



Titre: Accélération d'une approche régularisée de reconstruction en
tomographie à rayons X avec réduction des artéfacts métalliques

Auteur: Benoît Hamelin
Author:

Date: 2009

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Hamelin, B. (2009). Accélération d'une approche régularisée de reconstruction en
tomographie à rayons X avec réduction des artéfacts métalliques [Ph.D. thesis,
Citation: École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/171/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/171/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Yves Goussard, & Jean-Pierre Dussault
Advisors:

Programme: Génie biomédical
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ACCÉLÉRATION D'UNE APPROCHE RÉGULARISÉE DE
RECONSTRUCTION EN TOMOGRAPHIE À RAYONS X AVEC RÉDUCTION
DES ARTÉFACTS MÉTALLIQUES

BENOIT HAMELIN
INSTITUT DE GÉNIE BIOMÉDICAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE
PHILOSOPHIAE DOCTOR
(GÉNIE BIOMÉDICAL)
NOVEMBRE 2009

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

ACCÉLÉRATION D'UNE APPROCHE RÉGULARISÉE DE
RECONSTRUCTION EN TOMOGRAPHIE À RAYONS X AVEC RÉDUCTION
DES ARTÉFACTS MÉTALLIQUES

présentée par : HAMELIN Benoit.
en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor
a été dûment acceptée par le jury constitué de :

M. ORBAN Dominique, Doct.Sc., président
M. GOUSSARD Yves, Ph.D., membre et directeur de recherche
M. DUSSAULT Jean-Pierre, Ph.D., membre et codirecteur de recherche
M. CHARTRAND-LEFEBVRE Carl, M.D., membre
M. SAUER Ken, Ph.D., membre

À Laurent et Louis.

Remerciements

J'ai achevé cette thèse grâce à l'aide de nombreuses personnes à qui j'aimerais témoigner ici de ma gratitude. Mes premiers remerciements vont aux membres du jury pour avoir pris la peine de lire et de critiquer ce travail. Merci à M. Dominique Orban de présider ce jury, ainsi qu'aux autres membres, MM. Ken Sauer, Carl Chartrand-Lefebvre, Yves Goussard et Jean-Pierre Dussault.

Ce travail a été rendu possible par une bourse d'études supérieures du Conseil national de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) ainsi qu'une bourse de l'École Polytechnique, pour lesquelles je suis reconnaissant. Le travail a aussi été financé dans le cadre du projet de recherche concertée en santé du CRSNG #323572-06.

Je tiens à remercier quelques professeurs qui ont participé à la progression de ce travail, de manière directe ou indirecte. Merci à Dominique Orban pour m'avoir invité à communiquer mes résultats dans diverses rencontres de la communauté de l'optimisation numérique. Les discussions échangées dans le cadre de ces rencontres ont contribué au travail de synthèse présenté ici. Merci à Guy Cloutier pour m'avoir permis, ainsi qu'à mes collègues, d'intégrer durant un an les activités du Laboratoire de biorhéologie et d'ultrasonographie médicale (LBUM). Ce contexte m'a permis de

mieux comprendre les aspects cliniques du projet. Aussi, merci à Jérôme Idier, pour ses commentaires sur une version préliminaire du travail ayant mené au chapitre 4. Finalement, merci à MM. Frédéric Lesage et Jean-Marc Lina, dont l'enthousiasme contagieux vis-à-vis de leurs projets m'a soutenu dans mes derniers efforts pour compléter ce travail.

J'aimerais remercier mes plus proches collègues pour les échanges scientifiques enrichissants et l'encouragement personnel. À l'École Polytechnique de Montréal, je salue David Gendron, Nathalie Menvielle, Paul-André Barrière, Sabine Husse, Laurent Truchetti, Mathieu Gendron, Sylvain Arreckx, Malik Dussaud, Sandrine Rodrigues, Saul Pérez, Célia Rousseau et Matthieu Voorons. À l'Université de Sherbrooke, je remercie Marie-Flavie Auclair-Fortier, Djemel Ziou, Jessica Lévesque, François Deschênes et Gabriel Girard.

J'aimerais exprimer toute ma gratitude envers Jean-Pierre Dussault et Yves Gousard, qui ont dirigé ce travail. Merci à Jean-Pierre pour m'inspirer la curiosité et le plaisir de la découverte. Merci à Yves de m'enseigner la rigueur et l'esprit critique. Ce travail de thèse a constitué pour moi un véritable épanouissement tant professionnel que personnel et je leur suis reconnaissant d'y avoir contribué.

Finalement, je suis infiniment reconnaissant envers ma famille. Merci à ma mère Diane et à ma sœur Amélie pour leurs mots d'encouragement. Merci à ma belle famille, François, France, Janou, Patrick, Éloan et Maélia, pour leur soutien et leur présence. Merci à mes garçons, Laurent et Louis, pour leurs rires, et leurs acrobaties, et leurs histoires. Merci, enfin, à ma tendre épouse Mélodie, qui a partagé tant mes

succès que mes difficultés et mes sacrifices. Notre complicité a été pour moi une source d'inspiration durant les cinq années consacrées à ce travail. Merci de tout mon cœur.

Résumé

Ce travail porte sur l'imagerie par tomographie à rayons X des vaisseaux périphériques traités par angioplastie avec implantation d'un tuteur endovasculaire métallique. On cherche à détecter le développement de la resténose en mesurant la lumière du vaisseau sanguin imagé. Cette application nécessite la reconstruction d'images de haute résolution. De plus, la présence du tuteur métallique cause l'apparition d'artéfacts qui nuisent à la précision de la mesure dans les images reconstruites dans les appareils tomographiques utilisés en milieu clinique.

On propose donc de réaliser la reconstruction à l'aide d'un algorithme axé sur la maximisation pénalisée de la log-vraisemblance conditionnelle de l'image. Cet algorithme est déduit d'un modèle de formation des données qui tient compte de la variation non linéaire de l'atténuation des photons X dans l'objet selon leur énergie, ainsi que du caractère polychromatique du faisceau X. L'algorithme réduit donc effectivement les artéfacts causés spécifiquement par le tuteur métallique. De plus, il peut être configuré de manière à obtenir un compromis satisfaisant entre la résolution de l'image et la variance de l'image reconstruite, selon le niveau de bruit des données. Cette méthode de reconstruction est reconnue pour donner des images d'excellente qualité. Toutefois, le temps de calcul nécessaire à la convergence de cet algorithme

est excessivement long. Le but de ce travail est donc de réduire le temps de calcul de cet algorithme de reconstruction itératif. Cette réduction passe par la critique de la formulation du problème et de la méthode de reconstruction, ainsi que par la mise en œuvre d’approches alternatives.

On considère dans un premier temps l’accélération d’un algorithme similaire plus simple, basé sur un modèle de projection monochromatique. La reconstruction implique la résolution numérique d’un problème d’optimisation non linéaire avec contrainte de non-négativité. Une méthode rapide doit donc être choisie en se basant sur une comparaison empirique de la performance numérique. Ce travail établit une condition d’arrêt des méthodes numériques liée aux propriétés statistiques de l’image reconstruite, afin que les comparaisons de performances soient établies sur la base d’images équivalentes. Cette condition d’arrêt permet donc une analyse comparative originale de méthodes numériques spécifiquement développées pour la reconstruction tomographique à des algorithmes d’optimisation d’usage général. Il en ressort que ces derniers atteignent la condition d’arrêt plus rapidement qu’une méthode convergente spécifique à la tomographie. Ce résultat justifie en outre l’adoption de l’algorithme L-BFGS-B pour la suite du travail.

Un second progrès significatif dans la réduction du temps de calcul est obtenu par la décomposition de l’image en *région d’intérêt* et en *arrière-plan*. Pour un arrière-plan connu, la reconstruction de la région d’intérêt est très rapide ; on propose d’extraire l’arrière-plan d’une reconstruction préliminaire rapide de l’image complète. Cette reconstruction préliminaire peut être obtenue par l’une des deux méthodes

suivantes : une approche analytique ou une approche statistique régularisée appliquée à une grille image plus grossière que la région d'intérêt. Ce travail propose une comparaison empirique originale de ces techniques de reconstruction préliminaire, basée sur la qualité d'image obtenue dans la région d'intérêt et le temps de calcul total. Lorsque l'objet imagé comporte dans l'arrière-plan des objets causant des artefacts de reconstruction forts, on observe que l'utilisation d'une méthode statistique pour la reconstruction préliminaire favorise une meilleure qualité d'image dans la région d'intérêt que l'emploi d'une méthode analytique. Cependant, en l'absence de tels artefacts, les deux approches se valent. Cette comparaison est assortie d'une analyse de sensibilité de la qualité de reconstruction de la région d'intérêt à la taille de pixel de l'arrière-plan extrait d'une reconstruction préliminaire statistique. Cette dernière indique qu'un arrière-plan relativement grossier peut être employé sans réduire la qualité de la reconstruction de la région d'intérêt, ce qui favorise un temps de calcul court lorsque l'approche statistique est indiquée pour la reconstruction préliminaire.

Ces progrès sont finalement intégrés à la reconstruction basée sur un modèle de projection polychromatique qui tient compte du durcissement de rayon causé par le tuteur métallique. Trois améliorations innovatrices sont apportées au modèle de base de De Man *et al.* (2001) afin de réduire le temps de calcul de la reconstruction :

1. La décomposition de l'image en arrière-plan et en région d'intérêt discutée ci-dessus ;
2. Le sous-échantillonnage grossier du modèle discret du spectre d'émission de la source de rayons X, mis en œuvre en tenant compte séparément des contribu-

tions au faisceau de l'émission générale et de l'émission caractéristique ;

3. La modélisation gaussienne des incertitudes sur le log-sinogramme, qui mène à un algorithme de reconstruction régularisé des moindres carrés non linéaires plus robuste face aux prétraitements appliqués aux données lors de l'acquisition.

Ces trois améliorations réduisent le temps de calcul de la reconstruction par un ordre de grandeur. De plus, le nouvel algorithme proposé offre le meilleur compromis entre la résolution et la variance de l'image reconstruite lorsque l'objet contient des structures métalliques de plus grande taille.

En définitive, cette thèse présente des analyses comparatives originales de méthodes numériques, de techniques de représentation de l'objet et de stratégies de modélisation concernant une approche de reconstruction statistique régularisée. Ces analyses mènent à la mise en œuvre de diverses améliorations de l'algorithme qui réduisent significativement le temps de calcul.

Abstract

This thesis is concerned with X-ray tomography of peripheral vessels that have undergone angioplasty with implantation of an endovascular metal stent. We seek to detect the onset of restenosis by measuring the lumen of the imaged blood vessel. This application requires the reconstruction of high-resolution images. In addition, the presence of a metal stent causes streak artifacts that complicate the lumen measurements in images obtained with the usual algorithms, like those implemented in clinical scanners.

A regularized statistical reconstruction algorithm, hinged on the maximization of the conditional log-likelihood of the image, is preferable in this case. We choose a variant deduced from a data formation model that takes into account the nonlinear variation of X photon attenuation to photon energy, as well as the polychromatic character of the X-ray beam. This algorithm effectively reduces the artifacts specifically caused by the metal structures. Moreover, the algorithm may be set to determine a good compromise between image resolution and variance, according to data noise. This reconstruction method is thus known to yield images of excellent quality. However, the runtime to convergence is excessively long. The goal of this work is to reduce the reconstruction runtime.

As a first step, we consider the acceleration of a similar yet simpler algorithm, based on a monochromatic projection model. Since the reconstruction is reduced to the resolution of a nonlinear bound-constrained optimization problem, the reconstruction algorithm corresponds to an adequate numerical method for this problem. A fast method must be chosen according to an empirical comparison of numerical performance. This work contributes a stopping condition for numerical methods related to statistical properties of the reconstructed image, in order to establish the performance comparisons on equivalent images. This stopping condition is the basis to an original comparative analysis of tomography-specific numerical methods and general-usage optimization algorithms. It appears that these reach the stopping condition faster than a convergent tomography-specific method. This result justifies the adoption of the L-BFGS-B code for solving the reconstruction problem in the rest of the work.

A second significant advance was obtained by the decomposition of the image into the *region of interest*, a small area that contains the studied blood vessel, and the *background*, which contains the rest of the image. For known background, the reconstruction of the region of interest is very fast ; the background must thus be extracted from a fast preliminary (*pilot*) reconstruction of the full image. This full-image pilot can be obtained by one of two considered methods : an analytical approach or a coarse-grid regularized statistical algorithm. This thesis offers an original empirical comparison of these techniques for pilot reconstruction, based on image quality in the region of interest and total runtime. When the imaged object is composed of

structures that cause strong reconstruction artifacts, it can be seen that using a statistical reconstruction procedure for the pilot leads to a better image quality in the region of interest than the analytical algorithm. However, short of such artifacts, the difference in region-of-interest quality between the two pilot approaches is insignificant. This comparison comes with a sensitivity analysis of the image quality in the region of interest to the pixel size of the background extracted from a statistical pilot reconstruction. It indicates that a relatively coarse background can be used without altering the image quality in the region of interest. This helps keeping the runtime short when the statistical approach is required.

Finally, we get back to the reconstruction based on a polychromatic projection model, which describes the beam hardening effect caused by the metal stent. Three innovative enhancements are brought to the model of De Man *et al.* (2001), in order to reduce the reconstruction runtime :

1. The decomposition of the image in background and region of interest, as described above ;
2. The coarse subsampling of the discrete model of the X-ray source emission spectrum, implemented by separately taking into account the contributions of the *bremsstrahlung* and of the characteristic emission to the X-ray beam ;
3. The gaussian modeling of the log-sinogram uncertainty, which leads to a regularized nonlinear least-squares reconstruction algorithm that is more robust to the data preprocessing computations performed during the acquisition.

These enhancements reduce the reconstruction runtime by one order of magnitude.

Moreover, the new algorithm proposed in this work offers a satisfactory compromise between image resolution and variance when the object is composed of larger metal structures.

In a nutshell, this thesis presents original comparative studies of numerical methods, object representation techniques and modeling strategies with respect to penalized-likelihood reconstruction. These studies lead to the implementation of various enhancements to the algorithm that significantly reduce the total computation time.

Table des matières

Remerciements	iv
Résumé	vii
Abstract	xi
Table des matières	xv
Liste des tableaux	xxi
Table des figures	xxii
Introduction	1
1 Réduction des artéfacts en tomographie à rayons X	6
1.1 Imagerie vasculaire par tomographie à rayons X	6
1.1.1 Procédé d'acquisition des données	6
1.1.2 Spécificité et défis de l'imagerie vasculaire	8
1.2 Approches de reconstruction déterministes	9
1.2.1 Modèle de formation des données	10

1.2.2	Approches analytiques pour la reconstruction	12
1.2.3	Approches algébriques	14
1.3	Approches statistiques pour la reconstruction	15
1.3.1	Maximum de vraisemblance	15
1.3.2	Maximum <i>a posteriori</i>	17
1.3.3	Choix de la fonction de pénalité	19
1.3.4	Choix des hyperparamètres	21
1.3.5	Critique	23
1.4	Réduction des artéfacts métalliques	24
1.4.1	Traitement déterministe des données	24
1.4.2	Modélisation polychromatique de la projection	26
1.5	Méthodes numériques pour la reconstruction statistique	30
1.5.1	Optimisation non linéaire différentiable	30
1.5.2	Approches sous hypothèse monochromatique	35
1.5.3	Méthodes à sous-ensembles ordonnés	38
1.5.4	Importance de la convergence	39
1.5.5	Approches pour la reconstruction polychromatique	40
1.5.6	Critique	41
1.6	Représentation de l'objet imagé	42
1.7	Synthèse des critiques	46
2	Synthèse du travail de recherche	48

2.1	Choix d'une méthode numérique	49
2.2	Représentation de l'objet imagé	52
2.3	Réduction des artéfacts métalliques	54
3	On the stopping criterion for numerical methods for linear systems	
	with additive Gaussian noise	57
3.1	Introduction	58
3.2	MAP estimation with a Gaussian prior distribution	60
3.3	Inexact MAP estimator	63
	3.3.1 Definition and properties	63
	3.3.2 Stopping test for numerical methods	65
3.4	Extension to non-Gaussian priors	66
	3.4.1 MAP estimation with a non-Gaussian prior	66
	3.4.2 Linear extrapolation of the estimation problem	68
	3.4.3 Stopping test revisited	72
3.5	Concluding remarks	73
4	Performance Comparison of Numerical Methods for	
	Penalized-Likelihood Reconstruction in X-Ray Tomography	75
4.1	Introduction	76
4.2	Penalized-likelihood tomographic reconstruction	80
4.3	SPS algorithmic framework for X-ray tomography	82
4.4	Convergence condition	86

