

Titre: Utilisation conjointe de lois de parois et modèles bas-Reynolds.
Title:

Auteur: Loïc Frazza
Author:

Date: 2015

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Frazza, L. (2015). Utilisation conjointe de lois de parois et modèles bas-Reynolds.
[Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/1796/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/1796/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Dominique Pelletier
Advisors:

Programme: Génie mécanique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

UTILISATION CONJOINTE DE LOIS DE PAROIS ET MODÈLES BAS-REYNOLDS

LOÏC FRAZZA
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
AOÛT 2015

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

UTILISATION CONJOINTE DE LOIS DE PAROIS ET MODÈLES BAS-REYNOLDS

présenté par : FRAZZA Loïc

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. CAMARERO Ricardo, Ph. D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph. D., membre

DÉDICACE

À ma mère et mon père...

REMERCIEMENTS

Je remercie mon directeur de recherche, Dominique Pelletier pour son incroyable disponibilité, ses conseils avisés, son inaltérable bonne humeur ainsi que ses innombrables qualités humaines.

Je remercie Alexander Hay pour l'aide précieuse qu'il a su m'apporter tout au long de cette maîtrise.

Je remercie Perle pour son soutien et sa patience.

Je remercie ma famille et mes amis pour leur indéfectible soutien.

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une méthode générique pour développer des lois de parois adaptatives consistantes spécifiques à un modèle de turbulence bas-Reynolds. Elles permettent d'améliorer la description et le traitement des couches limites en se raccordant exactement à la solution prédictive par le modèle choisi, à n'importe quelle distance de la paroi, de la sous-couche visqueuse à la zone logarithmique. Le modèle de Launder-Sharma, utilisé ici, est adapté à une formulation logarithmique des variables de turbulence de façon à garantir la positivité de celles-ci sans limiteurs. Cette approche robuste est efficace numériquement et permet une résolution rapide.

Le modèle bas-Reynolds est tout d'abord intégré jusqu'à la paroi sur un problème unidimensionnel à l'aide d'un maillage fin de façon à produire des tables pour la vitesse et les variables de turbulences adimensionnelles. Ces tables sont spécifiques au modèle et serviront à calculer les conditions limites imposées par les lois de parois. Une loi de parois à deux échelles de vitesses est proposée afin d'améliorer les prédictions en présence de points de stagnation, décollement et recollement.

Les performances de ces lois de parois sont évaluées sur des cas unidimensionnels puis bidimensionnels. En 1D, l'universalité des lois de parois est examinée sur des écoulements de Couette et de Poiseuille, afin de déterminer le domaine de validité des nouvelles lois de parois. L'imposition de conditions limites consistantes calculées à partir des profils tabulés élimine les limitations classiques des lois standard. Il est possible de raccorder avec précision les lois de parois et le modèle bas-Reynolds jusque dans la sous-couche visqueuse. Cette approche donne, avec des lois de parois, la même solution que celle obtenue par intégration jusqu'à la paroi mais à un coût moindre.

Les lois de parois adaptatives à deux échelles de vitesses sont ensuite utilisées pour résoudre un écoulement sur une plaque plane en présence d'un décollement induit par un gradient de pression adverse. En imposant des conditions limites consistantes, on obtient des solutions indépendantes du maillage. La modélisation est également améliorée dans les zones de décollement en permettant de raccorder les solutions à une très petite distance.

Enfin, la méthode est validée sur un cas bidimensionnel complexe afin d'évaluer son applicabilité et comparer les prédictions aux résultats expérimentaux. Pouvant être raccordées à n'importe quelle distance, les lois de parois adaptatives sont simples et souples d'emploi.

ABSTRACT

The present document introduces a new generic method to develop consistent wall-functions specific to an arbitrary RANS low Reynolds turbulence model. Such an approach allows to match exactly the wall-function and the turbulence model at any distance from the viscous sublayer to the logarithmic zone. The Launder-Sharma low-Reynolds turbulence model is adapted to a logarithmic formulation to guarantee the positivity of turbulence quantities without clipping. This, in turn, yields a robust and accurate solution procedure that is computationally efficient.

The model is first integrated down to the wall on the planar Couette flow, in order to generate reference tables for dimensionless profiles of velocity and turbulence variables. These tables will be used to provide consistent boundary conditions in the wall-function strategy. A two-velocity scale wall function is proposed to improve predictions near stagnation, detachment and reattachment points.

Performances of the present method are investigated on 1D and 2D cases. The usual assumption of universality of the profile is investigated on 1D Couette and Poiseuille flows to determine the range of validity of the precomputed tables. Using both model-consistent wall function and a low Reynolds number model largely reduces the limitation of traditional wall functions related to the choice of the wall distance. Furthermore, it yields solutions as accurate as when integration is performed down to the wall for a much reduced computational cost.

The performances of the newly developed wall function in the presence of pressure gradient are then studied on a flat plate with pressure driven separation. Imposing a correctly computed normal derivative for turbulence kinetic energy largely improves results and the universality of the profile while leading to wall distance independent results.

The present method is then validated on a complex flow by comparison with experimental results. Adaptive two-velocity scale wall function proves to be particularly easy to use as they can be matched at any distance. They did not show particular numerical difficulties and are even less stiff than one-velocity scale wall-functions.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES NOTATIONS ET SYMBOLES	xii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	3
2.1 État de l'art	3
2.2 Objectifs	6
CHAPITRE 3 ASPECTS MATHÉMATIQUES ET NUMÉRIQUES	8
3.1 Aspects mathématiques de la turbulence et modélisation	8
3.1.1 Aspects mathématiques de la turbulence	8
3.1.2 Modélisation de la turbulence	11
3.2 Traitement des parois	18
3.2.1 Concept de couche limite	20
3.2.2 Modèles Bas-Reynolds	22
3.2.3 Lois de parois	26
3.3 Résolution numérique	36
3.3.1 Méthodes itératives et méthode de Newton	38
3.3.2 Procédures de résolution	41
3.3.3 Formulation	44
3.3.4 Implémentation des lois de parois	47
CHAPITRE 4 Résultats Numériques	54
4.1 Vérification	54

4.1.1	Principe des solutions manufacturées	54
4.1.2	Application aux modèles RANS avec lois de parois	56
4.2	Résultats unidimensionnels	58
4.2.1	Intégration à la paroi	58
4.2.2	Test des lois de parois	62
4.3	Résultats bidimensionnels	62
4.3.1	Compatibilité des conditions limites	62
4.3.2	Plaque plane en présence de succion et d'un jet	65
4.3.3	Expérience de Martinuzzi	74
CHAPITRE 5 CONCLUSION		84
5.1	Synthèse des travaux	84
5.2	Améliorations futures	86
RÉFÉRENCES		87

LISTE DES FIGURES

Figure 3.1	Décroissance et anisotropie des tourbillons près des parois dûes à la contrainte de non-pénétration.	19
Figure 3.2	Hyphotèses des couches limites	22
Figure 3.3	Maillages grossiers utilisés pour imposer des lois de parois en éléments finis et volumes finis.	30
Figure 3.4	Impacts du raffinement sur les maillages utilisés en éléments finis et volumes finis.	30
Figure 3.5	Comparaison du profil de vitesse prédit par le modèle de Launder-Sharma et la loi de Reichardt	33
Figure 3.6	Changement de signe admissible de \mathcal{Y} (en point-tiret) conduisant à l'annulation et à un comportement problématique de y (trait plein). Droite $y = 0$ en pointillés.	48
Figure 4.1	Convergence des normes L^2 de l'erreure exacte pour différentes variables lors du calcul de la solution manufaturée de couche cisaillée turbulente.	58
Figure 4.2	Profils de vitesse dans une couche limite turbulence prédis par le modèle de Launder-Sharma en présence de différents gradients de pression adverses.	60
Figure 4.3	Profils adimensionnels de la vitesse et l'énergie cinétique de turbulence prédis par le modèle de Launder-Sharma à différents Reynolds pour des écoulements de Couette et de Poiseuille.	61
Figure 4.4	Convergence en maillages des lois de parois adaptatives pour un écoulement de Poiseuille unidimensionnel à différentes distances de raccord. 50 (pourpre), 100 (bleu claire), 200 (vert) and 400 (rouge) éléments. .	63
Figure 4.5	Discontinuité dans les vecteurs vitesse en présence d'un coin saillant. .	65
Figure 4.6	Schéma descriptif et lignes de courant du décollement induit par succion/jet sur une plaque plane.	67
Figure 4.7	Distribution de pression (a) et distance adimensionnelle à la paroi du premier noeud de calcul pour différentes simulations (b).	67
Figure 4.8	Profils de vitesse et d'énergie cinétique de turbulence adimensionnalisés à $x = 1.25$ pour les modèles standard et de Launder-Sharma avec les lois de parois standards, à différentes distances de raccordement. Trait fin : profil tabulé; pointillés : intégration à la paroi.	70

Figure 4.9	Profils de vitesse et d'énergie cinétique de turbulence adimensionnalisés obtenues en $x = 1.25$, avec le modèle de Launder-Sharma et les loi de parois adaptatives à différentes distances de raccordement. Zone sans gradient de pression.	71
Figure 4.10	Profils de vitesse et d'énergie cinétique de turbulence adimensionnalisés obtenues en $x = 2.25$, avec le modèle de Launder-Sharma et les loi de parois adaptatives à différentes distances de raccordement. Présence d'un fort gradient de pression adverse.	71
Figure 4.11	Profils de vitesse et d'énergie cinétique de turbulence adimensionnalisés obtenues en $x = 3.0$, avec le modèle de Launder-Sharma et les loi de parois adaptatives à différentes distances de raccordement. Dans la zone de recirculation.	72
Figure 4.12	Profils de vitesse et d'énergie cinétique de turbulence adimensionnalisés obtenues en $x = 1.25$, avec le modèle de Launder-Sharma et les loi de parois adaptatives à différentes distances de raccordement. Présence d'un gradient de pression favorable.	73
Figure 4.13	Schéma de l'expérience de Martinuzzi en régime stationnaire	75
Figure 4.14	Schéma récapitulatif de la modélisation de l'expérience de Martinuzzi, retenue pour la conférence CFD2001	76
Figure 4.15	Expérience de Martinuzzi : coupes en $x = -4$ des résultats prédits par le modèle initial, comparé aux résultats expérimentaux dans la part supérieure de la veine.	77
Figure 4.16	Schéma de l'expérience de Martinuzzi modélisée avec la part inférieure de la veine.	78
Figure 4.17	Comparaison des résultats pour différentes géométrie de l'expérience de Martinuzzi. En tirets, la géométrie initiale avec uniquement la partie supérieure de la veine. En rouge la veine est modélisée entièrement mais sans couche limite sur la paroi supérieure. En bleu une couche limite est ajoutée sur la paroi supérieure.	79
Figure 4.18	Distribution de la distance adimensionnelle à la paroi y^+ du premier noeud de calcul et maillage typique généré par l'adaptation de maillage par estimation d'erreur : 242 737 noeuds.	80
Figure 4.19	Comparaison des prédictions numériques, obtenues avec le modèle de Launder-Sharma et des lois de parois adaptatives, aux mesures expérimentales pour l'expérience de Martinuzzi. Coupes des vitesses sur la face supérieure du cylindre des l'expérience de Martinuzzi.	82

- Figure 4.20 Comparaison des prédictions numériques, obtenues avec le modèle de Launder-Sharma et des lois de parois adaptatives, aux mesures expérimentales pour l'expérience de Martinuzzi. Coupes de vitesses et d'énergie cinétique de turbulence dans le sillage du cylindre. 83

LISTE DES NOTATIONS ET SYMBOLES

RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
URANS	Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes
LES	Large Eddy Simulation
DNS	Direct Numerical Simulation
DES	Detached Eddy Simulation
CFD	Computational Fluid Dynamics
SST	Shear Stress Transport
EDP	Équations aux Dérivées Partielles

Notation générale

a	Variables vectorielles
a	Variables scalaires
\mathbf{a}_i	i-ème coordonnée du vecteur a
$\ \mathbf{a}\ $	Norme euclidienne de a
$\ f\ _{\mathcal{L}^2}$	Norme intégrale de f
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Produit scalaire usuel
\mathbf{ab}	Produit tensoriel usuel $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j e_i \otimes e_j$
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	Double contraction des tenseurs (matrices) A et B
\mathbf{A}^T	Transposée de la matrice A
∇	Opérateur vectoriel nabla.
$\frac{\partial a}{\partial b}$	Dérivée partielle de la variable a par rapport à la variable b
$\frac{\partial a}{\partial b} \Big _{b=0}$	Dérivée partielle considérée en $b = 0$
$\frac{da}{db}$	Dérivée simple de la variable a par rapport à la variable b
$\frac{\partial a}{\partial \vec{n}}$	Dérivée normale de la variable a (éventuellement vectorielle)
ln	Logarithme népérien
$\exp(x), e^x$	Fonction exponentielle
=	Égalité exacte
\approx	Approximativement égal, <i>i.e.</i> de même ordre de grandeur
\bar{a}	Valeur moyenne de a
a'	Écart à la moyenne de a
a^+	Adimensionnalisation de la variable a

Caractères latins

C_μ, C_1, C_2	Constantes de fermeture du modèle $k - \varepsilon$
d	Distance de raccord des lois de parois
D	Terme additionnel bas-Reynolds dans l'équation de k
	Diamètre
dR	Différentielle première du résidu
ddR	Différentielle seconde du résidu
dt	Intervalle de temps infinitésimal
DU	Variation de U
E	Terme additionnel bas-Reynolds dans l'équation de ε
\mathcal{E}	Logarithme de ε
f_μ, f_1, f_2	Fonctions d'amortissement
h	Taille d'un élément du maillage
Id	Matrice identité
k	Énergie cinétique de la turbulence
k	Vecteur d'onde d'une onde plane
\mathcal{K}	Logarithme de k
L	Longueur
l_m	Longueur de mélange
l_μ	Longueur de Kolmogorov
\vec{n}	Vecteur unitaire normal
p	Pression
P_k	Production de turbulence
R^a	Résidu de l'équation de la variable a
Re	Nombre de Reynolds
t	Coordonnée temporelle
T	Période de temps
u	Vecteur vitesse
u_τ	Vitesse de friction
u_k	Échelle de vitesse basée sur la turbulence
u_t	Vitesse tangentielle
u, v, w	Composantes de la vitesse
U	Vecteur d'état
w	Vitesse caractéristique d'un tourbillon
x	Vecteur des coordonnées spatiales
x, y, z	Coordonnées spatiales

Lettre grecques

β	Petite surface
δa	Fonction teste de la variable a pour la méthode des éléments finis
ϵ	Perturbation infinitésimale
ε	Dissipation de la turbulence
Γ	Partie de $\partial\Omega$
μ	Viscosité dynamique
μ_t	Viscosité dynamique turbulente
ν	Viscosité cinématique
ν_t	Viscosité cinématique turbulente
ω	Inverse du temps caractéristique de décroissance de la turbulence
	Pulsation d'une onde plane
Ω	Ouvert de \mathbb{R}^n
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
ρ	Masse volumique
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon,$	Constantes de fermeture
τ	Cisaillement

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les simulations numériques sont devenues aujourd’hui un outil incontournable de l’industrie. Utilisées à des fins d’optimisation elles doivent fournir une réponse la plus rapide et précise possible. La facilité et la commodité d’emplois des outils proposés ont conduit à leur démocratisation et en font un atout pour le développement rapide de nouveaux produits, complémentaires de l’expérimentation. Malheureusement, la facilité d’obtention de résultats a tendance à faire oublier les limites inhérentes à la modélisation des problèmes. En particulier, malgré l’augmentation rapide des puissances de calcul, la modélisation de la turbulence est toujours un problème épineux.

De gros progrès ont été faits dans la description des écoulements libres. Une grande variété de modèles a été proposée afin de décrire au mieux toute une palette de problèmes, depuis les écoulements incompressibles jusqu’aux cas supersoniques, en passant par les écoulements tridimensionnels et en rotation. À ce titre la LES a récemment grandement contribué à ces améliorations et porté beaucoup d’espoirs. Améliorant significativement les prédictions d’écoulements libres, elle n’a malheureusement pas fourni les résultats escomptés en présence de parois solides. La DNS étant toujours inaccessible techniquement, les simulations se reposent toujours sur la modélisation RANS dans ces zones proches des parois.

Leur formulation linéaire les rend également plus faciles à résoudre que les lois de parois à une échelle de vitesse. Pour ce faire, deux approches majeures s’opposent. La première et la plus ancienne s’appuie sur les lois de parois pour éliminer la partie problématique de la couche limite. Elles sont souvent associées (à tort) dans l’esprit des numériciens à des maillages grossiers, et donc à des coûts de calculs moindres. Dans les faits, elles nécessitent effectivement des maillages moins fins que ceux utilisés pour les modèles bas-Reynolds mais doivent tout de même être suffisamment résolus. Cette condition est souvent négligée. Utilisées sans précaution, les lois de parois conduisent à des erreurs de modélisations et à l’absence de convergence en maillages.

C’est pourquoi les modèles bas-Reynolds sont souvent préférés, ou du moins a-t-on affirmé leur supériorité. En effet, les modèles bas-Reynolds étant intégrés jusqu’à la paroi, ils ne nécessitent qu’une condition bien connue : que la taille de la première cellule soit inférieure à $y^+ = 1$. Cependant cette condition est très restrictive, elle conduit à des maillages très fins, souvent étirés. Ceci conduit à des problèmes numériquement raides, *eg.* qui rendent les méthodes de résolution usuelles instables. Ces maillages sont si fins qu’ils font aujourd’hui l’objet de nombreuses critiques : une trop grande part des puissances de calcul est dédié

au traitement des parois, on est amené à mailler à des échelles absurdes, inférieures à toute capacité d'usinage (Knopp, 2006), etc.

Ceci conduit donc à un regain d'intérêt pour les lois de parois, et il a été proposé de les utiliser avec des modèles bas-Reynolds afin de bénéficier des avantages des deux modélisations. On comprend maintenant que les lois de parois standards sont incompatibles avec les modèles bas-Reynolds, conduisant à de mauvais résultats. On cherche donc aujourd'hui à développer des lois de parois compatibles, analytiques ou, comme dans ce mémoire, tabulées.

Nous présentons ici une méthodologie pour développer plusieurs lois de parois consistantes, spécifiques à un modèle de turbulence donné. Cette approche est adaptée à une formulation logarithmique des variables de turbulence.

Pour ce faire, nous étudions et évaluons dans une première partie les hypothèses et conséquences de la modélisation RANS. Les limites de cette dernière, ainsi que les corrections qui y sont apportées, y sont présentées et explicitées. Dans la partie 3.2 une attention toute particulière est portée aux couches limites qui sont au centre de notre problématique. Les différentes approches y sont développées et analysées. Le principe des lois de parois est présenté dans cette section, et on s'attardera alors sur leurs limites théoriques. Comme nous l'avons évoqué, ces traitements ont une forte influence sur les aspects numériques de la résolution. Ceux-ci sont donc présentés à la partie 3.3.

Le Chapitre 4 est dédié aux simulations et résultats numériques des développements théoriques précédents. Afin de garantir la validité des résultats, le code est tout d'abord vérifié à l'aide de la méthode des solutions manufacturées. Nous conduisons en suite à la partie 4.2 une série de calculs sur des problèmes unidimensionnels afin d'éliminer rapidement les premières difficultés et d'évaluer les limitations de notre méthode. Les résultats de cette partie servent également de tables de référence pour imposer les conditions limites dans nos lois de parois. Celles-ci sont ensuite appliquées à la section 4.3 à des écoulements bidimensionnels. Un premier cas simple est utilisé pour isoler et étudier au mieux les performances des lois de parois. Puis un cas plus complexe est résolu afin d'évaluer l'applicabilité et les performances de notre méthode sur un cas réel.

Enfin, en conclusion, d'éventuelles solutions et améliorations sont proposées pour de futurs développements.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

L'augmentation de puissances de calcul des ordinateurs rend les simulations numériques de plus en plus accessibles. Alors qu'elles se cantonnaient il y a quelques années à la recherche et aux grands groupes industriels, il est aujourd'hui possible de réaliser un calcul sur des ordinateurs de bureau professionnels. Pour l'essentiel, ces simulations impliquent des fluides simples que l'on rencontre couramment. Prenons le cas de l'eau et l'air dont les viscosités cinématiques ν sont respectivement de l'ordre de $15 \cdot 10^{-6}$ et $1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ comme exemple. Pour des écoulements à une vitesse de l'ordre de 1 m/s autour ou dans un objet d'une taille de l'ordre du mètre, on obtient alors un nombre Reynolds de l'ordre de

$$Re \approx \frac{UL}{\nu} \approx 10^5 - 10^6.$$

La turbulence apparaît généralement à des nombres Reynolds modérés qui dépendent du problème considéré, il n'est donc pas surprenant que la majorité des écoulements d'intérêt soient turbulents.

2.1 État de l'art

Les équations de Navier-Stokes sont un excellent modèle pour les fluides newtoniens. Il est couramment admis qu'elles sont parfaitement capables de simuler correctement les écoulements turbulents mais à un coût très élevé, car pour y arriver il faut capturer les plus petites structures dont la taille diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente (Wilcox, 2006). Pour réaliser de telles simulations, il faut un nombre de noeuds de l'ordre de

$$N \approx Re^{9/4}.$$

Il est alors clair que la simulation DNS (Direct Numerical Simulation) (Philipp *et al.*, 2010) des cas évoqués ci-dessus est inenvisageable, sans parler des applications dans l'aéronautique ou l'hydrodynamique navale dont les nombres Reynolds atteignent couramment respectivement 10^8 et 10^9 . Les simulations DNS restent donc aujourd'hui limitées à des cas très restreints, à des fins de recherche et nécessitent de très puissants calculateurs. En pratique, il est nécessaire de modéliser la turbulence pour se limiter au calcul d'un écoulement moyen macroscopique.

Il existe aujourd'hui deux approches principales, les LES (Large Eddy Simulations) qui simu-

lent une fraction du spectre de l'écoulement et les RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) qui s'appuient sur une moyenne statistique. Les modèles LES se sont montrés particulièrement performants dans les écoulements libres et ont suscité un fort engouement ces dernières années. Ils se sont cependant heurtés à des difficultés dans la description des écoulements près des parois où ils nécessitent virtuellement autant de ressources qu'une formulation DNS (Jimenez et Moser, 1998). Pour traiter ces zones, ils sont aujourd'hui fréquemment associés à des lois de parois ou des modèles RANS qui sont plus agés et donc mieux maîtrisés. Bien que délicat pour les modèles RANS également, le traitement des couches limites fait l'objet d'intenses recherches depuis plus de 50 ans (Launder et Spalding, 1974; Durbin, 1991; Hrenya *et al.*, 1995; Craft *et al.*, 2004; Karimpour et Venayagamoorthy, 2013). Diverses approches et solutions ont donc été proposées, testées et éprouvées.

Les lois de parois ont ainsi été introduites initialement pour contourner le problème de résolution des maillages dans les zones proches des frontières solides (Launder et Spalding, 1974), elles ont ensuite été déclinées en de nombreuses versions : sensibilisées à la pression, la rugosité, la succion, adaptées pour des espèces chimiques, la température, etc (Nazif et Tabrizi, 2014; Mohammadi et Puigt, 2006). Bien que très simples d'emploi, elles nécessitent tout de même certaines précautions. Les lois de parois standards doivent par exemple être raccordées au modèle haut Reynolds à une distance $y^+ > 30$ sans quoi elles peuvent conduire à des résultats qualitativement incorrects (Lacasse *et al.*, 2001a; Vieser *et al.*, 2002). D'autre part, elles ne sont pas nécessairement consistantes avec les modèles de turbulence. C'est-à-dire qu'elles ne fournissent pas les conditions limites adéquates; les solutions numériques ne convergeant pas vers une solution unique (la solution numérique exacte) en raffinant le maillage (Albets-Chico *et al.*, 2008).

Ces raisons font que les lois de parois ont été délaissées pendant un certain temps au profit des modèles bas-Reynolds qui peuvent (doivent!) être intégrés jusqu'à la paroi. Ils allouent cependant une très grosse part des ressources de calculs à la résolution de l'écoulement près des parois (jusqu'à 50 %) au détriment de l'écoulement principal (Knopp, 2006). De plus, les termes fortement non-linéaires qu'ils contiennent, ainsi que les maillages étirés des couches limites les rendent numériquement raides.

Ces raisons conduisent à un regain d'intérêt aujourd'hui pour les lois de parois, surtout depuis que Kalitzin *et al.* (2005) ont montré qu'il était possible de développer une loi de paroi consistante pour chaque modèle bas-Reynolds. Ainsi formulées, elles donnent des résultats convergés, qui coïncident exactement avec la solution du modèle bas-Reynolds, sans nécessiter l'intégration jusqu'à la paroi, ce qui permet l'économie d'une part substantielle des calculs et confère ainsi une grande souplesse d'utilisation puisqu'il n'est plus nécessaire de s'assurer

que le premier noeud de calcul se trouve à $y^+ > 30$ ou à $y^+ < 1$. De plus les lois de parois font intervenir la distance à la paroi par l'intermédiaire d'un paramètre algébrique, ce qui permet de déformer implicitement la géométrie du problème physique sans devoir modifier la géométrie du problème numérique, le maillage, ... Cette propriété est particulièrement utile lorsque l'on s'intéresse à des problèmes d'optimisation ou des calculs de sensibilités (Mohammadi et Puigt, 2006; Dicaro, 2007).

La méthodologie RANS étant relativement âgée, il existe une grande variété de modèles (Hrenya *et al.*, 1995; El-Behery et Hamed, 2011; Chen *et al.*, 2012), censés prendre en compte différents aspects physiques pour différents types d'écoulements (compressible, en rotation, proche paroi, etc...). Le tenseur de Reynolds, qui rend compte des effets de la turbulence sur l'écoulement macroscopique, est, dans la majorité des cas, modélisé par une loi de comportement linéaire liant au tenseur des déformations par l'intermédiaire de la viscosité turbulente. Cette modélisation a ses limites et de façon plus marginale, certains modèles tentent de relier le tenseur de Reynolds aux propriétés de l'écoulement (tenseur des déformations, vorticité, etc..) (Craft *et al.*, 2000) par des relations non-linéaires censées donner des résultats plus réalistes. Ces non-linéarités induisent cependant des raideurs numériques sans pour autant toujours donner des résultats supérieurs.

Dans les cas des modèles à viscosité turbulente, la façon de calculer celle-ci a évolué avec l'accroissement de la puissance de calcul. D'abord imposée directement dans les modèles algébriques, elle fut ensuite calculée par le biais de modèles à une équation de transport puis deux. Les modèles à une équation sont toujours utilisés aujourd'hui (contrairement aux modèles algébriques), essentiellement pour des raisons de coût, le modèle de Spalart-Almaras en est un exemple. Les modèles à deux équations sont particulièrement populaires, leur facilité d'emploi et leur capacité à prédire relativement correctement une vaste palette d'écoulements en font des outils très appréciés de l'industrie. Les plus connus sont les modèles $k - \epsilon$, pour les écoulements généralistes, et le modèle $k - \omega$, plus apprécié en aéronautique et hydrodynamique, qui se déclinent tous deux en de nombreuses variantes.

La tendance est aujourd'hui à l'ajout d'une (ou plusieurs) variable supplémentaire, en particulier pour prendre en compte, d'une certaine façon, la distance aux parois et activer des termes bas-Reynolds. Ainsi, les modèles $k - v^2 - f$ (Durbin, 1991) calculent une pseudo-distance à la paroi f et rendent alors compte de l'anisotropie de l'écoulement près des parois. Une autre voie populaire est l'hybridation de modèles, le modèle $k - \omega SST$ (Menter, 1994) est une combinaison linéaire convexe du modèle $k - \epsilon$ loin des parois et du modèle $k - \omega$ dans la zone proche parois, tandis que les simulations DES (Detached Eddy Simulation) font appel à une formulation RANS près des parois et une formulation LES dans l'écoulement

pleinement turbulent. Ces combinaisons visent alors à utiliser chaque modèle là où il est le plus performant.

Cependant, il n'existe aujourd'hui aucun modèle capable de simuler tout type d'écoulement correctement, les qualités et défauts de chacun ont été documentés de façon détaillée dans la littérature, notamment par Wilcox (2006), et il est donc important de garder à l'esprit les limitations d'un modèle lors de son utilisation.

L'expérience et différentes études (Chen *et al.*, 2012; Mathur et He, 2013) (parfois contradictoires) soulignent le fait que l'implémentation est aussi importante, voire plus, que le modèle lui-même. Goldberg a, par exemple, publié un modèle bas-Reynolds en omettant, semble-t-il, des précisions sur son implémentation, si bien que personne n'a pu reproduire ses résultats (Goldberg et Apsley, 1997). À ce titre, garantir la positivité des variables de turbulence est un enjeu crucial, car au-delà du fait que leur attribuer une valeur négative n'a pas de sens physique, cela conduit quasi systématiquement à l'échec de la résolution. Or, bien que les équations de la turbulence soient mathématiquement bien posées, leur résolution peut passer momentanément par des valeurs négatives selon la formulation qui est utilisée, ou même la solution numérique peut présenter des oscillations avec des valeurs négatives. Il est alors nécessaire d'imposer une valeur minimale (limiteurs) ou de prendre la valeur absolue des variables à chaque itération ce qui ralentit considérablement la convergence et induit des oscillations qui peuvent déstabiliser la solution. Pour pallier à ce problème Ilinca et Pelletier (1999) ont proposé d'utiliser le logarithme des variables de turbulence comme variables de calcul. Ce changement ne modifie pas le modèle de turbulence tout en garantissant la positivité des variables et donc de la viscosité turbulente. Cette approche a également été reprise pour une formulation bas-Reynolds du modèle $k - \omega$, ω tendant vers l'infini à la paroi, son logarithme est beaucoup plus petit ce qui facilite les calculs. Cette formulation est néanmoins inadaptée pour une intégration exacte à la paroi d'un modèle bas-Reynolds, puisque k s'y annule. Il devient donc très intéressant d'employer des lois de parois, pour ne faire intervenir les variables de turbulence qu'à partir d'une certaine distance de la paroi, là où elles sont non nulles.

2.2 Objectifs

L'objectif du présent travail est d'améliorer le traitement des parois dans les simulations d'écoulements turbulents RANS à l'aide de lois de parois. Pour ce faire nous allons employer un modèle bas-Reynolds, valide partout dans la couche limite, pour raccorder les lois de parois au dit modèle à une distance arbitraire. Afin de garantir la convergence en maillage des solutions, nous allons développer des lois de parois compatibles avec le modèle de turbulence

choisi.

La formulation logarithmique des variables de turbulences garantit la positivité de celles-ci et une convergence rapide de la solution. Les méthodes et schémas seront donc développés et testés principalement pour la formulation logarithmique tout en garantissant la compatibilité avec la formulation standard.

Nous avons donc identifié les objectifs suivants :

- Identifier un modèle bas-Reynolds adapté et le développer en formulation logarithmique.
- Étudier et déterminer le comportement de ce modèle dans la couche limite afin d'en déduire des lois de parois adaptées.
- Vérifier l'implémentation des lois de parois et du modèle par la méthode des solutions manufacturées.
- Valider le comportement numérique des lois de parois sur un problème adapté.
- Valider l'applicabilité des lois de parois sur un cas pratique à géométrie complexe.

