IEEE Conference on Decision and Control December 10-13, Maui, Hawaii, USA*, 2012.
- F. Mazenc., S. I. Niculescu., et O. Bernard, "Exponentially stable interval observers for linear systems with delay," *SIAM J. CONTROL OPTIM.*, vol. 50, no. 1, pp. 286–305, 2012.
- M. Moisan, O. Bernard, et J.-L. Gouzé, "Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors," *Automatica*, vol. 45, pp. 291–295, 2009.
- H. Neudecker, "A note on kronecker matrix products and matrix equation systems," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 17, no. 3, pp. 603–606, May 1969.
- S.-I. Niculescu, *Delay Effects on Stability A Robust Control Approach*. Springer-Verlag London, 2001.
- A. Polyakov, D. Efimov, W. Perruquetti, et J.-P. Richard, "Output stabilization of time-varying input delay systems using interval observation technique," *Automatica*, vol. 49, pp. 3402–3410, 2013.
- A. Rapaport et J. L. Gouzé, "Parallelotopic and practical observers for non-linear uncertain systems," *International Journal of Control*, vol. 76, pp. 237–251, 2003.
- A. Rapaport et J. Harmand, "Robust regulation of a class of partially observed nonlinear continuous bioreactors," *Journal of Process Control*, vol. 12, pp. 291–302, 2002.
- J. P. Richard, "Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems," *Automatica*, vol. 39, no. 10, pp. 1667–1694, 2003.
- J. Shen, "Positive invariance of constrained affine dynamics and its application to hybrid systems and safety verification," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 57, pp. 3–18, 2012.
- S. Tarbouriech., G. Garcia., J. M. G. da Silva Jr., et I. Queinnec, *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer-Verlag, 2011.
- R. Tarek, E. Denis, et A. Zolghadri, "Interval state estimation for a class of nonlinear systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 57, pp. 260–65, 2012.
- M. Wu, Y. He, et J.-H. She, *Stability Analysis and Robust Control of Time-Delay Systems*. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.

S. Xu, G. Feng, Y. Zou, et J. Huang, “Robust controller design of uncertain discrete time-delay systems with input saturation and disturbances,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 57, pp. 2604–2609, 2012.

K. Yakoubi et Y. Chitour, “Linear systems subject to input saturation and time delay : Global asymptotic stabilization,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 52, pp. 874–879, 2007.

H.-S. Q. Yu-Peng Qiao et D.-Z. Cheng, “Parameterized solution to a class of syslvester matrix equations,” *International Journal of Automation and Computing*, vol. 7, pp. 479–483, 2010.

Q.-C. Zhong, *Robust Control of time-delay Systems*. Springer-Verlag, 2006.



**ANNEXE A    PROOF Of COROLLARY 4.4.4**

Consider the positive definite function

$$V(z(t)) = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{|z_i(t)|}{\xi_i} \right), \quad \xi_i > 0 \quad (\text{A.1})$$

It suffices to show that  $V(z(t))$  is Lyapunov-Razumikhin function for system (4.4), in order to guarantee the asymptotic stability of original system (4.1) Hale (1977). Now decomposing vector  $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ ,  $q_1, q_2 \in \text{Int}\mathbb{R}_+^m$  and using equations (4.7a-4.7c), the condition (4.11) given in corollary 4.4.4 can be rewritten as

$$\begin{cases} \left( M_1 + \tau(Q^- + R^-) \right) q_1 + \left( M_2 + \tau(Q^+ + R^+) \right) q_2 < 0 \\ \left( M_2 + \tau(Q^+ + R^+) \right) q_1 + \left( M_1 + \tau(Q^- + R^-) \right) q_2 < 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

It is easy to verify that

$$\bar{M} = M_1 + M_2, \quad |Q| = Q^+ + Q^-, \quad \text{and} \quad |R| = R^+ + R^-$$

Adding the two inequalities of (A.2) and substituting the above matrices, the condition (4.11) becomes as

$$\left( \bar{M} + \tau(|Q| + |R|) \right) \xi < 0, \quad \xi = (q_1 + q_2) \quad (\text{A.3})$$