4.5	Image comparison methodology	87
4.6	Experimental comparisons	89
4.6.1	Implementation details and parameters	91
4.6.2	Simulated data	94
4.6.3	Real data	99
4.6.4	Discussion	102
4.7	Conclusion	105
4.A	Derivation of the SPS iteration for Gaussian penalized-likelihood reconstruction	106
5	Design of iterative ROI transmission tomography reconstruction procedures and image quality analysis	109
5.1	Introduction	111
5.2	ROI reconstruction framework	115
5.2.1	Statistical CT reconstruction	116
5.2.2	Background/ROI decomposition of the projection operator . .	117
5.2.3	Design of the reconstruction algorithm	118
5.2.4	Numerical methods	119
5.3	Methodology for image quality comparison	121
5.3.1	Simulation data	121
5.3.2	Real data	122
5.4	Numerical experiments over simulated data	124

5.4.1	Phantom and simulation description	124
5.4.2	Hyperparameter selection	127
5.4.3	Impact of grid dimension for FFOV reconstruction	129
5.4.4	Impact of the choice of FFOV reconstruction method	132
5.5	FFOV reconstruction comparison on a real dataset	134
5.5.1	Materials and methods	134
5.5.2	Results and discussion	136
5.6	Conclusion	138

6 Metal Artefact Reduction by Least-Squares Penalized-Likelihood

Reconstruction with a Fast Polychromatic Projection Model		140
6.1	Introduction	141
6.2	Polychromatic reconstruction	145
6.2.1	Projection model	146
6.2.2	Penalized-likelihood reconstruction	147
6.3	New efficient implementation of the polychromatic projection model .	150
6.3.1	Background/ROI decomposition	151
6.3.2	Source spectrum representation	153
6.3.3	Reconstruction problem summary	155
6.4	Numerical experiments over simulated data	156
6.4.1	Methods	156
6.4.2	Validation of background/ROI image decomposition	160

6.4.3	Validation of alternative source spectrum modelling	162
6.5	Reconstruction of real data	163
6.5.1	Methods	164
6.5.2	Results	166
6.6	Conclusion	169
7	Discussion générale	171
	Conclusion	177
	Perspectives	178
	Références	181

Liste des tableaux

5.1	Number of iterations and time needed to perform phantom reconstructions for each FFOV grid dimension and reconstruction approach.	131
5.2	Description and runtime of the ROI reconstructions to compute MTFs from the line pair circle of segment CTP528.	136
6.1	Runtime of the reconstruction experiments of Section 6.4.	162
6.2	Comparative results of the reconstruction of real datasets.	167

Table des figures

4.1	Resolution phantom used for data simulation	95
4.2	Spectrum of the polychromatic source used for data simulation	96
4.3	Results of the reconstructions of the simulated projections on an image of dimension 480.	97
4.4	Central region of interest of the simulated phantom, reconstruced, full image reconstructed on a 480-pixels matrix.	98
4.5	Results of the reconstructions of the InnerEarSeq data.	100
4.6	Images of the CTP528 segment of the Catphan phantom, acquired following the InnerEarSeq protocol.	101
5.1	Representation of the phantom used in numerical experiments on a [−1000, 3000] HU scale, at target resolution 0.016 cm.	126
5.2	Spectrum of the polychromatic source used for data simulation (x-axis in keV, y-axis in unitless normalized photonic intensity).	127
5.3	MTF of the ROI reconstruction for various grid sizes used for FFOV reconstruction, from which the background is extracted.	130

5.4	MTF of the ROI reconstruction for various FFOV reconstruction approaches.	133
5.5	MTFs of phantom Catphan600 (segment CTP528) for FFOV reconstruction by either a coarse-grid iterative algorithm or by the scanner (FBP).	137
6.1	Spectrum of the polychromatic source used for data simulation and its remodelling with resampling of the general emission over 10 energy values.	155
6.2	Resolution phantom used for data simulation	157
6.3	Comparative reconstruction results over various background/ROI decompositions.	161
6.4	Comparative reconstruction results over various source spectrum models.	163
6.5	Scanner reconstruction of the slices of interest.	164
6.6	Real data reconstruction images.	170

Introduction

Ce travail est motivé par l'étude post-thérapeutique de l'athérosclérose des vaisseaux périphériques. Cette affection, qui se caractérise par la réduction pathologique de la lumière d'une artère, constitue la cause proximale d'un grand nombre de maladies cardiovasculaires, dont diverses thromboses, embolies et anévrismes.

Les avancées les plus récentes rattachent la pathogénèse de l'athérosclérose à la perte de flexibilité des parois artérielles. Les facteurs de risque sont ceux traditionnellement corrélés aux maladies cardiovasculaires (âge, sexe, tabagisme, hypertension artérielle, dyslipidémie, obésité, etc.). Les mouvements usuels des parois artérielles devenues rigides causent l'apparition de stries graisseuses dans l'intima, autour desquelles prolifèrent des cellules musculaires lisses. C'est le début de la formation de la plaque d'athérome, une structure inflammatoire instable composée d'un noyau de débris cellulaires et de cristaux entourés d'une couche de cellules fibreuses. La formation de la plaque d'athérome est accompagnée de la destruction progressive du tissu élastique endovasculaire.

La plaque d'athérome peut se développer au point de réduire la lumière de l'artère, obstruant le flux sanguin régulier : ce phénomène se nomme la *sténose*. Lorsque la sténose est diagnostiquée, plusieurs approches thérapeutiques sont considérées

selon la gravité du cas : changement du régime de vie, médication spécifique pour la réduction de la plaque ou des facteurs contribuant à sa formation et élimination chirurgicale. Dans ce dernier cas, la procédure courante est l'angioplastie à ballonnet. Elle consiste à insérer un cathéter sur lequel est monté un ballonnet dégonflé, dans l'artère sténosée. Une fois aligné sur la plaque d'athérome, le ballonnet est gonflé. La plaque mal structurée est écrasée contre la paroi artérielle, ce qui restaure le flux sanguin.

Cependant, l'obstruction ainsi traitée peut se reformer, par effondrement des dépôts compactés par le ballonnet, par remodelage mécanique de l'artère ou par prolifération du tissu cicatriciel. Ce phénomène porte le nom de *resténose* et touche entre 30 % et 50 % des cas (Garces, 2002). Pour les cas les plus sévères de sténose, un tuteur (*stent*) métallique endovasculaire est déployé lors du gonflement du ballonnet. Ce tuteur favorise le maintien de l'ouverture de l'artère et prévient la resténose, dont le taux d'occurrence est abaissé entre 10 % et 35 % (Garces, 2002).

Il demeure donc capital de réaliser un suivi des patients ayant subi une angioplastie avec ou sans implantation d'un stent. L'approche usuelle est l'artériographie, un type d'angiographie. Les limites de cette approche tiennent cependant au fait qu'il s'agit d'un procédé d'imagerie bidimensionnel. L'examen peut donc être compliqué lorsqu'une structure anatomique dissimule l'artère visée. La présence du stent, fortement radiopaque, peut aussi compliquer la mesure de la lumière de l'artère dans une image bidimensionnelle. À la place, le suivi peut être fait par échographie endovasculaire (*intravascular ultrasonography*, IVUS). Le procédé consiste à acquérir

des images de l'intérieur de l'artère à l'aide d'une sonde échographique fixée à un cathéter inséré dans un gros vaisseau sanguin. Cette modalité permet des mesures de lumière très précises, mais l'insertion du cathéter demeure une procédure de suivi invasive.

Depuis quelques années, la tomographie à rayons X est considérée comme une approche faiblement invasive pour l'imagerie vasculaire. Plusieurs auteurs ont utilisé cette modalité pour, notamment, l'imagerie du cœur (Ziegler *et al.*, 2008) et de ses artères (Krüger *et al.*, 2003). Même si la qualité des images des vaisseaux périphériques n'est pas aussi affectée par les mouvements du cœur, l'imagerie du tuteur métallique demeure un défi important. En effet, les objets métalliques induisent des artéfacts significatifs dans les images reconstruites (Létourneau-Guillon *et al.*, 2004), suffisants pour nuire à la mesure de la lumière de l'artère. Des travaux précédents de notre groupe ont permis la mise en œuvre d'une approche de reconstruction qui réduit efficacement les artéfacts dus aux objets métalliques (Menvielle, 2004). Cependant, cette approche nécessite un temps de calcul excessif.

Le but de ce travail est de poursuivre le travail de développement d'une procédure de reconstruction tomographique amorcé par Nathalie Menvielle. Les images obtenues de cette procédure doivent permettre de mesurer précisément la lumière d'une artère. La reconstruction doit donc favoriser la résolution des images tout en réduisant, voire éliminant, les artéfacts. Par ailleurs, la procédure devra calculer ces images à partir de données issues d'un appareil de tomographie déployé en milieu clinique (spécifiquement au site Notre-Dame du Centre hospitalier de l'Université de

Montréal, Montréal, Québec, Canada), en se limitant à la reconstruction d'images bidimensionnelles. Ce but a été atteint : les variantes algorithmiques résultant de nos contributions réalisent effectivement un meilleur compromis entre la résolution et l'élimination des artéfacts que les images calculées directement par le scanner.

En plus de ce problème méthodologique, l'imagerie vasculaire par tomographie à rayons X soulève des défis de nature pratique, puisque les méthodes de reconstruction applicables nécessitent de très longs temps de calcul. La majeure partie de cette thèse a été consacrée à la réduction de ce temps de calcul. Cette recherche a porté sur deux aspects. D'une part, des algorithmes plus rapides que ceux couramment utilisés ont été adaptés à la reconstruction tomographique. D'autre part, une représentation concise de l'image, qui favorise la qualité de la reconstruction dans une petite région d'intérêt, a été mise en œuvre. Les progrès accomplis sur ces deux axes de recherche ont permis d'abaisser le temps de calcul initial, variant entre 30 minutes et plusieurs heures, sous la barre d'une minute (dans certaines circonstances).

Les contributions de ce travail sont rapportées dans un rapport et trois articles soumis pour publication reproduits dans le présent document. Ces textes sont précédés d'une présentation des approches pour la reconstruction tomographique et d'une revue de la littérature pertinente aux problèmes rencontrés : cette présentation constitue le chapitre 1. Le chapitre 2 présente une synthèse du travail de recherche mettant en contexte chacune des contributions. Le chapitre 3 décrit une condition d'arrêt des méthodes numériques convenant à la famille d'algorithmes de reconstruction considérée dans ce travail. Ce critère d'arrêt permet la comparaison des

performances de telles méthodes numériques. Cette comparaison, qui fait l'objet du chapitre 4, met en lumière des propriétés intéressantes d'algorithmes spécifiques à la reconstruction tomographique, ainsi que d'algorithmes d'optimisation d'usage général appliqués au problème de reconstruction tomographique. Le chapitre 5 porte sur la réduction du temps de calcul amenée par une représentation multirésolution de l'image. Cette représentation est motivée par le fait que la haute résolution n'est nécessaire que dans une petite région autour de l'artère examinée. Finalement, le chapitre 6 traite de la réduction des artéfacts dus aux tuteurs métalliques. Des algorithmes robustes basés sur deux approches distinctes de réduction des artéfacts métalliques y sont comparés en termes de qualité d'image et de performance numérique.

Chapitre 1

Réduction des artéfacts en tomographie à rayons X

Le but de ce chapitre est de positionner en regard de l'état des connaissances le travail de recherche faisant l'objet de cette thèse. En ce sens, il consiste en une présentation des défis posés par l'imagerie vasculaire par tomographie à rayons X, l'accent étant mis sur les approches adoptées pour relever ces défis.

1.1 Imagerie vasculaire par tomographie à rayons X

Cette section propose un survol du procédé d'examen tomographique intégrant les aspects et défis spécifiques à l'imagerie vasculaire.

1.1.1 Procédé d'acquisition des données

La tomographie à rayons X est une modalité d'imagerie qui permet de visualiser une tranche d'un objet. Le procédé d'acquisition 2D classique comprend une source de rayons X et une barrette de détecteurs montés de part et d'autre d'un objet. La source et le détecteur tournent autour de l'objet le long d'une trajectoire

circulaire, irradiant l'objet à incréments angulaires réguliers. Les mesures d'atténuation des rayons X ainsi acquises sont utilisées pour reconstituer par le processus de *reconstruction* une vue de l'objet dans le plan source-détecteur perpendiculaire à l'axe de rotation. En déplaçant le plan source-détecteur le long de l'axe de rotation et en répétant la procédure, on peut acquérir une distribution tridimensionnelle du *coefficient d'atténuation* de l'objet, qui mesure son opacité aux rayons X en chaque point.

On distingue les générations de tomographes, entre autres, par la géométrie du matériel d'acquisition. Les premiers appareils proposés étaient munis d'une barrette de détecteurs linéaire et étaient construits de manière à obtenir un faisceau de rayons X parallèles : nous référerons à cette configuration comme à la *géométrie à rayons parallèles* dans le reste du texte. Cette configuration a été remplacée par une barrette semi-circulaire opposée à une source ponctuelle isotrope collimatée, de laquelle un faisceau en éventail est émis : c'est la *géométrie en éventail*. Les appareils les plus récents utilisent un panneau muni de multiples barrettes de détecteurs opposé à une source émettant un faisceau en cône. Ce montage se déplace par ailleurs sur une trajectoire hélicoïdale, ce qui permet une acquisition 3D plus rapide.

La source de rayons X utilisée sur les appareils déployés en milieu clinique est basée sur l'accélération d'électrons à haute énergie dans un tube à vide. Les photons X sont émis à l'anode du tube principalement par les phénomènes d'émission générale (*brehmsstrahlung*) et d'émission caractéristique. Ces phénomènes contribuent à la formation d'un faisceau de rayons X polychromatique, où la distribution de l'éner-

gie des photons (le *spectre d'émission*) n'est pas uniforme. La figure 4.2 (page 96) constitue un exemple d'un tel spectre d'émission. Le support du spectre est déterminé par l'énergie maximale des photons émis, qui correspond à la tension maximale appliquée aux bornes du tube : cette quantité est notée en anglais *kilovolt-peak*, d'où l'abréviation kVp.

1.1.2 Spécificité et défis de l'imagerie vasculaire

Le coefficient d'atténuation des rayons X est une propriété signature d'un matériau. Par conséquent, l'image de coefficients d'atténuation obtenue par la reconstruction s'interprète en termes de la distribution spatiale des matériaux composant l'objet. Cependant, la plupart des techniques de reconstruction ne tiennent pas compte de la variabilité de l'énergie des photons. Il en résulte une image d'atténuation à une énergie correspondant à la moyenne de l'énergie des photons composant le faisceau incident. Pour un examen à 120 kVp, cette énergie moyenne est d'environ 70 keV.

À cette énergie, les divers tissus mous du corps humain sont quasiment impossibles à distinguer du point de vue de l'atténuation, étant donné qu'ils sont composés en majeure partie d'eau. En particulier, il n'est pas possible de distinguer le sang des structures de tissu mou environnantes. La perfusion d'un agent de contraste sanguin permet de donner au sang un contraste d'environ 20 % par rapport au tissu mou. Il est donc souhaitable que l'image reconstruite ne soit pas entachée d'un bruit d'une puissance suffisante pour dissimuler le contour du vaisseau.

Un défi encore plus grand est posé par la présence d'un stent endovasculaire

métallique. Le métal a un coefficient d'atténuation des photons de faible énergie très élevé en comparaison des matériaux organiques ; il atténue cependant tout aussi peu les photons de haute énergie. Ainsi, alors que les photons de faible énergie sont presque tous absorbés par les structures métalliques, une large proportion des photons de haute énergie se propagent à travers l'objet. Ainsi, le rayonnement X est *durci* par le passage à travers l'objet métallique.

De nouveau, les algorithmes de reconstruction les plus communs ne tiennent pas compte de la distribution non uniforme de l'énergie des photons X. Ils se basent plutôt sur l'hypothèse d'un rayonnement monochromatique dont l'énergie correspond à l'énergie moyenne du spectre. Un tel modèle tend à sous-évaluer le nombre de photons détectés, puisqu'il ne modélise pas la faible atténuation des photons de haute énergie. Il en résulte l'apparition d'artéfacts de plusieurs types, les plus importants étant des stries sombres dans la direction de forte atténuation. Ces artéfacts sont souvent intrusifs au point de rendre inobservable le vaisseau sanguin encerclé par les branches du stent.

1.2 Approches de reconstruction déterministes

Cette section se veut une brève description des approches de reconstruction les plus communément utilisées en pratique. L'énoncé des problèmes inhérents à ces approches déterminera le contexte dans lequel les approches statistiques, sur lesquelles porte ce travail, pourront être introduites.