CHAPITRE 3 ASPECTS MATHÉMATIQUES ET NUMÉRIQUES

3.1 Aspects mathématiques de la turbulence et modélisation

3.1.1 Aspects mathématiques de la turbulence

Léonard de Vinci est la première personne connue à s'être intéressée de près à la formation des tourbillons dans l'écoulement de l'eau autour d'un obstacle, sa démarche étant essentiellement descriptive. Il y donnera d'ailleurs le nom de turbulence. Léonard de Vinci rend compte de ses principales caractéristiques :

- Elle est produite en présence de **forts gradients de vitesse**, généralement en aval d'objets ou près de parois solides.
- Elle se manifeste par la présence de **tourbillons** de tailles différentes **interagissant fortement** entre eux en créant de nouveaux tourbillons plus petits et plus grands qui interagissent entre eux etc...
- Ceci forme un système complexe induisant des mouvements chaotiques au sein du fluide dont la conséquence est de **mélanger très efficacement**.
- On ajouterait aujourd'hui le caractère **instationnaire et tridimensionnel** de la turbulence.

Au 19^e siècle, les scientifiques ont cherché à comprendre et prédire les comportements de différents phénomènes, par exemple prédire le débit dans une conduite en fonction de son diamètre et du gradient de pression. À cette fin, ont été développées les équations d'Euler, de Saint-Venant et de Navier-Stokes (entre autre), qui donnent des résultats corrects pour nombre d'écoulements simples.

Afin d'illustrer les phénomènes liés au développement de la turbulence, considérons un écoulement **u** satisfaisant les équations de Navier-Stokes incompressibles :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla \cdot [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T],$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

que l'on va perturber au temps $t = 0$ en $\mathbf{u} + \mathbf{u}'$. Sans aucune hypothèse sur \mathbf{u}' pour l'instant, en utilisant le fait que $\mathbf{u} + \mathbf{u}'$ vérifie également les équations de Navier-Stokes, on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' \right) = -\nabla p' + \mu \nabla \cdot [\nabla \mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u}'^T], \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0. \quad (3.2)$$

L'évolution de la perturbation est donc régie par les équations de Navier-Stokes, avec les termes sources additionnels :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}$$

comme des termes sources additionnels. À présent, considérons un écoulement simple, 2D, purement cisaillé :

$$\mathbf{u} = \frac{U_0 y}{L} \mathbf{e}_x,$$

et intéressons-nous à l'évolution linéaire de perturbations infinitésimales. On considère donc que $\mathbf{u}' \ll \mathbf{u}$ ce qui permet de négliger le terme $\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'$, ainsi que le terme $\nabla p \approx \nabla \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}'\|^2$, l'équation devient alors linéaire. On s'intéresse aux perturbations de la forme :

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)),$$

où \mathbf{k} est ici le vecteur d'onde de la perturbation et ω sa pulsation. On obtient en substituant cette expression dans (3.1) et en projetant sur x :

$$\omega u'_{0x} \approx k_x \frac{U_0 y}{L} u'_{0x} - i \left(\nu (k_x^2 + k_y^2) u'_{0x} + u'_{0y} \frac{U_0}{L} \right), \quad (3.3)$$

$$ik_x u'_{0x} + ik_y u'_{0y} = 0, \quad (3.4)$$

soit, en utilisant (3.4) pour remplacer u'_{0y} et diviser par u'_{0x} ,

$$\omega \approx \frac{u_0 y}{L} k_x - i \frac{\nu}{L^2} \left(\frac{L^2}{l^2} - \frac{k_y}{k_x} Re \right)$$

où, l est la taille caractéristique de la perturbation. On voit que le signe de la partie imaginaire de ω , donc la stabilité du système, dépend de la taille de la perturbation l et du nombre de Reynolds de l'écoulement (le rapport $\frac{k_x}{k_y}$ caractérise l'alignement de la perturbation avec l'écoulement). Les petites structures ($l < \frac{L}{\sqrt{Re}}$) sont associées à une partie imaginaire négative et systématiquement dissipées exponentiellement par la viscosité, tandis que les structures plus grandes seront amplifiées exponentiellement par l'écoulement principal (partie imaginaire positive). Ainsi, de l'énergie est prélevée à l'écoulement principal et fournie à la

perturbation. La limite $l = \frac{L}{\sqrt{Re}}$ donne un aperçu de l'influence du nombre de Reynolds sur l'existence de la turbulence. En effet, si $\sqrt{Re} \lesssim 100$, la taille des structures pouvant être amplifiées par le cisaillement sont du même ordre de grandeur que l'écoulement principal, autrement dit les seules structures que l'on observera seront macroscopiques, il n'y a pas de turbulence, l'écoulement est laminaire. Inversement, si $\sqrt{Re} \gg 1$, des structures beaucoup plus petites que l'écoulement principal peuvent se développer et former la turbulence.

À noter que les observations de Léonard de Vinci mettent en avant cette distinction, la turbulence est un écoulement "normal". La seule différence est que les structures en jeu sont beaucoup plus petites que celles de l'écoulement principal et qu'on ne peut pas les percevoir directement. À l'oeil nu, la variabilité des tourbillons les rend difficiles à suivre. Numériquement, pour résoudre correctement la turbulence, il faut modéliser les plus petites structures susceptibles de se développer. Plus le nombre de Reynolds est grand, plus la taille des plus petites structures pouvant être amplifiées diminue, ce qui conduit à une augmentation de la complexité de l'écoulement.

Intéressons-nous à présent au rôle du terme non-linéaire $\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'$, considérons que $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ à $t = 0$ et regardons son évolution temporelle. On a toujours

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' \right) = -\nabla p + \mu \nabla \cdot [\nabla \mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u}'^T],$$

on obtient donc dans la direction de l'axe des x ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_x}{\partial t} \Big|_{t=0} = & - \left[\|\mathbf{k}\|^2 \nu + i \left(u_x k_x + u_y k_y + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u'_y}{u'_x} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] \underbrace{u'_{0,x} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}_{\text{fréquence principale}} - \frac{1}{\rho} \partial_x p \\ & - i \left(k_x u'_{0x}^2 - k_y u'_{0y} u'_{0x} \right) \underbrace{\exp(2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}_{\text{fréquence double}}. \end{aligned}$$

Tandis que les termes linéaires conduisent à une simple évolution de l'amplitude de la fréquence initiale, le terme non-linéaire produit une nouvelle structure deux fois plus petite que la première.

Bien que simplistes, ces exemples rendent compte de deux propriétés de la turbulence :

- Chaque structure turbulente d'une taille donnée, est amplifiée par l'écoulement principal ainsi que par la turbulence elle-même, et génère des structures plus petites. La description de cette dynamique est attribué à Kolmogorov en 1941 : il y a un transfert d'énergie cinétique des grosses structures vers les plus petites. Cette énergie est

finalement dissipée par la viscosité aux échelles les plus petites comme on l'a vu dans le premier exemple. Le fonctionnement de cette cascade peut notamment être expliqué par l'étirement et le cisaillement des filets tourbillonaires. La cascade de Kolmogorov est à la base de nombreux modèles, elle fait donc l'objet de nombreuses recherches (en DNS principalement) afin de mieux cerner ses propriétés.

- Un écoulement turbulent est un écoulement "normal" dont les plus petites structures ont été amplifiées. Cette amplification est dûe aux termes non-linéaires et nécessitent donc un nombre de Reynolds suffisamment élevé. On a montré cette transition grossièrement ici par des perturbations, mais la caractérisation précise du nombre de Reynolds à partir duquel un écoulement devient turbulent fait aujourd'hui l'objet de recherches intenses (Wu *et al.*, 2015). Cette limite n'est pas universelle, elle dépend du problème. On a montré par exemple qu'un écoulement en conduite est linéairement stable pour tout Reynolds. Pour devenir turbulent il nécessite une perturbation suffisamment grande. En revanche, la taille minimale que doit avoir cette perturbation pour déstabiliser l'écoulement, diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds, ce qui se vérifie expérimentalement.

3.1.2 Modélisation de la turbulence

En théorie, comme on l'a vu, la turbulence peut être correctement prédictée par les équations de Navier-Stokes. Elle nécessite cependant la résolution tridimensionnelle et instationnaire d'une très grande plage d'échelles spatiales. Ceci la rend inaccessible analytiquement et difficilement abordable numériquement aujourd'hui, même pour des cas simples et à l'aide des meilleurs calculateurs.

Pour contourner ce problème, on cherche donc à modéliser les effets de la turbulence aux petites échelles le plus fidèlement possible.

Différentes approches

Pour ce faire, on s'appuie sur le fait que, malgré son caractère chaotique, la turbulence présente des structures très régulières. De là découle l'idée de s'intéresser à l'écoulement moyen et de modéliser la turbulence comme un terme macroscopique supplémentaire. Pour ce faire il est possible de moyenner les variables de différentes façons:

- Spatialement : ceci consiste à filtrer l'écoulement pour ne regarder que les plus grandes échelles en faisant abstraction des plus petites, ce que fait naturellement l'œil humain.

On pose alors $\overline{u(\mathbf{x}, t)} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega(\mathbf{x})} u(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$. On peut généraliser cette écriture à l'aide de produits de convolution en : $\overline{u(\mathbf{x}, t)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{r}, t) * G(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$. G est alors un filtre auquel on peut donner les propriétés que l'on souhaite et on n'intègre plus sur un domaine mobile mais sur tout l'espace.

- Statistiquement : ceci consiste à répéter la même expérience un grand nombre de fois et prendre la moyenne des résultats. On pose alors : $\bar{u} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i$.
- Temporellement : cette moyenne est également relativement naturelle, elle consiste à faire abstraction des mouvements les plus rapides. On pose alors de la même façon que pour la moyenne spatiale : $\overline{u(\mathbf{x}, t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(\mathbf{x}, \tau) d\tau$, qu'on peut aussi généraliser à l'aide de produits de convolution. En pratique, on sait à l'aide du théorème d'ergodicité, que cette moyenne tend vers la moyenne statistique lorsque T est suffisamment grand.

À partir de ces moyennes on tire les mêmes équations mais, comme on le verra au paragraphe 3.1.2, on doit modéliser la moyenne de $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Celle-ci différant selon la moyenne choisie, on obtient différents modèles :

- De la moyenne spatiale on tire les modèles LES (Large Eddy Simulation). Un choix judicieux du filtre G permet de simuler les plus grosses structures et de modéliser les plus petites.
- Les modèles de type Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) considèrent l'écoulement moyenné statistiquement ou temporellement. Ces modèles étant stationnaires, les dérivées temporelles de l'écoulement moyen sont nulles.
- De ceux-ci sont dérivés les modèles de type Unsteady-RANS (URANS), version instationnaire obtenue en ajoutant aux équations les dérivées temporelles.

Bien qu'ils soient bien posés, les modèles RANS et U-RANS doivent être considérés avec précaution. En effet, d'une part, si on emploie la moyenne statistique, il est délicat de définir deux expériences indépendantes. En particulier, en présence de structures macroscopiques telles que l'allée de von Kármán dans le sillage d'un cylindre : si on considère les tourbillons macroscopiques comme indépendants on obtient une solution RANS, mais si on les considère comme des structures cohérentes on obtient du U-RANS.

D'autre part, si on emploie la moyenne temporelle, le choix de T peut être ambigu. La modélisation du tenseur de Reynolds repose sur une approche statistique. La turbulence étant peu cohérente temporellement, si T est suffisamment grand, la moyenne temporelle de l'écoulement est proche de la moyenne statistique. Ici encore, pour le sillage d'un cylindre, si

T est grand devant la période d'émission des tourbillons on obtient du RANS, si T est très petit devant ce temps caractéristique, du U-RANS. En revanche, si T est du même ordre de grandeur, la modélisation perd son sens et ceci est valable pour toutes les structures. Il faut donc s'assurer lors d'une simulation, qu'on ne retrouve pas de structures turbulentes dans ce cas.

Une fois ces bases posées, reste la question de savoir comment modéliser les effets de la turbulence sur l'écoulement moyen.

Premières modélisations et fondements des modèles actuels

Joseph Boussinesq introduit, dans un rapport à l'académie des sciences en 1877 (Boussinesq, 1877), l'hypothèse selon laquelle les effets de la turbulence sur l'écoulement macroscopique peuvent être modélisés par un coefficient de viscosité turbulente. Pour ce faire, il utilise une moyenne temporelle locale plus "naturelle", c'est-à-dire qu'il pose

$$\bar{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathbf{u}(x, y, z, \tau) d\tau,$$

avec T plus grand que le temps caractéristique d'évolution de la turbulence mais plus petit que le temps caractéristique d'évolution de l'écoulement moyen (intuitif mais pas nécessairement correctement défini). Ceci consiste à regarder un écoulement en faisant abstraction des fluctuations rapides, soit exactement ce que décrit Léonard de Vinci, et ce que nous faisons en pratique quand nous observons un écoulement.

Il moyenne ensuite les équations de Navier-Stokes, fait apparaître la moyenne de $\mathbf{u}' \frac{d\mathbf{u}'}{dt}$ et fait deux hypothèses erronées :

1. que \mathbf{u}' et $\frac{d\mathbf{u}'}{dt}$ sont trop erratiques pour être corrélés, soit $\overline{\mathbf{u}' \frac{d\mathbf{u}'}{dt}} = \bar{\mathbf{u}} \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt}$
2. que les contraintes moyennes sur un élément de fluide ne peuvent dépendre que des caractéristiques de l'écoulement moyen.

Par des considérations de symétrie, il arrive alors à la conclusion que le tenseur des contraintes turbulentes doit être proportionnel à $S = (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T)$, la constante de proportionnalité étant la viscosité turbulente. Il note néanmoins que dans une couche cisaillée où $\bar{u} = ay$, $a > 0$ et $\bar{v} = 0$, lorsque $v' > 0$, $\frac{du'}{dt} > 0$, et lorsque $v' < 0$, $\frac{du'}{dt} < 0$, si bien que $v' \frac{du'}{dt}$ est systématiquement positif (les deux termes sont corrélés). Il élude ce problème en considérant que ceci est probablement négligeable.

En réalité, Boussinesq introduit la base des modèles RANS en moyennant les équations

de Navier-Stokes (les accélérations selon ses termes) et manque de reconnaître le tenseur de Reynolds. Bien que s'appuyant sur des bases erronées, l'hypothèse de Boussinesq rencontrera un franc succès. Elle est à la base des modèles RANS et sera "justifiée" plus tard, notamment par Prandtl qui introduit la notion de longueur de mélange en 1928 (Prandtl, 1928; Wilcox, 2006).

Le concept de longueur de mélange vise à formaliser le traitement des effets de la turbulence de la même façon que ceux de la diffusion moléculaire. La modélisation du terme de viscosité dans les équations de Navier-Stokes vient de l'idée selon laquelle, en présence d'un gradient de vitesse, les molécules diffusant depuis les zones de vitesse plus faible vers les zones de vitesse plus élevée y apportent un déficit de quantité de mouvement et inversement. Ceci agit macroscopiquement comme une contrainte de cisaillement. De même, un tourbillon transporte d'un côté une partie de fluide plus lent vers les zones plus rapides et de l'autre côté une partie de fluide rapide vers les zones plus lentes ce qui est censé avoir des effets similaires à la diffusion moléculaire.

La modélisation de la viscosité moléculaire fait intervenir la distance de libre parcours moyen (distance entre deux collisions) et la vitesse des particules constituant le fluide. S'inspirant de cela, Prandtl tente d'exprimer le cisaillement sur une surface β donnée en évaluant le transfert de quantité de mouvement qu'induisent les tourbillons au travers de cette surface. Pour ce faire, il considère, pour simplifier, le cas où un tourbillon se trouve au milieu de cette surface, introduit la taille des tourbillons l_m et leur vitesse caractéristique w . Lors d'une demi-rotation, le tourbillon transporte un élément de fluide qui a une vitesse $u + l_m \frac{du}{dx}$ à travers la surface dans un sens et un autre élément de fluide qui a une vitesse $u - l_m \frac{du}{dx}$ dans l'autre. Pendant un intervalle de temps dt , il y a donc au travers de la surface β un transfert de quantité de mouvement d'environ

$$dp \approx 2\beta \rho w l_m \frac{du}{dx} dt.$$

Cette expression est essentielle! Elle est à la base de nombreux modèles RANS. Pour fermer cette expression, Prandtl affirme que les tourbillons étant produits par le gradient de vitesse, on peut évaluer $w \approx l_m |\frac{du}{dx}|$. Ceci donne donc l'expression du cisaillement turbulent pour les modèles à longueur de mélange, que l'on exprime aujourd'hui avec des dérivées partielles :

$$\tau = \rho l_m \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \frac{\partial u}{\partial x},$$

ou

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|.$$

Cette formulation a l'avantage d'être très accessible puisqu'il "suffit" de spécifier la distribution de l_m pour avoir un modèle à peu de frais. Elle permet également d'absorber dans l_m toutes les éventuelles erreurs et approximations qui ont conduit à cette expression : il n'y a pas en permanence un tourbillon au milieu de la surface considérée, le calcul du flux n'est pas exact, les tourbillons ne sont pas tous de la même taille, etc. Cette formulation a donné naissance aux modèles de Cebeci-Smith et Baldwin-Lomax notamment. Ces derniers donnent des résultats satisfaisants pour des cas simples comme les écoulements en conduite ou de plaque plane. Lors de l'utilisation de cette formulation, il faut garder à l'esprit certaines hypothèses implicites que fait Prandtl :

- Pour pouvoir écrire $u + l \frac{du}{dx}$, il faut que le tourbillon soit très petit par rapport à la taille caractéristique de l'écoulement moyen. Ceci ne prend donc pas en compte les plus grosses structures : la turbulence doit être pleinement développée et il doit y avoir une large séparation des échelles.
- Supposer qu'il y a systématiquement un tourbillon de taille l_m au travers de la surface revient à supposer que les tourbillons sont les mêmes dans tous les sens : la turbulence doit être pleinement développée et isotrope.
- Considérer un seul tourbillon dans l'écoulement moyen revient à supposer que l'on peut décorréliser ce tourbillon de la turbulence pour affirmer qu'en moyenne il transporte $u + l \frac{du}{dx}$.

Bien que facilement accessible, cette catégorie de modèles est très limitée sur le plan prédictif, puisqu'il faut pouvoir évaluer *a priori* la valeur que prend l_m en tout point. C'est pourquoi différents modèles ont été développés pour calculer cette valeur dans l'écoulement dont le modèle $k - \varepsilon$ qui a rencontré et rencontre toujours un franc succès.

En reprenant $\tau = \rho w l_m \frac{\partial u}{\partial x}$, l'idée est de ne plus estimer w et supposer l_m mais de les calculer à l'aide de quantités reliées à l'écoulement. En l'occurrence, on utilise l'énergie cinétique de la turbulence k et le taux de transfert d'énergie cinétique des grandes structures vers les petites évoqué ci-dessus, qui est égal à l'énergie dissipée par la viscosité, ε . On peut estimer que les structures turbulentes transfèrent une quantité d'énergie cinétique $k = w^2$ en l'espace d'une rotation en l_m/w , d'où $\varepsilon = \frac{w^3}{l_m}$. Encore une fois, cette relation guidée par des considérations dimensionnelles, n'a pas vocation à être exacte puisque les approximations seront absorbées par les constantes. Ceci conduit donc à $w = \sqrt{k}$, $l_m = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ et finalement,

$$\mu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Outre les hypothèses liées à celle de longueur de mélange, cette description suppose que la turbulence est pleinement développée et à l'équilibre localement pour pouvoir exprimer ε . Ce modèle donne de très bons résultats même si toutes les hypothèses ne sont pas toujours vérifiées. Toute la question est de savoir jusqu'à quelles limites on peut l'utiliser avec éventuellement quelques modifications.

Modèles RANS

L'ajout de nouvelles variables nécessite cependant de nouvelles équations pour les modéliser et les résoudre. Notamment, que valent et représentent k et ε en pratique? Ces notions sont intimement liées aux modèles et à l'approche de la turbulence que l'on choisit. On a vu que Léonard de Vinci considérait la turbulence comme un mouvement chaotique s'ajoutant à l'écoulement principal, ce que Boussinesq formalise comme une moyenne temporelle sur un temps T . Ce temps T est néanmoins très délicat à définir *a priori*, c'est pourquoi les modèles RANS s'en remettent à des méthodes statistiques.

Ceci consiste à considérer la turbulence comme aléatoire. En effet, bien que les écoulements soient déterministes, on ne connaît jamais exactement les conditions initiales ni les perturbations qui vont apparaître (vibrations, aspérités d'une paroi etc.). Or, on a vu que ces perturbations étaient amplifiées par l'écoulement si bien que les plus petites structures ont un comportement chaotique : deux situations initiales "infiniment" proches divergent exponentiellement vers deux solutions différentes. Ici par "infiniment proches" on entend plus grand que la taille d'une perturbation pouvant être amplifiée par l'écoulement. Tant que l'on résout des échelles grandes devant l'échelle de Kolmogorov, on peut donc considérer la turbulence comme une variable aléatoire : ses valeurs sont déterminées par des facteurs auxquels on n'a pas accès, on peut par contre s'intéresser à sa statistique.

Ceci consiste donc à écrire les grandeurs de l'écoulement (en particulier la vitesse) comme :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \bar{\mathbf{u}}(x, y, z, t) + \mathbf{u}'(x, y, z, t),$$

où \bar{u} désigne la moyenne de la variable u et u' la différence des deux. En particulier, on a $\bar{\mathbf{u}'} = 0$. La moyenne désignée ici est une moyenne statistique, c'est-à-dire la moyenne que l'on obtiendrait en répétant infiniment l'expérience de façon à ce que toutes les conditions initiales et perturbations possibles soient entrées en jeu. Les équations RANS se dérivent

alors en moyennant les équations de Navier-Stokes (3.1) comme le propose Boussinesq :

$$\overline{\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u} + \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u} + \mathbf{u}') \cdot \nabla (\mathbf{u} + \mathbf{u}') \right)} = -\overline{\nabla(p + p')} + \mu \overline{\nabla \cdot [\nabla(\mathbf{u} + \mathbf{u}') + \nabla(\mathbf{u} + \mathbf{u}')^T]} \\ \overline{\nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{u}')} = 0.$$

Cependant, celui-ci avait fait l'erreur de considérer que la turbulence était trop aléatoire pour pouvoir être corrélée ce qui lui permettait d'écrire

$$\overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'} = \overline{\mathbf{u}'} \cdot \overline{\nabla \mathbf{u}'} = 0,$$

ce qui n'est pas vrai. On obtient en réalité

$$\overline{\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} \right)} = -\nabla \bar{p} + \mu \nabla \cdot (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) - \rho \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'} \\ \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0,$$

qui correspond exactement à ce que l'on cherche : les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement moyen, plus un terme donnant les effets de la turbulence sur l'écoulement moyen, le tenseur de Reynolds $-\rho \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'}$. Tout l'enjeu des modèles RANS réside dans la résolution ou la modélisation de ce tenseur.

Les modèles à viscosité turbulente s'appuient sur l'hypothèse de Boussinesq et écrivent directement :

$$-\rho \overline{\mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}'} = \mu_t (\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T).$$

Cette formule relie linéairement deux tenseurs ce qui n'est *a priori* pas le cas. Elle est notamment connue pour causer des erreurs de modélisation aux points de stagnation, ou par exemple dans un canal comportant une paroi lisse et une autre rugueuse.

C'est pourquoi d'autres modèles tentent de modéliser ce tenseur par une combinaison polynomiale du tenseur des déformations, du rotationnel de \mathbf{u} , etc. D'autres modèles tentent de résoudre une équation pour le tenseur de Reynolds ce qui repousse la modélisation aux corrélations d'ordre supérieur. On obtient 6 EDP pour les 6 composantes du tenseur de Reynolds en multipliant tensoriellement l'équation de Navier-Stokes par \mathbf{u} puis en la moyennant, ce qui fait apparaître de nouveaux termes à modéliser.

La formulation RANS permet de donner une définition à l'énergie cinétique turbulente $k = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}'\|^2$ et sa dissipation ε . On peut également en dériver des équations pour k et ε dont on

modélisera encore certains termes grâce à différentes constantes pour obtenir :

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla k \right) &= \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \varepsilon, \\ \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \varepsilon \right) &= \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}, \\ P_k &= \mu_t \left((\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^T) : \nabla \bar{\mathbf{u}} \right), \\ \mu_t &= C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Les constantes C_μ , C_1 , C_2 , σ_k et σ_ε ont été optimisées pour prédire correctement une grande variété d'écoulements. Cependant, le modèle ne peut pas prédire correctement tous types d'écoulement, il faillit notamment à résoudre les écoulements près des parois et les écoulements en rotation. Il se comporte mal au voisinage des points de stagnation, essentiellement parce que l'hypothèse de Boussinesq n'y est plus vraie (Wilcox, 2006).

Il est courant de rencontrer différentes versions du modèle $k - \varepsilon$, obtenues en apportant quelques modifications au modèle original pour donner de meilleurs résultats : en changeant la valeur d'une constante, en transformant une constante en une fonction de paramètres de l'écoulement, en ajoutant des termes correctifs, en pénalisant d'autres, ... Les modèles RNG (Renormalization Group) notamment, obtiennent des constantes différentes par des considérations physiques (Yakhot *et al.*, 1991). Cependant, chaque modification améliore les résultats d'un cas précis au détriment des résultats d'un autre. Chaque variante est donc adaptée à une classe de problèmes.

3.2 Traitement des parois

Une des limitations les plus communes des modèles $k - \varepsilon$, $k - \omega$ et $k - \tau$ standards, est leur incapacité à prédire les écoulements près des parois. En effet, les applications pratiques font en général intervenir des parois solides près desquelles les hypothèses énoncées ci-dessus ne sont plus valides. Comme on peut le voir sur la figure 3.1(a), les tourbillons sont contraints dans la direction normale par la paroi au travers de laquelle ils ne peuvent pas passer. À une distance δ de la paroi, seules des structures plus petites que δ peuvent se développer; plus on se rapproche de la paroi, plus les tourbillons pouvant exister sont donc petits. À une distance inférieure à la longueur de Kolmogorov l_μ , les tourbillons pouvant se former sont plus petits que la taille des perturbations que l'écoulement peut amplifier. Ils sont alors systématiquement dissipés par la viscosité. L'écoulement devient laminaire.

En revanche, parallèlement aux parois il n'y a aucune contrainte sur les tourbillons, comme on

peut le voir à la Figure 3.1(b). À une distance de l'ordre de l_μ , seuls des tourbillons parallèles à la paroi peuvent être entretenus par l'écoulement : la turbulence devient anisotrope. Ainsi, l'hypothèse de Boussinesq n'est plus vérifiée : il n'y a plus isotropie, les tourbillons sont rares et du même ordre de grandeur que l'écoulement principal.

Les modèles de turbulence classiques n'étant plus valides près des parois, ces zones nécessitent un traitement spécial.

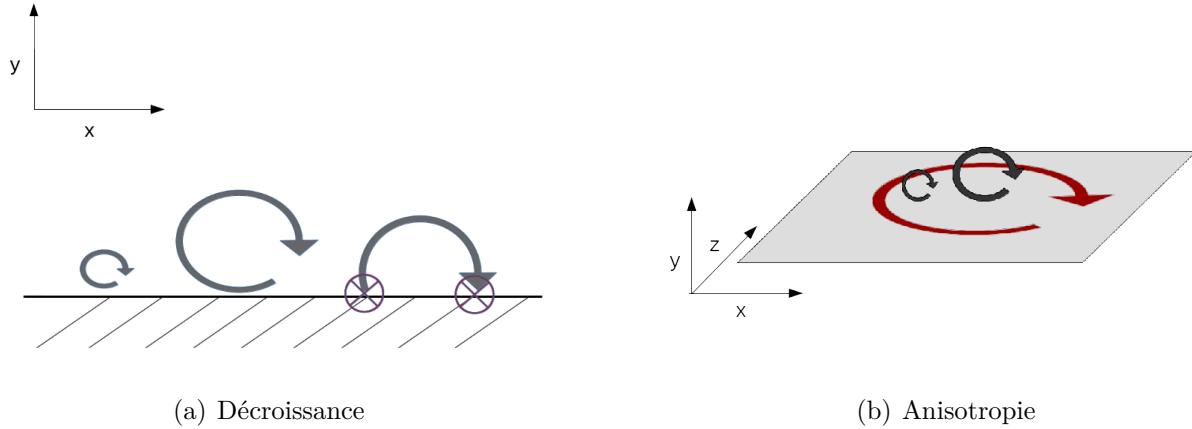


Figure 3.1 Décroissance et anisotropie des tourbillons près des parois dues à la contrainte de non-pénétration.

Afin d'illustrer plus en détail les comportements de la turbulence au voisinage des parois, considérons le développement en séries de Taylor des vitesses de l'écoulement (Wilcox, 2006). La présence de la paroi annule toutes les vitesses en $y = 0$ et l'hypothèse d'incompressibilité annule également la dérivée première de la vitesse normale v . On peut donc écrire :

$$\bar{u} = ay + \mathcal{O}(y^2) \quad u' = d(t)y + \mathcal{O}(y^2) \quad (3.5)$$

$$\bar{v} = by^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad v' = e(t)y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.6)$$

$$\bar{w} = cy + \mathcal{O}(y^2) \quad w' = f(t)y + \mathcal{O}(y^2) \quad (3.7)$$

Il est dès lors clair que la turbulence n'est pas isotrope, $v' \neq u' = w'$. Des relations précédentes

on peut déduire :

$$k = \frac{1}{2} \overline{(d(t)^2 + f(t)^2)} y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (3.8)$$

$$\epsilon = \nu \overline{(d(t)^2 + f(t)^2)} + \mathcal{O}(y) \quad (3.9)$$

$$\tau_{xy} = -\overline{(f(t)e(t))} y^3 + \mathcal{O}(y^4) \quad (3.10)$$

$$\frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{a}{4\nu} \overline{(d(t)^2 + f(t)^2)} y^4 + \mathcal{O}(y^5) \quad (3.11)$$

On voit que τ_{xy} et $\frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial y}$ ne sont pas du même ordre de grandeur, l'anisotropie de la turbulence conduit à une sous-évaluation du tenseur de Reynolds. Or, dans la couche limite, c'est le cisaillement pariétal qui détermine la structure de l'écoulement et est gouverné par v' , d'où la nécessité de prendre en compte cette anisotropie.

Le traitement de cette anisotropie nous conduit à l'étude des couches limites.

3.2.1 Concept de couche limite

Les corrections apportées aux modèles de turbulence s'appuient sur l'étude des couches limites. Celles-ci se forment en présence d'un écoulement tangent à une paroi, elles sont dues aux conditions de non glissement et non pénétrations qui imposent une vitesse nulle à la paroi. Ce qui les rend particulièrement intéressantes sont les nombreuses simplifications qu'elles amènent. En effet, l'écoulement devient localement quasi-unidimensionnel, l'échelle de variation des grandeurs selon les directions tangentielles est très grande devant l'échelle de variation des grandeurs selon la direction normale. La vitesse normale est alors très petite devant la vitesse tangentielle et intervient sous forme d'une perturbation.

L'idéalisation d'une couche limite correspond à une plaque plane infiniment mince, semi-infinie plongée dans un écoulement uniforme. Sous cette forme, Blasius a déduit une formulation générale à l'aide de similitudes pour un écoulement laminaire, en l'occurrence il a démontré que l'écoulement pouvait être formulé comme dépendant d'un seul paramètre :

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}}.$$

Cette expression est particulièrement puissante, puisqu'elle est valable pour tout fluide, quelle que soit sa viscosité cinématique et quelle que soit la vitesse de l'écoulement autour.

Bien que valide uniquement en laminaire, cette équation incite à chercher une relation similaire pour un écoulement turbulent. En l'absence de gradient de pression, l'expérience donne

les relations connues :

$$u = u_\tau F(y^+)$$

$$F(y^+) = \begin{cases} y^+ & \text{pour } y^+ \rightarrow 0 \\ \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C & \text{pour } y^+ > 30 \end{cases}$$

où u_τ est la vitesse de friction lié au cisaillement à la paroi par

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

et

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}.$$

Ces deux relations sont complétées par une zone de transition entre $y^+ = 10$ et $y^+ = 30$ ainsi qu'une transition entre la loi logarithmique et l'écoulement constant à l'infini, formant le profil visible sur la figure Figure. 3.2(b). Il existe également des relations semblables pour k et ε , mais beaucoup moins étudiées. On se limite généralement à k constante et ε variant en $\frac{1}{y}$.