The upper right-hand derivative of  $V(z(t))$  with respect to (4.4) is defined as

$$\begin{aligned} D^+(V(z(t))) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} \left( V(z(t+\epsilon)) - V(z(t)) \right) \\ &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} \Delta(V(z)) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

where

$$\Delta(V(z)) = \left( V \left( [\mathbb{I}_m + \epsilon M] z(t) - \epsilon \int_{-\tau}^0 [Qz(t+s) + Rz(t-\tau+s)] ds \right) - V(z(t)) \right) \quad (\text{A.5})$$

It follows that

$$\Delta(V(z)) \leq \max_{1 \leq i \leq m} \left( \left( \frac{(|P|\xi)_i}{\xi_i} - 1 \right) V(z(t)) + \frac{\epsilon}{\xi_i} \int_{-\tau}^0 \left( (|Q|\xi)_i V(x(t+s)) + (|R|\xi)_i V(x(t-\tau+s)) \right) ds \right) \quad (\text{A.6})$$

where

$$\begin{aligned} P &= \mathbb{I}_m + \epsilon M; \\ V(z(t+s)) &= \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{|z_i(t+s)|}{\xi_i} \right); \\ V(z(t-\tau+s)) &= \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{|z_i(t-\tau+s)|}{\xi_i} \right) \end{aligned}$$

It is worth noting that in the vicinity of zero,  $|P| = \mathbb{I}_m + \epsilon \bar{M}$  is hold, when  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Following Razumikhin's theorem Hale (1977)  $\left( V(z(s)) \leq V(z(t)), \quad t - 2\tau \leq s \leq t \right)$  and substituting  $|P|$  into (A.6), we may have

$$D^+(V(z(t))) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left( \frac{\left( (\bar{M} + \tau(|Q| + |R|))\xi \right)_i}{\xi_i} V(z(t)) \right)$$

this implies if (4.11) is satisfies then  $D^+(V(z(t))) < 0$ , so  $V(z(t))$  is Lyapunov-Razumikhin function for system (4.4). Thus the system (4.1) is asymptotically stable with delay dependent.

## ANNEXE B PROOF OF THE THEOREM 5.5.2

Consider the Lyapunov-Krasovski functional defined as :

$$V(\xi(t)) = V_1(\xi(t)) + V_2(\xi(t)) + V_3(\xi(t)), \quad (\text{B.1a})$$

where

$$V_1(\xi(t)) = \xi^T(t)P\xi(t), \quad (\text{B.1b})$$

$$V_2(\xi(t)) = \int_{t-h(t)}^t \xi^T(s)\overline{W}\xi(s)ds, \quad (\text{B.1c})$$

$$V_3(\xi(t)) = \int_{-h_m}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\xi}^T(s)G\dot{\xi}(s)dsd\theta, \quad (\text{B.1d})$$

with

$$P = P^T \succ 0, \quad \overline{W} = \overline{W}^T \succ 0 \quad \text{and,} \quad G = G^T \succ 0.$$

The time derivative of  $V$  along the trajectories of system (5.24) is given by :

$$\dot{V}_1 = \xi^T(t) \left( (\hat{A} + \hat{B}K)^T P + P(\hat{A} + \hat{B}K) \right) \xi(t) + \xi^T(t) P \hat{A}_d \xi(t - h(t)) + \xi^T(t - h(t)) P \hat{A}_d^T \xi(t), \quad (\text{B.2})$$

$$\dot{V}_2 \leq \xi^T(t) \overline{W} \xi(t) - \xi^T(t - h(t)) (1 - \mu) \overline{W} \xi(t - h(t)), \quad (\text{B.3})$$

$$\dot{V}_3 \leq h_m \dot{\xi}^T(t) G \dot{\xi}(t) - \int_{t-h(t)}^t \dot{\xi}^T(s) G \dot{\xi}(s) ds, \quad (\text{B.4})$$

Now, we apply the same techniques used in Liu (2009), and hence, we drive

$$\dot{V} \leq \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \xi(t - h(t)) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \overline{X}_{33} - G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \xi(t - h(t)) \\ \dot{\xi}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

with

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \star & \Omega_{22} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{11} = (\hat{A} + \hat{B}K)^T P + P(\hat{A} + \hat{B}K) + h_m \bar{X}_{11} + \bar{X}_{13}^T + \bar{X}_{13} + \bar{W} + h_m (\hat{A} + \hat{B}K)^T G (\hat{A} + \hat{B}K),$$

$$\Omega_{12} = P \hat{A}_d + h_m \bar{X}_{12} - \bar{X}_{13} + \bar{X}_{13}^T + h_m (\hat{A} + \hat{B}K)^T G \hat{A}_d,$$

$$\Omega_{22} = -(1 - \mu) \bar{W} + h_m \bar{X}_{22} - \bar{X}_{23}^T - \bar{X}_{23} + \hat{A}_d^T h_m G \hat{A}_d,$$

$$\bar{X}_{ij} = P X_{ij} P, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