1.2.1 Modèle de formation des données

Soit $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la représentation d'un objet bidimensionnel par la distribution sur le plan du coefficient d'atténuation. Les mesures d'atténuation acquises en tomographie sont basées sur la loi de Beer-Lambert. Pour un faisceau de rayons X d'énergie E incident de spectre $I_0(E)$ se propageant sur une trajectoire $\mathbf{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dans l'objet μ , cette loi décrit l'intensité photonique à la sortie :

$$I(\mathbf{T}) = \int_0^{E_{\text{kvP}}} I_0(E) \exp \left[- \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\mathbf{T}(t)) dt \right] dE \quad (1.1)$$

Supposons que le faisceau X soit monochromatique, d'intensité nominale I_0 . La loi de Beer-Lambert prend alors la forme

$$I(\mathbf{T}) = I_0 \exp \left[- \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\mathbf{T}(t)) dt \right]. \quad (1.2)$$

Considérons la géométrie d'acquisition à rayons parallèles discutée en section 1.1.1. Chaque rayon y est décrit par sa distance r à l'origine et son angle θ par rapport à un axe du système de référence. L'équation (1.2) se réécrit

$$I(r, \theta) = I_0 \exp \left[- \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x_1, x_2) \delta(r - x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta) dx_1 dx_2 \right].$$

En définissant la *projection* (ci-après aussi notée sous une forme plurielle : les projections) comme la fonction $y : \mathbb{R} \times [0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $y(r, \theta) = -\log(I(r, \theta)/I_0)$, on obtient

$$y(r, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}[\mu(x_1, x_2)](r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x_1, x_2) \delta(r - x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta) dx_1 dx_2. \quad (1.3)$$

L'opérateur intégral qui lie l'image à la projection est la transformée de Radon. Son opérateur adjoint est la *rétroprojection*, définie comme

$$\mathcal{R}^*[y(r, \theta)](x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\pi y(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \theta) \, d\theta. \quad (1.4)$$

La transformée de Radon admet une inverse, conséquence du théorème de la tranche centrale de Fourier. Ce dernier stipule que la transformée de Fourier de $y(r, \theta)$ dans la direction r correspond à la projection de la transformée de Fourier 2D de $\mu(x_1, x_2)$ sur une droite d'angle θ passant par l'origine dans le plan spectral (Kak et Slaney, 1987). La technique de reconstruction que l'on en déduit est décrite à la section 1.2.2.

En pratique, la projection et l'objet ne sont pas représentés par des fonctions continues. D'une part, pour toutes les géométries d'acquisition, la barrette de détecteurs est de taille finie et comporte un nombre fixé de détecteurs. Par ailleurs, on acquiert les projections en un nombre d'angles fini sur la trajectoire angulaire de la source. On peut donc représenter les projections par un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, où n désigne le produit du nombre de détecteurs sur la barrette et du nombre d'angles de projection. D'autre part, l'objet est de support fini et, dans le cadre de ce travail, complètement inscrit dans le champ d'acquisition (*field of view*, noté FOV). La représentation typique est une discrétisation uniforme du plan par une grille de pixels, de sorte qu'on note $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, où m est le produit des dimensions de la grille. D'autres approches de représentation de l'objet sont considérées à la section 1.6.

En tenant compte de la représentation de l'objet par une image, il faut revoir le lien entre $\boldsymbol{\mu}$ et $\mathbf{y}$ défini par (1.3). Considérons l'élément y_i associé à la paire angle-détecteur i . Il faut approcher l'intégrale sur $\mu(x_1, x_2)$ le long de la droite passant entre

la source positionnée selon cet angle et ce détecteur. Cette approximation consiste en une somme des pixels de $\boldsymbol{\mu}$ pondérée par la distance des pixels à la droite. On regroupe les coefficients a_{ij} de cette somme dans un vecteur $\mathbf{a}_i$. Les vecteurs $\mathbf{a}_i$, associés respectivement à chacune des paires angle-détecteur, sont rassemblés en tant que lignes d'une matrice $\mathbf{A}$, ce qui permet l'expression

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} \quad (1.5)$$

du modèle de projection.

1.2.2 Approches analytiques pour la reconstruction

Les techniques de reconstruction les plus courantes sont basées sur une inversion de la transformée de Radon adaptée aux représentations discrètes des projections et de l'objet, ainsi qu'à la géométrie spécifique des tomographes. L'inversion de la transformée de Radon s'appuie sur le théorème de la tranche centrale. La méthode la plus répandue est la rétroprojection filtrée (*filtered backprojection*, notée FBP). Cette méthode est effectivement celle utilisée par la plupart des tomographes pour l'exécution des reconstructions 2D. La description de cette méthode, donnée ci-après, est adaptée de Kak et Slaney (1987).

Considérons la transformée de Fourier (TF) dans la direction r de la projection $y(r, \theta)$, que nous noterons $Y(\rho, \theta) = \mathcal{F}_r[y(r, \theta)](\rho)$. On déduit du théorème de la tranche centrale de Fourier que $Y(\rho, \theta)$ correspond à la transformée de Fourier 2D en coordonnées polaires de l'objet. La reconstruction est donc réduite au calcul de la TF inverse.

Rappelons que la TF inverse d'un objet est

$$\mathcal{F}^{-1} [F(\nu_1, \nu_2)] (x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu_1, \nu_2) e^{2i\pi(x_1\nu_1 + x_2\nu_2)} d\nu_1 d\nu_2. \quad (1.6)$$

Par conséquent, la TF inverse en coordonnées polaires passe par le changement de variables $[\nu_1, \nu_2]^t = \mathcal{J}(\rho, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} [\rho \cos \theta, \rho \sin \theta]^t$. Comme $|\det \nabla \mathcal{J}(\rho, \theta)| = |\rho|$, on déduit de (1.6)

$$\mathcal{F}^{-1} [F(\nu_1, \nu_2)] (x_1, x_2) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\rho, \theta) |\rho| e^{2i\pi\rho(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} d\rho d\theta. \quad (1.7)$$

En appliquant (1.7) à $Y(\rho, \theta)$, on obtient la formule de reconstruction

$$\mu(x_1, x_2) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\rho, \theta) |\rho| e^{2i\pi\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\rho d\theta. \quad (1.8)$$

L'algorithme de *rétroprojection filtrée* (RPF), le plus populaire à ce jour pour la reconstruction en tomographie à rayons X, passe par la décomposition de (1.8) en deux étapes simples. Cette décomposition isole l'intégrale interne de (1.8),

$$\dot{y}(t, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\rho, \theta) |\rho| e^{2i\pi\rho t} d\rho = \mathcal{F}_{\rho}^{-1} [Y(\rho, \theta) \times |\rho|] (t).$$

Cette opération peut être interprétée comme le traitement des données acquises en chaque angle de projection par un filtre rampe. L'intégrale externe de (1.8) peut donc être exprimée comme

$$\mu(x_1, x_2) = \int_0^{\pi} \dot{y}(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \theta) d\theta = \mathcal{R}^* [\dot{y}(t, \theta)] (x_1, x_2),$$

soit la rétroprojection (1.4) des données filtrées. Cette intégrale est calculée sur la représentation discrète $\boldsymbol{\mu}$ de l'objet en accumulant pour chaque pixel les projections

correspondant respectivement à chaque rayon qui y est incident. Cet algorithme de reconstruction convient à des données acquises selon une géométrie à rayons parallèles. Kak et Slaney (1987) en rapportent diverses adaptations à la géométrie en éventail.

La principale critique formulée à l'encontre des méthodes analytiques concerne leur sensibilité au bruit de mesure. En effet, le procédé d'acquisition est altéré par plusieurs sources d'incertitude liées à la nature quantique de l'atténuation du faisceau de rayons X, aux limitations du matériel de détection et à l'inadéquation du modèle de projection à la nature du rayonnement utilisé pour l'acquisition. Cette sensibilité se traduit par l'apparition de divers artéfacts dans les images reconstruites, en fonction des phénomènes qui dominent l'erreur de projection.

1.2.3 Approches algébriques

Ces techniques reposent sur la résolution directe du système d'équations linéaires (1.5) à l'aide d'une méthode numérique. Comme la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas carrée, on cherche la solution des moindres carrés du système. Ce problème se réduit à la résolution du système normal

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}^t \mathbf{y}.$$

Dans une perspective historique, la première méthode de reconstruction proposée, l'algorithme ART (*Algebraic Reconstruction Technique*, Tanabe (1971)), appartient à cette famille. Il s'agit d'une itération de type Gauss-Seidel par blocs basée sur la mise à jour un rayon à la fois des pixels de l'image affectés (impliquant donc une

seule ligne de $\mathbf{A}$).

À l’instar des approches analytiques, les algorithmes algébriques tendent à être sensibles au bruit de mesure. On reconnaît cependant à ces méthodes la possibilité d’obtenir une meilleure qualité d’image. En effet, on observe que durant l’exécution de l’algorithme ART, les composantes de basse fréquence convergent avant celles de haute fréquence. En supposant que le bruit de mesure puisse être décrit par un bruit gaussien blanc centré, dont la densité de puissance est uniforme, on conçoit que les composantes de basse fréquence de l’image aient un meilleur rapport signal-à-bruit (RSB) que celles de haute fréquence. Ainsi, l’interruption de l’algorithme après l’exécution d’un petit nombre d’itérations évite la reconstruction des composantes de haute fréquence, qui, en principe, induisent la majeure partie des artéfacts dus au bruit de mesure.

1.3 Approches statistiques pour la reconstruction

Ces techniques de reconstruction permettent de reformuler la reconstruction dans un cadre statistique d’estimation. En choisissant adéquatement ce cadre, on aboutit à une famille d’algorithmes plus robustes au bruit et aux artéfacts.

1.3.1 Maximum de vraisemblance

Considérons la discrétisation de la loi de Beer-Lambert (1.2) ; avec $\tilde{\mathbf{y}} = \exp[-\mathbf{y}]$, on a

$$\tilde{\mathbf{y}} = \exp[-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}]. \quad (1.9)$$

En pratique, $\tilde{\mathbf{y}}$ n'est pas exactement décrit par (1.9), qui néglige les diverses contributions au bruit de mesure mentionnés à la fin de la section 1.2.2. On pose l'hypothèse que l'incertitude sur $\tilde{\mathbf{y}}$ est dominée par les effets quantiques liés à l'atténuation des rayons X dans l'objet. Les mesures d'intensité photonique sont alors adéquatement modélisées par une loi de Poisson multivariée de moyenne décrite par (1.9).

La reconstruction correspond à l'estimation du paramètre $\boldsymbol{\mu}$ de ce modèle probabiliste des projections. Un choix populaire d'estimateur est celui du maximum de vraisemblance (MV), qui réduit la reconstruction à la maximisation de la vraisemblance de la loi de Poisson, dont la densité est¹

$$f(\tilde{\mathbf{y}}; \boldsymbol{\mu}) = \frac{\exp[-\mathbf{p}(\boldsymbol{\mu})] \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu})^{\tilde{\mathbf{y}}}}{\tilde{\mathbf{y}}!}, \quad (1.10)$$

où $\mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}) = \exp(-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu})$. Il s'agit donc de résoudre le problème d'optimisation non linéaire avec contrainte de non-négativité

$$\min_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} \sum_{i=1}^n [p_i(\boldsymbol{\mu}) - \tilde{y}_i \log p_i(\boldsymbol{\mu})]. \quad (1.11)$$

Une formulation plus simple du problème de reconstruction est obtenue en posant l'hypothèse que de grands nombres de photons ont été captés durant l'acquisition ; formellement, on suppose que $\tilde{y}_i \gg 0$ pour tout i . On peut alors approcher la loi de Poisson par une loi gaussienne multivariée. On pose donc

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}) + \tilde{\mathbf{b}},$$

¹Pour faciliter la notation de l'équation (1.10), les opérations d'élévation à la puissance, de produit, de quotient et de factorielle appliquées à des opérandes vectorielles sont évaluées composante-à-composante.

où $\tilde{\mathbf{b}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \text{diag}[\mathbf{p}(\boldsymbol{\mu})])$. On développe alors

$$\log \tilde{\mathbf{y}} = \log \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}) + \log \left(\mathbf{1} + \text{diag}[\mathbf{p}(\boldsymbol{\mu})]^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \right),$$

avec $\mathbf{e} = [1, 1 \dots 1]^t \in \mathbb{R}^n$. Pourvu que le bruit $\tilde{\mathbf{b}}$ soit de faible puissance en regard de $\mathbf{p}(\boldsymbol{\mu})$, le dernier terme est adéquatement approché par un développement de Taylor du premier ordre, d'où

$$\mathbf{y} = -\log \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \quad (1.12)$$

avec $\mathbf{b} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \Sigma_{\mathbf{b}})$. Ce modèle de projection alternatif est commun en tomographie à rayons X (Bouman et Sauer, 1993a) ainsi qu'en tomographie d'émission (Fessler, 1994), en particulier lorsque les données sont prétraitées afin de réduire certains types d'artéfacts.

La reconstruction par maximum de vraisemblance se réduit alors à maximiser la log-vraisemblance gaussienne, ce qui revient à résoudre le problème de moindres carrés suivant :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \arg \min_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}\|^2. \quad (1.13)$$

La solution de ce problème correspond à celle du système normal $\mathbf{A}^t \mathbf{A} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}^t \mathbf{y}$. Cette approche d'estimation se réduit donc aux méthodes algébriques évoquées à la section 1.2.3.

1.3.2 Maximum *a posteriori*

L'adoption d'une approche bayésienne d'estimation conduit à un algorithme de reconstruction plus robuste que celui obtenu par l'estimation MV. On retient en

particulier l'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP), qui maximise la log-vraisemblance de l'objet conditionnellement aux données. Cette log-vraisemblance découle de la densité conditionnelle $f(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{y})$, proportionnelle au produit de la densité conditionnelle des données $f(\mathbf{y} | \boldsymbol{\mu})$ et de la densité *a priori* $f(\boldsymbol{\mu})$ de l'objet.

La densité *a priori* de l'objet décrit certaines propriétés supposées de la solution. On considère ici que cette densité appartient à une famille de lois exponentielles dont la forme générale est

$$f(\boldsymbol{\mu}) = K \exp \left(-\lambda \sum_{k=1}^J \nu_k \psi(\boldsymbol{\delta}_k^t \boldsymbol{\mu}) \right), \quad (1.14)$$

où $\psi(u)$ est une fonction de pénalité, $\boldsymbol{\delta}_k$ détermine une propriété de l'image à pénaliser, $\lambda \nu_k$ pondère la pénalisation de cette propriété et K normalise la densité. La loi de probabilités en question peut être interprétée comme une loi de Gibbs appliquée à un champ de Markov ; pour plus de détails, le lecteur intéressé peut consulter Idier (2001).

L'estimateur MAP s'exprime donc comme

$$\min_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} F(\boldsymbol{\mu}) = \Phi(\boldsymbol{\mu}) + \lambda R(\boldsymbol{\mu}), \quad (1.15)$$

où $\Phi(\boldsymbol{\mu})$ est la log-vraisemblance poissonnienne (1.11) ou gaussienne (1.13) et mesure l'adéquation d'une image aux données. De plus,

$$R(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{k=1}^J \nu_k \psi(\boldsymbol{\delta}_k^t \boldsymbol{\mu}),$$

est un terme de pénalisation déterminé par la densité *a priori* $f(\boldsymbol{\mu})$ (1.14). Dans ce travail, $\lambda R(\boldsymbol{\mu})$ est supposé différentiable, non linéaire et convexe. Cette approche est

similaire à la régularisation de Tikhonov généralisée mise en œuvre pour la résolution des problèmes inverses mal posés (Engl *et al.*, 1996; Idier, 2001). Dans le cas présent, bien que le problème soit bien posé, la pénalisation améliore le conditionnement du problème et en réduit la sensibilité de la solution aux perturbations des données.

1.3.3 Choix de la fonction de pénalité

Les paramètres de $R(\boldsymbol{\mu})$ déterminent un ensemble de propriétés indésirables de la solution qui doivent être pénalisées. Ces propriétés sont déterminées par les hypothèses sur la solution. Dans le cas de la tomographie à rayons X, on suppose que l'image est composée de structures discrètes uniformes entourées d'espace vide. Par conséquent, on pénalise deux propriétés de l'image reconstruite : l'intensité des pixels ($\boldsymbol{\delta}_k = \mathbf{e}_{i_k}$) et les variations entre pixels voisins ($\boldsymbol{\delta}_k = \mathbf{e}_{i_k} - \mathbf{e}_{j_k}$). La première de ces propriétés permet d'ailleurs d'assurer que, pour λ suffisamment grand, la fonction de coût est convexe dans un voisinage de la solution (c.-à-d. que le hessien est localement défini positif).