Dans le cadre de la modélisation RANS, dans une couche limite turbulente les équations se réduisent à,

$$v = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial y} \right] = \rho \varepsilon - \mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

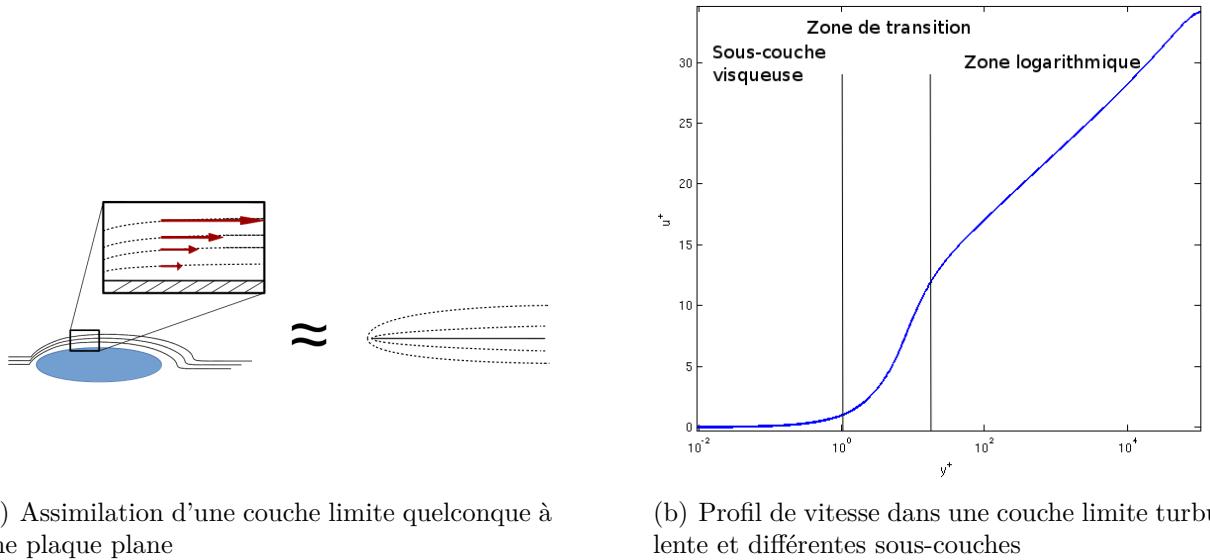
$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] = \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \mu_t.$$

On peut alors intégrer l'équation de u en

$$(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} = y \frac{\partial p}{\partial x} + \rho u_\tau^2.$$

L'objectif des modèles de turbulence est donc de donner une distribution correcte de μ_t afin de retrouver les relations ci-dessus. Les modèles haut-Reynolds ne modélisent correctement que la zone logarithmique, tandis que les modèles bas-Reynolds peuvent représenter avec succès la couche limite jusque dans la zone laminaire.

Ces formules sont obtenues pour un cas idéalisé qui n'est évidemment d'aucun intérêt pratique, mais encore une fois, on peut dans une certaine mesure généraliser ces relations. En effet, ces calculs concernent une plaque plane semi-infinie, loin du bord d'attaque, dans un écoulement uniforme à l'infini. Mais en pratique, où peut-on se permettre de placer l'infini? Comme on peut le voir sur la figure 3.2(a), on considère que si l'on se trouve à une échelle suffisamment petite, la courbure de l'objet peut être considérée comme nulle et l'écoulement est semblable à celui rencontré autour d'une plaque plane.



(a) Assimilation d'une couche limite quelconque à une plaque plane

(b) Profil de vitesse dans une couche limite turbulente et différentes sous-couches

Figure 3.2 Hypothèses des couches limites

3.2.2 Modèles Bas-Reynolds

Afin de corriger l'erreur de modélisation dûe à l'anisotropie de la turbulence illustrée par les équations (3.8)-(3.11), on peut *a priori* multiplier directement μ_t par une fonction bien choisie de l'ordre de y^{-1} qui tendrait ensuite vers 1 loin de la paroi pour retrouver le modèle standard. La présence de paroi influence également les variables de turbulence dont il faut corriger les équations. Ce développement n'est cependant pas évident. On a beau connaître l'ordre de ces fonctions en 0 grâce aux équations (3.5)-(3.7), il n'est absolument pas évident de trouver ne serait-ce que l'équivalent en 0 (les constantes a, b, c, ...). Les équations étant couplées entre elles, ces fonctions dépendent *a priori* des grandeurs caractéristiques de l'écoulement et doivent être consistantes entre elles.

De nombreuses fonctions d'amortissement ont été proposées mêlant trois approches différentes :

- La première consiste à faire dépendre ces fonctions de la distance adimensionnelle à la paroi y^+ . Cette approche donne de très bons résultats puisque les fonctions d'amortissement peuvent être calibrées de façon relativement précise. En somme, on peut presque spécifier l'expression de $u(y)$ que l'on veut. Cependant, y^+ peut s'avérer délicat à calculer mais aussi à définir. Dans le cas classique d'une plaque plane infinie, il suffit de prendre l'ordonnée du point, mais dès que les parois deviennent courbes et la géométrie complexe, comment définir y^+ ? Il n'existe pas nécessairement de normale à une paroi qui passe par ce point (penser au bord de fuite d'une aile, ou un diffuseur). De plus, si elle existe, elle peut ne pas être évidente à calculer automatiquement. On peut aussi considérer la distance à la paroi la plus proche, donc calculer la distance du point à toutes les parois. Notons que ce n'est pas la distance physique qui nous intéresse, mais la distance y^+ qui est pondérée par le cisaillement à la paroi! Il est donc nécessaire de la mettre à jour à toutes les itérations.
- La seconde solution est d'utiliser des grandeurs liées à l'écoulement. Physiquement, l'écoulement ne "connaît" pas sa distance à la paroi; la turbulence est dictée par des considérations locales. Ce type de fonctions d'amortissement se construisent en général à partir du nombre de Reynolds turbulent local $Re_t = k^2/(\varepsilon\nu)$. Celui-ci étant nul à la paroi et croît dès qu'on s'en éloigne, on peut s'en servir comme d'une mesure de distance. Ces modèles ont l'avantage d'être purement locaux. Cependant, ils sont beaucoup plus difficiles à calibrer, puisque les équations de k et ε dépendent de Re_t et réciproquement. De plus, les termes "bas-Reynolds" peuvent s'activer dans l'écoulement externe si la turbulence y devient faible.
- Finalement, l'approche se développant aujourd'hui est une idée hybride des deux précédentes. La distance à la paroi étant coûteuse à calculer mais beaucoup plus facile à mettre en place, il est possible de simuler une pseudo distance à la paroi pour bénéficier des avantages de celle-ci sans ses inconvénients. Ainsi, on peut introduire une nouvelle variable f régie par une équation différentielle

$$\nabla \cdot \nabla f - af = 0,$$

où a dépend de certaines propriétés de l'écoulement. La fonction f vaut alors 1 aux parois et décroît vers 0 dans l'écoulement. Les fonctions d'amortissement dépendent alors de façon relativement évidente de f . Le désavantage de cela est l'ajout d'une variable de calcul donc des coûts mémoires et de calcul supplémentaires. En pratique, les modèles $k - \epsilon - v^2 - f$ introduisent f et v^2 sur des bases physiques, k reste l'échelle de vitesse de référence dans l'écoulement, tandis que v^2 est l'échelle de référence près

des parois, ce changement est orchestré par f qui sert également à prendre en compte des effets liés à la pression. (Billard et Laurence, 2012)

Ces modèles bas-reynolds sont tous numériquement très raides. Près des parois, les variables de turbulence et de l'écoulement présentent de très forts gradients, il est donc nécessaire d'utiliser des maillages très fins. Pour réduire le coût des calculs, on a alors tendance à étirer ces maillages. La conjonction de forts gradients, de maillages fins et très étirés conduit à des raideurs numériques qui sont inhérentes au problème résolu. À cela s'ajoutent les termes bas-reynolds, généralement de la forme $\exp(-y^+/y_0^+)$ (fortement non-linéaires), qui s'activent précisément dans ces zones.

Le calcul de y^+ étant coûteux dans un écoulement complexe, nous avons choisi de retenir un modèle bas-reynolds ne faisant pas appel à la distance à la paroi. Ces modèles sont peu nombreux; ceux de Launder et Sharma (Launder et Sharma, 1974) et de Goldberg (Goldberg et Apsley, 1997) ont retenu notre attention. Cependant, tandis que le premier s'est avéré relativement populaire, le second a connu beaucoup moins de succès dans la littérature et s'est révélé instable lors de nos premières simulations. Nous n'avons donc conservé que le premier, présenté à la section suivante.

Modèle de Launder et Sharma

Le modèle de Launder et Sharma a été introduit en 1974. Il présente la particularité de ne pas dépendre explicitement de la distance à la paroi ce qui le rend très souple d'utilisation. Il partage cependant plusieurs manipulations classiques avec d'autres modèles bas-reynolds.

Les comportements de k et ϵ au voisinage d'une paroi solide est :

$$k^+ \approx A^+ y^{+2} + B^+ y^{+3}, \quad \epsilon^+ \approx 2(A^+ + 2B^+ y^+)$$

Or on ne connaît pas A^+ , qui dépend entre autres du nombre de Reynolds. Afin de contourner ce problème le modèle introduit une variable secondaire :

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + D$$

Le but de cette transformation est d'isoler A^+ en utilisant le comportement asymptotique de

k et d'imposer $\tilde{\varepsilon} = 0$. Il existe plusieurs expressions de D :

$$\begin{aligned} D &= 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 & D &= 2\nu \frac{k}{y^2} \\ D &= \frac{\nu \partial k}{y \partial y} & D &= \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Ces expressions tendent bien vers A^+ , lorsque y^+ tend vers 0, mais elles ont chacune des comportements différents :

- Les formulations faisant intervenir y ont l'avantage d'être très régulières et linéaires en k . Elles tendent également vers 0 rapidement lorsqu'on s'éloigne des parois, et on retrouve donc la variable ε dans l'écoulement. Cependant, comme on l'a vu, la définition et l'évaluation de y peut devenir très délicate lorsque la géométrie est complexe.
- La formulation faisant intervenir la dérivée de la racine de k présente l'avantage de ne pas dépendre de la géométrie du problème. L'utilisation de la racine fait tendre rapidement le terme vers 0 lorsque k devient grand et/ou varie peu, ce qui permet de retrouver la variable ε dans l'écoulement. Cette formulation est connue pour poser des problèmes numériques et apporter de la raideur. En effet, lorsque k tend vers 0 au bord, $\frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\partial k}{\partial y}$ peut devenir très grand pendant la résolution.
- La formulation faisant intervenir la dérivée seconde de k est linéaire, et ne dépend pas de la géométrie. En revanche, l'utilisation d'une dérivée seconde est moins précise (moins bien discrétisée), mais surtout elle ne tend pas vers 0 loin des parois; on ne retrouve donc pas le comportement du modèle $k - \varepsilon$ classique dans l'écoulement.

Le modèle Launder-Sharma utilise la première expression et résout l'équation de $\tilde{\varepsilon}$. Différentes formulations ont été testées, notamment pour remplacer ou non ε par sa transformée dans l'expression de μ_t . Il semble cependant que ce changement n'est pas nécessaire dans la mesure où D s'annule loin des parois et les effets proches de la paroi peuvent être absorbés dans les fonctions d'amortissement. Cela conduit aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla k &= \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - \tilde{\varepsilon} - D \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\varepsilon} &= \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \nabla \tilde{\varepsilon} \right] + C_1 f_1 \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - C_2 f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_t &= C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} & E &= 2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} \right)^2 & D &= 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} + \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x} \right)^2 \\ f_\mu &= \exp \left[\frac{-3.4}{(1 + Re_T/50)^2} \right] & f_1 &= 1 & f_2 &= 1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)\end{aligned}$$

On peut vérifier que f_μ tend vers une constante lorsque y tend vers 0, que k est toujours de l'ordre de y^2 et que $\tilde{\varepsilon}$ est à présent de l'ordre de y ce qui donne bien un cisaillement pariétal de l'ordre de y^3 .

Le modèle de Launder et Sharma est relativement simple d'implémentation et donne des résultats satisfaisants pour nombre d'écoulements, ce qui a fait sa popularité. Il reste néanmoins soumis aux mêmes contraintes que les autres modèles bas-reynolds, il consomme une quantité colossale de noeuds du maillage pour la résolution des couches limites (croissant avec le nombre de Reynolds de l'écoulement) et produit de forts gradients qui le rendent numériquement raide. Ces raisons font que pour bon nombre d'applications, les lois de parois sont préférées aux modèles bas-reynolds.

3.2.3 Lois de parois

Principe

On a vu que les modèles bas-reynolds utilisaient l'information que l'on a des couches limites pour corriger les équations d'un modèle standard. L'approche des lois de parois consiste tout simplement à remplacer l'écoulement près des parois par l'expression que l'on connaît au lieu de s'acharner à corriger les équations pour qu'elles prédisent le bon comportement. Pour ce faire, on déporte le domaine de calcul à un certaine distance d des parois et on impose les propriétés que doit avoir l'écoulement à cette distance de la paroi. En imposant des conditions limites adaptées sur un sous-domaine on est censé retrouver la même solution

Par exemple, imaginons que l'on reprenne la couche limite de Blasius en se restreignant à $y > 1$, on peut alors imposer comme condition limite en $y = 1$, $u = u_\infty f \left(\sqrt{\frac{u_\infty}{x\nu}} \right)$ ce qui devrait donner la même solution. Malheureusement, cette solution demande la connaissance de x , or si l'on souhaite généraliser cette approche à d'autre cas, on n'a plus accès à cette donnée.

On pourrait aussi décider d'imposer la condition limite au même endroit de la couche limite partout (i.e. η constant), mais dans ce cas, on fait varier implicitement la géométrie : sur une plaque plane on s'éloigne de la plaque en \sqrt{x} . Pour corriger cela, il faut donc, *a priori*

courber les frontières et encore connaître le paramètre x .

En réalité, la solution vient de l'écoulement lui-même. Pour résoudre un problème, on peut imposer au bord les valeurs des variables aussi bien que leurs dérivées. On a vu qu'il nous manquait ici la donnée de x pour imposer notre condition limite. Or, on peut utiliser la valeur u au bord pour en déduire x , supposant que l'on se trouve à une distance d donnée, égale à 1 ici :

$$y = d$$

$$\frac{u}{u_\infty} = f \left(\frac{y}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \right) \Rightarrow x = \frac{d^2 u_\infty}{f^{-1}(u/u_\infty)^2 \nu}$$

et imposer la dérivée normale de u adaptée,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y, x) = u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{x \nu}} f'(\theta)$$

$$\frac{\partial u_w}{\partial y} = u_\infty \frac{f^{-1}(u/u_\infty)}{d} f' \left[f^{-1}(u/u_\infty) \right].$$

Pour des parois quelconques, ceci revient à imposer le cisaillement pariétal

$$\tau = \mu \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right) \cdot \vec{n} = h(u_t) \vec{t},$$

u_t étant la projection tangentielle de la vitesse \mathbf{u} sur le vecteur tangentiel \vec{t} et \vec{n} le vecteur normal à la paroi. Ces conditions sont dites de troisième type, ou encore de type Robin.

Revenons à présent aux lois de parois des modèles RANS. On a évoqué ci-dessus le fait qu'il existait une solution de similitudes pour les variables réduites:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad k^+ = \frac{k}{u_\tau^2}, \quad \varepsilon^+ = \frac{\varepsilon \nu}{u_\tau^4},$$

$$u_\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu},$$

dont le comportement le plus connu est la zone logarithmique où $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C$, $\kappa \approx 0.41$ étant la constante de von Kármán, C le paramètre de rugosité (qui varie selon la rugosité de la paroi), pour $y^+ > 30$. Le modèle $k - \varepsilon$ standard est capable de modéliser correctement la zone logarithmique et admet pour solution

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C, \quad k^+ = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon^+ = \frac{1}{\kappa y^+}.$$

Ces relations permettent de déterminer un ensemble de conditions limites consistantes pour le modèle standard.

Il est important à ce stade de préciser deux concepts :

La modélisation du problème : On souhaite décrire une réalité physique, par exemple un objet plongé dans un écoulement. Au voisinage de cet objet se développent des couches limites dont le comportement et la géométrie sont dictés par l'écoulement amont et environnant. Pour ce faire, on utilise un modèle ayant un certain domaine de validité et on souhaite que sa solution mathématique soit la plus proche possible de la réalité physique du problème. Ce modèles n'étant pas parfait, il introduit une erreur de modélisation.

Ici, on modélise la turbulence grâce à un modèle RANS qui fait un ensemble d'hypothèses évoquées ci-dessus. On modélise également les couches limites en faisant l'hypothèse qu'elle ne dépendent que de l'écoulement au voisinage immédiat. Enfin, on modélise également la géométrie du problème (les formes, la rugosité, etc. sont idéalisées), les conditions d'entrée et de sortie de l'écoulement, etc.

En particulier, on fait une hypothèse très forte : l'existence d'une couche limite. Or, une telle couche limite n'existe pas au voisinage d'un point de stagnation par exemple.

Ainsi, il faut choisir au mieux les combinaisons de modèles, conditions limites et géométrie pour obtenir la solution la plus réaliste possible de façon prédictive. Par exemple, on sait qu'imposer une vitesse et un niveau de turbulence nuls à la paroi est une condition limite exacte physiquement mais incompatible avec les modèles standards.

La discrétisation et la résolution numérique : l'utilisation de méthodes numériques introduit de nouvelles contraintes, de temps de calculs, de taille mémoire, de convergence, etc. Un modèle peut donner d'excellentes solutions mais consommer trop de ressources (DNS) ou être numériquement trop raide. C'est ainsi que certaines conditions limites censées donner de bien meilleurs résultats ne sont pas utilisables car trop difficiles (voir impossibles) à converger.

Les interpolations des solutions étant généralement linéaires ou quadratiques par morceaux, on introduit une nouvelle erreur. Celle-ci dépend directement des maillages et est censée décroître lorsque les maillages deviennent fins, ce qui a des conséquences très importantes. On souhaite prédire des résultats, donc une et unique solution. Avoir 50% d'erreur entre deux simulations n'a aucun intérêt, on ne sait pas laquelle choisir (à supposer qu'une soit meilleure que l'autre), d'où l'importance d'obtenir des solutions convergées en maillages. Si on effectue 10 simulations de plus en plus fines et que les 5 dernières ne diffèrent que de 1%, sachant que l'erreur d'interpolation diminue avec la taille des éléments, on peut raisonnablement supposer

que la solution exacte est proche à 1% près d'une de ces solution.

Or certains choix de modélisation ne conduisent pas à une convergence des solutions, dont certains sont présentés à la section 4.3.1.

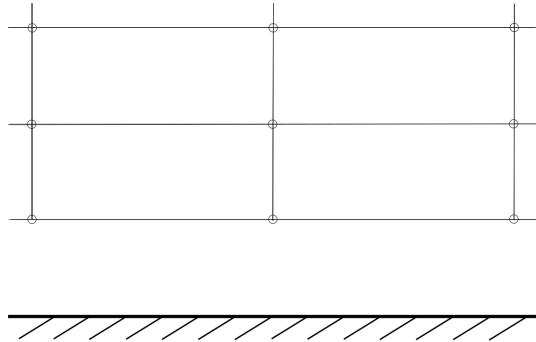
Il est donc essentiel que les conditions limites et les différents modèles utilisés soient numériquement consistants entre eux. En particulier, les lois de parois doivent respecter les comportements aux bords des modèles de turbulence auxquels elles sont associées. On a longtemps reproché aux lois de parois de ne pas donner des solutions convergées spatialement notamment à cause d'une utilisation inappropriée qui en été faite.

En effet, les lois de parois donnent un comportement théorique de la solution près des frontières, mais elles peuvent être traitées de façons différentes. Comme on peut le voir à la Figure 3.3 on peut utiliser soit un maillage à une distance donnée de la paroi et imposer les conditions limites sur la frontière numérique, ou bien utiliser un maillage collé à la paroi, la première cellule étant traitée de façon particulière en supposant que l'écoulement respecte en son sein, la forme prescrite par les lois de parois.

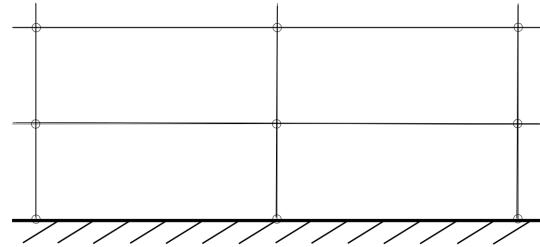
Pour avoir une solution convergée en maillages il faut cependant raffiner celui-ci. En particulier, en éléments finis on impose la dérivée normale de u faiblement ce qui nécessite des maillages relativement fin pour avoir une convergence de la condition limite (Lacasse *et al.*, 2001a). Comme on peut le voir sur la Figure 3.4, lorsqu'on utilise un domaine de calcul à une distance fixe de la paroi, le raffinement se fait relativement naturellement. Mais fait important, la distance utilisée pour calculer les lois de parois reste constante. On impose donc toujours la même condition limite d'un maillage à l'autre.

En revanche lorsque le domaine de calcul touche la frontière physique, la façon naturelle de raffiner le maillage conduit à faire varier la taille de la première cellule. La distance utilisée pour calculer les lois de parois varie et donc la condition que l'on impose change d'un maillage à l'autre. On définit alors implicitement un problème différent à chaque fois que l'on change la taille de la première cellule. Dès lors, si les problèmes définis par ces différentes conditions limites ne sont pas des imbrications rigoureuses du même problème (ce qui n'est généralement pas le cas), on n'a pas de convergence en maillages.

Pour éviter cela, il faut conserver la taille de la première cellule constante, ce qui peut être délicat à mettre en place et donne lieu à des raideurs liées à la juxtaposition de cellules de tailles très différentes.



(a) Éléments finis



(b) Volumes finis

Figure 3.3 Maillages grossiers utilisés pour imposer des lois de parois en éléments finis et volumes finis.

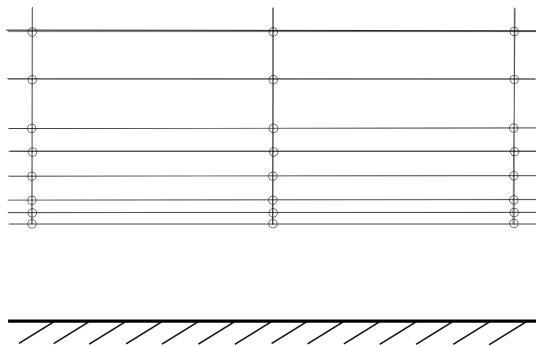
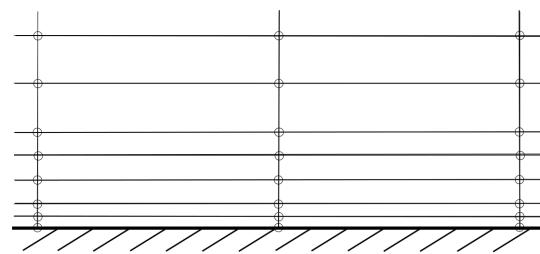
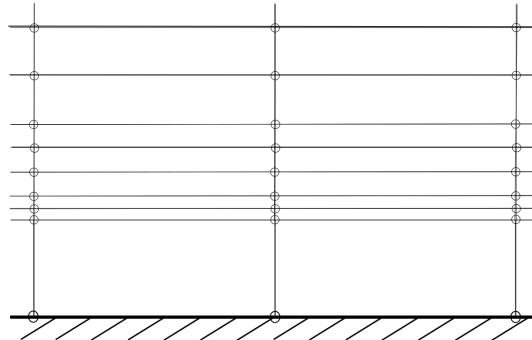
(a) Éléments finis, d reste constante(b) Volume finis, d varie(c) Volume finis, d reste constante

Figure 3.4 Impacts du raffinement sur les maillages utilisés en éléments finis et volumes finis.

Lois de parois standards : de Spalding

Loi standard à une échelle de vitesse : C'est la première formulation consistante proposée par Launder et Spalding (1974), elle détermine u_τ en résolvant l'équation non-linéaire

$$y^+ \ln(Ey^+) = \frac{\kappa d}{\nu} u, \quad u_\tau = \frac{y^+ \nu}{d}$$

et en déduit, le cisaillement à la parois et les variables de turbulence

$$\tau_w = \rho u_\tau^2, \quad k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa d}.$$

C'est probablement la loi de parois la plus connue. Si les constantes κ et C_μ sont les mêmes que celles du modèle de turbulence, cette loi de parois donne des conditions limites adaptées pour une couche limite développée en l'absence de gradient de pression. Pour donner des résultats corrects il faut néanmoins respecter certains points :

- La valeur de y^+ calculée ne doit pas être inférieure à 30, sans quoi la relation $u^+ = \ln(Ey^+)/\kappa$ n'est plus valable. y^+ dépend de d mais est calculée à partir de l'écoulement, on peut donc seulement vérifier *a posteriori* que cette condition est bien respectée.
- La valeur de y^+ ne doit pas non plus excéder une certaine limite supérieure, qui dépend de plusieurs paramètres. Plus le nombre de Reynolds de l'écoulement est élevé, plus la zone logarithmique où la relation $u^+ = \ln(Ey^+)/\kappa$ est valable s'étend à des valeurs de y^+ élevées. En revanche, la présence d'un gradient de pression (favorable ou adverse) rend cette relation invalide beaucoup plus tôt. Idéalement, il faut donc faire en sorte que y^+ soit le plus proche possible de 30.
- En imposant un cisaillement à la paroi, on impose la dérivée normale de u , ce qui converge beaucoup moins vite que le fait d'imposer les valeurs de u au bord. Il est donc nécessaire d'utiliser des maillages suffisamment fins afin que la solution soit convergée. Il est couramment reproché aux lois de parois de ne pas donner des solutions convergées en maillages notamment parce que cette condition n'est pas vérifiée.

Cette loi de parois est élaborée pour des couches limites développées en l'absence de gradient de pression. Elle donne des résultats corrects en présence de gradients de pression si y^+ est suffisamment petit, elle est en revanche problématique en présence de points de stagnation. En effet, la vitesse tangentielle s'y annulant, ceci conduit à une annulation de l'échelle de vitesse u_τ et on impose donc $k = 0$ et $\varepsilon = 0$ à la paroi. Ceci conduit, comme on l'a déjà évoqué, à utiliser les modèles haut-Reynolds hors de leur domaine de validité. De plus, lorsque l'on considère des cas thermiques (en fait lorsqu'on considère n'importe quelle autre grandeur transportée par l'écoulement), le fait d'avoir une faible valeur pour u_τ conduit à

imposer un faible transfert de chaleur alors qu'un point de stagnation est précisément un endroit où le transfert de chaleur est très élevé.

La loi standard à deux échelles de vitesse : Pour pallier aux défauts de la loi à une échelle de vitesse en présence de points de stagnation, une loi à deux échelles de vitesses a été aussi proposée par Spalding (Chabard, 1991). Elle est devenue un standard lorsqu'il est question de problèmes thermiques. Au lieu de déterminer l'échelle de vitesse de la couche limite à partir uniquement de la vitesse tangentielle, on peut la déterminer à partir du niveau de turbulence. En effet, sachant que $k = k^+ u_\tau^2$, on peut tout aussi bien établir $u_\tau = \sqrt{k/k^+}$. On définit alors une nouvelle échelle de vitesse $u_k = \sqrt{k/k^+}$ et on utilise, les relations suivantes

$$u_k = k^{1/2} C_\mu^{1/4}, \quad y^+ = \frac{du_k}{\nu},$$

pour imposer les conditions limites

$$\frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = 0, \quad u_\tau = \frac{u}{\frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)}, \quad \varepsilon = \frac{u_k^3}{\kappa d}.$$

Pour une couche limite turbulente, la formulation est équivalente, et donne des conditions limites consistantes pour le modèle $k - \varepsilon$ standard. En revanche, au voisinage des points de stagnation cette loi de paroi donne des résultats différents, bien que la vitesse y soit nulle. En effet, les modèles de turbulence prédisent généralement un fort niveau de turbulence (trop fort même), ce qui conduit à une valeur de y^+ relativement grande. Le cisaillement imposé à la paroi est alors nul, ce qui est cohérent avec un point de stagnation, tandis qu'imposer une dérivée normale nulle pour k s'adapte à la production de turbulence.

Cette écriture n'est ni meilleure, ni moins bonne en terme de modélisation, les hypothèses sur lesquelles s'appuient les lois de parois sont de toute façon fausses au voisinage des points de stagnation (Cruz et Silva Freire, 1998, 2002). Elle permet uniquement un meilleur comportement numérique et de meilleurs résultats sur certains cas, sans raison physique particulière.

De plus, cette formulation linéaire pour u et k , ce qui la rend moins raide, et fait l'économie de la résolution d'une équation pour calculer y^+ , ce qui représente un gain de temps.

Lois de parois adaptatives

Les lois de parois standards font l'hypothèse d'une jonction avec le modèle de turbulence dans la zone logarithmique. On l'a déjà évoqué, ceci suppose de s'assurer que $y^+ > 30$, ce qui ne peut être vérifié qu'*a posteriori*. Afin d'éliminer cette contrainte, il a été proposé

d'utiliser des modèles bas-Reynolds avec des lois de parois. Ainsi, lorsque la jonction se fait en respectant $y^+ < 30$, le modèle est toujours valide. De nouvelles lois de parois ont alors été proposées de façon à représenter le plus fidèlement possible les observations expérimentales. On peut citer notamment, les profils de Spalding de paramètre N ,

$$y_{SP}^+ = u^+ + e^{-5.2\kappa} \left(e^{\kappa u^+} - \sum_{n=0}^N \frac{(\kappa u^+)^n}{n!} \right)$$

et de Reichardt,

$$u_{RE}^+ = \frac{\ln(1 + 0.4y^+)}{\kappa} + 7.8 \left(1 - e^{-y^+/11} - \frac{y^+}{11} e^{-y^+/3} \right).$$

Malheureusement, comme on peut le voir sur la figure 3.5, ces expressions ne sont pas consistentes avec les modèles et donnent des solutions qui varient en fonction de la distance à la paroi choisie, ce qui ne devrait pas être le cas.