It becomes clear that if  $\Theta$  and  $\bar{X}_{33} - G$  are negative semidefinite matrices, such that LIMs (5.27a) and (5.27b) hold, then the time derivate of the functional  $V$  along the trajectories of system (5.24) is negative. It is noteworthy that  $\Theta \prec 0$  is equivalent by Schur complement to  $\Omega \prec 0$ , where it is given by (B.6) :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \star & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \star & \star & \Omega_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

and

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= (\hat{A} + \hat{B}K)^T P + P(\hat{A} + \hat{B}K) + h_m \bar{X}_{11} + \bar{X}_{13}^T \\ &\quad + \bar{X}_{13} + \bar{W}, \end{aligned}$$

$$\Omega_{12} = P \hat{A}_d + h_m \bar{X}_{12} - \bar{X}_{13} + \bar{X}_{13}^T,$$

$$\Omega_{13} = h_m (\hat{A} + \hat{B}K)^T G,$$

$$\Omega_{22} = -(1 - \mu) \bar{W} + h_m \bar{X}_{22} - \bar{X}_{23}^T - \bar{X}_{23},$$

$$\Omega_{23} = h_m \hat{A}_d^T G,$$

$$\Omega_{33} = -h_m G.$$

Then, we introduce the following change of variables :

$$P = X^{-1}, \quad \bar{W} = X^{-1} W X^{-1}, \quad G = T^{-1},$$

$$Y = K X,$$

and multiply (B.6) by  $\text{diag}(X, X, T)$ , on the left-hand side and on the right-hand side, respectively, we obtained the inequality (5.27c). LMIs (5.27d) and (5.27e) guarantee that ellipsoid  $D(P)$  given by (5.25) is contained in the polyhedral  $D(k)$  with  $K = Y X^{-1}$  Boyd

et al. (1994). Since  $Y = (Y_1 + Y_2 \quad Y_1 \quad -Y_2)$  and  $X = \text{diag}(X_1, X_1, X_1)$  and  $K = (F_1 + F_2 \quad F_1 \quad -F_2)$ , it follows that  $F_1 = Y_1 X_1^{-1}$  and  $F_2 = Y_2 X_1^{-1}$ . Using a related result of Lens and Adamy (2008), the LMI (5.27f) ensures that  $\Xi_0$  is fully contained in the ellipsoid  $D(P)$ .

Therefore, from (5.27c) it follows that the ellipsoid  $D(P)$  is positive invariant, contractive, set with respect to (5.24). Since  $\Xi_0 \subset D(P)$ , the asymptotic converge to the origin of all trajectories of (5.24) emanating from  $\Xi_0$  is guaranteed. Hence, the limit  $z(t) \rightarrow 0$  equivalently  $x(t) \rightarrow 0$  and the limits  $\bar{e} \rightarrow 0$  ( $\underline{e} \rightarrow 0$ ) implies  $\bar{z}(t) \rightarrow z(t)$  ( $\underline{z}(t) \rightarrow z(t)$ ).

## ANNEXE C    ARTICLE 3 : Positive Invariance of constrained linear continuous-time delay system with delay dependence

H. Bensalah and L. Baron

Department of Mechanical Engineering, École Polytechnique de Montréal QC H3C 3A7,  
Canada

International Conference of Control, Dynamic Systems, and Robotics. Ottawa, Ontario,  
Canada, May 7-8 2015

### abstract

In this paper, we apply the concept of positive invariance to continuous-time delay linear systems. Necessary and sufficient algebraic conditions with delay dependence allowing to obtain the largest positively invariant set of delay system are given. The results can include information on the size of delay, and therefore, can be delay dependence positively invariant conditions. A numerical example is given to illustrate theoretical developments.