L'hypothèse d'uniformité par morceaux pour l'objet implique une troisième propriété désirable de la solution de (1.15). Il s'agit d'avoir des transitions nettes (discontinues) entre les structures distinctes de l'objet. Cette propriété est cependant contradictoire avec la pénalisation de la variation entre pixels voisins, qui tend plutôt à lisser les frontières entre les structures. La magnitude de ce lissage dépend du choix de la fonction de pénalité $\psi(u)$.

Un choix attrayant et populaire est la pénalité quadratique $\psi(u) = u^2/2$. En

contexte du modèle d'incertitude gaussien (1.12), le problème d'estimation MAP devient un problème de moindres carrés linéaires de la forme

$$\min_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}\|^2 + \frac{\lambda}{2} \boldsymbol{\mu}^t \boldsymbol{\Delta}^t \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\mu}, \quad (1.16)$$

où $\boldsymbol{\Delta}$ est une matrice dont les lignes sont $\boldsymbol{\delta}_k^t$ et où $\boldsymbol{\Upsilon}$ est une matrice diagonale qui contient les poids respectifs ν_k des propriétés $\boldsymbol{\delta}_k$ dans la pénalisation. Plusieurs méthodes numériques rapides (Nocedal et Wright, 2000) sont connues pour résoudre le programme quadratique (1.16). De plus, si on néglige la contrainte de non-négativité, l'estimateur résoud le système linéaire normal non singulier

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \lambda \boldsymbol{\Delta}^t \boldsymbol{\Upsilon} \boldsymbol{\Delta}) \hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{A}^t \mathbf{y}.$$

L'expression de l'estimateur par une forme algébrique aussi simple facilite l'étude de ses propriétés statistiques.

L'inconvénient majeur de la pénalité quadratique est qu'elle tend à lisser excessivement les contours des structures de l'objet. Ces contours sont mieux préservés par une fonction de pénalité convexe asymptotiquement linéaire. Lange (1990) recense plusieurs de ces fonctions de pénalité en imagerie médicale. Les contributions rapportées dans cette thèse font usage de la fonction dite $l_2 l_1$ (Charbonnier *et al.*, 1997), qui consiste en la branche supérieure d'une hyperbole verticale :

$$\psi(u) = \sqrt{u^2 + \eta^2} - \eta.$$

Le paramètre η contrôle le point de transition entre le comportement quadratique proche de l'origine et le comportement linéaire asymptotique.

Tant les problèmes d'estimation non régularisés (1.11) et (1.13) que leurs variantes régularisées (1.15) sont résolus itérativement par une méthode d'optimisation numérique. Cet aspect est examiné en profondeur à la section 1.5.

1.3.4 Choix des hyperparamètres

Un aspect qui complique l'usage de l'estimation MAP pour la reconstruction est le choix des paramètres λ , ν_k ($1 \leq k \leq J$) et η du terme de régularisation. Examinons chacun de ces paramètres.

Comme mentionné à la section 1.3.2, le paramètre η sert de seuil entre la variation quadratique et la variation linéaire de la fonction de pénalité l_2l_1 . La stratégie de régularisation se basant sur cette pénalisation cherche à éliminer les variations de l'objet correspondant au bruit tout en préservant celles correspondant aux frontières entre les structures anatomiques. Ainsi, on désire que ces variations légitimes soient pénalisées dans la partie « linéaire » de la pénalisation. Ces sauts correspondent au contraste typique entre deux structures (de l'ordre de $0,1 \text{ cm}^{-1}$ dans le cas de l'atténuation à 70 keV), de sorte qu'on fixe η environ cent fois plus petit. Les expériences rapportées dans cette thèse utilisent $\eta = 0,002$.

Les paramètres ν_k servent à pondérer différemment la pénalisation des diverses propriétés indésirables de la solution. Deux aspects des propriétés pénalisées exigent le choix de poids différents de 1. D'une part, on fait en sorte que la différence entre un pixel et son voisin soit pénalisée inversement à la distance entre les deux pixels. Ainsi, les différences entre voisins diagonaux sont pondérées par $\nu_k = 1/\sqrt{2}$, alors que

celles entre voisins horizontaux ou verticaux sont pondérées par $\nu_k = 1$. D'autre part, des expériences préliminaires ont montré que la pénalisation de l'intensité des pixels n'a pas autant d'importance pour régulariser le problème que les différences entre pixels voisins. Cette pénalisation demeure importante pour garantir la convexité de la fonction de coût au voisinage de la solution, ce qui peut être le cas lorsque $\Phi(\boldsymbol{\mu})$ n'est pas convexe. La pondération de l'intensité des pixels est donc $\nu_k = 0.01$.

Finalement, le paramètre λ détermine le poids effectif de la régularisation en regard de l'adéquation aux données ($\Phi(\boldsymbol{\mu})$). Une grande valeur mène à une réduction plus importante des artéfacts de reconstruction, mais lisse les contours des structures de l'objet, ce qui réduit la résolution de l'image. Réciproquement, une valeur faible préserve la netteté des contours, mais laisse paraître les artéfacts et le bruit. Il est possible de choisir, par essais et erreurs, une valeur procurant un compromis satisfaisant entre la résolution de l'image et l'élimination des artéfacts. Il est cependant difficile d'automatiser ce choix. Pour le cas du problème d'estimation MAP quadratique (log-vraisemblance et distribution *a priori* gaussiennes), diverses heuristiques ont été proposées à cet effet, comme la validation croisée généralisée (Golub *et al.*, 1979; Fortier *et al.*, 1993) et la courbe en L (Hansen, 1992, 2000). Cependant, la généralisation de ces heuristiques aux pénalités non quadratiques ne donne généralement pas d'aussi bons résultats.

1.3.5 Critique

Hormis les difficultés engendrées par le choix des paramètres de régularisation, la principale critique à l'encontre de la reconstruction tomographique par estimation MAP concerne ses exigences en ressources calculatoires. D'une part, la représentation matricielle de l'opérateur de projection occupe un espace mémoire considérable pour les géométries d'acquisition et les dimensions d'image utilisées dans les protocoles cliniques. D'autre part, la reconstruction peut nécessiter plusieurs minutes, voire des heures de calcul, avant de produire une image acceptable.

Le temps de calcul dépend des dimensions des données et de l'objet. En particulier, pour une représentation de l'objet sur une base d'indicatrices, on emploie une taille de pixel fine, afin de maximiser la résolution de l'image obtenue. Cependant, pour l'application d'imagerie vasculaire évoquée en introduction, la précision de mesure que permet la haute résolution n'est utile que dans une petite zone entourant le vaisseau sanguin d'intérêt. Le reste de l'image n'est important que pour assurer la cohérence des projections. Il apparaît donc intéressant de considérer d'autres représentations de l'objet, permettant d'en réduire la dimension et, par conséquent, de réduire le temps de calcul et les exigences en espace mémoire. Diverses approches en ce sens sont considérées à la section 1.6.

Malgré les difficultés calculatoires, la reconstruction par estimation MAP constitue une approche robuste qui offre un bon compromis entre la résolution de l'image et l'élimination des artéfacts. Cette approche se montre d'ailleurs flexible en ce qui concerne la modélisation de la formation des données. Il est donc possible de dé-

velopper des algorithmes à partir d'un modèle qui tient compte des phénomènes menant à la formation d'artéfacts de divers types. Par exemple, LaRivière *et al.* (2006) proposent un modèle de projection tenant compte de multiples sources d'artéfacts communs : irradiation non focale, activation croisée et post-luminescence des détecteurs, bruit électrique des circuits de détection et durcissement de rayons. Dans le cadre d'application qui nous intéresse, cette dernière source d'artéfacts nécessite une attention particulière ; elle fait donc l'objet de la prochaine section.

1.4 Réduction des artéfacts métalliques

L'une des contraintes de ce travail est que les données soient acquises sur les appareils déployés en milieu clinique. Par conséquent, les techniques de réduction des artéfacts de durcissement de rayon passant par un matériel spécifique, comme l'imagerie par double faisceau (Alvarez et Macovski, 1976), par kVp variable (Wu *et al.*, 2009), par double acquisition (Tolakanahalli *et al.*, 2004) ou par faisceau de très haute énergie (Clayton *et al.*, 2009), ne seront pas discutées.

1.4.1 Traitement déterministe des données

Les artéfacts de durcissement de rayon viennent du fait que le processus de formation des données ne satisfait pas l'hypothèse de monochromaticité du rayonnement sur laquelle s'appuie l'algorithme de reconstruction. Une première famille d'approches cherche à restaurer l'adhésion des projections à l'hypothèse de monochromaticité, pour ensuite employer une technique de reconstruction analytique. Il convient tout de même de s'y attarder, puisque ces approches sont aussi applicables

à la reconstruction statistique.

Mentionnons d'abord que les artefacts métalliques sont une conséquence d'un cas particulièrement sévère de durcissement de rayon. En particulier, les approches de correction du durcissement de rayon employées normalement (Joseph et Spital, 1978) ne suffisent généralement pas. Ces approches tentent en effet de représenter l'objet en le décomposant sur une base de tissus organiques qui prédit mal la faible atténuation des photons de haute énergie par les structures métalliques.

Les traitements des données les plus efficaces pour la réduction des artefacts métalliques cherchent donc plutôt à identifier et à éliminer la contribution des objets métalliques aux projections. À partir d'une reconstruction initiale, les objets métalliques sont identifiés par segmentation. Une sous-image contenant seulement ces objets métalliques est alors extraite pour en calculer la projection, de manière à soustraire leur contribution aux données. Les données ainsi modifiées sont souvent complétées par interpolation, de manière à éviter l'apparition de trous à la place des objets métalliques dans l'image reconstruite. La technique la plus fréquemment employée est l'interpolation linéaire (Jeong et Ra, 2009; Kobayashi *et al.*, 2009). Plusieurs auteurs s'intéressent néanmoins à des techniques plus avancées. Gu *et al.* (2006) ont mis au point une approche de complétion du sinogramme par diffusion anisotropique. On note aussi la contribution de Oehler et Buzug (2007), qui proposent une interpolation directionnelle basée sur les lignes de niveau du sinogramme.

Les données complétées sont ensuite reconstruites. Pour les approches de reconstruction analytiques, Rinkel *et al.* (2008) notent que les approches d'interpolation

sophistiquées n'apportent pas un gain significatif de la qualité d'image en comparaison avec l'interpolation linéaire. Par contre, Oehler et Buzug (2007) et Oehler *et al.* (2008) remarquent qu'avec l'emploi d'un algorithme de reconstruction statistique, les techniques d'interpolation avancées améliorent effectivement la qualité des images reconstruites. Ce point de vue est corroboré par Müller et Buzug (2009), qui soulignent que l'interpolation introduit des artéfacts dans l'image reconstruite. Ces derniers peuvent être atténués en restaurant l'information de support des structures métalliques dans le cadre de la reconstruction.

Ces approches de traitement des données sont critiquables dans la mesure où elles ne s'appuient pas sur un fondement théorique qui permettrait de prévoir les effets et les limites de la décomposition et de la réparation des données sur la qualité de la reconstruction. En particulier, Rinkel *et al.* (2008) soulignent que les performances en réduction des artéfacts métalliques dus à de grosses structures sont plus sensibles à la qualité de la segmentation de la reconstruction initiale qu'au type d'interpolation employée pour compléter les données. Il est donc difficile de choisir et de configurer les procédures de segmentation et d'interpolation, puisqu'aucun modèle n'est proposé pour évaluer la sensibilité de ces choix.

1.4.2 Modélisation polychromatique de la projection

Alternativement, on peut laisser tomber l'hypothèse de monochromaticité des photons X captés. On construit alors un modèle de projection qui tient compte du spectre d'émission de la source et de la variation des coefficients d'atténuation

selon l'énergie des photons qui traversent l'objet. Un tel modèle de projection est non linéaire et se prête mal à l'inversion analytique. Il convient donc mieux aux approches statistiques de reconstruction.

La relaxation de l'hypothèse de monochromaticité passe par une généralisation du modèle de projection (1.9) basée sur (1.1), ce qui donne

$$\tilde{\mathbf{y}} = \int_0^{E_{\text{kVp}}} b(E) \exp[-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}(E)] dE. \quad (1.17)$$

En plus d'introduire le spectre d'émission de la source $b(E)$, ce modèle considère que la valeur des coefficients d'atténuation varie selon l'énergie des photons qui s'y propagent. En adoptant un modèle discret du spectre représenté par un vecteur $\mathbf{b} = [b_1, b_2 \dots b_K]^t \in \mathbb{R}^K$, on discrétise l'intégration sur E dans (1.17) et on obtient

$$\tilde{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^K b_i \exp[-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}^i]. \quad (1.18)$$

L'objet se trouve alors représenté par une collection de K images d'atténuation. Une telle représentation complique considérablement la reconstruction. Aussi, le cœur des contributions sur le sujet consiste en une modification de (1.18) pour obtenir une représentation de l'objet par une image unique.

Dans ce but, les auteurs définissent des modèles empiriques de la variation de l'atténuation en fonction de l'énergie, en s'appuyant sur des données connues pour divers matériaux. De Man *et al.* (2001) décomposent le coefficient d'atténuation à une énergie donnée en deux termes : l'un lié à l'effet photo-électrique, l'autre à la dispersion de Compton. Ces deux termes sont à leur tour déterminés par une fonction empirique du coefficient d'atténuation à une énergie de référence (qui devient la

variable à reconstruire). Le modèle de projection proposé par De Man *et al.* est repris tel quel par Hamelin *et al.* (2008), qui proposent une accélération du temps de calcul par une grille image hybride et la modélisation de l'incertitude sur les mesures par une loi gaussienne. Chueh *et al.* (2008) évitent la nécessité de connaître le spectre de la source en partitionnant la bande du spectre original. L'intensité photonique est mesurée sur chaque sous-bande à l'aide de scans à vide réalisés en appliquant divers filtres sur la source. Leur algorithme s'appuie sur l'hypothèse que, pour l'énergie moyenne de chaque bande, l'atténuation de tout matériau est proportionnelle à l'atténuation à une énergie de référence.

La contribution de Elbakri et Fessler (2002) vise à réduire les artefacts de durcissement de rayon (pas spécifiquement dus aux structures métalliques). Ils utilisent une décomposition de l'image en cartes de matériaux (os et tissu mou) à l'aide d'une segmentation et ajustent un modèle empirique à l'atténuation de chaque matériau en fonction de l'énergie. Elbakri et Fessler (2003) améliorent cette approche en évitant la nécessité d'une segmentation. Ils associent empiriquement la proportion d'os et d'eau d'un pixel à sa densité et reconstruisent donc une image de densité interprétable *a posteriori* en répartition des matériaux dans l'objet.

Des deux principaux modèles décrits, celui de De Man *et al.* (2001) est le seul qui ait été spécifiquement développé pour la réduction des artefacts métalliques. Le modèle de Elbakri et Fessler (2002, 2003) repose, quant à lui, sur une décomposition convexe de l'objet en matériaux analogue à celle utilisée par Joseph et Spital (1978). Cette contribution vise la réduction des artefacts de durcissement de rayon causés par

le tissu osseux. Par conséquent, l’emploi de ce modèle pour la réduction des artéfacts métalliques nécessiterait vraisemblablement l’ajout d’un troisième matériau à la base de décomposition. Le respect d’une contrainte de convexité de la décomposition, simple lorsque la base contient deux matériaux, devient compliquée lorsque le nombre de matériaux est supérieur à deux. Les modèles empiriques associant la proportion d’eau et d’os dans un pixel à la densité de matière dans ce pixel sont liés de très près aux hypothèses quant aux matériaux présents dans l’objet. L’ajout d’un matériau demande donc l’extension d’un des modèles proposés par Elbakri et Fessler (2003) ou le développement d’un tout nouveau modèle, ce qui peut s’avérer difficile dans les deux cas.

Les contributions mentionnées dans cette section modélisent l’incertitude sur les mesures à l’aide de la loi de Poisson. La reconstruction est donc réduite à la maximisation de la log-vraisemblance de Poisson régularisée (sauf pour Chueh *et al.* (2008), qui emploient un estimateur MV). Ce problème d’estimation est résolu à l’aide d’une méthode numérique, qui détermine en partie le temps de calcul de la reconstruction. Les méthodes numériques d’optimisation, spécifiques ou non aux approches statistiques pour la reconstruction tomographique, sont donc l’objet de la prochaine section.

1.5 Méthodes numériques pour la reconstruction statistique

Les principaux défis posés par la reconstruction statistique ont trait aux dimensions du problème d'optimisation considéré. En effet, pour la reconstruction d'une image de dimension 512×512 à l'aide de données acquises par un protocole clinique, on compte environ 250 000 variables et 1,5 millions d'éléments de données.