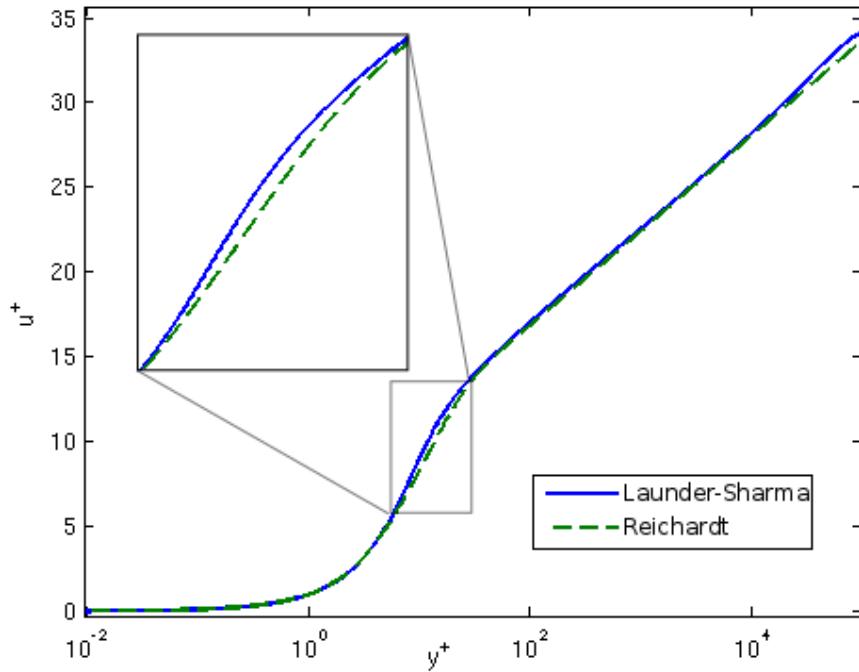


Figure 3.5 Comparaison du profil de vitesse prédict par le modèle de Launder-Sharma et la loi de Reichardt

Kalitzin *et al.* (2005) ont donc proposé de développer une loi adaptée au modèle bas-reynolds utilisé, et montré que ceci conduisait à des résultats convergents. Pour ce faire on simule tout d'abord une couche limite classique en intégrant le modèle bas-Reynolds en question à la paroi. On obtient de cette solution numérique les profils, $u_{modèle}^+(y^+)$, $k_{modèle}^+(y^+)$, $\varepsilon_{modèle}^+(y^+)$, tabulés. Au lieu de résoudre

$$u = u_\tau \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+),$$

on résout alors

$$u = u_\tau u_{modèle}^+ \left(\frac{du_\tau}{\nu} \right),$$

et au lieu d'imposer

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa d},$$

on impose tout simplement

$$k = u_\tau^2 k_{modèle}^+(y^+), \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^4}{\nu} \varepsilon_{modèle}^+(y^+).$$

Malheureusement, cette formulation est une formulation à une échelle de vitesse et souffre des mêmes défauts que la loi de Spalding au voisinage des points de stagnation. Ces défauts sont amplifiés par la formulation logarithmique et le modèle bas-Reynolds :

- Le point de stagnation conduit à une distance y^+ proche de 0, or à ces ordres de grandeurs, k et ε sont très petits (de l'ordre de 10^{-8} pendant nos tests). En formulation standard, ceci ne pose pas de problèmes particulier, en revanche, en formulation logarithmique cela conduit à des gradients de l'ordre de 10^8 ! Représenter de tels gradients numériquement ne pose pas de problème particulier. En revanche, ceci dénature totalement les équations; les termes faisant intervenir le gradient de $\ln(k)$ ou de $\ln(\varepsilon)$ dominent les autres termes. Ces changements peuvent rendre le système singulier et conduisent en pratique à sa divergence.
- De plus, la distance $y^+ < 20$ active les termes bas-Reynolds du modèle de turbulence précisément dans la zone où se trouvent déjà de forts gradients. Ces termes, on l'a déjà vu sont non-linéaires, et viennent ajouter à la difficulté de résolution du système.

C'est pourquoi nous avons décidé de développer une loi de paroi adaptative à deux échelles de vitesses.

La loi de paroi adaptative à deux échelles de vitesse : Elle repose sur les mêmes concepts que la loi standard : on cherche à calculer u_τ non plus en fonction de la vitesse

tangentielle mais en fonction de k . Cette loi doit néanmoins être également consistante avec le modèle bas-Reynolds. Pour ce faire, nous allons donc chercher à résoudre

$$k_w = u_k^2 k_{\text{modèle}}^+(du_k/\nu).$$

En pratique, on aura tabulé $k_{\text{modèle}}^+(y^+)$ et il est donc plus intéressant de résoudre

$$k_w \frac{d^2}{\nu^2} = y^{+2} k_{\text{modèle}}^+(y^+)$$

et pour une plus grande efficacité, on peut éventuellement tabuler l'inverse de $y^{+2} k_{\text{modèle}}^+(y^+)$. Comme pour la loi de parois à une échelle de vitesse, on a

$$\varepsilon = \frac{u_k^4}{\nu} \varepsilon_{\text{modèle}}^+(y^+).$$

En revanche il faut calculer une nouvelle condition limite pour k ou \mathcal{K} . On a vu qu'imposer $\frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = 0$ était incompatible avec le modèle bas-reynolds, et on ne peut pas déduire de valeur au bord pour k à partir d'elle-même. Il reste donc la possibilité d'imposer la dérivée de k en fonction de k , ce qui donne une condition de type Robin :

$$\frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = \frac{u_k^3}{\nu} \frac{dk_{\text{modèle}}^+}{dy^+}(y^+),$$

ou en variables logarithmiques

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \vec{n}} = \frac{u_k}{\nu} \frac{1}{k_{\text{modèle}}^+(y^+)} \frac{dk_{\text{modèle}}^+}{dy^+}(y^+).$$

Limitations des lois de parois

En utilisant des lois de parois, on fait l'hypothèse très forte que l'écoulement se comporte localement comme l'écoulement autour d'une plaque plane infinie et que l'on peut utiliser le premier pour prédire le second. *A priori*, ceci n'a aucune raison d'être vrai. Nous allons nous intéresser aux limites dans lesquelles ceci se justifie à l'aide des simulations de la partie 4.2. Il est notamment couramment "admis" que l'on peut utiliser les lois de parois standards à des distances y^+ comprises entre 30 et 300 et que donc, pour tout écoulement la zone logarithmique vérifiant les relations énoncées ci-dessus s'étend jusqu'à $y^+ = 300$.

Cependant, Eça et Hoekstra (2010) ont conduit une série de simulation pour des plaques planes avec différents modèles bas-Reynolds et à différents nombres de Reynolds. Ils ont alors observé que la zone où k est constant pouvait ne pas exister, rendant les lois de parois *a*

priori inappropriées.

3.3 Résolution numérique

L'existence de solutions aux équations de Navies-Stokes est un des sept problèmes du millénaire. On ne peut obtenir de solution analytique que pour très peu de cas et il est donc nécessaire de faire appel à des méthodes numériques en pratique. Les ordinateurs ne peuvent pas non plus résoudre analytiquement les équations, et leur mémoire étant finie, il est nécessaire de discréteriser le problème. Autrement dit, le résoudre qu'en certains points et déduire au mieux les autres valeurs. Nous utiliserons ici la méthode des éléments finis dont nous explicitons le résidu ci-dessous.

À la partie 3.3.1 nous exposons quelques propriétés générales des méthodes de résolution itératives dont nous nous servons aux parties 3.3.2 et 3.3.3 afin de dégager certains points clefs dans la procédure de résolution standard des équations RANS. Ces points clefs nous renseignent notamment sur la meilleure façon d'écrire les nouveaux termes qu'introduit le modèle de Launder-Sharma.

Notion de résidu La résolution numérique fait systématiquement référence à la notion de résidu que nous allons introduire ici. La résolution d'un problème est donnée par une équation, exprimant une contrainte sur la fonction inconnue ϕ que l'on cherche à déterminer. Par exemple, sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , on cherche :

$$\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega^2, \mathbb{R}),$$

telle que,

$$\forall (x, y) \in \Omega^2, \Delta\phi(x, y) = \psi(x, y),$$

avec

$$\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega^2, \mathbb{R}).$$

On peut le réécrire comme le noyau d'un opérateur :

$$\begin{aligned} R : \mathcal{C}^\infty(\Omega^2, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega^2, \mathbb{R}) \\ \phi &\mapsto \Delta\phi - \psi \end{aligned}$$

Ainsi, on peut dire que ϕ est solution du problème si et seulement si $R(\phi)$ est identiquement nul. Cependant, cette expression analytique ne peut pas être traitée informatiquement et

doit donc être discrétisée.

Lorsqu'on utilise la méthode des éléments finis, on se donne une base de fonctions $N_j \in \mathcal{C}_{pm}^1(\Omega^2, \mathbb{R})$ dérivables par morceaux, et on projette le problème sur cette base. On cherche alors une solution dans $\text{Vect}(N_j)$, au noyau de l'opérateur discret, obtenue en projetant l'opérateur continu sur la base des N_j :

$$\begin{aligned}\hat{R}_j(\hat{\phi}) &= \langle R(\hat{\phi}), N_j \rangle \\ &= \int_{\Omega} \hat{R}(\hat{\phi}) \cdot N_j d\omega,\end{aligned}$$

avec

$$\hat{\phi} = \sum \hat{\phi}_j N_j.$$

On dit alors dans les deux cas que R ou \hat{R} est le résidu du problème que l'on cherche à résoudre et de façon équivalente, résoudre le problème revient à annuler le résidu. Cette formulation permet d'employer l'ensemble des résultats classiques d'analyse et d'algèbre destinés à la recherche de zéros de fonctions de plusieurs variables.

Dans le cas des équations RANS, si on considère le problème posé sur un domaine Ω , en imposant la valeur des variables sur une portion Γ de la frontière du domaine $\partial\Omega$ et les dérivées normales des variables sur le reste de la frontière $\partial\Omega \setminus \Gamma$ on a les résidus continus

$$\begin{aligned}R_u &= \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p - \nabla \cdot ((\mu + \mu_t) \mathbf{S}), \\ R_P &= \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ R_k &= \rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla k \right) - \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) - P_k + \rho \varepsilon, \\ R_{\varepsilon} &= \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon \right) - \nabla \cdot \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \nabla \varepsilon \right) - C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k + \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}, \\ P_k &= \mu_t \nabla \mathbf{u} : \mathbf{S}, \\ \mathbf{S} &= \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T,\end{aligned}$$

et les résidus discrets suivants après intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\hat{R}^u &= \int_{\Omega} \left\{ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \delta \mathbf{u} - p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\mu + \mu_t) \mathbf{S} : \nabla \delta \mathbf{u} \right\} d\omega \\
&\quad + \int_{\partial \Omega \setminus \Gamma} [p \mathbf{Id} - (\mu + \mu_t) \mathbf{S}] \cdot \vec{n} \delta \mathbf{u} d\Gamma, \\
\hat{R}^P &= \int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u} d\omega, \\
\hat{R}^k &= \int_{\Omega} \left\{ \left[\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla k \right) - P_k + \rho \varepsilon \right] \delta k + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \cdot \nabla \delta k \right\} d\omega \\
&\quad - \int_{\partial \Omega \setminus \Gamma} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \cdot \vec{n} \delta k d\Gamma, \\
\hat{R}^{\varepsilon} &= \int_{\Omega} \left\{ \left[\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon \right) - C_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k + \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \right] \delta \varepsilon + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \nabla \varepsilon \cdot \nabla \delta \varepsilon \right\} d\omega \\
&\quad - \int_{\partial \Omega \setminus \Gamma} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \nabla \varepsilon \cdot \vec{n} \delta \varepsilon dS, \\
\mathbf{S} &= \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T, \\
P_k &= \mu_t \nabla \mathbf{u} : \mathbf{S}, \\
\mu_t &= C_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

Note : Le tenseur \mathbf{S} étant symétrique on a,

$$\mathbf{S} : \nabla \delta \mathbf{u} = \mathbf{S}^T : \nabla \delta \mathbf{u}^T = \mathbf{S} : \nabla \delta \mathbf{u}^T.$$

On rencontre souvent la forme symétrisée du terme visqueux,

$$\mathbf{S} : \nabla \delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) : (\nabla \delta \mathbf{u} + \nabla \delta \mathbf{u}^T).$$

3.3.1 Méthodes itératives et méthode de Newton

Pour trouver la solution à notre problème, on cherche à résoudre dans \mathbb{R}^n la relation vectorielle :

$$R_i(U) = 0,$$

où R_i est le résidu au point i calculé avec le vecteur U . Cette expression étant non-linéaire, on ne sait pas la résoudre directement, et on fait donc appel à des méthodes itératives. C'est-à-dire qu'on va déterminer une fonction ϕ nous permettant de calculer un nouveau vecteur U^{n+1} à partir du vecteur U^n de façon à ce que la suite des U^n tende vers la solution du

problème :

$$U^{n+1} = \phi(U^n).$$

Evidemment, si U est solution, il faut qu'elle soit un point fixe de ϕ .

Idéalement, on aimerait avoir $\|U - U^{n+1}\| < \|U - U^n\|$, ce qui est garanti, notamment si ϕ est α lipschitzienne avec $\alpha < 1$, i.e.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \|\phi(x) - \phi(y)\| < \alpha \|x - y\|.$$

Si ϕ vérifie cette relation on a l'assurance de l'existence et l'unicité d'une solution. Cette condition n'est évidemment que très rarement vérifiée sur l'ensemble du domaine. On peut tout de même obtenir des résultats au voisinage des points fixes de ϕ : Pour tout x_0 point fixe et y , on peut écrire si ϕ est \mathcal{C}^1 ,

$$\begin{aligned} \|\phi(x_0) - \phi(y)\| &= \|x_0 - \phi(y)\| \\ &= \left\| \int_0^1 d\phi|_{x_0+t(y-x_0)}(dt(y-x_0)) \right\| \\ &\leq \|d\phi\|_{\mathcal{L}^2} \|x_0 - y\| \end{aligned}$$

Ainsi, si $\|d\phi\|_{\mathcal{L}^2} < 1$ on a l'assurance de l'existence et l'unicité d'une solution ainsi que la convergence de la suite des $\phi^n(U^0)$ vers la solution U .

Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode de linéarisation consistant à assimiler le résidu au premier ordre de son développement en série de Taylor : Si R est différentiable, on sait par définition que :

$$R(U + dU) = R(U) + dR|_U(dU) + o(dU)$$

où dR est une fonction linéaire et $o(dU)$ est une fonction négligeable devant dU lorsque dU tend vers 0, au sens de la norme choisie (ici la norme L^2). Ainsi, il est naturel de poser

$$dU = -dR^{-1}|_U(R(U)),$$

de façon à avoir $R(U + dU) = 0$ à $o(dU)$ près.

Si le problème est linéaire, $o(dU) = 0$ et l'expression est exacte, sinon ce terme se comporte comme une erreur s'ajoutant à chaque itération et que l'on peut expliciter, si R est au moins

\mathcal{C}^2 , à l'aide de la formule de Taylor reste intégrale :

$$R(U + dU) = R(U) + dR|_U(dU) + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)d^2R|_{U+tdU}(dU, dU)dt.$$

où d^2R est une forme bilinéaire. On peut alors en déduire que

$$R(U + dU) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)d^2R|_{U+tdU}(dU, dU)dt,$$

où

$$dU = -dR^{-1}|_U(R(U)).$$

Il est illusoire d'espérer prévoir analytiquement pour des cas pratiques des bassins de convergence, car certains cas, même simples, sont notamment des fractales (le bassin d'attraction de $z^3 - 1 = 0$ en complexes donne la fractale de Newton). On peut en revanche utiliser cette expression afin de faire certains choix de modélisation et d'écriture.

Pour avoir une convergence la plus rapide possible on souhaite minimiser l'erreur faite à chaque itération. Il est évident que si le problème est linéaire, $d^2R = 0$ et l'erreur est nulle, mais surtout on peut dire que plus la norme de d^2R est grande, plus l'erreur va être grande. De la même façon, plus dU est grand, plus l'erreur est importante. On peut donc en déduire qu'il faut minimiser les normes de d^2R et dR^{-1} , ceci a pour effet de minimiser l'intégrale et les pas.

Si on revient à la notation précédente, on a

$$\phi = Id - dR^{-1}|_U(R(U)),$$

et

$$d\phi = dR^{-1}|_U \left(\begin{array}{c} d^2R|_U \left[\begin{array}{c} dR^{-1}|_U(R(U)), . \end{array} \right] \end{array} \right).$$

Pour éclaircir cette formule, pour des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} elle devient

$$d\phi = \frac{ff''}{f'^2}.$$

On retrouve là la nécessité de minimiser la norme de d^2R (ou f'') et de dR^{-1} (ou $1/f'$). L'application linéaire dR correspond dans les applications pratiques à la matrice jacobienne. Cette écriture permet d'expliquer certains lieux communs, notamment les bienfaits de la dominance diagonale de la jacobienne. Hormis le fait que cette propriété facilite la convergence des méthodes d'inversion itératives, elle rend la matrice jacobienne inversible et

maximise sa norme donc minimise celle de son inverse : les valeurs propres de la matrice vérifient (Théorème de Gerschgorin)

$$\forall \lambda \in V_p(A), \exists i \text{ tq } \|\lambda\| \geq \|a_{ii}\| - \sum_{j \neq i} \|a_{ij}\|.$$

Ainsi, en renforçant la dominance diagonale du système on apporte une meilleure convergence. Dans les sections qui suivent nous allons étudier plus en détail les implications de ces propriétés à la résolution des équations RANS.

3.3.2 Procédures de résolution

La résolution du système couplé des équations de la turbulence peut être abordée de plusieurs façons, mais il est le plus souvent découplé. On utilise alors la procédure suivante :

$$\begin{cases} \text{Résoudre } u, v, p \\ \text{Calculer } \mu_t \\ \text{Résoudre } k \text{ pour } \mu_t \text{ et } \varepsilon \text{ fixés} \\ \text{Résoudre } \varepsilon \text{ pour } \mu_t \text{ et } k \text{ fixés} \end{cases}$$

Pour alléger les notations, nous allons nous concentrer sur l'équation de k stationnaire sans le terme de bord (comme si k était spécifié partout au bord). On a vu que le résidu des équations était formulé initialement comme :

$$\hat{R}_i^k = \int_{\Omega} \left\{ [\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla k) - P_k + \rho\varepsilon] \delta k_i + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \cdot \nabla \delta k_i \right\} d\omega$$

Écrit ainsi, ce problème a le formidable avantage d'être linéaire, cependant, il ne garantit plus la positivité de k ! En effet, si on rapporte le problème en une dimension, il est analogue à

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + u \frac{\partial y}{\partial x} + S = 0,$$

qui peut prendre des valeurs négatives si $S < 0$. Dans notre cas, si ε prend des valeurs trop grandes, on obtiendra des valeurs négatives de k . Il est alors opportun d'impliciter le terme de dissipation en écrivant :

$$\varepsilon = \rho C_{\mu} \frac{k^2}{\mu_t},$$

ce qui garantit la positivité de k puisque lorsque celle-ci devient trop petite, les termes sources (production + dissipation) deviennent négatifs. En revanche, de ce point de vue là, il vaut mieux conserver le terme de production explicite.

Il se trouve que cette écriture des équations vient en plus renforcer la dominance diagonale. En différentiant le résidu discret, on obtient :

$$d\hat{R}_{i,j}^k = d\hat{R}_i^k |_k(\delta k_j) = \int_{\Omega} \left\{ \left[\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \delta k_j) + \rho^2 C_{\mu} \frac{2\hat{k} \delta k_j}{\mu_t} \right] \delta k_i + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \delta k_j \cdot \nabla \delta k_i \right\} d\omega,$$

$$d^2\hat{R}_{ijl}^k = d^2\hat{R}_i^k |_k(\delta k_j, \delta k_l) = \int_{\Omega} \left[\rho^2 C_{\mu} \frac{2\delta k_l \delta k_j}{\mu_t} \right] \delta k_i d\omega$$

en une dimension, pour des interpolants linéaires on obtient, en faisant l'approximation que μ_t et k sont constants sur les éléments adjacents (afin d'alléger l'écriture), on obtient la matrice tridiagonale :

$$\begin{bmatrix} \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ \dots & a - b - c, & 8a + 2c, & a + b - c & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{\rho^2 C_{\mu} k dx}{3\mu_t} \quad \text{production}$$

$$b = \rho \frac{u}{2} \quad \text{advection}$$

$$c = \frac{\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}}{dx} \quad \text{dissipation/diffusion}$$

On voit ici que le terme de production vient ajouter des termes positifs sur la diagonale ainsi que sur les deux diagonales supérieures et inférieures, renforçant ainsi les termes positifs de la diffusion sur la diagonale et s'opposant aux termes négatifs de la diffusion sur les diagonales supérieures et inférieures. Inversement, l'advection vient ajouter des termes extra diagonaux, ce qui va avoir tendance à déstabiliser le système.

De la même façon, si on n'utilise pas μ_t comme un point fixe, le terme de diffusion devient dans le résidu discret

$$\left(\mu + C_{\mu} \frac{k^2}{\sigma_k \varepsilon} \right) \nabla k \cdot \nabla \delta k_i,$$

qui se différentie en,

$$\left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \delta k_j \cdot \nabla \delta k_i + C_\mu \frac{2k \nabla k}{\sigma_k \varepsilon} \right) \delta k_j \cdot \nabla \delta k_i.$$

La première partie de cette expression est la même que précédemment, en revanche, la seconde se comporte comme un terme d'advection qui peut devenir considérablement grand lorsqu'il y a des gradients de k .

Ces choix rendent les équations de k et ε plus stables indépendamment, elles rendent en revanche le jacobien du problème global inexacte, ce qui rend la convergence beaucoup plus lente.

Le passage à deux ou trois dimensions ne change globalement pas beaucoup de choses, la matrice n'est plus tri-diagonale et on ajoute des termes extra-diagonaux correspondant aux autres dimensions.

On retrouve ici l'importance du maillage. D'une part, si on juxtapose deux éléments, ils vont chacun ajouter un terme sur la colonne de l'autre. Sauf que si leurs tailles sont très différentes, les coefficients peuvent avoir plusieurs ordres de grandeurs de différences. Ceci induit des erreurs numériques lors de la résolution du système, néfastes à la convergence. À l'extrême, on peut perdre une partie du système que l'on résout et rendre la matrice singulière.

D'autre part, plus le maillage devient fin, plus les erreurs et variations de la solution sont amplifiées dans le résidu par les termes faisant intervenir des dérivées. Inversement, sur un maillage grossier, les variations de la solution sont écrasées, le résidu est dominé par les termes de production.

Recommandations pour le modèle de Launder-Sharma

On a vu que le modèle de Launder-Sharma introduisait de nouveaux termes; le paragraphe précédent nous donne quelques indications sur la façon dont il faut les traîter.

- La viscosité turbulente μ_t doit rester un point fixe, il faut donc prendre garde à fixer f_μ .
- Afin de réduire les non-linéarités, il vaut mieux expliciter f_μ lorsqu'on implice $\varepsilon = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\mu_t}$ dans l'équation de k .
- Étant donné le signe négatif devant le terme $D = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$ il faut le conserver implice.
- Le terme E dans l'équation de ε ne dépend que de u , il est donc déjà explicite.

- Il vaut mieux expliciter la fonction f_2 dans l'équation de ε pour réduire les non-linéarités.

En somme, on doit également considérer le Reynolds turbulent comme un point fixe.

3.3.3 Formulation

Les variables de turbulence k et ε sont positives par définition, si elles prennent une valeur négative, μ_t devient négatif ou l'équation de ε est changée.

Bien que les équations soient bien posées, il est possible que les variables deviennent négatives pour différentes raisons :

- On a vu que si l'équation en k était mal résolue, il pouvait arriver que la solution numérique soit transitoirement négative.
- Bien que la solution mathématique soit positive, la solution numérique peut présenter des valeurs négatives. On peut citer comme exemple canonique l'équation d'advection-diffusion unidimensionnelle, consistant à résoudre sur $[0, 1]$, l'équation

$$y'' - P_e y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

dont la solution numérique exacte obtenue avec des différences finies centrées présente des oscillations et des valeurs négatives dès lors que $P_e dx > 2$, bien que la solution exacte soit positive.

- On peut également citer les problèmes d'interpolation lorsque l'on utilise des interpolants d'ordre deux. Bien que ceux-ci soient plus précis, ils peuvent conduire à des valeurs négatives de la solution même si les valeurs nodales sont positives. Par exemple, si on interpole x^3 sur $[0, 1]$ à l'ordre 2, on obtient $\widehat{x}^3 = \frac{1}{2}[3x^2 - x]$ qui est négatif pour $x < \frac{1}{3}$.

Ces valeurs négatives sont non-physiques et conduisent généralement à la divergence du système, elles doivent donc être corrigées à tout prix. L'approche standard, consiste à corriger à chaque itération les valeurs de k et ε , en prenant leur valeur absolue ou en les remplaçant par un seuil. Ces manipulations ralentissent considérablement la convergence, c'est pourquoi, Illinca a proposé une formulation logarithmique des variables de turbulence, consistant à simuler les variables auxiliaires $\mathcal{K} = \ln(k)$, $\mathcal{E} = \ln(\varepsilon)$, et à retrouver dans les équations $k = \exp(\mathcal{K})$ qui est donc positif.

Cette manipulation n'est pas anodine, le présent paragraphe vise à donner un cadre plus général à cette approche et en délimiter les implications numériques. Afin d'illustrer le plus simplement possible nous allons nous concentrer sur un problème 1D, une équation d'advection diffusion avec un terme de production, qui ressemble à l'équation de k . Celle-ci s'écrit, sur $[0, 1]$:

$$y'' - ay' + by^2 + c = 0$$

$$y(0) = \alpha$$

$$y(1) = 1$$

où y est à valeurs dans \mathbb{R}^+ et a, b, α sont des coefficients positifs.

Un changement de variable, quel qu'il soit, consiste à se donner une fonction f surjective, au moins \mathcal{C}^2 par morceaux, d'un intervalle I dans \mathbb{R}^+ . On pose alors

$$y = f(\mathcal{Y})$$

$$y' = f'(\mathcal{Y})\mathcal{Y}'$$

$$y'' = f''(\mathcal{Y})\mathcal{Y}'^2 + f'(\mathcal{Y})\mathcal{Y}''$$

et l'équation devient :

$$\begin{aligned} 0 &= f''(\mathcal{Y})\mathcal{Y}'^2 + f'(\mathcal{Y})\mathcal{Y}'' - af'(\mathcal{Y})\mathcal{Y}' + bf(\mathcal{Y})^2 + c \\ \mathcal{Y}(0) &= f^{-1}(\alpha) \\ \mathcal{Y}(1) &= f^{-1}(1) \end{aligned}$$

Sous réserve qu'il ne s'annule pas, on peut diviser l'équation par $f'(\mathcal{Y})$ et obtenir :

$$\mathcal{Y}'' - a\mathcal{Y}' + \frac{f''(\mathcal{Y})}{f'(\mathcal{Y})}\mathcal{Y}'^2 + b\frac{f^2(\mathcal{Y})}{f'(\mathcal{Y})} + \frac{c}{f'(\mathcal{Y})} = 0.$$

Ce choix est motivé pour les mêmes raisons expliquées ci-dessus pour lesquelles on préfère fixer μ_t dans la résolution de k et ε . La présence d'un terme non-linéaire devant la dérivée seconde de la variable de résolution est très déstabilisante pour le problème.

L'approche classique : Elle consiste à prendre à chaque itération la valeur absolue de \mathcal{Y} , on retrouve alors quasiment la même équation tant qu'on est loin de 0 :

$$\mathcal{Y}'' - a\mathcal{Y}' + \frac{b\mathcal{Y}^2 + c}{\text{sgn}(\mathcal{Y})} = 0.$$

Cependant près de 0 la formulation devient pathologique.

- $\text{abs}(\mathcal{Y})$ est continue mais sa dérivée ne l'est pas, ceci vient largement perturber les méthodes itératives et ralentit considérablement la convergence voir conduit à la divergence du système.
- Les méthodes itératives peuvent être piégées par des solutions qui changent de signe ou des oscillations.

Quoi qu'il en soit, ce traitement ne nous soustrait pas aux considérations de la partie 3.3.2. En effet, si la solution mathématique de l'équation pour k ou ε admet transitoirement des solutions négatives, la résolution va immanquablement tendre vers ces valeurs. Il en résultera des oscillations et des valeurs très petites et désordonnées des variables qui conduiront très probablement à la divergence du système.

La formulation logarithmique : Proposée par Ilinca et Pelletier, elle consiste à choisir $f(\mathcal{Y}) = e^{\mathcal{Y}}$. On obtient alors l'équation :

$$\mathcal{Y}'' - a\mathcal{Y}' + \mathcal{Y}^2 + be^{\mathcal{Y}} + \frac{c}{e^{\mathcal{Y}}} = 0.$$

Cette formulation a l'immense avantage sur la précédente de garantir la positivité des variables quoi qu'il advienne. Le résidu est en plus C^∞ garantissant ainsi que les méthodes itératives soient bien posées et donc une convergence rapide de la méthode de Newton.

Elle devient en revanche problématique lorsque l'on veut de très petites valeurs de y (donc en particulier pour des modèles bas-Reynolds). \mathcal{Y} varie alors très rapidement, conduisant à de très grandes valeurs de \mathcal{Y}^2 . En particulier, il est impossible d'imposer $y = 0$ ($\mathcal{Y} = -\infty$).

Les recommandations de la partie 3.3.2 sont à considérer de différentes façons ici. Tout d'abord, si l'équation de k ou ε admettent des valeurs négatives, les équations de \mathcal{K} et \mathcal{E} n'ont tout simplement pas de solution, elles divergent. C'est pourquoi il vaut mieux conserver tout de même les termes de destruction implicites et les termes de production explicites.

Ensuite, on a vu que la façon dont les équations étaient écrites joue un rôle dans la raideur des

équations. Or ici, on a ajouté et modifié les termes. On pourrait donc envisager de traiter ces termes de différentes façons, afin de garantir l'existence de solutions et une moindre raideur.

Entre autres, le terme en y^2 a pris la forme e^y et a globalement le même comportement. En revanche, le terme source constant est devenu c/e^y dont la différentiation donne $-c/e^y$. Ce terme vient s'opposer au terme précédent et peut devenir très grand lorsque y tend vers 0; il pourrait donc être opportun de l'expliciter.

Enfin, le terme en \mathcal{Y}^2 est le plus problématique, puisqu'il se rapproche d'un terme d'advection, dont la vitesse serait \mathcal{Y}' et donc potentiellement très élevé. Ceci a tendance à se produire comme nous l'avion remarqué précédemment lors que \mathcal{Y}' devient grand, donc lorsqu'il y a de forts gradients de y et/ou lorsque y devient petit. Dans le cas des modèles de turbulences, on rencontre ces deux conditions simultanément près des parois.

Autres formulations : On peut très bien envisager d'autres choix de f . Idéalement, on souhaiterait avoir une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui soit \mathcal{C}^∞ , strictement concave et s'annulant en un point. Ceci nous permettrait d'avoir un résidu lui aussi \mathcal{C}^∞ donc permettant une convergence efficace de la méthode de Newton et de garantir la positivité des variables de turbulence tout en ayant la possibilité d'imposer $k = 0$ en un point. Malheureusement, au point où f s'annule on aurait $f' = 0$ ce qui ferait diverger le résidu. De plus, autour de ce point d'annulation, il y aurait des y avec deux antécédents \mathcal{Y} possibles (à gauche et à droite du zéro de f) ce qui cause des problèmes numériques. Ainsi, on pourrait envisager d'utiliser $y = \mathcal{Y}^2$ qui garantirait la positivité de y . Mais au voisinage de 0, $\mathcal{Y} = \sqrt{y}$ et $\mathcal{Y} = -\sqrt{y}$ sont deux valeurs admissibles. Ceci conduit (voir Fig 3.6) à des solutions pour lesquelles \mathcal{Y} s'annule et change de signe (ne posant pas de problème en soit) et donc y s'annule en un point, ce qui ne devrait pas arriver. De plus, cette configuration à tendance à piéger la méthode de résolution. Une solution envisageable est de reprendre à chaque itération la valeur absolue de \mathcal{Y} mais ceci a également tendance à piéger la méthode de Newton. Enfin le résidu associé à cette formulation est très raide près de 0.

3.3.4 Implémentation des lois de parois

Le principe et les équations des différentes lois de parois ont été exposés à la partie 3.2.3 mais encore faut-il les implémenter correctement. En effet, même si elles sont résiduelles (comprendre que leur résidu s'annule en la solution), elles ne convergent pas nécessairement (bien). Le but de la présente section est de préciser cela. Nous ne considérerons ici que des parois planes alignées selon l'axe des x . Les problèmes de courbure et non-pénétration n'entrent pas en compte ici et sont traités séparément.