### keywords

Time delay systems ; non-symmetrical constraints ; polyhedral sets ; positive invariance ; asymptotic stability.

### 1 Introduction

Motivated by many practical problems, especially in the case of dynamic systems subject to constraints, the positively invariant sets have played a crucial role in synthesis and analysis of both linear discrete-time and continuous-time systems see Khalil (2002); Blanchini (1999). Recently, it was shown that the positive invariance property can be exploited to obtain an explicit characterization of global switching behaviors of piecewise affine systems Shen (2012). In the literature, there are several results involving application of the concept of positive invariance to linear discrete-time and continuous-time systems see Blanchini (1999) and the references therein. To our knowledge, almost all these works are developed for dynamical systems which possesses no time delay, which is seldom the case in industrial applications. In particular, some delay-independent positively invariant set conditions have been proposed for linear delay system Hmamed (2000); Hennes and Tarbouriech (1997); Dambrine et al.

(1995b). Delay-dependent positively invariant set conditions for continuous-time and discrete-time delay system have also been developed respectively by Dambrine et al. (1995a) and Hmamed (2000).

In the sequel, we will be concerned essentially with linear continuous-time delay system described by state space equation (4.1). We study the positive invariance property of the polyhedral set such that

$$D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid -r_2 \leq x \leq r_1 \right\} \quad (\text{C.1})$$

with  $r_1$  and  $r_2$  being  $n$  dimensional real vectors with positive components.

The paper is structured as follows. In section C.3, we define the positive invariance and give some preliminary results. In section C.4, we derive necessary and sufficient algebraic conditions with delay dependence for polyhedral set  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  to be positively invariant of linear continuous-time delay system.

*Notation* : If  $A$  denotes a matrix of  $\mathbb{R}^{n \times n}$  and  $x, y$  vectors of  $\mathbb{R}^n$  then :  $A^+$  (respectively  $A^-$ ) is the matrix whose components are given by  $A_{ij}^+ = \max(A_{ij}, 0)$  (respectively  $A_{ij}^- = \max(-A_{ij}, 0)$ ),  $A_1$  (respectively  $A_2$ ) is the matrix whose components are given by  $A_{ii}$  if  $i = j$  and  $A_{ij}^+$  if  $i \neq j$  (respectively 0 if  $i = j$  and  $A_{ij}^-$  if  $i \neq j$ ), and  $|A|$  is the matrix whose components are given by  $|A_{ij}|$ , for  $i, j = 1, \dots, n$ .  $\mathbb{I}_n$  is the identity matrix  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .  $x \leq y$  if  $x_i \leq y_i$ , for  $i = 1, \dots, n$  and  $\partial D$  is the boundary of the set  $D$ .

## 2 Preliminary results

In this section, we present some definitions and useful results for the sequel. Consider the following linear continuous-time delay system

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau), & \text{for } t > 0 \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \text{for } \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $\tau > 0$  is the time delay and  $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . It is assumed that for any continuous function  $\phi$  bounded and measurable, the time delay system (C.2) has unique solution denoted by  $x(t, \phi)$ .

**Definition C.0.1.** *A set  $D$  of  $\mathbb{R}^n$  is said to be positively invariant for motions of system (C.2), if for every  $\phi(s) \in D$  ( $s \in [-\tau, 0]$ ), the motion  $x(t, \phi) \in D$ , for every  $t > 0$ .*

By using the Newton-Leibniz formula Hale and Lunel (1993), we have

$$\begin{aligned} x(t - \tau) &= x(t) - \int_{-\tau}^0 \dot{x}(t + s) ds \\ &= x(t) - \int_{-\tau}^0 \left[ Ax(t + s) + A_d x(t - \tau + s) \right] ds \end{aligned}$$

This equation together with (C.2), the original system can be rewritten as

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{-\tau}^0 \left[ Ax(t + s) + A_d x(t - \tau + s) \right] ds \quad (\text{C.3})$$

under arbitrary continuous initial condition

$$x(\theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in [-2\tau, 0]. \quad (\text{C.4})$$

It is noteworthy that the solution of the system with discrete delay (C.2) is also the solution of system with distributed delay (C.3–C.4), and the asymptotic stability of the system (C.3–C.4) can guarantee the asymptotic stability of the original system (C.2), see Hale and Lunel (1993) and Niculescu (2001). For the sake of simplicity, the system with distributed delay is used to obtain the stability or, in the case of this paper, the positive invariant conditions for the system with discrete delay. The polyhedral set  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  can be written as a set defined as

$$D(\mathbb{I}_{2n}, r) = \left\{ y \in \mathbb{R}^{2n} \mid y \leq r; r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{C.5})$$

where  $y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ -x(t) \end{pmatrix}$ . Therefore, the following proposition is straightforward.