Pour mettre en contexte ces difficultés, une brève introduction aux méthodes d'optimisation non linéaire différentiable s'impose ; pour une discussion plus approfondie, le lecteur peut se référer à Nocedal et Wright (2000). Cette introduction est orientée autour de considérations sur la performance numérique des méthodes.

1.5.1 Optimisation non linéaire différentiable

Considérons la résolution d'un problème plus simple que (1.15), soit la minimisation d'une fonction $f(\mathbf{x})$ non linéaire différentiable sans contrainte :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}).$$

On procède à la recherche d'un point $\mathbf{x}^*$ à partir d'un point de départ $\mathbf{x}^0$ par une *méthode de descente*, une récurrence qui assure $f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k)$. Les méthodes de descente considérées ci-dessous convergent vers un point stationnaire $\mathbf{x}^*$ de $f(\mathbf{x})$ se caractérisant par $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$. Ces points stationnaires correspondent à des minima et à des maxima locaux de $f(\mathbf{x})$, ainsi qu'à des points de selle. On suppose qu'avec une méthode de descente, nous parviendrons bien à un minimum et que ce dernier correspondra, au pire, à une bonne approximation du minimum global.

Une propriété importante des algorithmes d'optimisation est la *convergence globale*, c'est-à-dire la convergence vers un point stationnaire depuis n'importe quel point de départ $\mathbf{x}^0$. Cette propriété peut être assurée pour toute une récurrence dans la mesure où chaque mise à jour procure une descente et une réduction de la pente suffisantes dans la direction de la mise à jour (conditions de Wolfe). Une récurrence qui ne satisfait pas naturellement à ces conditions peut être modifiée par une technique comme la recherche linéaire ou la contrainte à une région de confiance (Nocedal et Wright, 2000). Ces approches ne nuisent généralement pas à l'ordre de convergence local des méthodes. En effet, proche d'un point stationnaire, la mise à jour non modifiée satisfait généralement les conditions de Wolfe.

Les récurrences les plus simples sont des variations de la *descente de gradient*, qui correspond à $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \nabla f(\mathbf{x}^k)$. En pratique, cette itération a un ordre de convergence linéaire et son temps de calcul dépend fortement du conditionnement de $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$. En contrepartie, le calcul de chaque itération est relativement court. Divers autres algorithmes de premier ordre ont été suggérés dans la littérature dans le but d'obtenir des performances numériques meilleures en pratique que la descente de gradient. La méthode du gradient conjugué non linéaire, particulièrement sa variante Polak-Ribière (Polak et Ribière, 1969), lui a été longtemps préférée. Hager et Zhang (2006a) proposent une autre variante de l'algorithme du gradient conjugué pour l'optimisation non linéaire, qui se révèle encore plus rapide.

Pour s'affranchir de l'ordre de convergence locale linéaire, il faut cependant que la récurrence tienne compte de la courbure de la fonction objectif. Pour ce faire,

on définit une approximation quadratique de la fonction objectif autour du point courant $\mathbf{x}^k$, qu'on tâche de minimiser pour parvenir au point suivant. L'approximation typique est le développement de Taylor de second ordre de $f(\mathbf{x})$. Sa minimisation conduit à la fameuse méthode de Newton-Raphson, basée sur la récurrence $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \nabla^2 f(\mathbf{x}^k)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k)$. Cette méthode a un ordre de convergence quadratique, mais elle nécessite l'évaluation du hessien à chaque itération, ainsi que la résolution de l'équation linéaire $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{d} = -\nabla f(\mathbf{x}^k)$ (*équation de Newton*). À l'exception des cas où le hessien est structuré ou aisément décomposable, les coûts de calcul impliqués par sa manipulation sont trop élevés pour les problèmes de grande taille. La méthode de Newton-Raphson tronquée (Dembo *et al.*, 1982; Nash, 1984) contourne ce problème en résolvant l'équation de Newton par une méthode itérative (gradient conjugué, par exemple) interrompue avant convergence. Cette méthode ne nécessite pas la représentation complète de la matrice hessienne, mais seulement d'en calculer le produit avec un vecteur. En restreignant le critère d'arrêt de la résolution du système de Newton au fil des itérations, on peut montrer qu'une telle approche a un ordre de convergence superlinéaire.

La famille des méthodes quasi-Newton met en œuvre une autre approche pour éviter la manipulation du hessien de l'objectif. Ces méthodes utilisent une approximation sécante de la fonction objectif. Ce modèle permet le calcul d'une approximation récurrente $\mathbf{H}_k$ de l'inverse du hessien, mise à jour par une correction de rang 2 (variante BFGS) à chaque itération. Le point courant est alors mis à jour par la récurrence $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{H}_k \nabla f(\mathbf{x}^k)$. Ces méthodes quasi-Newton ont un ordre de

convergence local superlinéaire. L'inconvénient posé par les méthodes quasi-Newton est que $\mathbf{H}_k$ est une matrice généralement pleine. Ces méthodes apparaissent donc inapplicables aux problèmes de grande taille. Liu et Nocedal (1988) proposent une variante basée sur la décomposition du produit $\mathbf{H}_k \mathbf{v}$ en une formule récurrente impliquant $2k$ vecteurs liés aux points successivement calculés par l'algorithme. Liu et Nocedal (1988) conservent donc en mémoire un historique limité des vecteurs correspondant aux M derniers points et approchent le produit $\mathbf{H}_k \nabla f(\mathbf{x}^k)$ par une formule récurrente tronquée. Cette méthode quasi-Newton à mémoire limitée n'a qu'un ordre de convergence locale linéaire en théorie. En pratique, elle offre cependant une rapidité de convergence compétitive avec les méthodes de gradient conjugué non linéaire.

Finalement, reprenons le problème de reconstruction (1.15), qui inclut une contrainte de non-négativité sur la solution, un cas particulier de contrainte de borne. Les méthodes d'optimisation différentiable sous contrainte de borne peuvent être classées en deux familles. La première est l'ensemble des méthodes à ensemble actif, qui utilisent diverses heuristiques pour identifier les variables qui atteignent une borne à la solution optimale et résolvent le problème restreint aux autres variables. Cette technique est fréquemment mise en œuvre pour généraliser les méthodes de premier ordre avec ou sans hessien. Un cas particulier intéressant est celui de la méthode du gradient projeté (Bertsekas, 1976; Goldstein, 1964). Il s'agit de la méthode de descente du gradient, modifiée en calculant la projection orthogonale des variables sur l'ensemble réalisable. On peut montrer que cette modification ne réduit pas l'ordre de convergence linéaire propre à la descente de gradient, ce qui n'est pas le cas

lorsqu'on modifie de cette manière, par exemple, la méthode du gradient conjugué non linéaire ou la méthode de Newton-Raphson. Un autre exemple d'algorithme à ensemble actif est L-BFGS-B (Zhu *et al.*, 1997), qui est basé sur une itération quasi-Newton à mémoire limitée. Cet algorithme est reconnu pour sa robustesse dans un grand nombre d'applications. On note aussi la contribution de Hager *et al.* (2009), qui modifient une itération de gradient spectral (variante de la descente de gradient) avec une stratégie d'ensemble actif.

La deuxième famille comprend les méthodes de pénalisation (lagrangien augmenté, barrière logarithmique, point intérieur), basées sur une perturbation des conditions d'optimalité (KKT) du problème (1.15) qui est réduite au fil des itérations. La plupart de ces approches impliquent la représentation matricielle du hessien de la fonction objectif, mais certaines, comme IPOPT (Wächter et Biegler, 2006), peuvent être configurées pour utiliser une représentation quasi-Newton à mémoire limitée.

Les critères par lesquels on peut choisir une méthode numérique pour la résolution du problème (1.15) sont donc clairs. La principale difficulté découle de la représentation du hessien de la fonction objectif. Dans ce cas, nous avons $\nabla^2 F(\boldsymbol{\mu}) = \nabla^2 \Phi(\boldsymbol{\mu}) + \lambda \nabla^2 R(\boldsymbol{\mu})$; sous hypothèse monochromatique, cela correspond à $\nabla^2 F(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{A}^t \mathbf{C}(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{A} + \lambda \nabla^2 R(\boldsymbol{\mu})$, où $\mathbf{C}(\boldsymbol{\mu})$ est une matrice diagonale liée à la distribution de probabilités des incertitudes sur les mesures. Bien que la matrice $\mathbf{A}$ soit creuse, sa structure ne facilite ni la décomposition ni l'inversion. De

plus, puisque $\nabla^2 F(\boldsymbol{\mu})$ est une matrice de dimension $m \times m^2$, son stockage en mémoire et son calcul excèdent les ressources informatiques concevables en pratique. Ainsi, bien que les méthodes de Newton-Raphson et quasi-Newton soient théoriquement plus efficaces, il faut se rabattre sur des méthodes sans matrice³, c'est-à-dire les algorithmes de premier ordre ou la méthode de Newton tronquée. Ce choix est cependant rendu difficile dans la mesure où certaines de ces méthodes se montrent plus efficaces que les autres en pratique.

Examinons à présent comment ces principes d'optimisation non linéaire sont appliqués pour la résolution des problèmes de reconstruction régularisés.

1.5.2 Approches sous hypothèse monochromatique

De manière surprenante, les méthodes d'optimisation décrites ci-dessus n'ont pas été largement appliquées à la reconstruction en tomographie à rayons X. On remarque néanmoins la contribution de Mumcuoğlu *et al.* (1994), qui néglige la contrainte de non-négativité et utilise la variante Polak-Ribière de la méthode du gradient conjugué non linéaire. Pour la reconstruction en tomographie d'émission (un problème similaire à (1.15)), Johnson et Sofer (2000) proposent une méthode primale-duale de point intérieur préconditionnée. Plus récemment, Hager *et al.* (2009) ont aussi appliqué une itération de gradient spectral avec ensemble actif à la tomographie d'émission.

Ce faible intérêt pour les méthodes d'optimisation d'usage général en tomogra-

²Rappelons que pour un problème de reconstruction 2D, on a typiquement $m \approx 250\,000$.

³L'expression *sans matrice* est une traduction libre de l'expression *matrix-free* employée dans la littérature sur l'optimisation non linéaire pour qualifier un algorithme qui ne nécessite aucune représentation explicite d'une matrice de la dimension du hessien.

phie peut être expliqué par la critique de Fessler *et al.* (1997), qui souligne la difficulté d’appliquer la contrainte de non-négativité liée à la signification physique de la solution. Les méthodes à ensemble actif reposent effectivement sur des heuristiques parfois discutables (par exemple, la projection de la direction de descente sur l’ensemble réalisable, qui ne préserve pas l’ordre de convergence locale de la méthode en général) et les méthodes de pénalité apparaissent généralement lourdes, impliquant des matrices de grande dimension (qui sont généralement structurées). La communauté de la tomographie s’est donc intéressée à des méthodes favorisant l’application de la contrainte de non-négativité par projection de l’image mise à jour.

Une approche qui a été populaire dans les années 90 est la descente de coordonnées avec projection sur l’orthant positif. Sauer et Bouman (1993) présentent une approche où la méthode de Newton est appliquée de manière à minimiser l’objectif dans la direction d’un seul pixel. Cet algorithme est reconnu pour procurer une rapide convergence des composantes de haute fréquence de l’image. Il est cependant critiqué (Fessler *et al.*, 1997) dans la mesure où sa convergence globale n’est pas prouvée.

Pour résoudre ce problème de convergence, plusieurs auteurs proposent des approximations quadratiques alternatives de la fonction objectif. Ces fonctions de sub-

stitution $f(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\mu}^k)$ sont conçues pour assurer trois conditions au point courant $\boldsymbol{\mu}^k$:

$$f(\boldsymbol{\mu}^k; \boldsymbol{\mu}^k) = F(\boldsymbol{\mu}^k),$$

$$\nabla f(\boldsymbol{\mu}^k; \boldsymbol{\mu}^k) = \nabla F(\boldsymbol{\mu}^k),$$

$$f(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\mu}^k) \geq F(\boldsymbol{\mu}) \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}_+^m.$$

Plusieurs de ces contributions assurent la convergence globale de la récurrence basée sur la minimisation de la fonction majorante. Les substitutions majorantes reposent typiquement sur l'analyse convexe de la fonction objectif. Fessler *et al.* (1997) utilisent les résultats de De Pierro (1993, 1995) pour définir un objectif de substitution non quadratique séparable. La minimisation est réalisée par une méthode de Newton appliquée dans le cadre d'une descente de blocs de coordonnées. Erdoğan et Fessler (1999a) proposent une fonction de substitution quadratique non séparable, qu'ils minimisent aussi par descente de coordonnées.

Une difficulté soulevée quant aux techniques à descente de coordonnées concerne la parallélisation. En effet, les approches où les pixels de l'image sont mis à jour simultanément sont souvent plus simples à mettre en œuvre sur des processeurs parallèles. Erdoğan et Fessler (1999b) proposent un algorithme basé sur la minimisation d'une fonction de substitution quadratique séparable, qui se prête au traitement parallèle, mais qui présente un ordre de convergence inférieur à l'algorithme de Erdoğan et Fessler (1999a). L'algorithme de substitution quadratique séparable consiste en une itération de descente de gradient mise à l'échelle par une information de courbure diagonale.

Tous ces algorithmes développés en s'appuyant sur l'analyse convexe ont une forme analogue à l'algorithme d'espérance-maximisation (EM) (Lange et Carson, 1984; Lange et Fessler, 1995). Les algorithmes de cette famille très populaire, originellement basés sur des arguments statistiques, ont une forme récurrente similaire à la descente du gradient. L'algorithme EM original (Lange et Carson, 1984) est reconnu pour présenter un faible taux de convergence. Cependant, les formes modernes de cette itération, à l'instar des approches basées sur l'analyse convexe, constituent des itérations de descente de gradient préconditionnées globalement convergentes, aussi ont-elles une performance numérique similaire.

1.5.3 Méthodes à sous-ensembles ordonnés

Étant donc des itérations de descente de gradient, les algorithmes parallélisables de type EM et à substitution quadratique séparable ont un ordre de convergence linéaire, au mieux. En pratique, on remarque effectivement que ces méthodes tendent à progresser lentement. Elles peuvent cependant être significativement accélérées par l'approche heuristique des sous-ensembles ordonnés proposée par Hudson et Larkin (1994). L'approche est basée sur la séparation des mesures en S sous-ensembles disjoints. Chaque mise à jour de l'image est calculée sur un seul sous-ensemble de données, lesquels sont visités à tour de rôle. Cette stratégie est particulièrement efficace si, pour tout $1 \leq j \leq S$, $S\Phi_j(\boldsymbol{\mu}^k) \approx \Phi(\boldsymbol{\mu})$, où $\Phi_j(\boldsymbol{\mu})$ dénote la mesure d'adéquation aux données restreinte au sous-ensemble d'index j . À ce jour, les algorithmes qui intègrent cette stratégie des sous-ensembles ordonnés à l'itération EM (OS-EM) sont

parmi les plus utilisés pour la reconstruction statistique en tomographie de transmission. Erdoğan et Fessler (1999b) rapportent aussi le succès de cette stratégie pour une itération de substitution quadratique séparable (OS-SPS).

Les approches OS sont critiquées parce qu’elles ne convergent pas vers une solution du problème d’estimation (Erdoğan et Fessler, 1999b; Ahn *et al.*, 2006). En effet, chaque mise à jour de l’image résout un sous-problème de reconstruction impliquant un sous-ensemble distinct des données. Les algorithmes OS ont donc un comportement asymptotique cyclique, oscillant entre un nombre de points correspondant au nombre de sous-ensembles et demeurant à distance constante de la solution. Ahn *et al.* (2006) proposent d’ailleurs un algorithme convergent qui s’inspire de l’idée des sous-ensembles ordonnés pour accélérer l’itération de substitution quadratique séparable. Cet algorithme, bien que plus rapide que l’itération SPS de base (Erdoğan et Fessler, 1999b), réduit moins rapidement la fonction objectif que l’algorithme à sous-ensembles ordonnés associé OS-SPS.

1.5.4 Importance de la convergence

Dans le cas des approches de reconstruction régularisées, la convergence de l’algorithme est un facteur important pour obtenir les propriétés désirées de l’estimateur, c’est-à-dire l’élimination des artéfacts et la préservation des discontinuités. Cette perspective s’oppose à l’approche d’arrêt prématuré fréquemment adoptée par les méthodes non régularisées (algébriques et estimation MV). Engl *et al.* (1996) appuient cette convention en montrant que, dans le cas du problème (1.13) résolu par

l'algorithme du gradient conjugué, l'interruption de la reconstruction régularise le problème de manière équivalente à une pénalisation quadratique dont le poids varie en raison inverse du nombre d'itérations exécutées. Par conséquent, lorsqu'on régularise le problème à l'aide d'une pénalisation non quadratique, l'arrêt prématuré de l'itération peut ruiner la préservation des discontinuités.