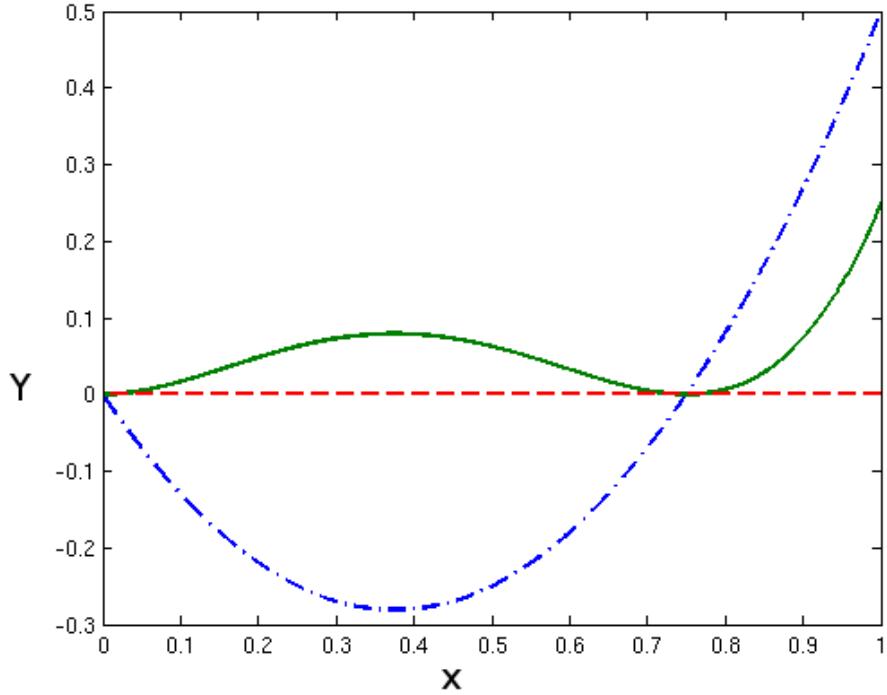


Figure 3.6 Changement de signe admissible de \mathcal{Y} (en point-tiret) conduisant à l'annulation et à un comportement problématique de y (trait plein). Droite $y = 0$ en pointillés.

En éléments finis, on impose faiblement les conditions limites sur u et k à l'aide du terme de bord dans le résidu tandis qu'on impose des conditions de Dirichlet sur les autres variables. On rappelle que pour u (et de même pour k) la contribution du cisaillement pariétal au le terme de bord du résidu s'exprime :

$$\int_{\partial\Omega/\Gamma} (\mu + \mu_t) \nabla_s \mathbf{u} \cdot \vec{n} \delta \mathbf{u} d\Gamma.$$

Or on calcule justement $(\mu + \mu_t) \nabla_s \mathbf{u} \cdot \vec{n} = h(\mathbf{u}, k, \varepsilon, \partial_x p) \vec{t}$ à l'aide des lois de parois.

Dans ce qui suit, $\tau = \vec{t} \cdot (\mu + \mu_t) \nabla_s \mathbf{u} \cdot \vec{n}$ désigne le cisaillement à la paroi et u désigne la vitesse tangentielle.

Lois de parois adaptatives

Comme on l'a vu les lois de parois adaptatives sont développées grâce à des tabulations des profils de vitesse et des variables de turbulence que nous noterons ici U^+ , K^+ et E^+ . Nous allons voir ici comment ces tableaux sont parcourus et utilisés de façon à optimiser la résolution.

Une échelle de vitesse : L'unique échelle de vitesse de ces lois est déterminée à l'aide du tableau U^+ . On cherche à connaître u_τ tel que :

$$u = u_\tau \cdot U^+ \left(\frac{du_\tau}{\nu} \right) = \frac{\nu y^+}{d} U^+(y^+).$$

Connaissant d , cette relation peut être pré-inversée pour tabuler $u_\tau(u)$. Il faut donc stocker une table pour chaque distance d , les pré-calculer à chaque calculs, etc.

Pour la phase de développement nous avons donc sacrifié l'efficacité à la flexibilité en résolvant à chaque fois l'équation $\frac{ud}{\nu} = y^+ U^+(y^+)$. Cependant, numériquement l'accès à $U(y^+)$ n'est pas immédiat. Cet accès est d'autant plus délicat si, comme dans notre cas, la distribution des noeuds en y^+ n'est pas linéaire. Nous avons en réalité tabulé deux tableaux $y^+(i)$ et $U^+(i)$ et résolu l'équation en i par une dichotomie : $y^+ U^+(y^+)$ étant strictement croissant, et nos tableaux étant de taille finie N , on réalise le processus itératif suivant :

- Définir $i_1 = 0, i_2 = N, i = [N/2]$
- Tant que $i_2 - i_1 > 1$
 - Si $\frac{ud}{\nu} > y^+(i)U^+(i) : i_1 = i, i = [(i_1 + i_2)/2]$
 - Si $\frac{ud}{\nu} \leq y^+(i)U^+(i) : i_2 = i, i = [(i_1 + i_2)/2]$

Une fois que on a $y^+(i_1)U^+(i_1) < \frac{ud}{\nu} < y^+(i_1 + 1)U^+(i_1 + 1)$, on peut calculer θ tel que

$$\frac{ud}{\nu} = \theta y^+(i_1)U^+(i_1) + (1 - \theta)y^+(i_1 + 1)U^+(i_1 + 1)$$

avec $0 \leq \theta < 1$ et en déduire

$$y^+ = \theta y^+(i_1) + (1 - \theta)y^+(i_1 + 1).$$

On peut imaginer d'autres façons d'interpoler la valeur de y^+ mais celle-ci est efficace et minimalistique.

Ce processus donne une réponse en temps constant de complexité $\log_2(N)$ et est précis à l'ordre 1 puisqu'on interpole linéairement. On ne peut pas avoir $\frac{ud}{\nu} < 0$ et donc dépasser le tableau par le bas, on peut en revanche avoir $\frac{ud}{\nu} > y^+(N)U^+(N)$. Se retrouver dans une telle situation est très mauvais signe, ne serait-ce que parce qu'on se trouve alors très probablement au-delà de la zone de validité des lois de parois. Ce peut être également dû

à une divergence du calcul ou au recours d'un tableau trop petit. Quoi qu'il en soit, ce dépassement est automatiquement traité par le processus puisqu'on obtient alors $i_1 = N - 1$ et $i_2 = N$. La valeur de y^+ est alors interpolée linéairement à partir de la fin du tableau. On peut également envisager de prolonger ces lois par les lois analytiques standards.

Une fois que l'on a y^+ , on peut en déduire

$$u_\tau = \frac{y^+ \nu}{d},$$

dont on tirera

$$\tau = \rho u_\tau^2$$

et les conditions limites

$$k = u_\tau^2 (\theta K^+(i_1) + (1 - \theta) K^+(i_1 + 1)) \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^4}{\nu} (\theta E^+(i_1) + (1 - \theta) E^+(i_1 + 1)).$$

Ces conditions limites se déclinent de façon évidente en variables logarithmiques.

Deux échelles de vitesse : Il y a ici deux échelles de vitesses à déterminer. La première se calcule par la relation :

$$k \frac{d^2}{\nu^2} = y^{+2}(i) K^+(i)$$

que l'on résout de la même façon que pour la loi à une échelle de vitesse. On peut se demander si cette résolution est légitime puisqu'elle nécessite que la fonction soit strictement croissante. En réalité K^+ est tout d'abord croissante jusqu'à $y^+ \approx 10$, puis peut éventuellement décroître selon le gradient de pression. Mais cette décroissance est relativement lente, et dominée par y^{+2} si bien que le produit $y^{+2} K^+$ est croissant.

Étant donné y^+ on calcule

$$u_k = \frac{y^+ \nu}{d}$$

et

$$u_\tau = \frac{u}{\theta U^+(i_1) + (1 - \theta) U^+(i_1 + 1)}$$

dont on tire

$$\tau = \rho u_k u_\tau.$$

Comme pour la loi de parois à une échelle de vitesses, on a

$$\varepsilon = \frac{u_k^4}{\nu} (\theta E^+(i_1) + (1 - \theta) E^+(i_1 + 1)).$$

La façon dont on calcule $\frac{dK^+}{dy^+}(y^+)$ est en revanche importante. On a vu qu'on en avait besoin pour imposer $\frac{\partial k}{\partial \vec{n}}$ ou $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \vec{n}}$. Or, on a calculé numériquement le tableau K^+ et d'une façon ou d'une autre il faut le différentier. Il est alors important de garantir que $\frac{dK^+}{dy^+}(y^+)$ soit continue, car elle rentre dans le calcul du résidu.

Encore une fois, l'introduction de discontinuités dans le résidu peut ralentir ou empêcher la convergence. En effet, rappelons qu'ici, on impose grossièrement la dérivée de k en fonction de sa valeur au bord. Or, si la dérivée que l'on impose dépend de k de façon discontinue, on peut avoir (et on aura) des points au bord qui vont osciller de part et d'autre d'une discontinuité.

Imaginons que la dérivée que l'on calcule vaille ∂k_1 pour $k < k_0$ et ∂k_2 au-dessus avec $\partial k_2 > \partial k_1$. On peut imaginer alors le scénario suivant :

- $k = k_0 - dk$, la dérivée numérique est plus élevée que ∂k_1 imposée faiblement et donc la méthode de Newton va chercher à annuler le résidu en augmentant k .
- $k = k_0 + dk_2$, la dérivée numérique est maintenant plus élevée que ∂k_2 et donc la méthode de Newton va chercher à annuler le résidu en diminuant k .
- $k = k_0 - dk_3 \dots$

En fait, il y a une petite zone autour de k_0 où la solution nécessite l'imposition d'une dérivée comprise entre ∂k_2 et ∂k_1 ce qui est impossible et la résolution stagne.

La solution est donc d'interpoler continument $\frac{dK^+}{dy^+}(y^+)$, pour ce faire, on a donc utilisé des différences centrées pour calculer

$$\frac{dK^+}{dy^+}(i) = \frac{K^+(i+1) - K^+(i-1)}{y^+(i+1) - y^+(i-1)}.$$

Finalement on obtient :

$$\frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = \frac{u_k^3}{\nu} \left(\theta \frac{dK^+}{dy^+}(i_1) + (1 - \theta) \frac{dK^+}{dy^+}(i_1 + 1) \right)$$

ou en variables logarithmiques

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \vec{n}} = \frac{u_k}{\nu} \frac{1}{\theta K^+(i_1) + (1 - \theta) K^+(i_1 + 1)} \left(\theta \frac{dK^+}{dy^+}(i_1) + (1 - \theta) \frac{dK^+}{dy^+}(i_1 + 1) \right).$$

Lois adaptatives avec gradient de pression

Seules les lois à deux échelles de vitesse ont été traitées ici. La méthode s'étend cependant de la même façon aux lois à une échelle de vitesse. Différents profils sont ici tabulés pour

différents gradients de pression et on doit interpoler entre ces différents paramètres.

Nous avons réalisé plusieurs simulations 1D pour des écoulements de Couette, en présence de différents gradients de pression. Ces simulations nous ont donné différents $K^+(y^+, p^+)$ (idem pour U^+ et E^+). Le premier problème est que u_τ varie d'un tableau à l'autre, et donc les y^+ également. Nous avons donc ré-interpoler tous les tableaux pour avoir les mêmes y^+ ce qui immanquablement entraîne une petite perte de précision.

La seconde difficulté à contourner est le fait que p^+ et y^+ dépendent à la fois de u_τ à des ordres différents et de paramètres extérieurs.

Deux échelles de vitesse : Les tableaux sont stockés sous la forme $U^+(i, j)$, $K^+(i, j)$, $E^+(i, j)$, $P^+(j)$. Étant donné d , k et $\partial_x p$ à la paroi on réalise le processus itératif suivant :

- Définir $i_1 = 0$, $i_2 = N$, $i = [N/2]$
- Tant que $i_2 - i_1 > 1$
 - Calculer $u_k = \frac{y^+(i)\nu}{d}$
 - Calculer $p^+ = \frac{\nu}{\rho u_k^3} \partial_x p$
 - Déterminer j et α tels que $p^+ = \alpha P^+(j) + (1 - \alpha) P^+(j - 1)$ et $0 \leq \alpha < 1$
 - Calculer $k^+ = \alpha K^+(i, j) + (1 - \alpha) K^+(i, j + 1)$
 - Si $\frac{ud^2}{\nu^2} > y^+(i)^2 k^+$: $i_1 = i$, $i = [(i_1 + i_2)/2]$
 - Si $\frac{ud^2}{\nu^2} \leq y^+(i)^2 k^+$: $i_2 = i$, $i = [(i_1 + i_2)/2]$

On peut alors garder la dernière combinaison p^+ , j et α entraînant une légère erreur, pour calculer θ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{kd^2}{\nu^2} &= \theta y^{+2}(i_1) (\alpha K^+(i_1, j) + (1 - \alpha) K^+(i_1, j + 1)) \\ &\quad + (1 - \theta) y^{+2}(i_1 + 1) (\alpha K^+(i_1 + 1, j) + (1 - \alpha) K^+(i_1 + 1, j + 1)) \end{aligned}$$

avec $0 \leq \theta < 1$ et en déduire

$$y^+ = \theta y^+(i_1) + (1 - \theta) y^+(i_1 + 1).$$

Ici également, on peut imaginer différentes manières d'améliorer l'interpolation finale.

Étant donné y^+ on calcule alors

$$u_k = \frac{y^+ \nu}{d}.$$

On obtient u^+ , k^+ , dk^+/dy^+ et ε^+ par la relation :

$$\begin{aligned} a^+ &= \theta \left(\alpha A^+(i_1, j) + (1 - \alpha) A^+(i_1, j + 1) \right) \\ &\quad + (1 - \theta) \left(\alpha A^+(i_1 + 1, j) + (1 - \alpha) A^+(i_1 + 1, j + 1) \right) \end{aligned}$$

et donc

$$u_\tau = \frac{u}{u^+}$$

dont on tire

$$\tau = \rho u_k u_\tau.$$

Enfin, comme pour la loi adaptative sans gradient de pression, on impose

$$\varepsilon = \frac{u_k^4}{\nu} \varepsilon^+, \quad \frac{\partial k}{\partial \vec{n}} = \frac{u_k^3}{\nu} \frac{dk^+}{dy^+}$$

ou en variables logarithmiques

$$\mathcal{E} = \ln \left(\frac{u_k^4}{\nu} \varepsilon^+ \right), \quad \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \vec{n}} = \frac{u_k}{\nu} \frac{1}{k^+} \frac{dk^+}{dy^+}.$$

CHAPITRE 4 Résultats Numériques

4.1 Vérification

4.1.1 Principe des solutions manufacturées

Tout programmeur est habitué à rencontrer des bugs lors du développement d'un projet quelconque. Si certains sont "faciles" à identifier et repérer (les fautes de segmentations ou dépassements d'indices ne sont pas très discrètes), d'autres peuvent être plus délicats à trouver, même à détecter : un facteur 2 peut passer inaperçu dans des équations. Or, lorsque l'on effectue des calculs scientifiques, on cherche à atteindre la meilleure précision possible. Il est donc primordial de s'assurer que l'on résout correctement les équations auxquelles on cherche une solution afin de garantir la validité des résultats. Cette démarche est différente de la validation, qui consiste à comparer les résultats exacts d'un modèle à la réalité, on cherche là à comparer les résultats exacts d'un modèle à la solution numérique approchée du modèle. Malheureusement, on connaît très peu de solutions exactes aux équations de Navier-Stokes, sans parler des équations RANS. Il est donc délicat d'aller au-delà de considérations qualitatives ce qui est très insuffisant.

Si on a fait une erreur de programmation, on annule lors de la résolution le résidu numérique (notation de la partie 3.3)

$$\hat{R}^*(\phi) = \hat{R}(\phi) + \epsilon(\phi),$$

où ϵ est une erreur, qui peut être très petite selon les cas, si bien que sur nombre de tests qualitatifs, la solution ϕ semble correcte mais comporte en réalité une petite erreur, qui peut devenir grande sur les cas où l'on veut effectuer des prédictions, sans que l'on s'en rende compte.

C'est là qu'intervient le concept de solutions manufacturées (Zienkiewicz et Zhu, 1992a,b,c). En ajoutant un terme source bien choisi aux équations, on peut faire en sorte de connaître la solution exacte. En reprenant les notations précédentes, sachant que le résidu associé aux équations de Navier-Stokes est R , on va se donner une fonction ψ quelconque (les cas pathologiques dépendent uniquement des capacités du système de résolution) qui sera solution et ainsi construire un nouveau résidu $\tilde{R} = R + S$ tel que $\tilde{R}(\psi) = R(\psi) + S = 0$. De façon assez directe,

$$S = -R(\psi),$$

et on résout

$$R(\phi) = R(\psi).$$

Insistons lourdement sur le fait que S doit être constant, il dépend uniquement des variables d'espaces et de temps, il ne doit pas dépendre d'une quelque façon que ce soit de ϕ .

Sous ces conditions, le système de résolution est peu changé, en particulier la matrice jacobienne reste la même :

$$d\tilde{R} = dR.$$

Lors de la vérification, on annule donc le résidu

$$\hat{R}^*(\phi) = \hat{R}(\phi) - \hat{R}(\psi) + \epsilon(\phi).$$

Or, ici, on sait que lorsque le maillage s'affine, $\lim_{h \rightarrow 0} \hat{R} \rightarrow R$, où h est la taille des éléments. Si R est continu, la solution doit tendre vers ψ si $\epsilon = 0$, sinon ϕ ne tend généralement pas vers ψ . Pour mettre en évidence l'erreur, il faut que ϵ ne s'annule pas en ψ . Pour cela, il suffit généralement de prendre une fonction suffisamment complexe.

Remarque : Si ϵ tend vers 0 plus vite que l'erreur de discréétisation, elle n'est pas un problème. C'est d'ailleurs le principe des méthodes de stabilisation type SUPG, PSPG. On introduit une erreur numérique dans le problème (de la viscosité) de façon à le rendre plus stable mais cette erreur tend vers 0 quand la taille des mailles diminue, si bien que le problème reste résiduel.

Illustrons en pratique ce à quoi cela correspond. Pour simplifier l'écriture, nous allons considérer que l'on cherche à vérifier un code de résolution, pour

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \phi &= 0 && \text{sur } \Omega \\ \nabla \phi \cdot \vec{n} &= h(\phi) && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 , $]0, 1[\times]0, 1[$ par exemple. Cette condition limite correspond à une condition de troisième type, comme les lois de parois. On obtient alors, avec la méthode des éléments finis le résidu discret

$$\hat{R}_j(\hat{\phi}) = \int_{\Omega} \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \delta \phi d\omega - \int_{\partial\Omega} h(\phi) \delta \phi d\Gamma.$$

Pour établir le résidu de la vérification, il faut être prudent. En effet, pour obtenir le résidu discret ci-dessus on a eu recours à une intégration par partie et au fait que $\nabla \phi \cdot \vec{n} = h(\phi)$

sur $\partial\Omega$, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour la solution que l'on a choisi. Il faut donc partir du résidu discret :

$$\hat{R}_j^*(\hat{\phi}) = \int_{\Omega} \{ \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \delta \phi - \nabla \hat{\psi} \cdot \nabla \delta \phi \} d\omega - \int_{\partial\Omega} \{ h(\phi) \delta \phi - h(\psi) \delta \phi \} d\Gamma,$$

On aimerait imposer la forme forte du terme source soit utiliser $\nabla \cdot \nabla \psi$ car ceci correspond à l'équation que l'on manipule et que l'on souhaite résoudre en pratique. On obtient alors le bon résidu en réintégrant par partie le terme source :

$$\hat{R}_j^*(\hat{\phi}) = \int_{\Omega} \{ \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \delta \phi + (\nabla \cdot \nabla \hat{\psi}) \delta \phi \} d\omega - \int_{\partial\Omega} \{ h(\phi) \delta \phi - (h(\psi) - \nabla \psi \cdot \vec{n}) \delta \phi \} d\Gamma.$$

Connaissant la solution exacte, on peut alors en théorie vérifier que la solution numérique tend vers la solution exacte à la limite en calculant l'erreur d'interpolation comme l'intégrale de la différence entre l'interpolation de la solution exacte et la solution numérique.

Cependant, il y a toute une nuance dans la définition de "tendre vers". Il est évidemment impossible de faire une série de calcul avec un nombre de points tendant vers l'infini. On sait en revanche que selon l'interpolation (linéaire, quadratique, supérieure), l'erreur possède un équivalent (au sens mathématique) d'un certain ordre (h^2 pour une interpolation linéaire, h^3 pour une interpolation quadratique, etc.) lorsque la taille h des éléments tend vers 0. On peut donc considérer que le code est exempt d'erreur lorsqu'on a atteint la zone asymptotique où l'erreur a un comportement du bon ordre. Une faute dans le code passe en réalité difficilement inaperçue si la vérification est poussée suffisamment loin, l'erreur stagnant alors à une valeur non nulle ou convergeant à un ordre franchement dégradé.

4.1.2 Application aux modèles RANS avec lois de parois

Afin de vérifier notre code RANS nous avons eu recours à plusieurs solutions manufacturées. En effet, si l'ensemble du code peut être vérifié à l'aide d'une seule solution, il est plus facile d'isoler et identifier les erreurs en activant les termes un à un. Nous avons donc tout d'abord vérifié le code sans loi de parois avec un problème de turbulence de grille qui n'active que les dérivées selon une direction.

Nous avons ensuite utilisé une solution ressemblant à une couche turbulente cisailée, tout d'abord sans utiliser de lois de parois, puis avec des lois de parois. Cette solution est donnée

par les équations suivantes :

$$u = \frac{U_0}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma y}{x}\right) \right)$$

$$v = U_0 \frac{\exp\left(-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2\right)}{2\sigma\sqrt{\pi}}$$

$$P = 0$$

$$k = k_0 \left(c_k + \exp\left(-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2\right) \right)$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{x} \left(c_k + \exp\left(-\left(\frac{\sigma y}{x}\right)^2\right) \right)$$

où erf est la fonction erreur, primitive de la fonction gaussienne.

Nous avons résolu le problème sur le domaine rectangulaire $[100, 300] \times [-50, 75]$ et appliqué une loi de parois à la frontière inférieure uniquement, les conditions limites étant spécifiées par des Dirichlet sur les limites hautes et gauche et par des Neumann sur la frontière droite. L'utilisation d'une loi de parois peut paraître un peu artificielle ici puisque v n'est pas nulle, mais cela s'apparente à une transpiration et numériquement cela n'a aucun impact. Les résultats sont présentés à la figure 4.1. Plusieurs normes d'erreur sont calculées ici :

- La norme énergie est la norme L^2 de $\nabla \mathbf{u}$. L'écoulement étant interpolé quadratiquement, les dérivées sont interpolées linéairement et on s'attend à une convergence en $\mathcal{O}(h^2)$ pour cette norme.
- Les normes équivalentes k et ε (noté E), sont également les normes L^2 des gradients de k et ε qui sont interpolées (les variables) quadratiquement et on s'attend donc à une convergence en $\mathcal{O}(h^2)$ pour ces normes.
- La norme L^2 de la pression est censée converger également en $\mathcal{O}(h^2)$, car la pression est interpolée linéairement (pour des raisons de stabilité).
- La norme équivalente de μ_t correspond également à la norme L^2 de son gradient.

On peut voir que les erreurs convergent toutes en $\mathcal{O}(h^2)$, comme on s'y attendait, sauf l'erreur de μ_t . Ceci est parfaitement normal, μ_t étant calculé comme une fonction de k et ε , il n'est pas interpolé et peut donc converger à un ordre légèrement différent. Note : Les résultats sont présentés en fonction du nombre de points or étant en 2D, $N \approx \frac{1}{h^2}$. D'où la confusion ordre 2 en taille de maille - ordre 1 en nombre de points.

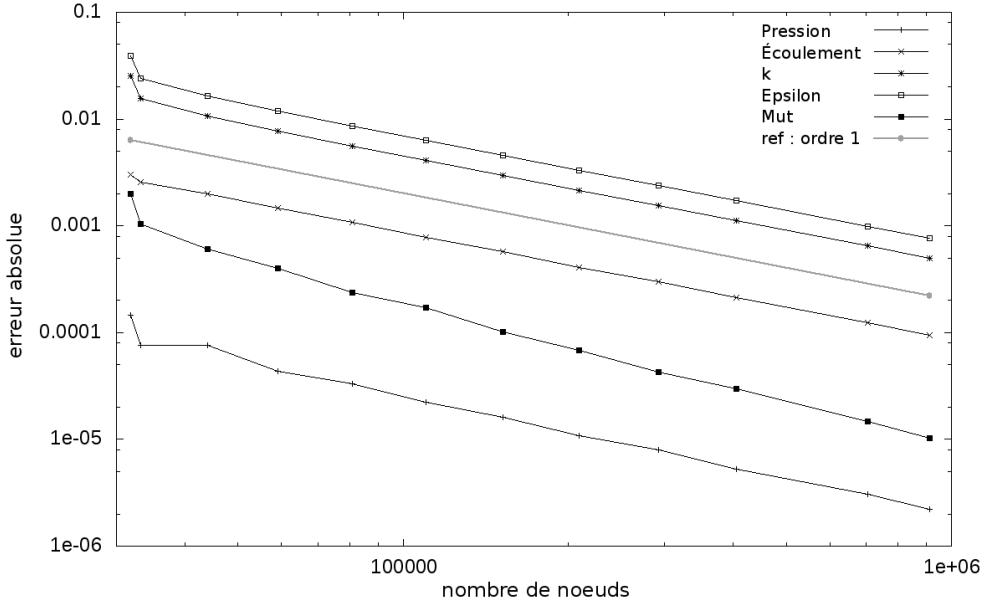


Figure 4.1 Convergence des normes L^2 de l’erreure exacte pour différentes variables lors du calcul de la solution manufacturée de couche cisaillée turbulente.

4.2 Résultats unidimensionnels

Les simulations unidimensionnelles à précision égale nécessitent un ordre de grandeur de moins de noeuds qu’une simulation bidimensionnelle (autrement dit, si h est la taille caractéristique d’un élément, le nombre total de noeuds est de l’ordre de h^{-D} , où D est la dimension du problème). Ce sont également des équations beaucoup plus simples à manipuler, elles constituent donc un excellent point de départ. Ces simulations nous ont également permis de tabuler à peu de frais nos lois de parois adaptatives.

4.2.1 Intégration à la paroi

Les écoulements en canal sont une façon rapide d’obtenir des écoulements unidimensionnels. En particulier l’écoulement de Poiseuille turbulent qui nous a permis de tester rapidement les modèles de Launder-Sharma et de Goldberg. On peut également appliquer un gradient de pression et calculer en même temps la couche limite avec un gradient de pression favorable d’un côté et la couche limite avec un gradient de pression adverse de l’autre.

Malheureusement, on ne peut pas prendre en compte des effets dynamiques tels que ceux qui conduisent à la croissance et au décollement de la couche limite. Cependant, il est possible de réaliser ces simulations, comme aux débuts de la CFD, en se servant du caractère parabolique des équations dans une couche limite. Les ordinateurs de l’époque n’ayant pas suffisamment

de mémoire vive pour manipuler un domaine bidimensionnel, les numériciens réalisaient une marche en espace : la coordonnée tangentielle est traitée comme un temps, à chaque itération, l'état de la section (d'absice constante) suivante est calculée à partir de la section courante, et ainsi de suite.

Ceci permet de simuler une couche limite bidimensionnelle, grâce à une série de simulation unidimensionnelles. En pratique, cela revient à utiliser un schéma explicite complètement décentré amont.

Sur la Fig. 4.2 sont présentés les profils adimensionnels de la vitesse dans une couche limite unidimensionnelle pour différents gradients de pression adverses. Le gradient de pression est adimensionalisée en,

$$p^+ = \frac{\mu}{u_\tau^3} \frac{\partial p}{\partial x},$$

et donc les équations adimensionnelles dans la couche limite :

$$0 = \frac{d}{dy^+} \left[\left(1 + \nu_t^+ \right) \frac{du^+}{dy^+} \right], \quad (4.1)$$

$$0 = \frac{d}{dy^+} \left[\left(1 + \frac{\nu_t^+}{\sigma_k} \right) \frac{dk^+}{dy^+} \right] + \nu_t^+ \left(\frac{du^+}{dy^+} \right)^2 - \varepsilon^+, \quad (4.2)$$

$$0 = \frac{d}{dy^+} \left[\left(1 + \frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{d\varepsilon^+}{dy^+} \right] + C_1 C_\mu k^+ \left(\frac{du^+}{dy^+} \right)^2 - C_2 \frac{\varepsilon^{+2}}{k^+}. \quad (4.3)$$

On peut alors intégrer (4.1) en :

$$\left(1 + \nu_t^+ \right) \frac{du^+}{dy^+} = 1 + p^+ y^+$$

On voit que le gradient de pression modifie l'équation de u et que son influence grandit à mesure que l'on s'éloigne de la paroi (voir Fig. 4.2). En l'absence de gradient de pression la zone logarithmique s'étend très loin et les loi de parois sont valides. En revanche, plus le gradient de pression augmente, plus la zone logarithmique est altérée jusqu'à disparaître. Cependant, on peut voir qu'il existe toujours une zone où les profils tendent vers la même solution. Cette zone diminue à mesure que le gradient de pression augmente. Par exemple, le profil pour $p^+ = 0.6773 \times 10^{-3}$ ne se superpose aux autres qu'en dessous de $y^+ = 7$. C'est pourquoi l'intégration jusqu'à la paroi est réputée meilleure, car elle est censée donner des résultats corrects même en présence de gradients de pression. Les lois de parois standards sont invalides dès qu'il n'y a plus de zone logarithmique donc dès $p^+ = 0.2174 \times 10^{-3}$.

Il est intéressant de noter que les gradients de pression adverses ont un impact beaucoup plus important que les gradients de pression favorables. En effet, en présence d'un gradient

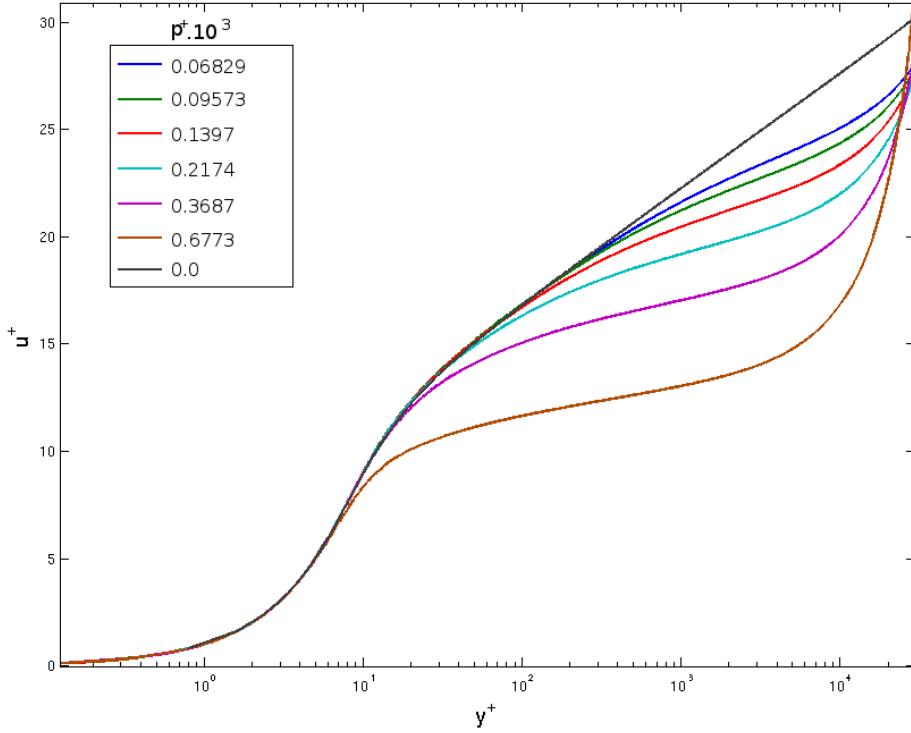


Figure 4.2 Profils de vitesse dans une couche limite turbulence prédis par le modèle de Launder-Sharma en présence de différents gradients de pression adverses.

de pression adverse, le fluide ralenti, et donc u_τ diminue, faisant augmenter rapidement p^+ . À l'inverse, un gradient de pression favorable accélère le fluide, augmentant u_τ ce qui réduit p^+ .