**Proposition C.0.2.** *The positive invariance of polyhedral set  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  for system (C.3–C.4) is equivalent to the positive invariance of the set  $D(\mathbb{I}_{2n}, r)$  for system defined by*

$$\dot{y}(t) = \tilde{M}y(t) + \int_{-\tau}^0 \left[ \tilde{Q}y(t + s) + \tilde{R}y(t - \tau + s) \right] ds. \quad (\text{C.6})$$

under arbitrary continuous initial condition

$$y(\theta) = \begin{pmatrix} \psi(\theta) \\ -\psi(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [-2\tau, 0] \quad (\text{C.7})$$



with

$$M = A + A_d \quad (\text{C.8a})$$

$$Q = A_d A \quad (\text{C.8b})$$

$$R = A_d^2 \quad (\text{C.8c})$$

where  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{Q}$  and  $\tilde{R}$  are such that

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2 & M_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q^- & Q^+ \\ Q^+ & Q^- \end{pmatrix} \text{ and } \tilde{R} = \begin{pmatrix} R^- & R^+ \\ R^+ & R^- \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

*Démonstration.* By increasing the size of system (C.3–C.4) and observing that  $M = M_1 - M_2$ ,  $Q = Q^+ - Q^-$  and  $R = R^+ - R^-$  the associated system to polyhedral set  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  can be defined by (C.6–C.7). Since the set  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  can be written as (C.5), then we obtain our result.  $\square$

**Remark C.0.3.** *The matrix  $\tilde{M}$  is Metzler, since its off diagonal components are nonnegative Ait-Rami and Tadeo (2007), and both matrices  $\tilde{Q}$  and  $\tilde{R}$  are nonnegative Haddad and Chelleboina (2005). In this case the system (C.6) can be seen as positive system for any nonnegative initial condition  $0 \leq y(\theta) \leq r$ ,  $\theta \in [-2\tau, 0]$  Kaczorek (2006).*

### 3 Delay dependence positively invariant conditions

A necessary and sufficient condition for the non-symmetrical domain  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  to be positively invariant for original system (C.2) with delay dependence is herein proposed.

**Theorem C.0.4.** *The polyhedral set  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  defined by (C.1) is a delay-dependent positively invariant set for system (C.2) if and only if the following condition holds*

$$\left( \tilde{M} + \tau(\tilde{Q} + \tilde{R}) \right) r \leq 0 \quad (\text{C.10})$$

where  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{R}$  are given in (C.9), and  $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$

*Proof. Necessity :* We show this by contradiction. Suppose  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  is positively invariant for system (C.2) but (C.10) does not hold, then there exists  $i \in [1, n]$  such that

$$M_{ii}r_1^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( M_{ij}^+ r_1^j + M_{ij}^- r_2^j \right) + \tau \sum_{j=1}^n \left( \left( Q_{ij}^- + R_{ij}^- \right) r_1^j + \left( Q_{ij}^+ + R_{ij}^+ \right) r_2^j \right) > 0 \quad (\text{C.11})$$

Consider the particular states  $x_p(t)$ ,  $x_p(t+s)$  and  $x_p(t-\tau+s) \in \partial D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  ( $-\tau \leq s \leq 0$ ) such that

$$x_p(t) = \begin{cases} r_1^i, & \text{for } j = i \\ r_1^j, & \text{if } M_{ij} > 0 \text{ for } j \neq i \\ -r_2^j, & \text{if } M_{ij} < 0 \text{ for } j \neq i \\ 0, & \text{if } M_{ij} = 0 \end{cases}, \quad x_p(t+s) = \begin{cases} r_1^j, & \text{if } Q_{ij} < 0 \\ r_2^j, & \text{if } Q_{ij} > 0 \\ 0, & \text{if } Q_{ij} = 0 \end{cases} \quad j = 1, \dots, m \quad \text{and}$$

$$x_p(t-\tau+s) \begin{cases} r_1^j, & \text{if } R_{ij} < 0 \\ r_2^j, & \text{if } R_{ij} > 0 \\ 0, & \text{if } R_{ij} = 0 \end{cases} \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{C.12})$$