La question de la convergence est à nouveau évoquée lorsqu'on considère le choix d'une méthode à sous-ensembles ordonnés. En effet, ces méthodes semblent procurer des images de bonne qualité malgré qu'elles ne convergent pas. L'expérimentation suggère même que, une fois que la méthode est en régime permanent (comportement asymptotique cyclique), l'amélioration de la qualité de l'image reconstruite se poursuit. Ahn *et al.* (2006) montrent néanmoins qu'une méthode convergente de reconstruction procure une image de meilleure qualité que celle obtenue au bout d'un même temps de calcul par une variante OS.

Il apparaît donc que la détermination d'un critère d'arrêt qui permet d'obtenir la qualité désirée de l'estimateur est cruciale. Pourtant, à notre connaissance, le sujet n'est pas traité dans la littérature sur la reconstruction tomographique.

1.5.5 Approches pour la reconstruction polychromatique

Outre Hamelin *et al.* (2008), qui résolvent directement le problème de reconstruction polychromatique régularisé avec le solveur L-BFGS-B (Zhu *et al.*, 1997), les contributions présentées à la section 1.4.2 mettent en œuvre des généralisations des algorithmes présentés à la section 1.5.2. De Man *et al.* (2001) emploient la tech-

nique de descente de coordonnées de Fessler *et al.* (1997). Elbakri et Fessler (2002, 2003) utilisent l’itération de substitution quadratique séparable avec sous-ensembles ordonnés mise au point par Erdoğan et Fessler (1999b). O’Sullivan et Benac (2007) proposent un algorithme différent pour le problème de reconstruction posé par Elbakri et Fessler (2003). Cet algorithme est basé sur une généralisation du principe d’espérance-maximisation par application du lemme de décomposition à la minimisation d’une I-divergence liée de près à la log-vraisemblance de la loi de Poisson. Finalement, Chueh *et al.* (2008) résolvent leur problème de reconstruction polychromatique à l’aide de l’algorithme OS-EM.

1.5.6 Critique

La majorité des techniques de type EM ou de substitution séparable repose sur des choix établis sur la base d’une critique aujourd’hui contestable de la gestion des contraintes par les algorithmes d’optimisation non linéaire sans hessien. La littérature sur l’optimisation foisonne à présent de méthodes qui gèrent adroitement les contraintes de bornes sur les variables. Les algorithmes d’usage courant en reconstruction tomographique sont des itérations de descente de gradient accélérées par des méthodes heuristiques. Il apparaît donc pertinent d’expérimenter des méthodes numériques modernes pour la reconstruction tomographique régularisée.

De plus, malgré que la communauté de la tomographie sente la nécessité de la convergence, cette propriété est rarement mesurée de manière appropriée. En effet, la performance numérique des algorithmes est généralement mesurée par le temps

qu'ils mettent à réduire la fonction objectif à une certaine valeur observée comme minimale. Le lien entre l'atteinte de cette valeur et la qualité de la solution associée est flou. Dans le même ordre d'idées, l'arrêt de la procédure de reconstruction n'est pas explicitement traité dans les publications recensées. Si la convergence importe, il faudrait pouvoir la quantifier et se servir de cette mesure pour interrompre l'algorithme.

1.6 Représentation de l'objet imagé

Diverses approches de réduction de la dimension de la représentation du plan reconstruit⁴ sont explorées ici. Le but est de réduire le temps de calcul de la reconstruction statistique sans altérer la qualité de l'image finale. En effet, une représentation de petite dimension permet des calculs de projection et de rétroprojection rapides, mais peut affecter la résolution d'image (à variance d'image égale).

Cette exploration respecte toutefois certaines limites. Premièrement, les méthodes impliquant une représentation de l'objet sur une base fonctionnelle alternative, comme une base d'ondelettes (Niinimäki *et al.*, 2007; Delaney et Bresler, 1995), ne sont pas considérées. Pour bénéficier d'une réduction effective de la dimension, il faut changer l'approche fondamentale de régularisation du problème. En effet, en supposant que le signal soit décrit par un petit nombre d'éléments d'une telle base, on régularise en forçant à zéro les coefficients (Candès et Guo, 2002). La présente thèse demeure dans les limites de l'approche bayésienne décrite à la section 1.3 et,

⁴Dans la suite, le terme *objet* dénote ce plan spécifiquement.

dans ce cadre, les heuristiques devant être employées pour réduire la dimension de la décomposition ne justifient pas la complexité de l’approche.

Par ailleurs, les approches multigrilles classiques (Briggs *et al.*, 2000; Pan et Yagle, 1991) se sont avérées peu efficaces pour cette application. Des expériences préliminaires de reconstruction dans le cadre multigrille décrit par Oh *et al.* (2005) ont montré que 80 % des itérations servaient à obtenir les composantes de haute fréquence de l’image, de manière à obtenir la haute résolution attendue. Comme ces composantes ne sont représentables que sur la grille la plus fine de celles considérées, l’approche multigrille n’a pas réduit temps de calcul global de manière satisfaisante.

On s’intéresse principalement aux approches de reconstruction tomographique d’une région d’intérêt, désignée dans la littérature sous les termes de *region-of-interest tomography*, *zoom-in tomography* ou *targeted tomography*. L’idée est de décomposer l’objet imagé en deux zones : la région d’intérêt (ROI) et l’arrière-plan. La qualité d’image est principalement recherchée dans la ROI, qui est donc reconstruite par une méthode algébrique ou statistique. Pour y parvenir, il faut toutefois détenir une représentation adéquate de l’arrière-plan, obtenue simultanément ou préalablement par une reconstruction peu coûteuse en temps de calcul.

Hsieh *et al.* (2004) ont recensé et protégé par brevet la plupart des variantes de reconstruction d’une région d’intérêt. Plusieurs contributions demeurent par ailleurs notables en ce sens. La Rivière (2006) ne maintient de l’arrière-plan que sa contribution aux projections : il alterne entre la reconstruction de la région d’intérêt et l’estimation de la contribution de l’arrière-plan aux projections. Ziegler *et al.* (2008,

2006) extraient l’arrière-plan d’une image obtenue par reconstruction analytique sur une grille de même taille de pixel que celle utilisée pour représenter la région d’intérêt. La contribution de l’arrière-plan aux projections est obtenue par simulation. Rashed *et al.* (2007) emploient une approche similaire, mais filtrent les projections après avoir soustrait la contribution de l’arrière-plan dans le but de réduire les artéfacts qui apparaissent dans la région d’intérêt. Stearns *et al.* (2006) procèdent d’une manière semblable à Ziegler *et al.* (2006), mais extraient plutôt l’arrière-plan d’une reconstruction itérative du volume imagé complet représenté sur une grille image grossière (de faible dimension). Hamelin *et al.* (2007) reconstruisent l’arrière-plan (représenté sur une grille grossière, de la même manière que dans Stearns *et al.* (2006)) et la ROI simultanément. Ce problème de reconstruction simultanée est mal conditionné : Hamelin *et al.* (2007) surmontent cette difficulté numérique par une correction d’échelle du gradient de la fonction objectif.

Toutes ces approches contournent effectivement l’usage d’une matrice de projection $\mathbf{A}$ de grandes dimensions, permettant des réductions significatives du temps de calcul. Il reste que ces diverses représentations de l’arrière-plan (ou de sa contribution aux projections) ont un impact non trivial sur les propriétés de l’image dans la région d’intérêt. À ce jour, aucun travail de comparaison de ces diverses approches n’a été rapporté.

Les techniques de reconstruction d’une région d’intérêt s’apparentent à un problème qui a reçu beaucoup d’attention récemment, soit celui de la tomographie locale. Il consiste en l’identification d’un sous-ensemble des projections qui suffit à la recons-

truction stable d'une région d'intérêt circonscrite dans le volume imagé, sans erreur liée à l'incomplétude des données (comme dans le cas de la tomographie à angle partiel). La résolution de ce problème permet effectivement de collimater partiellement le faisceau X, ce qui permet une réduction de la dose à laquelle l'objet est soumis. Defrise *et al.* (2006) montrent que si la région d'intérêt chevauche partiellement le complément du support de l'objet, un sous-ensemble peut effectivement être identifié systématiquement. Ils en déduisent un algorithme statistique régularisé axé sur un opérateur de projection $\mathbf{A}$ dont le nombre de lignes est réduit de manière appropriée. Courdurier *et al.* (2008) et Kudo *et al.* (2008) présentent des algorithmes moins contraignants sur le choix de la ROI, mais qui nécessitent une connaissance de l'objet dans une sous-région de la ROI. Ces contraintes sont limitantes dans le cadre de l'imagerie vasculaire des vaisseaux périphériques, où l'artère sous examen est éloignée de la limite du corps du patient. De plus, les algorithmes itératifs, tels que celui proposé par Defrise *et al.* (2006), nécessitent la reconstruction du volume imagé complet : bien que seule la reconstruction de la région d'intérêt soit stable, les pixels de l'arrière-plan doivent être évalués pour maintenir la cohérence du modèle de projection. Ainsi, la tomographie d'une région d'intérêt et la tomographie locale souffrent de problèmes complémentaires ayant trait à la réduction du temps de calcul de la reconstruction. D'une part, les méthodes de tomographie d'une région d'intérêt proposent une représentation de l'objet de dimension réduites, mais exécutent la reconstruction à partir du même nombre de données. D'autre part, la tomographie locale réduit le volume de données, mais maintient la représentation de l'objet sur

une grille image de haute dimension.

1.7 Synthèse des critiques

La mesure de la lumière d'une artère par tomographie à rayons X exige la reconstruction d'une image de haute résolution de l'artère libre d'artéfacts pouvant diminuer la précision. La reconstruction doit être réalisée à partir de données acquises par un protocole approuvé pour l'usage clinique. Le tomographe applique aux données un certain nombre de prétraitements visant la réduction d'artéfacts de multiples sources, dont les artéfacts métalliques. Malgré ces prétraitements des données, les images reconstruites par cet appareil comportent un certain nombre d'artéfacts.

Parmi les approches de reconstruction recensées dans ce chapitre, les techniques basées sur l'estimation MAP sont les plus appropriées pour la réduction de ces artéfacts. Ces techniques nécessitent cependant un temps de calcul excessif, particulièrement pour des ensembles de données cliniques et des images de grande dimension (nécessaires pour la haute résolution). Divers aspects de la modélisation et de la résolution numérique du problème de reconstruction méritent donc qu'on s'y attarde.

D'une part, le profilage des algorithmes statistiques suggère que le temps de calcul est fortement dominé par les projections et rétroprojections (respectivement, les produits à droite et à gauche de $\mathbf{A}$). Ainsi, le temps de calcul est notamment élevé à cause de la grande dimension de l'image. Puisqu'on cherche à mesurer la lumière d'une artère, qui ne couvre qu'une petite région du plan reconstruit, il n'est nécessaire d'obtenir une haute résolution d'image que dans une zone restreinte autour

de l'artère. Cet aspect du problème de reconstruction permet vraisemblablement la mise en œuvre de la reconstruction à l'aide d'une représentation de l'objet de plus petite dimension.

D'autre part, les développements méthodologiques visant la résolution numérique du problème de reconstruction nécessitent un travail de synthèse. La littérature portant sur la tomographie présente plusieurs algorithmes intéressants du fait de leur convergence globale. Cependant, ces algorithmes ont tous un ordre de convergence locale linéaire. Par ailleurs, la communauté de l'optimisation a proposé au cours des quinze dernières années de nombreux algorithmes sans matrice globalement convergents, dont l'importance en reconstruction tomographique régularisée semble avoir été ignorée. Seule une comparaison empirique de la performance numérique de ces divers algorithmes permettrait d'établir lesquels devraient être préférés.

Un autre aspect méthodologique important de la résolution du problème de reconstruction est la condition d'arrêt des méthodes numériques. Cette question n'est pas traitée en profondeur dans les références examinées. Les quelques critères qu'on retrouve dans la littérature sont heuristiques et la tolérance d'arrêt spécifiée n'est pas justifiée. Pourtant, la stratégie de régularisation mise en œuvre à l'aide d'une pénalisation non quadratique vise un certain compromis résolution-variance pour l'image reconstruite. Le compromis qu'on obtient dépend de cette condition d'arrêt.

Le chapitre qui suit résume le travail de recherche effectué afin de résoudre les problèmes soulevés par ces critiques.

Chapitre 2

Synthèse du travail de recherche

Le but du présent travail est de réduire le temps de calcul de l'algorithme de reconstruction statistique régularisé. Pour évaluer l'ordre de grandeur de ce temps de calcul, considérons la reconstruction d'une tranche carrée de 50 cm de côté représentée par une image de dimension 512×512 . Le sinogramme a été acquis à l'aide d'une barrette de 672 détecteurs sur 1160 angles de projection, avec une source de rayons X volante sur une trajectoire angulaire. Par exemple, soyons à résoudre le problème (1.15), basé sur un modèle de projection monochromatique, à l'aide de l'une des méthodes numériques décrites à la section 1.5. Sur un ordinateur personnel moderne (processeur Intel Core 2 Duo à fréquence d'horloge 2,83 GHz muni de 4 Go de mémoire principale), le temps de calcul de la fonction objectif du problème (1.15) et de son gradient est dominé par les opérations de projection et de rétroprojection (produits à gauche et à droite de la matrice $\mathbf{A}$), ce qui nécessite environ 8 secondes ; cela correspond au temps minimal nécessaire pour l'exécution d'une itération de la méthode numérique. Si on considère plutôt la variante de De Man *et al.* (2001) du modèle polychromatique de projection (1.18), deux projections et deux rétroprojec-

tions prennent environ 16 secondes, et l'évaluation de Kn exponentielles nécessite environ 4 secondes de plus, d'où un temps de calcul minimal de 20 secondes par itération. Il est clair qu'il n'est pas possible de réduire ce temps de calcul à celui de la reconstruction analytique réalisée par le tomographe. Cependant, ramener le temps de calcul à quelques minutes pour une image 2D apparaît envisageable.

2.1 Choix d'une méthode numérique

Il est difficile d'estimer le temps de calcul global à partir de ces considérations, parce que le nombre d'itérations nécessaires à la convergence dépend de la méthode numérique. Des expériences préliminaires avec l'algorithme L-BFGS-B ont montré que, pour obtenir un point stationnaire approximatif ($\|F(\boldsymbol{\mu}^k)\| < 10^{-2}$), plusieurs dizaines d'itérations sont nécessaires tant avec un modèle de projection monochromatique qu'un modèle polychromatique. Selon que l'objet comporte des structures métalliques ou non, le temps de calcul de la reconstruction basée sur le modèle de projection monochromatique nécessite entre 30 et 60 minutes. Avec un modèle de projection polychromatique, le problème de reconstruction est mal conditionné et le temps de calcul va au-delà de cinq heures.

Cette constatation soulève une difficulté importante quant au choix d'une méthode numérique pour la reconstruction tomographique : le choix d'une condition d'arrêt. Cette condition devrait être liée aux propriétés de l'image, de sorte qu'une fois satisfaite, elle permette d'obtenir une idée de la résolution et de la variance de l'image en regard de celles de la solution exacte du problème de reconstruction.

Puisque l'image reconstruite est une solution approximative d'un problème d'optimisation, il apparaît naturel de stopper l'itération lorsque l'image est suffisamment proche d'un point stationnaire de la fonction objectif; formellement, la condition d'arrêt devrait prendre la forme

$$\|\nabla F(\boldsymbol{\mu}^k)\| < \tau. \quad (2.1)$$

Une condition de cette forme exige qu'on choisisse conjointement le type de norme (euclidienne, l_∞ , Manhattan...) et la tolérance d'arrêt τ . Ces choix doivent être faits en fonction de la sensibilité des propriétés de l'image (résolution et bruit) à cette tolérance. Le chapitre 3 présente une telle analyse de sensibilité, et propose une valeur de τ pour la norme euclidienne du gradient de l'objectif qui garantit une borne sur l'erreur quadratique moyenne de l'image $\boldsymbol{\mu}^k$ prise en tant qu'estimateur de l'image réelle. Cette analyse n'est applicable qu'à la reconstruction basée sur un modèle de projection monochromatique. De plus, elle néglige la contrainte de non-négativité imposée à la solution. La suite du travail utilise néanmoins le critère d'arrêt qui en découle en remplaçant dans (2.1) le gradient de l'objectif par son gradient projeté, défini comme

$$\Xi F(\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu} - \mathcal{P}_{\{\boldsymbol{\mu} \geq 0\}}[\boldsymbol{\mu} - \nabla F(\boldsymbol{\mu})] = \begin{cases} [\nabla F(\boldsymbol{\mu})]_i & \text{si } \mu_i \geq [\nabla F(\boldsymbol{\mu})]_i \\ \mu_i & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathcal{P}_{\{\boldsymbol{\mu} \geq 0\}}[\boldsymbol{v}]$ dénote la projection orthogonale de $\boldsymbol{v}$ sur l'orthant positif.