Une autre façon de le voir est de s'intéresser à l'écoulement de Poiseuille, entièrement piloté par le gradient de pression. On s'attendrait à ce que les effets de la pression sur la couche limite augmentent avec le gradient. Or, on peut ici calculer u_τ directement grâce au gradient de pression. En 2D, si on prend une tranche de fluide dans la conduite, elle est soumise à la pression sur ses deux faces et au cisaillement sur les bords. En considérant que la dite surface est unitaire pour simplifier, on tire de l'équilibre des forces : $2u_\tau = \frac{\partial p}{\partial x}$, soit

$$p^+ = \frac{\nu 2 \rho \sqrt{2\rho}}{\sqrt{\frac{\partial p}{\partial x}}}.$$

Dans un écoulement de conduite, plus le gradient de pression est élevé, moins ses effets sont importants sur la couche limite.

Sur la figure 4.3, on peut voir les profils adimensionnels de la vitesse et l'énergie cinétique de turbulence obtenus à différents Reynolds pour des écoulements de Couette et de Poiseuille.

Il est intéressant de constater que plus le nombre de Reynolds est élevé, plus la zone logarithmique s'étend à des y^+ élevés et donc plus la zone de validité des lois de parois est grande. On peut également noter, qu'à $Re = 5.3 \times 10^4$, les profils de vitesse et d'énergie cinétique de turbulence ne se confondent avec les autres qu'en dessous de $y^+ = 10$. Il n'y a alors aucune chance pour que les lois de parois standards soient valides.

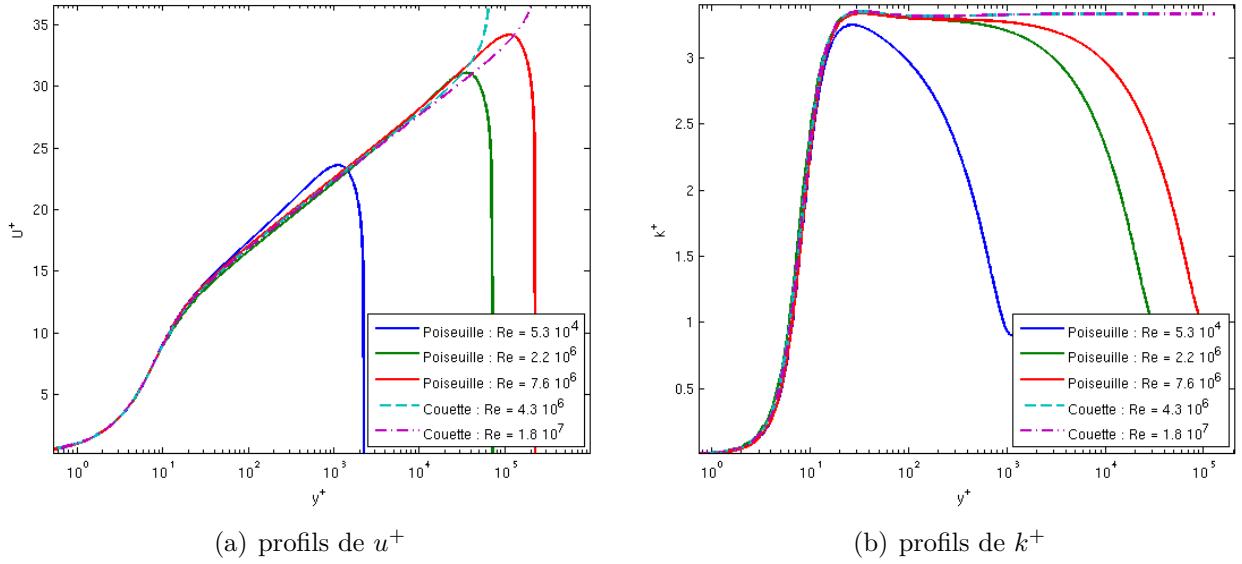


Figure 4.3 Profils adimensionnels de la vitesse et l'énergie cinétique de turbulence prédits par le modèle de Launder-Sharma à différents Reynolds pour des écoulements de Couette et de Poiseuille.

Considérant ces différents éléments on peut donc en tirer différentes conclusions sur le profil tabulé à utiliser et la zone de validité des lois de parois.

Pour chaque cas, il existe une distance $y^0 \left(Re, \frac{\partial p}{\partial x} \right)$ en dessous de laquelle le profil se superpose au profil théorique sans gradient de pression. Pour que notre loi de parois soit valide, elle doit être utilisée à une distance inférieure au minimum de y^0 du problème considéré et de y^0 de la solution utilisée pour générer les tables.

Si on utilise des données tabulées sur la solution de l'écoulement de Poiseuille à $Re = 2.2 \times 10^6$, on pourra efficacement prédire les écoulements à un nombre de Reynolds plus élevé en dessous de $y^+ = 100$. En revanche, au-dessus de cette valeur, on ne pourra prédire que cet écoulement, et inversement, seules des tables obtenues avec ce cas permettraient de le prédire. En somme il faut connaître, à priori l'écoulement pour le calculer. Ainsi, on a tout intérêt à tabuler notre loi de parois à haut Reynolds, sans gradient de pression.

4.2.2 Test des lois de parois

Afin d'évaluer la pertinence de nos développements et vérifier que la formulation logarithmique ne pose pas de problème outre mesure, nous avons comparé le comportement des lois de parois en 1D à différentes distances en formulation logarithmique et primitive. On peut voir sur la figure 4.4 que les solutions convergent vers le profil intégré à la paroi (bleu) et que la formulation logarithmique ne semble pas poser de problème particulier.

L'erreur faite sur les maillages grossiers est d'autant plus grande que l'on effectue le raccord à une distance δ^+ petite. Ceci vient rappeler la nécessité d'avoir des maillages fin pour résoudre correctement la sous-couche visqueuse. Les lois de parois adaptatives n'échappent pas à cette contrainte et il faut donc s'assurer que les maillages soient suffisamment fins pour avoir des résultats corrects.

4.3 Résultats bidimensionnels

4.3.1 Compatibilité des conditions limites

Dans une simulation bidimensionnelle, les bords du domaine ne sont plus des points mais des courbes, ce qui nous amène à juxtaposer des conditions de types différents. Il faut alors respecter certaines conditions pour que les conditions limites soient cohérentes entre elles et avec l'écoulement.

Ecoulement libre : Dans beaucoup de cas, on est amené à modéliser une frontière par laquelle l'écoulement sort ou entre sans contrainte. Plus généralement, si on se limite à des simulations d'espaces complètement confinés, on est toujours amené à modéliser "l'extérieur de l'écoulement", comprendre une vaste étendue de fluide. Par exemple, lorsqu'on simule l'écoulement autour d'un avion, on l'inclut dans une "boîte" dont les frontières représentent le reste de l'univers, pour une conduite, la sortie modélise le reste de la conduite, etc.

Une façon de simuler ces frontières est de supposer qu'aucune contrainte ne s'applique dessus. On suppose alors en particulier pour une normale selon e_x que : $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Cette relation est fausse pour des conduites et des couches limites puisque justement $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$ et peut faire diverger le système. On ne peut cependant pas imposer $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ seul en élément finis puisque cette condition limite vient de l'intégration par partie du tenseur des contraintes.

Dirichlet-Dirichlet : Une façon relativement facile d'imposer des conditions incohérentes est de juxtaposer deux Dirichlet différents. Prenons l'exemple d'un jet, on pourrait chercher

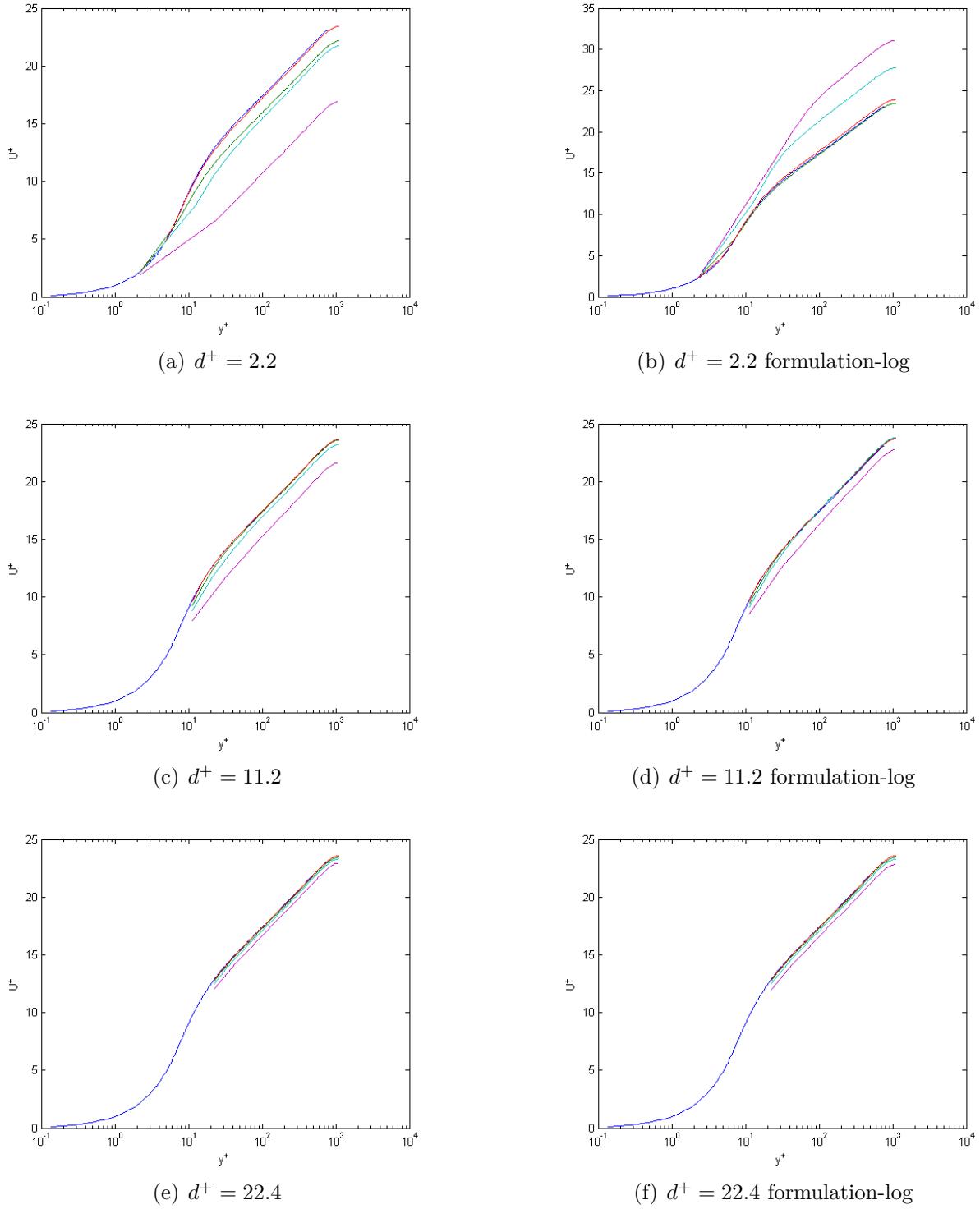


Figure 4.4 Convergence en maillages des lois de parois adaptatives pour un écoulement de Poiseuille unidimensionnel à différentes distances de raccord. 50 (pourpre), 100 (bleu claire), 200 (vert) and 400 (rouge) éléments.

à imposer sur une verticale $U = 1$ pour $-1 < y < 1$ et 0 ailleurs. Mais lorsque l'on raffine le maillage, le gradient formé en $y = 1$ et $y = -1$ devient de plus en plus grand, ce qui conduit généralement à l'échec de la résolution.

Cet exemple est relativement évident et facile à éviter, mais on peut involontairement se retrouver dans une telle situation indirectement.

Discontinuité géométrique : En juxtaposant deux lois de parois (à une ou deux échelles de vitesse) on peut créer des discontinuités de plusieurs façons. Prenons l'exemple d'un écoulement au-dessus d'un coin faisant un angle droit (type marche descendante). Si on choisit de modéliser le coin comme un angle parfait, on impose une discontinuité géométrique. Il n'y a pas de façon cohérente de traiter le point de l'angle. Si on considère qu'il appartient à la face verticale de la marche, alors $u = 0$ en ce point, ce qui s'accorde très mal avec la loi de parois du haut de la marche, qui suppose justement $u \neq 0$. Inversement comme on peut le voir sur la figure 4.5, si on considère qu'il appartient au haut du coin (ou à aucun des deux), on a alors pour le noeud 3, $u \neq 0$, mais le noeud 4 juste en dessous appartient à la face du coin et vérifie donc $u = 0$. Cette situation amène encore une fois à créer un gradient qui diverge à mesure que le maillage devient fin. De plus, en procédant ainsi, certains noeuds de la face (ceux qui se trouveront entre les noeuds 3 et 4 lorsque le maillage s'affinera) se trouvent au-dessus de la face supérieure réelle et donc dans l'écoulement. Ils n'ont alors aucune raison de vérifier $u = 0$.

C'est pourquoi il est nécessaire, d'arrondir les coins des formes géométriques ou de limiter la taille minimale que peut avoir un élément (et donc renoncer à une solution convergée). En arrondissant le coin comme sur la figure 4.5 à droite, on respecte en plus l'hypothèse selon laquelle la paroi numérique (en pointillés) est à distance constante de la paroi physique (hachurée). Il n'y a pas de divergence géométrique lorsque le maillage devient fin.

Discontinuité dans la distance : Même si la géométrie est continue la juxtaposition de deux lois de parois avec des paramètres de distances différents conduit à une discontinuité. Prenons l'exemple d'une loi de paroi à deux échelles de vitesse standard le long de l'axe des x , définie avec le paramètre $d = d1$ pour $x < 0$ et $d = d2 \neq d1$ pour $x > 0$. Si on prend les noeuds de part et d'autre de $x = 0$, k a à peu près la même valeur à droite et à gauche puisqu'il est continu. En revanche, la loi de paroi impose $\varepsilon = \frac{k^{3/2} C_\mu^{3/4}}{\nu d}$, les noeuds de part et d'autre ont donc des valeurs ε d'autant plus différentes que $d1$ et $d2$ sont différentes. Encore une fois, le gradient de ε croît à mesure que le maillage s'affine jusqu'à la divergence du système. Il faut donc s'assurer que d est continu, si on veut obtenir des résultats convergés

et éviter les divergences.

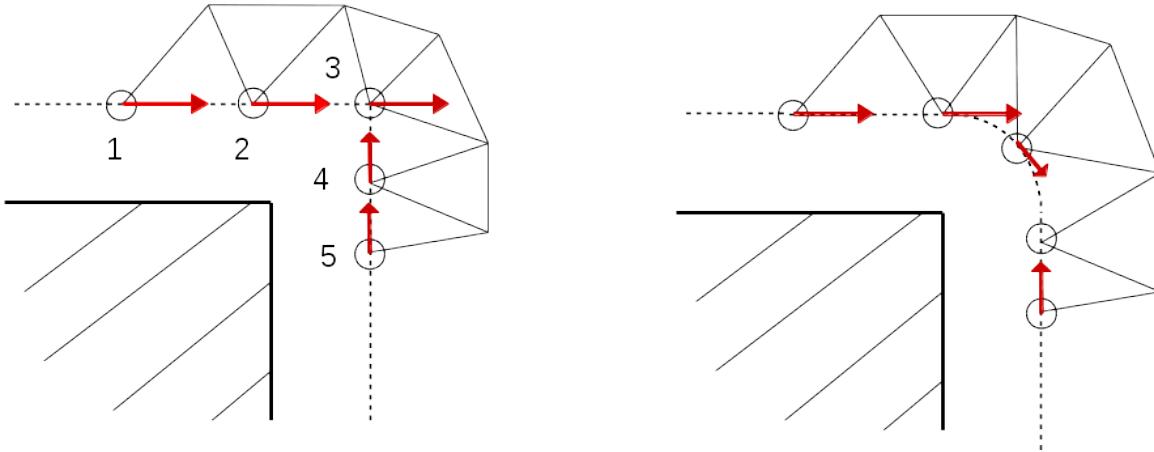


Figure 4.5 Discontinuité dans les vecteurs vitesse en présence d'un coin saillant.

Loi de paroi et Dirichlet : On peut créer une discontinuité en juxtaposant une loi de parois et un Dirichlet mal choisi. Prenons l'exemple d'un écoulement dans un canal, à l'entrée, on spécifie l'énergie cinétique de turbulence k_0 et sa dissipation ε_0 . À la jonction de la paroi et de l'entrée, on a donc un noeud sur lequel le Dirichlet impose $\varepsilon = \varepsilon_0$, tandis que la loi de parois impose $\varepsilon = \frac{k^{3/2} C_\mu^{3/4}}{\nu d}$, où k est imposé par l'entrée. Encore une fois, si $\varepsilon_0 \neq \frac{k_0^{3/2} C_\mu^{3/4}}{\nu d}$, on forme une discontinuité dans le champ ε qui va s'aggraver à mesure que les maillages s'affinent.

4.3.2 Plaque plane en présence de succion et d'un jet

Notre objectif ici est de caractériser la précision numérique de nos lois de parois. Nous choisissons donc un cas test qu'on ne cherchera pas nécessairement à relier à l'expérience.

Présentation du problème

On considère un écoulement le long d'une plaque plane et on provoque un décollement en appliquant une succion suivie d'un jet (Kalitzin *et al.*, 2005). Cependant, on ne cherche pas à modéliser ceux-ci mais uniquement à contrôler le décollement. On les produit donc en imposant comme condition limite pour la composante verticale de la vitesse sur la frontière

supérieure :

$$V(x) = 0.3 \left[\exp(-10(x - x_1)^2) - \exp(-10(x - x_2)^2) \right],$$

avec $x_1 = 2.5$, $x_2 = 3.5$. La distribution de pression induite est reportée à la Fig. 4.7. On y distingue clairement le fort gradient de pression adverse qui va provoquer le décollement à partir de $x = 2.0$. Inversement, le jet induit un fort gradient de pression favorable entre $x \in]3.5, 4[$, recollant la couche limite.

La plaque est modélisée avec un bord arrondi et a une épaisseur de $0.002L$ avec $L = 5$ la longueur de la plaque. Ceci crée un point de stagnation au bout de la plaque, essentiel au développement correct de la couche limite. Le nombre de Reynolds basé sur la longueur de la plaque est de $Re_L = 5 \times 10^6$. En entrée, on impose des niveaux de turbulence faibles $k_0 = 10^{-6}$, $\epsilon_0 = 1 \times 8 \times 10^{-9}$ et sur la frontière supérieure on impose une dérivée nulle pour k et ϵ . Enfin, sur la frontière de sortie on impose des dérivées normales nulles sur u , k , et ϵ et $v = 0$. La condition $v = 0$, bien qu'incorrecte en présence d'un couche limite, se révèle moins contraignante (et donc plus stable) que le fait d'imposer l'absence de cisaillement en sortie. Quoi qu'il en soit, ceci n'a pas d'impact numérique sur les lois de parois.

La description du problème est résumée à la Fig. 4.6. Les lignes de courant y sont également représentées et on peut distinguer la bulle de recirculation. Note : L'axe vertical a été fortement dilaté.

Afin de mettre en évidence le comportement des lois de parois adaptatives et les comparer aux lois de parois standards nous avons réalisé plusieurs simulations en utilisant :

- différentes distances à la paroi $d = 2.5 \times 10^{-5}$, 5.0×10^{-5} , 7.5×10^{-5} , 1.0×10^{-4} , 2.0×10^{-4} , 5.0×10^{-4}
- le modèle de Launder-Sharma combiné aux lois de parois adaptatives
- le modèle de Launder-Sharma combiné aux lois de parois standards
- le modèle $k - \epsilon$ standard combiné aux lois de parois standards

Les distances y^+ résultantes pour les lois de parois adaptatives sont reportées à la Fig. 4.7. On peut voir que grâce à l'utilisation de deux échelles de vitesse, les distributions de y^+ varient relativement peu et surtout ne tendent pas vers 0. Ceci rend les simulations moins raides puisqu'il n'y a pas de variations rapides dans la solution. Cela nous évite également d'intégrer jusqu'à la paroi en certains points, ce qui nécessiterait des maillages trop fins

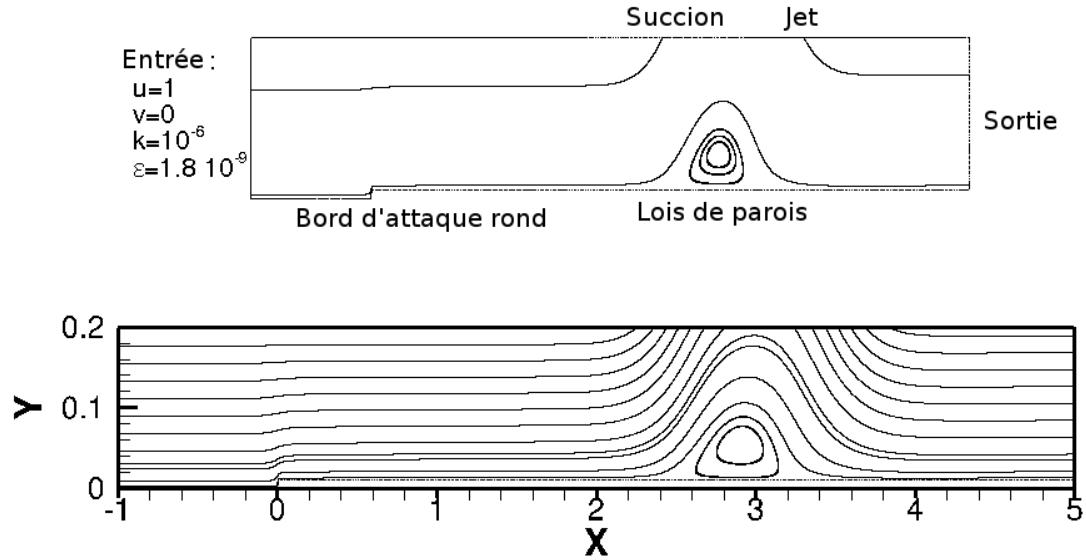


Figure 4.6 Schéma descriptif et lignes de courant du décollement induit par succion/jet sur une plaque plane.

et ferait diverger nos conditions limites (rappel : on utilise $\ln(k)$, qui diverge si on essaie d'imposer $k = 0$).

Enfin, hormis la plus grande, toutes ces distances y^+ sont inférieures à 30, on ne s'attend donc pas à ce que les lois de parois et le modèle standard soient valides.

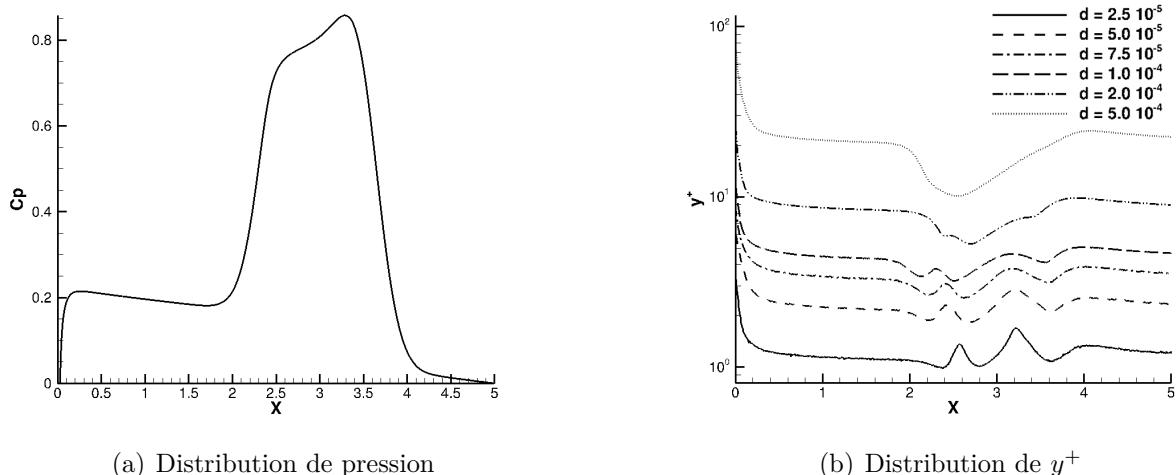


Figure 4.7 Distribution de pression (a) et distance adimensionnelle à la paroi du premier noeud de calcul pour différentes simulations (b).

Pour évaluer les performances des lois de parois, nous avons comparé les profils prédits en :

- $x = 1.25$, avant toute perturbation, avec un faible gradient de pression favorable
- $x = 2.25$, en présence d'un fort gradient de pression adverse
- $x = 3.0$, dans la bulle de recirculation
- $x = 3.75$, en présence d'un fort gradient de pression favorable

Une étude de convergence en maillage a été menée afin de vérifier que les solutions étaient bien convergées.

Lois standards

À la figure 4.8, sont présentés les résultats en $x = 1.25$ du modèle standard et de Launder-Sharma avec des lois de parois standards. On constate d'emblée que la zone logarithmique est quasiment inexistante. En particulier, il n'y a pas de zone où k soit constante (ce sur quoi reposent les lois de parois).

Bien que le modèle de Launder-Sharma soit valide en dessous de $y^+ = 30$, la loi de paroi standard ne l'est pas, et les deux sont en plus incompatibles hors de la zone logarithmique. En fait, la loi de parois continue à imposer des dérivées pour k et u selon la loi logarithmique, alors que les termes bas Reynolds du modèle de turbulence s'activent. On voit clairement que le fait d'imposer $\frac{\partial k}{\partial \tilde{\eta}} = 0$ est parfaitement inapproprié, ce qui donne des résultats catastrophiques. En revanche, la solution recollée à $y^+ = 20$ donne des résultats satisfaisants, car la loi de parois y est valide et compatible avec le modèle de Launder-Sharma.

Le modèle standard donne de bien meilleurs résultats. Et pour cause, il est consistant avec la loi de parois! Bien que y^+ diminue, la loi de paroi et le modèle prolongent la zone logarithmique. Cela donne des résultats faux dans la sous-couche visqueuse, mais à peu près indépendants de la distance à la paroi. On voit néanmoins que les profils de k sont plus sensibles, et ne s'accordent pas bien avec la dérivée nulle imposée sur k . Curieusement, bien que les profils prédits par le modèle standard soient faux dans la sous-couche visqueuse, ils se raccordent avec ceux du modèle de Launder-Sharma dans l'écoulement externe. Ces deux modèles ont des comportements très proches, le modèle de Launder-Sharma est simplement une extension du modèle standard aux zones bas Reynolds. On retrouve d'ailleurs les mêmes équations que le modèle standard dès que les termes bas Reynolds se désactivent.

Ces "erreurs" ne seraient pas gênantes si on ne s'intéressait qu'à l'intérieur de l'écoulement. Cependant, on cherche souvent à déterminer des grandeurs à la paroi : efforts, traînée,

transfert thermique ou d'espèces, etc. Ces grandeurs sont déterminées essentiellement par les valeurs de k et μ_t au bord et les déviations que l'on a observées viennent alors fausser complètement les résultats.

Lorsqu'en volume finis on fait varier la taille de la cellule à la paroi, on obtient une solution qui dépend du maillage et change donc au cours du raffinement. Il est alors impossible de savoir quand on a une solution convergée, et la solution tend en plus vers une solution erronée.

On obtient des résultats encore moins bons en présence de gradients de pression, c'est pourquoi nous nous concentrerons dans ce qui suit sur les lois de parois adaptatives.

Lois adaptatives tabulées, en l'absence de gradient de pression

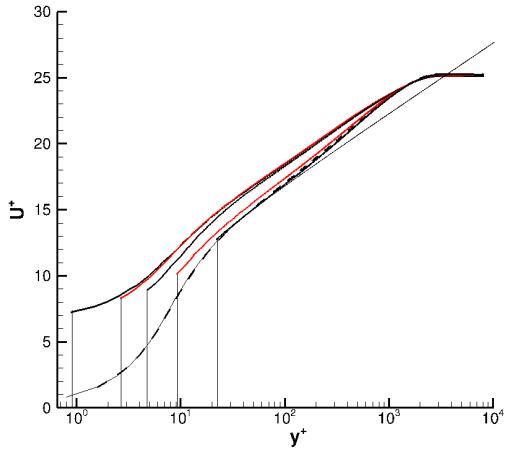
À titre de comparaison, les profils obtenus avec les lois de parois adaptatives en $x = 1.25$ sont présentées à la figure 4.9. Les profils de vitesse se superposent parfaitement avec le profil tabulé et entre eux. Au-dessus de $y^+ = 200$, on constate une légère déviation par rapport au profil tabulé, c'est la zone de transition entre la zone logarithmique et l'écoulement externe ("defect layer"). Les solutions raccordées dans la sous-couche visqueuse la reproduisent parfaitement, signe que la loi de paroi et le modèle de Launder-Sharma sont bien cohérents. Une légère déviation se manifeste dans les profils de k , à cause du léger gradient de pression favorable qui tend à écraser le profil de k . Cependant, elle est sans commune mesure avec la dispersion obtenue avec les lois de parois standards. De plus, les solutions obtenues en dessous de $y^+ = 10$ coïncident.

Étant donné que la solution s'éloigne du profil tabulé de k au-delà de $y^+ = 30$, il serait impossible d'obtenir une solution correcte en employant les lois de parois à une plus grande distance.

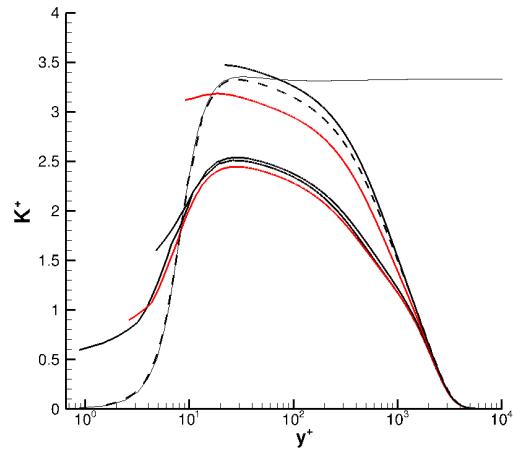
Sur la figure 4.10 on peut voir les profils de u et k en $x = 2.25$, donc en présence d'un fort gradient adverse. Les profils de u et k sont donc naturellement déformés par la pression. Les lois de parois adaptatives semblent se comporter de façon satisfaisante, il y a une très faible dispersion entre les profils. Encore une fois l'énergie cinétique de turbulence semble plus sensible que la vitesse tangentielle.

Les solutions obtenues en raccordant le modèle aux lois de parois en dessous de $y^+ = 5$ sont quasiment identiques, permettant une convergence vers une unique solution si l'on résout le problème en volumes finis.