By using the system (C.3–C.4), the derivative of the  $i^{\text{th}}$  component of particular vector  $x_p(t)$ ,  $\forall t > 0$ , can satisfy the following

$$\dot{x}_{p_i}(t) = M_{ii}r_1^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (M_{ij}^+ r_1^j + M_{ij}^- r_2^j) + \tau \sum_{j=1}^n \left( (Q_{ij}^- + R_{ij}^-) r_1^j + (Q_{ij}^+ + R_{ij}^+) r_2^j \right) > 0$$

this implies that for all scalar  $\varepsilon > 0$ ,  $x_{p_i}(t+\varepsilon) > x_{p_i}(t)$ . Hence  $x_{p_i}(t+\varepsilon) \notin D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$ , a contradiction.

*Sufficiency* : It is shown in proposition C.0.2, that system (C.6) is associated to set  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$ . It follows from Lagrange's formula that the solution of (C.6) is given by

$$y(t) = e^{\tilde{M}t} y(0) + \int_0^t e^{\tilde{M}(t-\theta)} \left( \int_{-\tau}^0 (\tilde{Q}y(\theta+s) + \tilde{R}y(\theta+s-\tau)) ds \right) d\theta; \quad t > 0.$$

where  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{Q}$  and  $\tilde{R}$  are given by (C.9). If we consider  $y(s) \leq r$  for  $s \in [-2\tau, 0]$ , then in same way found in El'sgol'ts and Norkin (1973) and Hmamed et al. (1995), we obtain  $y(t) \leq r$  on the intervals  $[0, 2\tau]$ ,  $[2\tau, 4\tau]$ , ...

If there exist a vector  $\rho > 0$  such that  $r_1 = r_2 = \rho$ , then the asymmetric set  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  can be transformed to symmetric set  $D(\mathbb{I}_n, \rho, \rho)$  such that

$$D(\mathbb{I}_n, \rho, \rho) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid -\rho \leq x \leq \rho, \rho > 0 \right\}$$

Thus symmetrical case can be easily deduced and the following corollary.

**Corollary C.0.5.** *The polyhedral set  $D(\mathbb{I}_n, \rho, \rho)$  is a delay-dependent positively invariant set*

for system (C.2) if and only if the following condition hold

$$\left(\bar{M} + \tau(|Q| + |R|)\right)\rho \leq 0 \quad (\text{C.13})$$

where  $\bar{M}$  is the matrix whose components are given by  $M_{ii}$  if  $i = j$  and  $|M_{ij}|$  if  $i \neq j$

*Démonstration.* By observing again that  $\bar{M} = M_1 + M_2$ ,  $|Q| = Q^+ + Q^-$ , and  $|R| = R^+ + R^-$ , the condition (C.10) becomes the condition (C.13), proving our result.  $\square$

**Remark C.0.6.** When delay time  $\tau = 0$ , the condition (C.10) becomes equal to  $\tilde{M}r \leq 0$ , where  $M = A + A_d$ . The result of positive invariance of the polyhedral set  $D(\mathbb{I}_n, r_1, r_2)$  with respect to continuous system without delay is obviously obtained Benzaouia and Hmamed (1993).

#### 4 Example of rectangular constraint set

Consider the following dynamical system, for all positive times ( $t > 0$ )

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{2}x_1(t) - 2x_2(t) - \frac{1}{4}x_1(t - \tau) - \frac{1}{4}x_2(t - \tau) \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