Cette condition d'arrêt définit un objectif quant à la réduction du temps de calcul, puisqu'elle permet d'associer un temps de calcul fixe à une méthode numérique proposée pour la résolution du problème (1.15). Afin de réduire le temps de cal-

cul, il est capital de choisir l’une des méthodes sans matrice les plus rapides parmi celles considérées comme applicables au problème de reconstruction tomographique de grande taille. Ces méthodes ont toutes un ordre de convergence locale linéaire (à l’exception de la méthode de Newton tronquée), mais on sait qu’en pratique, leurs performances numériques varient significativement. Le choix de la méthode doit donc être appuyé par une comparaison empirique rigoureuse. C’est l’objet du chapitre 4, où des méthodes issues de trois familles distinctes sont mises à l’épreuve. Parmi les méthodes comparées, deux ont été développées spécifiquement pour la tomographie de transmission. Il s’agit de méthodes de substitution parabolique séparables, l’une accélérée par une stratégie de sous-ensembles ordonnés (OS-SPS, Erdoğan et Fessler (1999b)) et l’autre développée pour tirer profit d’une stratégie analogue tout en préservant sa propriété de convergence (TRIOT, Ahn *et al.* (2006)). Ces algorithmes sont comparées à deux méthodes numériques d’optimisation non linéaire d’usage général basées sur une approximation hessienne quasi-Newton à mémoire limitée. Il s’agit de L-BFGS-B (Zhu *et al.*, 1997), une méthode à ensemble actif, et de IPOPT (Wächter et Biegler, 2006), une méthode de point intérieur spécialement configurée pour éviter l’usage de matrices de grande dimension.

Il ressort de cette comparaison que les méthodes d’optimisation d’usage général ont un temps de calcul inférieur à celui de TRIOT et d’OS-SPS. Cependant, bien que ce dernier algorithme soit intrinsèquement non convergent, il parvient rapidement à des images d’aussi bonne qualité que celles auxquelles L-BFGS-B et IPOPT s’arrêtent. Cela souligne le fait que le critère d’arrêt du chapitre 3 est une condition

suffisante de la qualité d'image, mais pas une condition nécessaire. Les résultats de la comparaison justifient néanmoins l'adoption de L-BFGS-B, dont le temps de calcul est inférieur à celui des méthodes convergentes spécifiques à la tomographie, pour la suite du travail.

2.2 Représentation de l'objet imagé

Le temps de calcul excessif demeure dominé par les produits de projection et de rétroprojection. Ces produits sont coûteux, à cause de la grande dimension des données et de la représentation de l'objet. Ce dernier doit notamment être représenté sur une grille fine pour préserver la résolution de l'image, ce qui permet des mesures précises de la lumière d'une artère.

Cependant, l'artère examinée n'occupe qu'un tout petit espace dans l'image. Il apparaît donc intéressant de représenter l'objet par une grille de discrétisation hybride : la *région d'intérêt* (ROI), qui contient le vaisseau sanguin, et l'*arrière-plan* qui constitue le reste de l'image. La première est finement discrétisée, alors que la seconde l'est grossièrement. Ce schéma de représentation réduit effectivement la dimension totale de l'opérateur de projection qui s'y rattache.

Cette décomposition introduit cependant certains défis méthodologiques pour la reconstruction. Ces défis, traités de manière préliminaire par Hamelin *et al.* (2007), sont pleinement relevés dans le chapitre 5. Cet article présente deux approches pour la représentation et la reconstruction de l'arrière-plan, et compare leur impact respectif sur la qualité de l'image obtenue dans la région d'intérêt. Ces deux approches

reposent sur une reconstruction préliminaire de l'image entière, mais différent quant à la méthodologie employée. La première approche implique une reconstruction statistique régularisée d'une grille image grossière. La deuxième est basée sur la reconstruction analytique d'une grille image dont la taille de pixel est la même que dans la région d'intérêt.

Ces approches alternatives impliquent deux compromis. D'une part, la reconstruction itérative sur une grille grossière produit une image où les artéfacts sont réduits, mais dont la résolution est limitée. Réciproquement, la reconstruction analytique fournit un arrière-plan de même résolution que la ROI, quoique altéré par divers artéfacts. D'autre part, la reconstruction analytique de l'arrière-plan est essentiellement gratuite, puisqu'elle peut être réalisée par le scanner très rapidement. À l'opposé, la reconstruction itérative d'un arrière-plan grossier nécessite un temps de calcul qui demeure significatif et qui est supérieur à celui de la reconstruction de la région d'intérêt.

L'article du chapitre 5 propose une analyse de sensibilité de la qualité de la reconstruction de la région d'intérêt tenant compte de ces deux compromis. Dans un premier temps, on y compare des reconstructions de la région d'intérêt pour des arrière-plans obtenus par une méthode itérative sur des grilles de plusieurs dimensions. Dans un deuxième temps, les deux approches sont comparées l'une à l'autre, dans le but de déterminer dans quelles circonstances la coûteuse reconstruction statistique de l'arrière-plan peut améliorer la qualité d'image dans la région d'intérêt.

2.3 Réduction des artéfacts métalliques

Le choix d'une méthode numérique rapide et la représentation de l'image par la décomposition en arrière-plan et en région d'intérêt suffisent pour rendre très rapide la reconstruction basée sur un modèle monochromatique de projection. En effet, la reconstruction de la seule région d'intérêt nécessite moins d'une minute dans les conditions et avec les moyens de calcul mentionnés au début du chapitre 2.

L'adaptation de ces approches à la reconstruction basée sur un modèle de projection polychromatique nécessite un nouvel effort méthodologique. Par ailleurs, le temps de calcul peut être réduit encore davantage. D'une part, le modèle de projection polychromatique de base (1.18) nécessite le calcul de l'exponentielle terme-à-terme des projections calculées pour chaque niveau d'énergie représenté par un échantillon du modèle discret du spectre d'émission de la source de rayons X. Ces calculs sont très coûteux en regard des projections et rétroprojections, particulièrement durant la reconstruction de la région d'intérêt. De plus, l'algorithme de De Man *et al.* (2001) repose sur la modélisation de l'incertitude sur les mesures par la loi de Poisson. Le problème de reconstruction qui en résulte est mal conditionné et semble mal adapté à la description de données qui ont été prétraitées au moment de l'acquisition.

Le chapitre 6 porte sur la résolution de ces problèmes méthodologiques de manière à réduire le temps de calcul. Trois contributions y sont présentées. La première est l'adaptation de la grille image hybride au modèle de projection polychroma-

tique. Comme ce modèle repose sur une équation non linéaire, il n'est pas possible de déduire les projections de la région d'intérêt en soustrayant la contribution de l'arrière-plan, comme dans le cas du modèle monochromatique traité au chapitre 5. On peut toutefois appliquer une stratégie similaire, qui consiste simplement à fixer les projections des contributions à l'atténuation dans l'arrière-plan de l'effet photo-électrique et de la dispersion de Compton.

La seconde contribution est un nouveau modèle du spectre d'émission de la source qui contourne les difficultés inhérentes au sous-échantillonnage du modèle discret du spectre. Ce nouveau modèle décompose le spectre en deux sous-spectres, chacun lié à un phénomène d'émission distinct. Le sous-spectre lié à l'émission générale est continu et se prête à un sous-échantillonnage grossier. À l'opposé, le sous-spectre lié à l'émission caractéristique est naturellement discret, donc modélisé par une paire de d'impulsions de Dirac. Ce nouveau modèle permet une représentation adéquate du spectre à l'aide d'un nombre d'échantillons inférieur par un ordre de grandeur à celui du modèle discret original.

La troisième contribution est la formulation d'un algorithme de reconstruction plus rapide, basé sur le modèle de projection

$$\mathbf{y} = \log \left[\sum_{j=1}^K b_j \exp[-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}^j] \right],$$

et sur un modèle gaussien de l'incertitude sur $\mathbf{y}$. Hamelin *et al.* (2008) avaient déjà remarqué, pour des données réelles prétraitées, la meilleure efficacité numérique de cet algorithme en comparaison de la minimisation de la log-vraisemblance régularisée de la loi de Poisson.

L'article du chapitre 6 valide séparément chacune de ces contributions sur des données de simulation. De plus, on y compare la qualité des images obtenues et les performances numériques du nouvel algorithme à celles d'un algorithme déduit de la modélisation des incertitudes par la loi de Poisson et d'un algorithme basé sur un modèle de projection monochromatique.

Chapitre 3

On the stopping criterion for numerical methods for linear systems with additive Gaussian noise

Rapport technique EPM-RT-2009-10
de l'École Polytechnique de Montréal.

Benoit Hamelin,^{*†} Yves Goussard[†] and Jean-Pierre Dussault[‡]

Abstract We consider the inversion of a linear operator with centered Gaussian white noise by MAP estimation with a Gaussian prior distribution on the solution. The actual estimator is computed approximately by a numerical method. We propose a relation between the stationarity measure of this approximate solution to the mean square error of the exact solution. This relation enables the formulation of a stopping

^{*}Corresponding author : benoit-2.hamelin@polymtl.ca

[†]Benoit Hamelin and Yves Goussard are with the Institut de génie biomédical, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Canada.

[‡]Jean-Pierre Dussault is with the Département d'informatique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada.

test for the numerical method, met only by iterates that satisfy chosen statistical properties. We extend this development to Gibbs priors using a quadratic extrapolation of the log-likelihood maximized by the MAP estimator.

3.1 Introduction

We consider the inversion of a system of equations where a Gaussian process is superposed to the image of a linear operator. Problems of this kind appear in many digital imaging and signal processing applications, among many other engineering domains. The inversion is naturally computed by means of a regularized estimator, which entails the resolution of a least squares minimization problem.

The exact formulation of this problem depends on the prior distribution that is assumed over the domain of the operator to invert. On the one hand, when this distribution is Gaussian, the least squares objective function is compounded to a quadratic penalization term, yielding a quadratic program. The solution of this program corresponds to the root of the normal equation, which is usually found by a direct method, such as QR decomposition, or by a sequential recurrent process. The latter approach is practical even in cases where the linear operator is not represented in an explicit matrix form. However, for large-scale problems, the full sequential process can prove prohibitively costly in terms of runtime. One must then turn to methods for symmetric definite positive linear systems, such as the conjugate gradient or Lanczos iterations (Kelley, 1995), which may converge to a good estimator at

the cost of fewer operator evaluations. On the other hand, the use of a non-Gaussian prior distribution¹ (Idier, 2001) compounds a nonquadratic, though possibly smooth or convex, penalization term to the least-squares objective. Numerical methods for nonlinear optimization are then the only feasible approach for the task at hand.

In any such application where numerical methods are involved, the question of the stopping test is seldom addressed in full. In the Gaussian prior case, some norm of the residual of the normal equation is typically used to determine convergence. In the alternate case, nonlinear solvers all seem to have their own convergence criterion, which relies on measures of objective descent or stationarity. In both cases, the choice of the stopping tolerance for the convergence test is of significant incidence to the statistical properties of the estimator. Indeed, it is known that early termination of the numerical method entails implicit regularization of the estimator that is equivalent to adding a supplemental quadratic penalization term to the objective being minimized (Engl *et al.*, 1996). This is unacceptable when using a non-Gaussian prior distribution, as it ruins the specific properties of the estimator brought by the nonquadratic penalization. For a Gaussian prior, the supplemental penalization inflates the bias of the estimator, as it is positively correlated to the weight of the penalization terms of the least-squares objective. The opposite error with respect to the choice of the stopping tolerance raises some practical issues, as it augments the runtime of the estimation, possibly past acceptable levels.

¹The nonquadratic penalization brought by the use of a non-Gaussian prior distribution on the solution favors certain desirable properties of the solution, such as the better preservation of high-frequency structures with respect to quadratic penalization.

We report herein on a relation between the mean square error (MSE) of an estimator obtained from a truncated numerical method and a stationarity measure of this estimator with respect to the least-squares problem. We deduct from this relation a statistical interpretation to the stopping tolerance, which may then be chosen with respect to a tolerated error level.

The rest of this paper is as follows. Section 3.2 recalls the properties of the maximum *a posteriori* (MAP) estimator in the case of a Gaussian prior distribution. Section 3.3 discusses a variant of this estimator that corresponds to an approximate solution to the least squares problem and derives a stopping criterion for numerical methods in the Gaussian prior case. Section 3.4 extends these results to the case of a non-Gaussian prior distribution. Section 3.5 offers some concluding remarks.

3.2 MAP estimation with a Gaussian prior distribution

Let us first recall the inverse problem at hand. We have²

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

with $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}$ a matrix of dimensions $m \times n$ and

$$\mathbf{b} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_m).$$

²In the following a random variable and its realizations will be noted samewise, unless where it would be confusing.

The distribution of $\mathbf{y}$ conditional on $\mathbf{x}$ is then Gaussian of expectation $\mathbf{A}\mathbf{x}$ and covariance $\sigma^2\mathbf{I}_m$, so it is expressed as

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})^t(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})}{2\sigma^2}\right).$$

We also set the prior distribution of $\mathbf{x}$ as Gaussian of null expectation and covariance $\sigma_x^2(\mathbf{R}^t\mathbf{R})^{-1}$, so its density is

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{|\mathbf{R}^t\mathbf{R}|}{(2\pi\sigma_x^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^t\mathbf{R}^t\mathbf{R}\mathbf{x}}{2\sigma_x^2}\right).$$

This model allows for the estimation of $\mathbf{x}$ by maximizing the log-likelihood of the posterior density of $\mathbf{x}$ with respect to the given $\mathbf{y}$. This MAP estimator solves the least-squares optimization problem

$$\min \frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\mathbf{R}\mathbf{x}\|^2, \quad (3.1)$$

with $\lambda = \sigma^2/\sigma_x^2$. It therefore satisfies

$$(\mathbf{A}^t\mathbf{A} + \lambda\mathbf{R}^t\mathbf{R})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^t\mathbf{y}, \quad (3.2)$$

with $\mathbf{N} = \mathbf{A}^t\mathbf{A} + \lambda\mathbf{R}^t\mathbf{R}$, so we can write

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{y}. \quad (3.3)$$

The minimal mean square error (conditional to $\mathbf{y}$) estimator is known to be

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}} = \mathbf{E}[\mathbf{x} | \mathbf{y}]$$

(Shanmugan et Breipohl, 1988). In this case, we may show that it corresponds to the MAP estimator (3.3) by expressing the probability density of $\mathbf{x}$ conditional on $\mathbf{y}$:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{x})f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{x})f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}}. \quad (3.4)$$

Let us develop equation (3.4) starting with its numerator.

$$\begin{aligned}
& f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\sigma_x^2 (\mathbf{R}^t \mathbf{R})^{-1}|^{1/2} (2\pi)^{m/2} |\sigma^2 \mathbf{I}|^{1/2}} \times \\
&\quad \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})^t (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) - \frac{1}{2\sigma_x^2} \mathbf{x}^t \mathbf{R}^t \mathbf{R} \mathbf{x} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\sigma_x^2 (\mathbf{R}^t \mathbf{R})^{-1}|^{1/2} (2\pi)^{m/2} |\sigma^2 \mathbf{I}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{\mathbf{y}^t \mathbf{y}}{2\sigma^2} \right) \times \\
&\quad \exp \left(-\frac{-\mathbf{y}^t \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^t \mathbf{A}^t \mathbf{y} + \mathbf{x}^t \mathbf{N}\mathbf{x}}{2\sigma^2} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\sigma_x^2 (\mathbf{R}^t \mathbf{R})^{-1}|^{1/2} (2\pi)^{m/2} |\sigma^2 \mathbf{I}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{\mathbf{y}^t \mathbf{y} + \mathbf{y}^t \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y}}{2\sigma^2} \right) \times \\
&\quad \exp \left(-\frac{\mathbf{x}^t \mathbf{N}\mathbf{x} - \mathbf{y}^t \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N}\mathbf{x} - \mathbf{x}^t \mathbf{N} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y} + \mathbf{y}^t \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y}}{2\sigma^2} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\sigma_x^2 (\mathbf{R}^t \mathbf{R})^{-1}|^{1/2} (2\pi)^{m/2} |\sigma^2 \mathbf{I}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{\mathbf{y}^t \mathbf{y} + \mathbf{y}^t \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y}}{2\sigma^2} \right) \times \\
&\quad \exp \left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y})^t \mathbf{N} (\mathbf{x} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y})}{2\sigma^2} \right). \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Therefore, the denominator of equation (3.4) may be expressed as