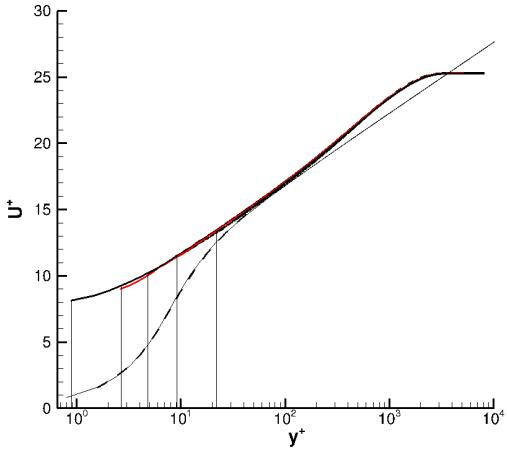
Fait très intéressant, les profils de k se superposent à la solution locale intégrée à la paroi (la première solution étant raccordée à $y^+ = 1$ on peut la considérer comme une intégration à la paroi) et non pas au profil tabulé (en trait fin). Or ici, le gradient de pression a



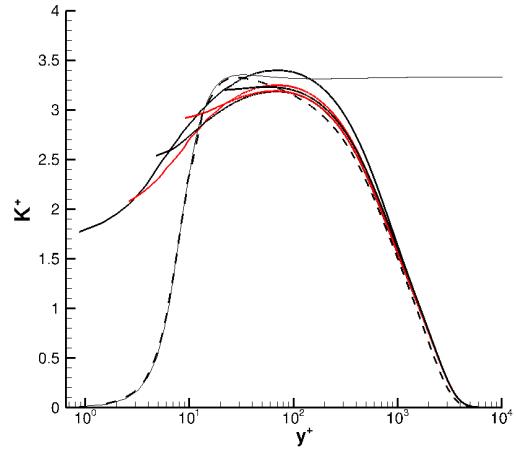
(a) Vitesse prédicta par le modèle Launder-Sharma et les lois de parois standards



(b) Énergie cinétique de turbulence prédicta par le modèle Launder-Sharma et les lois de parois standards



(c) Vitesse prédicta par le modèle standard et les lois de parois standards



(d) Énergie cinétique de turbulence prédicta par le modèle standard et les lois de parois standards

Figure 4.8 Profils de vitesse et d'énergie cinétique de turbulence adimensionnalisés à $x = 1.25$ pour les modèles standard et de Launder-Sharma avec les lois de parois standards, à différentes distances de raccordement. Trait fin : profil tabulé; pointillés : intégration à la paroi.

modifié la solution "exacte", le profil tabulé n'est plus parfaitement valide. L'utilisation d'une condition limite de troisième type (donc en imposant la dérivée) sur \mathcal{K} permet une amélioration significative des résultats. Si nous avions utilisé une loi de parois à une échelle de vitesse et imposé la valeur nodale de \mathcal{K} , alors le raccord se serait fait sur le profil, et nous aurions obtenu des résultats moins bons.

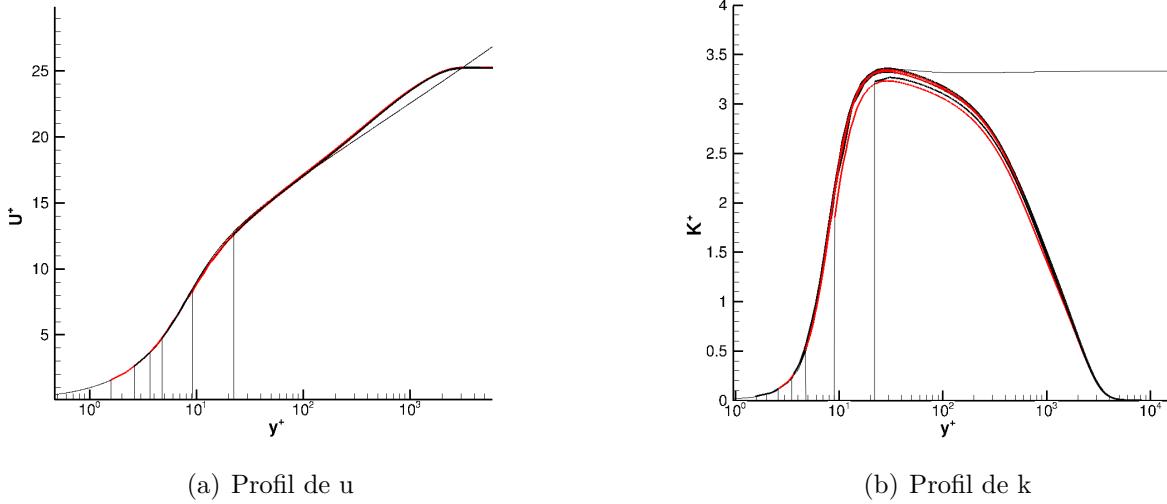


Figure 4.9 Profils de vitesse et d'énergie cinétique de turbulence adimensionnalisés obtenues en $x = 1.25$, avec le modèle de Launder-Sharma et les loi de parois adaptatives à différentes distances de raccordement. Zone sans gradient de pression.

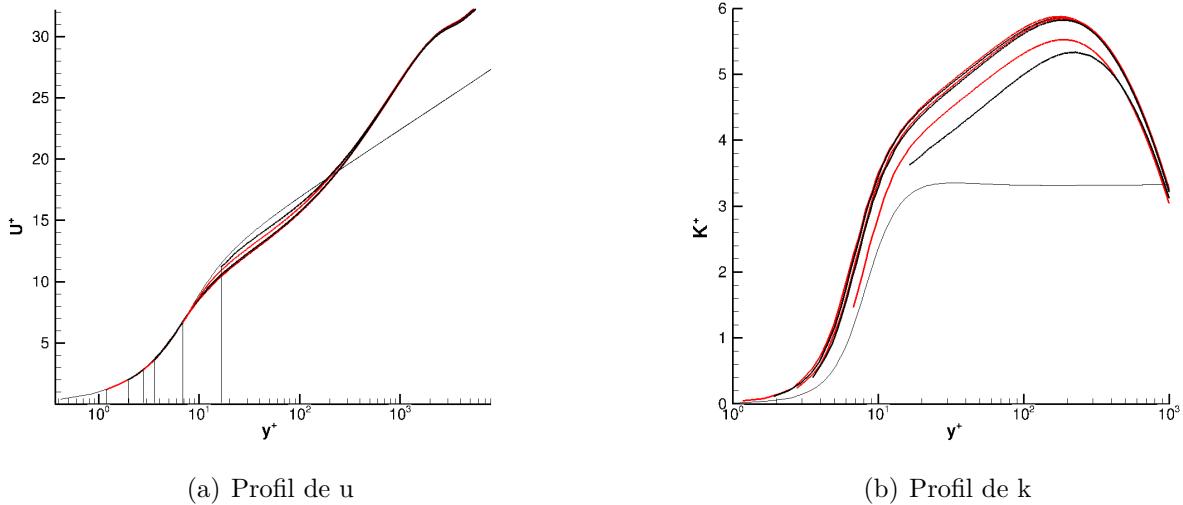


Figure 4.10 Profils de vitesse et d'énergie cinétique de turbulence adimensionnalisés obtenues en $x = 2.25$, avec le modèle de Launder-Sharma et les loi de parois adaptatives à différentes distances de raccordement. Présence d'un fort gradient de pression adverse.

La figure 4.11 présente les résultats obtenus dans la zone de recirculation. On peut voir qu'il n'y a pas de zone logarithmique, ni de zone de transition, ce qui rend les lois de parois standards inopérantes. Les profils de k sont franchement différents du profil tabulé, conduisant à une dispersion des solutions. Néanmoins, les lois de parois adaptatives autorisent une jonc-

tion à des distances de l'ordre de $y^+ = 1$, où les profils prédicts rejoignent le profil tabulé. La dispersion des solutions est comparable à celle obtenue avec les lois de parois standards en présence d'un faible gradient de pression. Les lois de parois adaptatives permettent donc de traiter correctement ces zones difficiles, en se raccordant dans la sous-couche visqueuse.

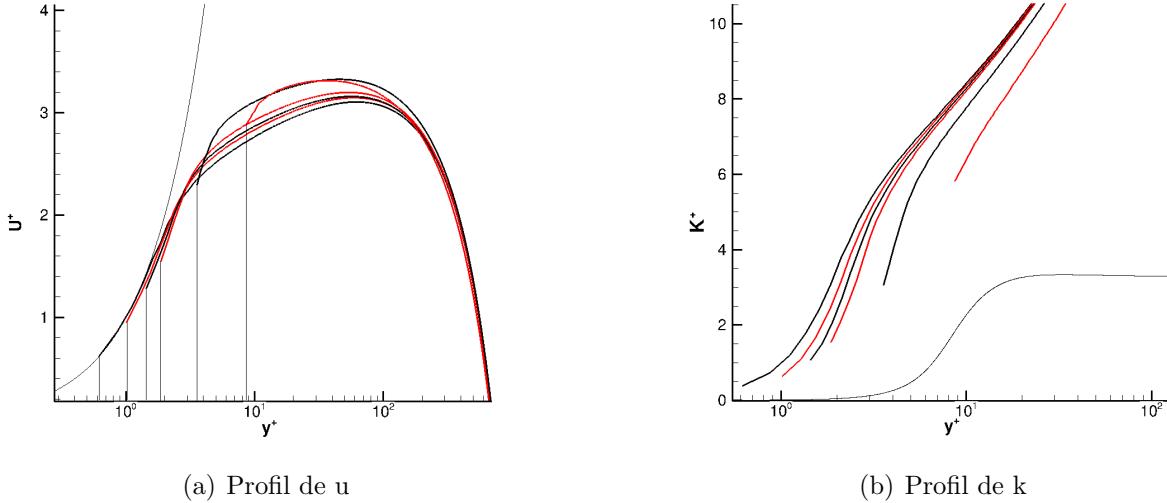


Figure 4.11 Profils de vitesse et d'énergie cinétique de turbulence adimensionnalisés obtenues en $x = 3.0$, avec le modèle de Launder-Sharma et les loi de parois adaptatives à différentes distances de raccordement. Dans la zone de recirculation.

Enfin, la figure 4.12 présente les résultats obtenus en $x = 3.75$, en présence d'un fort gradient favorable qui vient recoller la couche limite. Encore une fois, il n'y a pas de zone logarithmique mais les lois de parois adaptatives se comportent particulièrement bien. Ceci vient illustrer le fait évoqué à la partie 4.2.1, que les gradients de pression adverses ont beaucoup plus d'impact sur la solution que les gradients de pression favorables.

Conclusions

Même sur ce cas très simple, on a déjà mis en évidence plusieurs parties qui ne peuvent être traitées correctement à l'aide de lois de parois standards du fait de l'absence de zone logarithmique. Les lois de parois adaptatives permettent, d'une part, de modéliser correctement ces zones en se raccordant dans la sous-couche visqueuse et, d'autre part, d'obtenir des solutions indépendantes de la distance à la paroi. On a donc un gain à la fois sur le plan numérique et sur le plan de la modélisation.

L'utilisation de deux échelles de vitesse améliore également les résultats : elle évite les variations rapides de la distance y^+ comme on a pu le voir, mais surtout, elle prévient toute

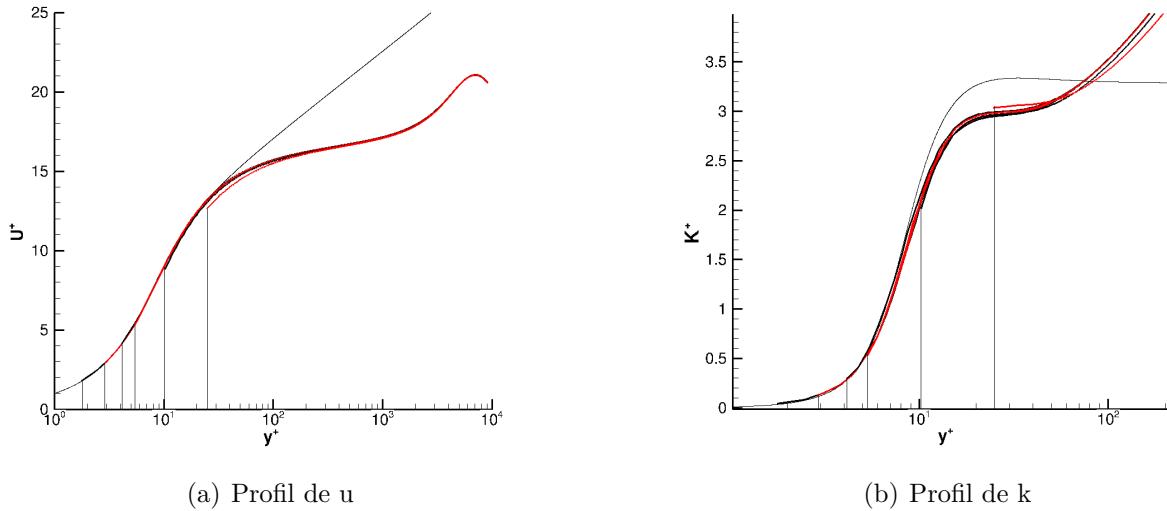


Figure 4.12 Profils de vitesse et d'énergie cinétique de turbulence adimensionnalisés obtenues en $x = 1.25$, avec le modèle de Launder-Sharma et les loi de parois adaptatives à différentes distances de raccordement. Présence d'un gradient de pression favorable.

annulation de celle-ci. Lors de tests préliminaires, les lois de parois à une échelle de vitesse en conjonction avec la formulation logarithmique se sont montrées irrésolvables. En effet, la plaque étant épaisse, un point de stagnation apparaît sur le bord d'attaque où u_τ s'annule donc. Ceci conduit à des valeurs à la paroi de k et ε de l'ordre de 10^{-8} . Rappelons de le gradient de $\ln(k)$ est $\nabla(k)/k$, ce qui donne donc des gradients colossaux pour \mathcal{K} .

Les lois de parois nécessitent, dans beaucoup de cas, d'être utilisées à des y^+ de l'ordre de 20 ou moins, dès qu'il y a un gradient de pression. Indépendamment des problèmes de résolution, on a vu que l'utilisation des lois de parois dans la sous-couche visqueuse nécessite des maillages sensiblement plus fins. Or, si y^+ tend vers 0 de façon incontrôlée aux points de décollement/stagnation/recollement, on s'expose alors à l'introduction d'erreurs conséquentes en ces points (cf. Fig. 4.4) très sensibles.

Enfin, on a vu que l'imposition d'une condition de troisième type sur \mathcal{K} améliorait les prédictions en présence de pression de gradients adverses.

Bien que transparente ici, la formulation logarithmique des variables de turbulence joue un rôle important, puis qu'en évitant le clipping elle permet une convergence extrêmement rapide.

Ce cas simple nous a permis de tester et vérifier les performances de lois de parois adaptatives. Cependant, il est aussi très simple : l'écoulement est globalement parallèle à la plaque, la géométrie est très simple, le choix de la distance à la paroi est donc assez facile. Afin d'évaluer

les performances des lois de parois adaptatives sur des cas pratiques, nous allons donc maintenant nous intéresser à un cas plus complexe pour lequel des données expérimentales sont disponibles.

4.3.3 Expérience de Martinuzzi

Martinuzzi a documenté toute une série d'expériences en plaçant un cylindre de section carrée à différentes distances d'une plaque plane (Martinuzzi *et al.*, 2003). Ces expériences ont l'avantage d'être bidimensionnelles. En fonction de cette distance (ou garde au sol), on obtient différents régimes, du lâcher tourbillonnaire classique lorsque le cylindre est loin de la paroi, à un écoulement stationnaire lorsque le cylindre est proche de la plaque. C'est cette dernière que nous retenons ici.

Le schéma de l'expérience de Martinuzzi est visible à la Figure 4.13 (non à l'échelle). Le cylindre à base carrée de côté $D = 1$ est placé à $0.25 D$ de la plaque d'épaisseur $1/6 D$ et $15 D$ en aval du bord d'attaque. On notera la présence d'un volet sur le bord de fuite afin de contrôler la pression dans la partie supérieure. Le nombre de Reynolds établi sur le diamètre du cylindre est $Re_D = 22,000$. Martinuzzi a mesuré les vitesses et corrélations de l'écoulement sur des coupes à partir de $x = -4$ et jusqu'à $x = 7$. Dans toutes nos simulations les coins du carré sont arrondis avec un rayon de $0.01D$ qui correspond à la distance à la paroi employée.

Modélisation du problème

Il y a plusieurs façons de modéliser ce problème. L'approche proposée à la conférence CFD2001 consistait à ne modéliser que la partie amont et supérieure de la veine comme on peut le voir sur la Figure 4.14 (Lacasse *et al.*, 2001b). La paroi supérieure de la veine est traitée avec une loi de parois allant jusqu'à l'entrée du domaine. La plaque plane est épaisse, avec un bord arrondi. En amont de celle-ci une condition de symétrie est utilisée.

Le traitement de la sortie est un peu délicat et il n'existe pas de conditions limites exactes : Richard di Caro propose dans son mémoire la condition limite $v = 0$. Cependant, il se trouve qu'imposer des contraintes nulles (i.e. $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0$) bien que fausses dans les couches limites, se comporte beaucoup mieux numériquement.

Malheureusement, on ne peut pas raisonnablement étendre le domaine plus en aval afin de laisser ces effets s'atténuer. Martinuzzi ne décrit pas la géométrie du volet qu'on ne peut donc pas modéliser.

Lors des premiers tests nous nous sommes rendu compte que le modèle de Launder-Sharma

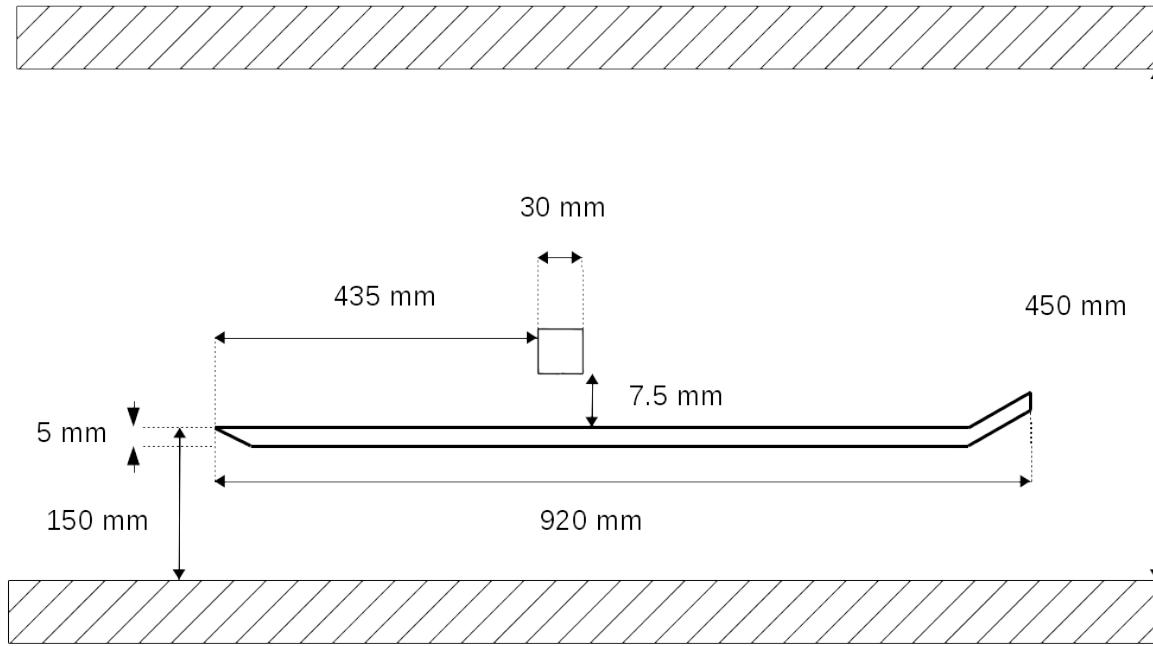


Figure 4.13 Schéma de l'expérience de Martinuzzi en régime stationnaire

est beaucoup plus exigeant (comprendre instable et sensible) que le modèle standard. En effet, les conditions imposées en entrée sur k et ε sont incompatibles avec la loi de parois. Ceci conduit à une activation incontrôlée des termes bas Reynolds du modèle et à une divergence des calculs, alors que le modèle standard y est moins sensible (il finit tout de même par diverger avec des maillages fins).

Néanmoins, l'adaptation des conditions limites et des lois de parois ne règle pas le problème. En imposant des profils constants en entrée on fait comme si une couche limite apparaissait subitement, ce que le modèle de Launder-Sharma ne tolère pas. Nous reviendrons d'ailleurs plus tard sur les profils en entrée. Nous avons donc finalement modélisé la paroi supérieure à l'aide d'une plaque épaisse, afin d'avoir une couche limite se développant correctement. En effet, les termes bas-Reynolds du modèle s'activent près des parois, le modèle de Launder-Sharma exige une très bonne modélisation. Cette épaisseur induit une augmentation du débit (qui n'a pas lieu d'être) à cause de la contraction qu'elle induit (en fait on agrandit la surface d'entrée). Nous avons donc corrigé le débit d'entrée en conséquence pour s'assurer d'être dans les mêmes conditions que pour la conférence CFD2001.

Cependant, ceci révèle différents problèmes de modélisation :

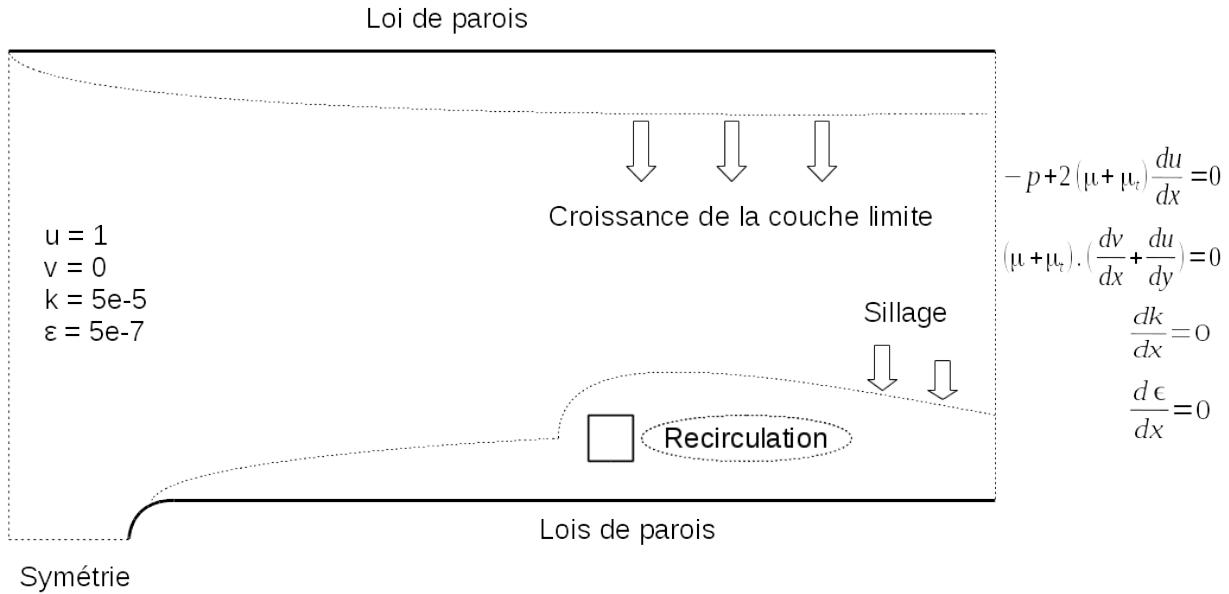


Figure 4.14 Schéma récapitulatif de la modélisation de l'expérience de Martinuzzi, retenue pour la conférence CFD2001

- nous ne connaissons pas l'épaisseur de la couche limite sur la paroi supérieure et nous la choisissons arbitrairement. Or elle a un impact sur le débit total dans la veine.
- nous ne modélisons que la partie supérieure de la veine, or le cylindre et le volet bloquent la partie supérieure, déviant donc du fluide sous la plaque.
- nous ne connaissons justement pas la part de blocage induite par le volet.
- nous ne connaissons pas les niveaux de turbulence et le profil de vitesse en entrée. Les niveaux sont censés être très faibles et nous avons supposé que le nombre de Reynolds turbulent était dix fois plus petit que le nombre de Reynolds laminaire. Or ceci a une forte influence sur les résultats, en présence de décollements notamment.

La Figure 4.15 illustre ces difficultés. On y voit clairement qu'en amont du cylindre, le niveau de turbulence est largement sous-évalué par le modèle numérique. La couche limite est également beaucoup plus fine et abrupte que celle de l'expérience.

Il y a probablement un ensemble de raisons conduisant à cela. Tout d'abord, le niveau de turbulence faible nous amène probablement à sous-évaluer la viscosité turbulente ce qui

réduit la vitesse de croissance de la couche limite. Cependant, l'augmentation de k en entrée ne nous a pas permis de résorber ces différences, il y a donc probablement d'autres causes.

On peut noter sur le profil numérique que le "front" de u n'est pas plat. On y distingue d'ores et déjà clairement le blocage induit par le cylindre 4 diamètres en amont. De plus, le débit est manifestement surévalué. Sur le profil expérimental, on distingue également une cassure en $y = 1.0$. Il semble que l'on n'ait pas affaire uniquement à une couche limite. On est alors en droit de s'interroger sur l'effet qu'a le volet en aval de la plaque. Celui-ci n'est probablement pas étranger à la réduction de débit que nous ne pouvons pas capturer en modélisant uniquement la partie supérieure de la veine.

Enfin, on peut s'interroger sur la forme du profil de u , k et ε en entrée, sur la Figure 4.15, le profil de k est inhabituel pour une couche limite, puisqu'il commence par augmenter alors que ce phénomène ne se produit normalement que dans la sous-couche visqueuse. Il y a donc fort à parier que nous sous-estimons le niveau de turbulence en entrée.

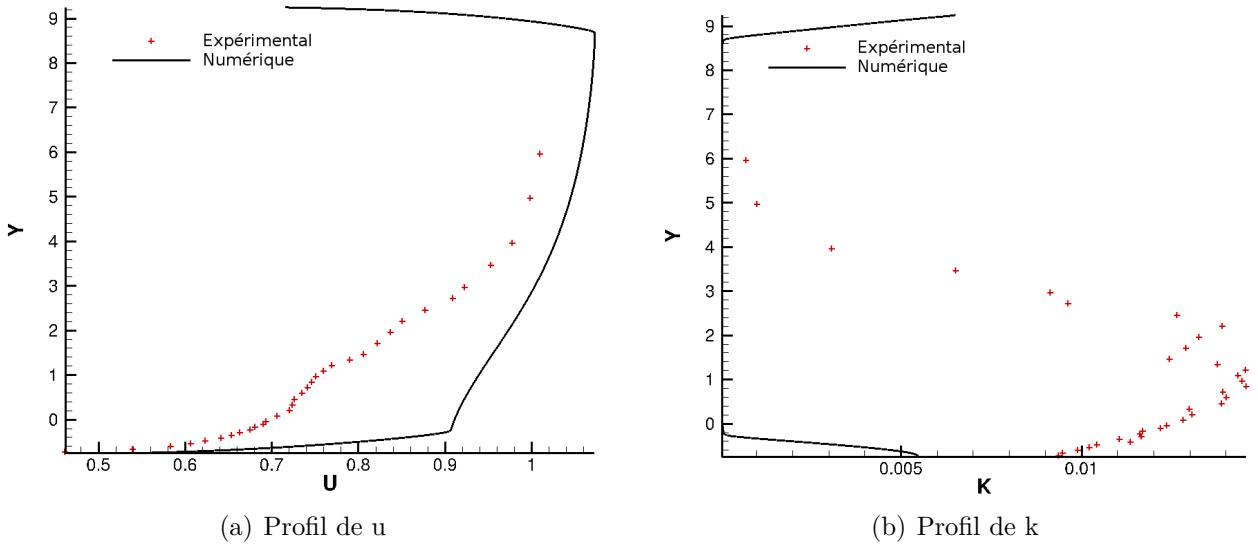


Figure 4.15 Expérience de Martinuzzi : coupes en $x = -4$ des résultats prédits par le modèle initial, comparé aux résultats expérimentaux dans la partie supérieure de la veine.

Afin d'évaluer l'influence de nos incertitudes de modélisation sur les résultats, nous avons donc réalisé quelques simulations supplémentaires, schématisées à la Figure 4.16, en ajoutant la partie inférieure de la veine et en modélisant la partie supérieure de la veine avec une condition de glissement (pas de couche limite donc). La veine est étendue à $x = -50$ pour évaluer l'influence du développement de la couche limite.

Sur la Figure 4.17 on peut voir que l'ajout d'une partie inférieure à la veine (courbe rouge) change substantiellement les résultats. Le cylindre ne bloque que 5% de la veine totale, et

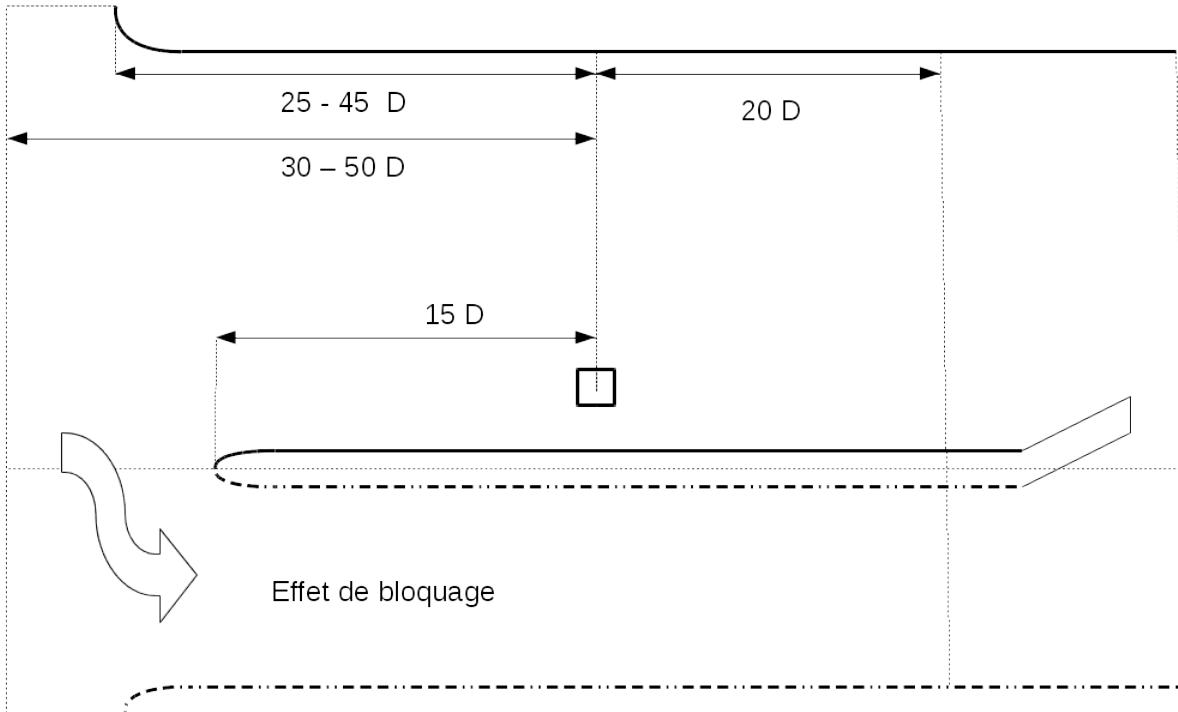


Figure 4.16 Schéma de l'expérience de Martinuzzi modélisée avec la partie inférieure de la veine.

dévie pourtant une part conséquente du débit vers le bas. On s'attend donc à ce que le volet ait un effet non-négligeable.