and assume that its state variables are subject to the constraints

$$-0.75 \leq x_1 \leq 1.5 \quad (\text{C.15a})$$

$$-0.1 \leq x_2 \leq 0.6 \quad (\text{C.15b})$$

Such constraints form a rectangle represented by the bounded polyhedron set  $D(\mathbb{I}_2, r_1, r_2)$ , where  $r_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.6 \end{pmatrix}$  and  $r_2 = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.1 \end{pmatrix}$  as shown in figures C.1 and C.2. It is positively invariant of system (C.14) if the interval of delay  $\tau$  fulfills the condition  $\left(\tilde{M} + \tau(\tilde{Q} + \tilde{R})\right)r \leq 0$ . We find that  $0 \leq \tau \leq 1.331$ . If we take as initial states  $\phi \in D(\mathbb{I}_2, r_1, r_2)$ , the resultant trajectory (figure C.1) does not violate the constraints. Alternatively, the trajectory of system (C.14) starting from  $D(\mathbb{I}_2, r_1, r_2)$  for  $\tau = 1.431 \notin [0, 1.331]$ , as show in figure C.2, violates the constraints. The set  $D(\mathbb{I}_2, r_1, r_2)$  is not positively invariant with respect to system (C.14) for  $\tau = 1.431$ .

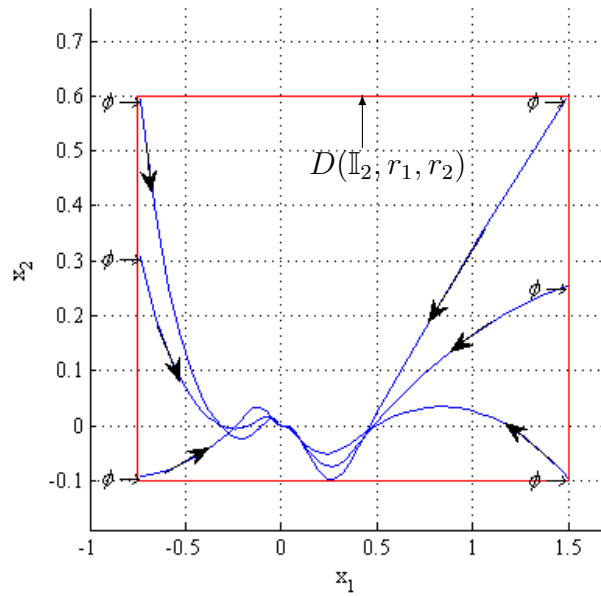


Figure C.1 The invariant polyhedron set for initial different states  $\phi \in D(\mathbb{I}_2, r_1, r_2)$ . The trajectories starting from set are given for  $\tau = \tau_{\max} = 1.331$ .

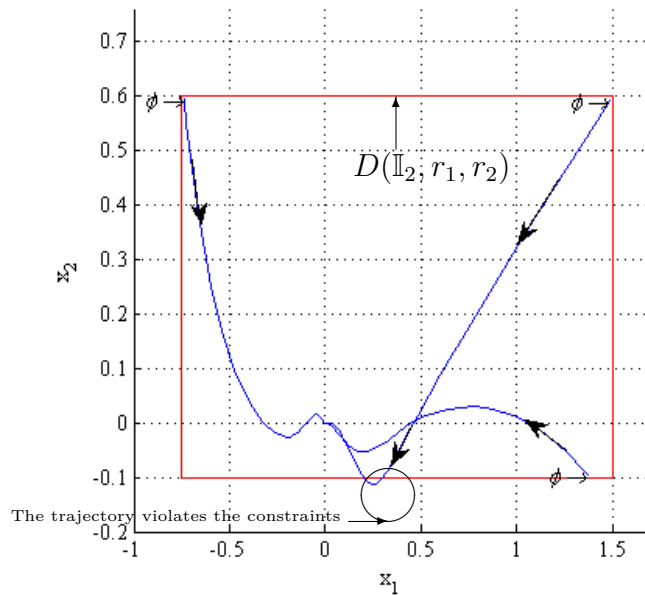


Figure C.2  $D(\mathbb{I}_2, r_1, r_2)$  is not positively invariant for delay  $\tau = 1.431$ . The trajectories starting from set are given for three initials conditions  $\phi$ .

Obviously, we believe that these results find application to constrained regulator problem of linear continuous time delay systems while taking into account the delay parameter.

## 5 Conclusion

In this paper, the positive invariance of constrained continuous-time systems with delay is studied. Necessary and sufficient algebraic conditions with delay dependence for a given polyhedral set to be positively invariant with respect to motions of linear continuous-time delay system are established. The case of symmetrical constrained is easily obtained. The link of results given between systems with and without delay is established. Finally the delay dependent condition presented in this paper is shown to be a generalization of theorem 2-2 given in Hmamed et al. (1995).