De la même façon, la croissance de la couche limite chasse une partie importante du débit, augmentant la vitesse au centre de la veine (courbe bleue). Fait également important, on peut comparer la taille de la couche limite pour un bord d'attaque à $x = -25$ (pointillés) et $x = -45$ (bleue) qui est beaucoup plus importante que la première. Ainsi la méconnaissance de l'état "d'entrée" du fluide conduit à une forte incertitude sur les résultats en amont du cylindre.

En revanche, on peut voir à la Figure 4.17 qu'en aval du cylindre, ceci a très peu d'impact et les seuls changements sensibles sont liés au débit global. C'est précisément la zone à laquelle nous nous intéressons. Étant donné cet ensemble d'incertitudes et afin de pouvoir nous comparer aux résultats précédents, nous avons conservé la géométrie initiale sans la partie inférieure de la veine.

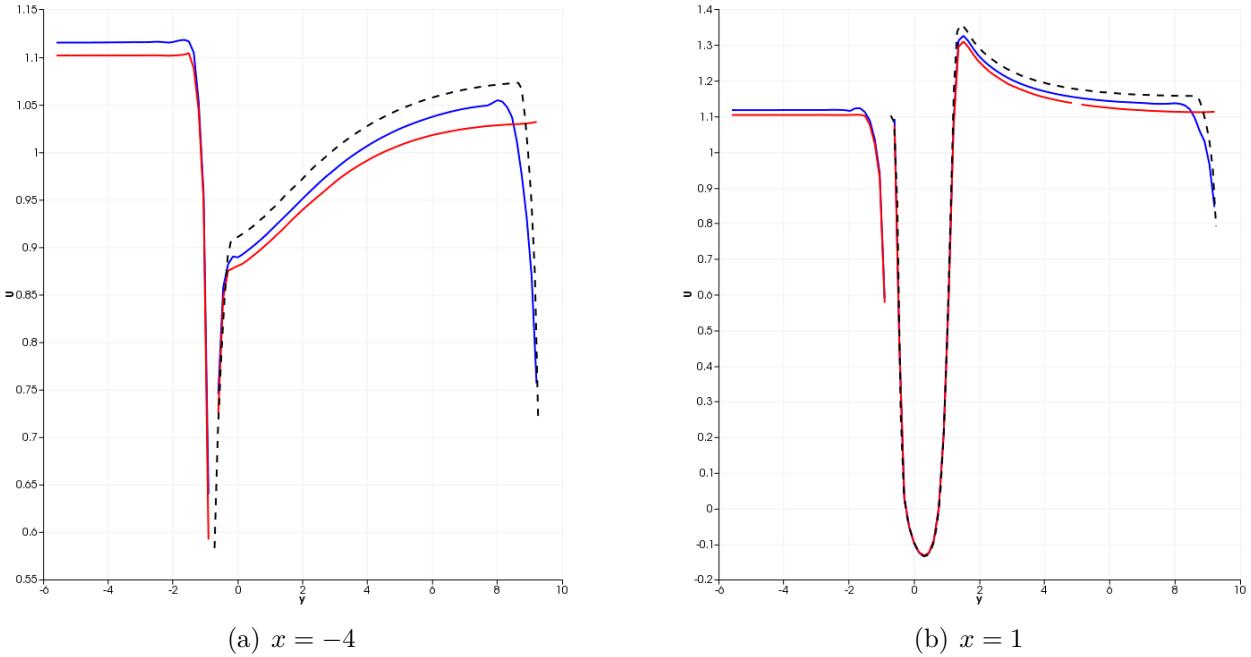


Figure 4.17 Comparaison des résultats pour différentes géométrie de l’expérience de Martinuzzi. En tirets, la géométrie initiale avec uniquement la partie supérieure de la veine. En rouge la veine est modélisée entièrement mais sans couche limite sur la paroi supérieure. En bleu une couche limite est ajoutée sur la paroi supérieure.

Résultats

Le but initial de ces simulations est d’évaluer l’applicabilité de notre méthode à des géométries complexes. Ici on est clairement face à un cas où on ne peut pas générer de façon évidente des maillages de couche limite et où on n’a pas un accès direct à une distance y^+ . De plus, autour du cylindre il y a une très grande variété de phénomènes (point de stagnation, décollements, recollements, ...) qui vont solliciter nos lois de parois dans une grande variété de domaines.

Rappelons qu’à la partie 4.3.2, nous avions conclu que pour utiliser nos lois de parois au mieux il était nécessaire de les recoller le plus bas possible (en terme de y^+) tout en ayant des maillages suffisamment fins. Le choix de la distance à la paroi sur le cylindre et les plaques peut s’avérer très complexe afin de respecter $y^+ > 30$ pour des lois de parois standards. Pour ce faire les précédentes simulations proposaient une distribution discontinue, donc impossible à converger formellement comme on l’a vu. Ici on peut imposer $d = 0.01$ partout.

On obtient alors la distribution de y^+ visible sur la Figure 4.18. On voit que malgré les différents régimes et phénomènes se produisant autour du cylindre, grâce aux lois de parois adaptatives à deux échelles de vitesse, la distance y^+ évolue majoritairement entre 10 et 30. Cet intervalle correspond justement à la zone où les lois de parois adaptatives sont les plus

efficaces. De plus, y^+ ne dépasse jamais 90 et ne descend jamais sous 9 garantissant à la fois une utilisation efficace des lois de parois, sans nécessiter des maillages démesurés.

On peut voir à la Figure 4.18 que l'adaptation de maillage concentre automatiquement les noeuds là où ils sont nécessaires et notamment près des parois. Ceci permet d'économiser les noeuds dans l'écoulement où ils ne sont pas nécessaires.

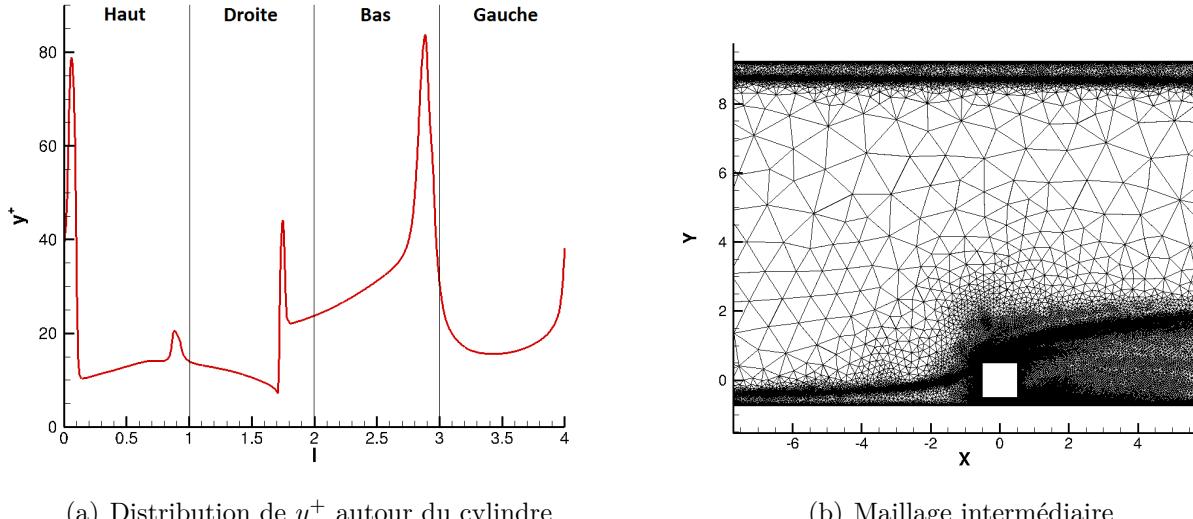


Figure 4.18 Distribution de la distance adimensionnelle à la paroi y^+ du premier noeud de calcul et maillage typique généré par l'adaptation de maillage par estimation d'erreur : 242 737 noeuds.

À la Figure 4.19 sont tracés les profils de vitesse tangentielle et normale expérimentaux et numériques. On voit que l'intensité de la recirculation est surévaluée sur la partie amont du cylindre tandis que le débit dans l'écoulement au centre de la veine est surévalué, comme on l'a évoqué précédemment. Cependant les prédictions s'améliorent lorsqu'on approche de la face aval du cylindre en $x = 0.5$.

Il est possible que ces erreurs soient dûes à la surévaluation de la vitesse de l'écoulement impactant le cylindre, comme on l'a vu à la Figure 4.15. On peut d'ailleurs voir à la Figure 4.19 que la vitesse verticale est également surévaluée. Il y a donc une part plus importante de fluide qui est chassée vers le haut, ce qui peut justement être dû à la quantité plus importante de fluide impactant le cylindre.

Quoi qu'il en soit, l'écoulement directement en aval du cylindre est dominé par la présence et la forme de celui-ci. On a alors en $x = 1$ un très bon accord entre les prédictions et l'expérience pour la vitesse u . Les prédictions sont d'ailleurs très raisonnables pour k et v .

Un peu plus loin, en $x = 4$, les prédictions sont un peu moins bonnes mais on observe toujours une tendance et un ordre de grandeur correctes. Ces résultats sont très proches de ceux obtenus avec le modèle standard (cf. Lacasse *et al.* (2001b)). En fait comme on a pu le voir à la partie 4.3.2, le modèle de Launder-Sharma a un comportement très proche de celui du modèle standard.

Conclusions

Ce test est en réalité peu sollicitant pour les prédictions des lois de parois. En effet, comme on l'a remarqué, l'écoulement est très largement dominé par la forme de l'obstacle. Les lois de parois ont un effet négligeable sur les prédictions de l'écoulement aval.

En revanche, c'est un cas pertinent en terme de complexité. Les lois de parois adaptatives à deux échelles de vitesse se sont montrées ici très robustes et applicables à des problèmes à géométrie complexe. Elles facilitent grandement le choix des distances utilisées par les lois de parois dans la mesure où elles ne nécessitent pas de garantir $y^+ > 30$. Cette condition, qui doit être vérifiée avec les lois de parois et modèles standards, nécessite un travail long et fastidieux de façon à fixer au mieux la distance d de chaque arc, segment, ... de chaque frontière solide. Ici, il nous a été possible de choisir une seule distance sur tous les bords du cylindre garantissant $y^+ \leq 30$, où les lois de parois adaptatives sont valides.

Enfin, la formulation à deux échelles de vitesses a été d'un grand secours, en lissant le comportement de y^+ à la paroi. Ceci garantie donc d'avoir des valeurs de y^+ relativement ramassées (entre 10 et 90) malgré la grande variété de conditions rencontrées.

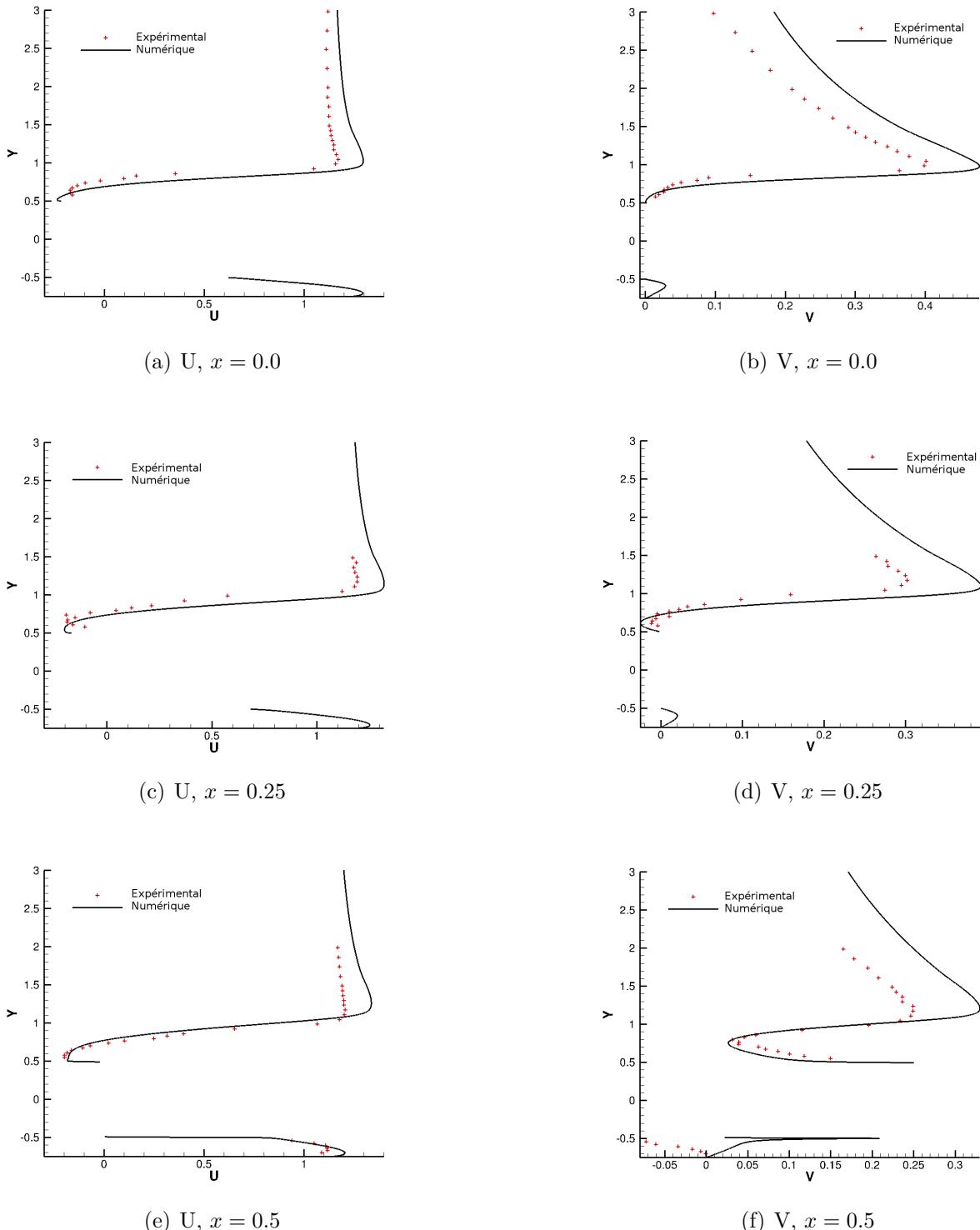


Figure 4.19 Comparaison des prédictions numériques, obtenues avec le modèle de Launder-Sharma et des lois de parois adaptatives, aux mesures expérimentales pour l'expérience de Martinuzzi. Coupes des vitesses sur la face supérieure du cylindre des l'expérience de Martinuzzi.

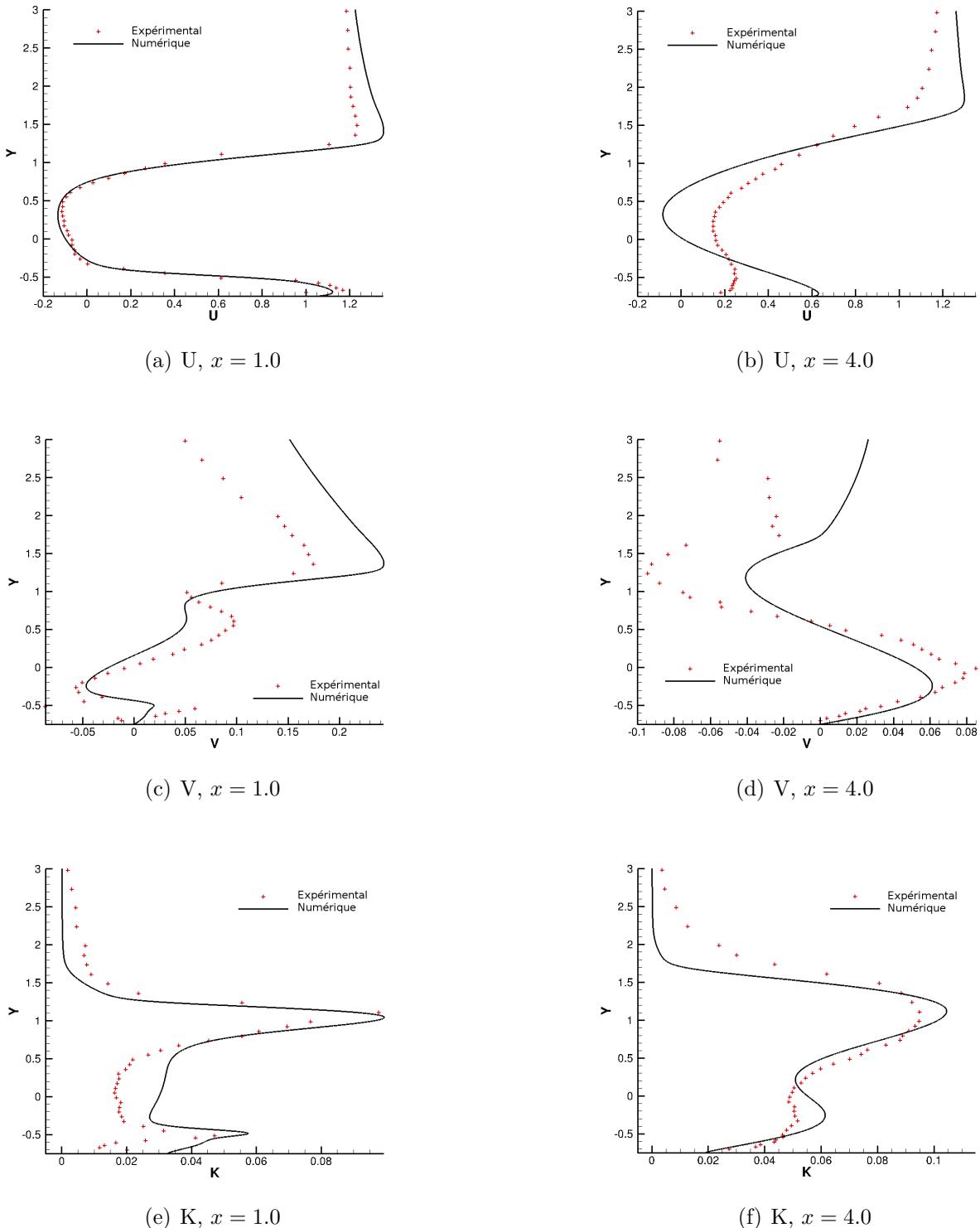


Figure 4.20 Comparaison des prédictions numériques, obtenues avec le modèle de Launder-Sharma et des lois de parois adaptatives, aux mesures expérimentales pour l'expérience de Martinuzzi. Coupes de vitesses et d'énergie cinétique de turbulence dans le sillage du cylindre.

CHAPITRE 5 CONCLUSION

L'objectif de ce projet était d'améliorer le traitement numérique des écoulements turbulents près des parois. Pour ce faire, nous avons privilégié un modèle bas-Reynolds, valide jusqu'aux parois et développé une loi de parois adaptée. Afin de garantir la positivité des variables de turbulence, l'intégralité de la méthode a été développée pour une formulation logarithmique. Les logarithmes de k et ε ont été utilisés comme variables dépendantes.

5.1 Synthèse des travaux

Notre choix s'est porté sur le modèle bas Reynolds de Launder-Sharma qui ne fait pas intervenir la distance aux parois dans les équations. Ce modèle a été testé en 1D sur des écoulements de Poiseuille et Couette plans et en 2D.

Les simulations 1D nous ont permis d'identifier les limites inhérentes aux lois de parois et de vérifier que la formulation logarithmique ne pose pas de problème particulier. Ainsi, selon le nombre de Reynolds et le gradient de pression local, les résultats prédicts par le modèle de Launder-Sharma se rejoignent en dessous d'une certaine distance propre à chaque cas, ce qui autorise donc l'emploi de lois de parois. Nous avons cependant remarqué qu'en présence de gradient de pression adverse, les profils différaient rapidement des prédictions en l'absence de gradient de pression qui servent de référence. Notamment, la zone logarithmique, sur laquelle les lois de parois standards reposent, n'existe pas dans de nombreux cas. Ceci conduit à des erreurs de modélisations et des solutions dépendantes du maillage. En particulier, l'utilisation des lois de parois standards dans la sous-couche visqueuse est inadéquate.

En s'appuyant sur la solution exacte, pour un écoulement de Couette turbulent, du modèle de turbulence choisi intégré à la paroi et tabulé, nous avons pu imposer des conditions limites adéquates à l'aide de lois de parois. On peut alors raccorder les lois de parois au modèle de turbulence jusque dans la sous-couche visqueuse et obtenir des solutions convergentes et indépendantes du maillage. La solution tabulée étant calculée en l'absence de gradients de pression il est cependant nécessaire de s'assurer que la distance y^+ de raccordement employée ne soit pas trop grande. Elle ne doit pas être trop petite non plus, sous peine de nécessiter des maillages extrêmement fins et risquer de faire diverger l'algorithme de résolution. Ceci nous a conduit à développer une formulation à deux échelles de vitesses de la loi de parois. Celle-ci améliore les résultats en présence de points de stagnation et conduit à une distribution de y^+ peu dispersée, qui ne tend pas vers 0 ou des valeurs grandes de façon incontrôlée. De plus,

on a vu que l'emploi d'une condition limite de troisième type sur k améliorait les prédictions en présence de gradients de pression adverses. Enfin, cette formulation est moins raide que la formulation construite sur une loi de parois à une échelle de vitesse, grâce à ses termes plus linéaires et l'imposition de conditions limites sur les dérivées de k et u .

Les lois de parois adaptatives à deux échelles de vitesse ont ensuite été testées sur un cas pratique complexe afin d'évaluer leur appliquabilité et les éventuelles difficultés qu'elles engendrent. Nous avons alors noté (sans surprise) la sensibilité accrue du modèle de Launder-Sharma. Ceci nous a conduit à formuler différentes recommandations sur l'expression des conditions limites. En particulier, nous avons établi la nécessité de garantir la continuité géométrique et numérique des lois de parois. En cela les lois de parois adaptatives à deux échelles de vitesses se sont montrées d'une grande souplesse d'emploi. Ne montrant pas de difficultés numériques particulières, elles conduisent à une variation relativement faible de y^+ et autorisent une large plage de raccordement. Nous avons donc pu spécifier une distance à la paroi unique (donc bien continue) et relativement arbitraire en garantissant l'emploi correct des lois de parois.

Finalement les lois de parois adaptatives à deux échelles de vitesses sont capables d'imiter correctement près des parois un modèle bas Reynolds sans nécessiter autant de ressources. Elles ne peuvent, néanmoins, pas faire mieux que celui-ci.

On a vu que les lois de parois adaptatives pouvaient se raccorder à leur modèle de turbulence à une distance arbitraire. On a cependant noté quelques limitations :

- Bien que compatibles avec le modèle bas Reynolds, les lois de parois adaptatives sont tabulées sur un écoulement de Couette turbulent sans gradient de pression. Ainsi, leur validité est réduite lorsqu'elles sont employées sur un cas présentant des gradients de pression, tout particulièrement s'ils sont adverses. Elles nécessitent alors d'être raccordées à de petites distances, de l'ordre de $y^+ = 1$ et demandent donc des maillages très fins.
- En l'absence de gradient de pression, on observe une large zone logarithmique où les lois de parois standards sont valides. Les lois de parois adaptatives sont donc un atout majeur en présence de gradients de pression adverses, où elles permettent de traiter correctement l'écoulement près des parois. Elles permettent alors un raccordement à des distances très faibles où elles sont valides, contrairement aux lois de parois standards. Or, on a vu qu'elles ne pouvaient qu'imiter un modèle bas-Reynolds et le modèle de Launder-Sharma est mauvais précisément en présence de décollements induits par un gradient de pression adverse (El-Behery et Hamed, 2011). De fait, les cas dominés par

les décollements induits par gradient de pression, où les lois de parois adaptatives sont intéressantes, sont très mal prédits par le modèle de Launder-Sharma. L'amélioration que les lois de parois adaptatives apportent est donc absorbée par les défauts du modèle de turbulence. Ainsi, il est important de se rappeler que les lois de parois adaptatives sont avant tout un outil numérique. Elles permettent d'obtenir les résultats d'un modèle bas Reynolds au coût d'une loi de parois. En cela, elles ne feront jamais mieux que le modèle qu'elles imitent.

- Enfin, on a évoqué l'hypothèse selon laquelle l'écoulement est quasi-unidimensionnel dans les couches limites. Cette supposition est en réalité erronée, il y a en pratique une transpiration qui accompagne la croissance de la couche limite. Or, en tabulant nos lois de parois sur des cas unidimensionnels nous ne pouvons pas reproduire cette propriété.

5.2 Améliorations futures

Afin de corriger ces défauts nous avons délimité et commencé à explorer différentes pistes :

- Nous avons évoqué à la partie 3.3.4 une méthode pour interpoler les prédictions du modèle de turbulence en pression également. Cette méthode a d'ores et déjà été implémentée. Elle est aujourd'hui testée sur des cas unidimensionnels et donne des résultats prometteurs.
- Nous avons évoqué le problème lié au comportement du modèle de Launder-Sharma en présence de gradients de pression. Malheureusement, comme nous l'avons suggéré en introduction, aucun modèle n'est parfait, et chacun a de meilleures performances sur certains cas. Il serait donc intéressant de disposer de plusieurs modèles, afin de pouvoir les comparer. Les modèles $k-\omega SST$, $k-\varepsilon-v^2-f$ et de Spalart-Allmaras sont aujourd'hui très populaires, plus particulièrement pour des écoulements en présence de gradients de pression adverses. Ils sont donc des candidats intéressants. L'implémentation du modèle $k-\omega SST$ est déjà en cours.
- Enfin, on peut envisager de conduire des simulations du développement de couches limites sur des plaques planes afin de tabuler également la vitesse normale v et ne plus imposer $v = 0$ au bord. Ce traitement pourrait également être appliqué, non seulement comme on l'a évoqué au niveau des coins, mais aussi au voisinage des points de stagnation/décollement où v n'est plus négligeable devant u .

RÉFÉRENCES

- Albets-Chico, X. and Pérez-Segarra, C.D. and Oliva, A. and Bredberg, J. (2008). Analysis of wall-function approaches using two-equation turbulence models. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51(19–20), 4940 – 4957.
- Billard, F. and Laurence, D. (2012). A robust $k - \varepsilon$ /k elliptic blending turbulence model applied to near-wall, separated and buoyant flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 33(1), 45 – 58.
- Boussinesq, J. (1877). *Essai sur la théorie des eaux courantes*.
- Chabard, J.-P. (1991). Projet N3S - manuel de la version 3. Tech. Rep. EDF HE-41/91.30B, Electricité de France.
- Chen, Y. and Arbeiter, F. and Schlindwein, G. (2012). A comparative study of turbulence models for conjugate heat transfer to gas flow in a heated mini-channel. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology*, 61(1), 38–60.
- Craft, T.J. and Iacovides, H. and Yoon, J.H. (2000). Progress in the use of non-linear two-equation models in the computation of convective heat-transfer in impinging and separated flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 63(1-4), 59–80.
- Craft, T. J. and Gant, S. E. and Iacovides, H. and Launder, B. E. (2004). A new wall function strategy for complex turbulent flows. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 45(4), 301–318.
- Cruz, D.O.A. and Silva Freire, A.P. (1998). On single limits and the asymptotic behaviour of separating turbulent boundary layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(14), 2097 – 2111.
- Cruz, D.O.A. and Silva Freire, A.P. (2002). Note on a thermal law of the wall for separating and recirculating flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(7), 1459 – 1465.
- Dicaro, R. (2007). Analyse de sensibilités de forme pour le modèle de turbulence $k - \varepsilon$. Mémoire de Maîtrise.

- Durbin, P.A. (1991). Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 3(1), 1–13.
- Ecà, L. and Hoekstra, M. (2010). Near-wall profiles of mean flow and turbulence quantities predicted by eddy-viscosity turbulence models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 63, 953–988.
- El-Behery, S.M. and Hamed, M.H. (2011). A comparative study of turbulence models performance for separating flow in a planar asymmetric diffuser. *Computers & Fluids*, 44(1), 248 – 257.
- Goldberg, U. and Apsley, D. (1997). A wall-distance-free low Re $k - \varepsilon$ turbulence model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 145(3–4), 227 – 238.
- Hrenya, C.M. and Bolio, E.J. and Chakrabarti, D. and Sinclair, J.L. (1995). Comparison of low Reynolds number $k - \varepsilon$ turbulence models in predicting fully developed pipe flow. *Chemical Engineering Science*, 50(12), 1923–1941.
- Ilinca, F. and Pelletier, D. (1999). Positivity preservation and adaptive solution of two-equation models of turbulence. *International Journal of Thermal Science*, 38, 560–570.
- Jimenez, J. and Moser, R. (1998). LES: Where are we and what can we expect? *29th AIAA Fluid Dynamics Conference*.
- Kalitzin, G. and Medic, G. and Iaccarino, G. and Durbin, P. (2005). Near-wall behaviour of RANS turbulence models and implications for wall functions. *Journal of Computational Physics*, 204, 265–291.
- Karimpour, F. and Venayagamoorthy, S.K. (2013). Some insights for the prediction of near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 723, 126–139.
- Knopp, T. (2006). On grid-independence of RANS predictions for aerodynamic flows using model-consistent universal wall-functions. *Proceedings of ECCOMAS CFD*.
- Lacasse, D. and Turgeon, E. and Pelletier, D. (2001a). Prediction of turbulent separated flow in a turnaround duct using wall functions and adaptivity. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 15(3), 209–225.
- Lacasse, D. and Turgéon, E. and Pelletier, D. and Martinuzzi, R. (2001b). Prediction of turbulent flow around a square cross-section cylinder in the proximity of a solid wall. *15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Anaheim, California.

- Launder, B.E. and Sharma, B.I. (1974). Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1(2), 131 – 137.
- Launder, B.E. and Spalding, D.B. (1974). The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(2), 269–289.
- Martinuzzi, R.J. and Bailey, S.C.C. and Kopp, G.A. (2003). Influence of wall proximity on vortex shedding from a square cylinder. *Experiments in Fluids*, 34, 585–596.
- Mathur, A. and He, S. (2013). Performance and implementation of the launder–sharma low-reynolds number turbulence model. *Computers Fluids*, 79, 134 – 139.
- Menter, F.R. (1994). Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA journal*, 32(8), 1598–1605.
- Mohammadi, B. and Puigt, G. (2006). Wall functions in computational fluid mechanics. *Computer and fluids*, 35, 1108–1115.
- Nazif, H.R. and Tabrizi, H.B. (2014). Applying a non-equilibrium wall function in k–turbulent modelling of hydrodynamic circulating flow. *Applied Mathematical Modelling*, 38(2), 588 – 598.
- Philipp, S. and Mattias, C. and Milos, I. and Dan S., H. (2010). The structure of a turbulent boundary layer studied by numerical simulation. *Arxiv*.
- Prandtl, L. (1928). Ein gedankenmodell zur kinetischen theorie der festen körper. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 8(2), 85–106.
- Vieser, W. and Esch, T. and Menter, F.R. (2002). Heat transfer predictions unsing advanced two-equation turbulence models. Rapport technique.
- Wilcox, D. C. (2006). *Turbulence Modeling for CFD (Third Edition)*. DCW Industries, Inc.
- Wu, X. and Moin, P. and Adrian, R.J. and Baltzer, R.J. (2015). Osborne Reynolds pipe flow: Direct simulation from laminar through gradual transition to fully developed turbulence. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(26), 7920–7924.
- Yakhot, V. and Thangam, S. and Gatski, T. B. and Orszag, S. A. and Speziale, C. G. (1991). Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. Rapport technique.

Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. (1992a). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimators. part 1: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 (7), 1331–1364.

Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. (1992b). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimators. part 2: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 (7), 1365–1382.

Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. (1992c). The superconvergent patch recovery (spr) and adaptive finite element refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 101 (1-3), 207–224.