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\sigma_x^2 (\mathbf{R}^t \mathbf{R})^{-1}|^{1/2} (2\pi)^{m/2} |\sigma^2 \mathbf{I}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{\mathbf{y}^t \mathbf{y} + \mathbf{y}^t \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y}}{2\sigma^2} \right) \times \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y})^t \mathbf{N} (\mathbf{x} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y})}{2\sigma^2} \right) d\mathbf{x}. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Let $u = \frac{1}{\sigma} \mathbf{N}^{1/2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$, for which $\nabla \mathbf{x}(u) = \sigma \mathbf{N}^{-1/2}$; then equation (3.7) resolves to

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) &= \frac{|\sigma \mathbf{N}^{-1/2}|}{(2\pi)^{n/2} |\sigma_x^2 (\mathbf{R}^t \mathbf{R})^{-1}|^{1/2} (2\pi)^{m/2} |\sigma^2 \mathbf{I}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{\mathbf{y}^t \mathbf{y} + \mathbf{y}^t \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y}}{2\sigma^2} \right) \times \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^t u/2} du \\
&= \frac{|\sigma \mathbf{N}^{-1/2}| (2\pi)^{m/2}}{(2\pi)^{n/2} |\sigma_x^2 (\mathbf{R}^t \mathbf{R})^{-1}|^{1/2} (2\pi)^{m/2} |\sigma^2 \mathbf{I}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{\mathbf{y}^t \mathbf{y} + \mathbf{y}^t \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y}}{2\sigma^2} \right). \tag{3.8}
\end{aligned}$$

By putting (3.6) and (3.8) together, we get

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\sigma^2 \mathbf{N}^{-1}|} \exp \left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y})^t \mathbf{N} (\mathbf{x} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y})}{2\sigma^2} \right). \quad (3.9)$$

Equation (3.9) effectively describes a Gaussian probability density, with

$$\mathbb{E} [\mathbf{x} | \mathbf{y}] = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}} \text{ and}$$

$$\text{Var} [\mathbf{x} | \mathbf{y}] = \sigma^2 \mathbf{N}^{-1}.$$

This minimal MSE (conditional on $\mathbf{y}$) is

$$\begin{aligned} \text{MSE} [\hat{\mathbf{x}} | \mathbf{y}] &= \mathbb{E} [\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|^2 | \mathbf{y}] \\ &= \hat{\mathbf{x}}^t \hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{x}}^t \mathbb{E} [\mathbf{x} | \mathbf{y}] + \mathbb{E} [\mathbf{x}^t \mathbf{x} | \mathbf{y}] \\ &= -\hat{\mathbf{x}}^t \hat{\mathbf{x}} + \text{Tr} [\mathbb{E} [\mathbf{x} \mathbf{x}^t | \mathbf{y}]] \\ &= -\hat{\mathbf{x}}^t \hat{\mathbf{x}} + \text{Tr} [\sigma^2 \mathbf{N}^{-1} + \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}^t] \\ &= \text{Tr} [\sigma^2 \mathbf{N}^{-1}]. \end{aligned}$$

3.3 Inexact MAP estimator

The following defines the inexact solution of the normal system (3.2) as an estimator and relates its MSE to that of the MAP estimator (further on called the *exact* MAP estimator).

3.3.1 Definition and properties

Let us define the *inexact MAP estimator* as an approximate solution to the normal system (3.2). Formally, the inexact estimator $\tilde{\mathbf{x}}_{\tau}$ satisfies

$$\|\mathbf{A}^t \mathbf{y} - \mathbf{N} \tilde{\mathbf{x}}_{\tau}\| = \tau.$$

Without knowledge of the process used to generate such an estimator, we will consider that all possible estimators $\tilde{\mathbf{x}}_\tau$ with respect to $\mathbf{y}$ are equiprobable.

Lemma 1 *Consider the exact MAP estimator $\hat{\mathbf{x}}$ and fixed inexact MAP estimator $\tilde{\mathbf{x}}_\tau$. We have*

$$\frac{\tau^2}{\|\mathbf{N}\|^2} \leq \mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \mid \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] \leq \tau^2 \|\mathbf{N}^{-1}\|^2.$$

Proof We develop

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \mid \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] &= \mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{y}\|^2 \mid \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] \\ &= \|\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{N}\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \mathbf{A}^t \mathbf{y})\|^2. \end{aligned}$$

The upper bound is derived as

$$\mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \mid \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] \leq (\|\mathbf{N}^{-1}\| \|\mathbf{N}\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \mathbf{A}^t \mathbf{y}\|)^2 = \tau^2 \|\mathbf{N}^{-1}\|^2,$$

by definition of the inexact estimator. The lower bound comes from

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \mid \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] &= \frac{\|\mathbf{N}\|^2}{\|\mathbf{N}\|^2} \|\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{N}\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \mathbf{A}^t \mathbf{y})\|^2 \\ &= \frac{\|\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{N}\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \mathbf{A}^t \mathbf{y})\|^2}{\|\mathbf{N}\|^2} \\ &= \frac{\tau^2}{\|\mathbf{N}\|^2}, \end{aligned}$$

which concludes the proof. $\square$

Corollary 1 *Consider the exact MAP estimator $\hat{\mathbf{x}}$ and inexact MAP estimator $\tilde{\mathbf{x}}_\tau$.*

We then have

$$\frac{\tau^2}{\|\mathbf{N}\|^2} \leq \text{MSE}[\tilde{\mathbf{x}}_\tau | \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] - \text{MSE}[\hat{\mathbf{x}} | \mathbf{y}] \leq \tau^2 \|\mathbf{N}^{-1}\|^2. \quad (3.10)$$

Proof Develop :

$$\begin{aligned} & \text{MSE}[\tilde{\mathbf{x}}_\tau | \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] \quad (3.11) \\ &= \text{E} [\|\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \mathbf{x}\|^2 | \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] \\ &= \text{E} [\|\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|^2 | \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] \\ &= \text{E} [\|\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \hat{\mathbf{x}}\|^2 | \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] + 2 \text{E} [(\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \hat{\mathbf{x}})^\text{t}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) | \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] + \text{E} [\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|^2 | \mathbf{y}] \\ &= \text{E} [\|\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \hat{\mathbf{x}}\|^2 | \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] + 2(\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \hat{\mathbf{x}})^\text{t}(\hat{\mathbf{x}} - \text{E}[\mathbf{x} | \mathbf{y}]) + \text{MSE}[\hat{\mathbf{x}} | \mathbf{y}]. \end{aligned}$$

Therefore, $\text{MSE}[\tilde{\mathbf{x}}_\tau | \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] - \text{MSE}[\hat{\mathbf{x}} | \mathbf{y}] = \text{E} [\|\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \hat{\mathbf{x}}\|^2 | \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau]$, so lemma 1 yields the inequalities (3.10). $\square$

3.3.2 Stopping test for numerical methods

Corollary 1 suggests that the MSE (conditional on $\mathbf{y}$) of an inexact estimator is larger than that of the exact estimator and bounds the distance between the two. As we solve problem (3.1) through system (3.2) by a numerical method truncated once the norm of the residual reaches below a tolerance τ , we may set this tolerance in order to obtain a certain MSE. Formally, to get within a fraction α of the minimal

MSE, one should set the tolerance so it satisfies

$$\tau^2 \|\mathbf{N}^{-1}\|^2 \leq \alpha \text{MSE}[\hat{\mathbf{x}} | \mathbf{y}] = \alpha \sigma^2 \text{Tr}[\mathbf{N}^{-1}].$$

While σ^2 may be evaluated readily from the data, computing $\text{Tr}[\mathbf{N}^{-1}]$ may be a costly endeavour. However, since the trace of a matrix corresponds to the sum of its eigenvalues, we have a lower bound for the MSE of the form

$$\text{MSE}[\hat{\mathbf{x}} | \mathbf{y}] = \sigma^2 \text{Tr}[\mathbf{N}^{-1}] \geq \sigma^2 \left(\|\mathbf{N}^{-1}\| + \frac{n-1}{\|\mathbf{N}\|} \right) = \sigma^2 \|\mathbf{N}^{-1}\| \left(1 + \frac{n-1}{\kappa(\mathbf{N})} \right),$$

as the l_2 norm of a symmetric matrix corresponds to its eigenvalue of maximal absolute value and since matrix $\mathbf{N}$ is definite positive. Setting the stopping tolerance to

$$\tau = \sqrt{\frac{\alpha \sigma^2}{\|\mathbf{N}^{-1}\|} \left(1 + \frac{n-1}{\kappa(\mathbf{N})} \right)}$$

then yields an inexact MAP estimator whose MSE is no more than α larger than the minimal MSE.

3.4 Extension to non-Gaussian priors

We will now extend the results of section 3.3 to the more general case of a non-Gaussian prior distribution. As this yields a space-variant stopping criterion, we will consider practical approaches to setting the tolerance.

3.4.1 MAP estimation with a non-Gaussian prior

The use of a quadratic penalization for the regularisation of the least-squares estimation problem (3.1) suits smooth objects best. However, any discontinuity that

might be present in the object, such as edges between distinct regions in an image, will be significantly smoothed as estimated under such a penalization. Alternate penalty functions such as the generalized Gaussian Markov random field function (Bouman et Sauer, 1993a) or the l_2l_1 function (Charbonnier *et al.*, 1997) achieve better preservation of discontinuities. The probabilistic framework that enables this alternative regularization strategy is the Gibbs prior distribution of the object.

The generalization of the estimation problem to a generic penalty function $\psi(u)$ is expressed as

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min L(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \lambda R(\mathbf{x}), \quad (3.12)$$

where

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^J \nu_k \psi(\boldsymbol{\delta}_k^t \mathbf{x}),$$

ν are penalization weight modifiers for each sub-term and $\boldsymbol{\delta}_k$ are the rows of matrix $\boldsymbol{\Delta}$, of dimensions $J \times n$. This matrix captures the features of the solution to penalize with respect to prior information known on the solution. For instance, in image reconstruction applications, it is typically composed by the concatenation of the identity and of finite difference operators, expecting the image to be composed of many black pixels and to be constant by regions.

The (exact) MAP estimator solves problem (3.12) by satisfying a stationarity condition over the objective function. Formally,

$$\nabla L(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}^t(\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) + \nabla R(\hat{\mathbf{x}}) = 0.$$

Such a stationary point is found using numerical procedures for nonlinear optimization, such as the Newton-Raphson method or a quasi-Newton iteration with a suitable globalization strategy. Larger-scale problems are often tackled with methods that necessitate neither the evaluation of Hessian of the objective nor any matrix approximation thereof, such as a nonlinear conjugate gradient generalization or a limited-memory quasi-Newton update. These methods are covered in depth by Nocedal et Wright (2000).

3.4.2 Linear extrapolation of the estimation problem

Whatever the numerical method, the final iterate is only approximately stationary. To determine the quality of inexact MAP estimators obtained as approximate solutions to problem (3.12), we must make some assumptions with regards to $\hat{\mathbf{x}}$. In the following, we restrict the analysis to penalty functions at least twice differentiable.

Hypothesis 1 *Consider $\hat{\mathbf{x}}$, the exact MAP estimator that solves problem (3.12) and $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ close to $\hat{\mathbf{x}}$. We then assume that, for $\mathbf{x}$ in a ball of radius $\|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\|$ centered on $\hat{\mathbf{x}}$, we have*

$$L(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 + \lambda \left(R(\mathbf{x}_0) + \nabla R(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top \nabla^2 R(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right). \quad (3.13)$$

This hypothesis is justified by the log-likelihood function maximized as problem (3.12) being twice differentiable. It is well known that the behavior of suffi-

ciently smooth function may be extrapolated faithfully in a small region around its stationary points by a second-order Taylor development (Nocedal et Wright, 2000). Where this extrapolation holds, we have

$$\begin{aligned}\nabla L(\mathbf{x}) &\approx -\mathbf{A}^t(\mathbf{y} - \mathbf{Ax}) + \lambda \nabla R(\mathbf{x}_0) + \lambda \nabla^2 R(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \mathbf{A}^t(\mathbf{y} - \mathbf{Ax}) + \lambda \sum_{k=1}^J \delta_k \psi'(\delta_k^t \mathbf{x}_0) + \lambda \Delta^t D_\psi [\Delta \mathbf{x}_0] \Delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),\end{aligned}\tag{3.14}$$

with $D_\psi[\mathbf{u}]$, the *penalty curvature matrix*, a diagonal matrix of dimensions $J \times J$ for which element i of the diagonal is equal to $\psi''(\mathbf{u}_i)$. By defining

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{A}^t \mathbf{A} + \lambda \Delta^t D_\psi [\Delta \mathbf{x}_0] \Delta \text{ and}$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{A}^t \mathbf{y} - \lambda [\nabla R(\mathbf{x}_0) - \nabla^2 R(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0],$$

we re-express equation (3.14) as

$$\nabla L(\hat{\mathbf{x}}) \approx \mathbf{N}_0 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}_0 = 0.$$

and thus

$$\hat{\mathbf{x}} \approx \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{z}_0,$$

which yields a closed form of the estimator from a reference point close to it.

Hypothesis 1 also allows us to extrapolate the distribution of $\mathbf{x}$ conditional on $\mathbf{y}$. As we have a single realization of $\mathbf{y}$, the likelihood of $\mathbf{x}$ conditional on $\mathbf{y}$ corresponds to the distribution. This implies that, from the extrapolated log-likelihood of

equation (3.13), we can retrieve a Gaussian likelihood :

$$\begin{aligned}
& \arg \min L(\mathbf{x}) \\
&= \arg \max -\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})^t(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \\
&\quad - \lambda \left(R(\mathbf{x}_0) + \nabla R(\mathbf{x}_0)^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \nabla^2 R(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) \\
&= \arg \max -\frac{1}{2}(\mathbf{y}^t \mathbf{y} - \mathbf{y}^t \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^t \mathbf{A}^t \mathbf{y} + \mathbf{x}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A}\mathbf{x}) \\
&\quad - \lambda \left(\frac{1}{2} \nabla R(\mathbf{x}_0)^t \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^t \nabla R(\mathbf{x}_0) - \nabla R(\mathbf{x}_0)^t \mathbf{x}_0 \right) \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{x}^t \nabla^2 R(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^t \nabla^2 R(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^t \nabla^2 R(\mathbf{x}_0) \mathbf{x} + \mathbf{x}_0^t \nabla^2 R(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0) \\
&= \arg \max -\frac{1}{2} \mathbf{x}^t (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \lambda \nabla^2 R(\mathbf{x}_0)) \mathbf{x} \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathbf{x}^t (\mathbf{A}^t \mathbf{y} + \lambda (\nabla R(\mathbf{x}_0) - \nabla^2 R(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0)) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \mathbf{y} + \lambda (\nabla R(\mathbf{x}_0) - \nabla^2 R(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0))^t \mathbf{x} \\
&= \arg \max -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{x}^t \mathbf{N}_0 \mathbf{x} - \mathbf{x}^t \mathbf{N}_0 \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_0^t \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{N}_0 \mathbf{x} + \mathbf{z}_0^t \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{N}_0 \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{z}_0) \\
&= \arg \max \log \exp \left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{z}_0)^t \mathbf{N}_0 (\mathbf{x} - \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{z}_0)}{2\sigma^2} \right) - \log ((2\pi)^{n/2} |\sigma^2 \mathbf{N}_0^{-1}|) \\
&= \arg \max \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\sigma^2 \mathbf{N}_0^{-1}|} \exp \left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{z}_0)^t \mathbf{N}_0 (\mathbf{x} - \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{z}_0)}{2\sigma^2} \right) \approx f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} | \mathbf{y}), \tag{3.15}
\end{aligned}$$

the last objective yielding an extrapolated form of the probability density of $\mathbf{x}$ conditional on $\mathbf{y}$. This suggests that the extrapolated exact MAP estimator

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{z}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{x} | \mathbf{y}]$$

minimizes the MSE conditional on $\mathbf{y}$. From the extrapolated form of the density of $\mathbf{x}$ conditional on $\mathbf{y}$ (equation (3.15)), this MSE is expressed as

$$\text{MSE}[\mathbf{x} | \mathbf{y}] = \sigma^2 \text{Tr}[\mathbf{N}_0^{-1}].$$

Definition 1 *The inexact MAP estimator $\tilde{\mathbf{x}}_\tau$ in the context of a nonquadratic penalization satisfies*

$$\|\nabla L(\tilde{\mathbf{x}}_\tau)\| = \tau.$$

With respect to hypothesis 1, this suggests that for reference point $\mathbf{x}_0$ close enough to $\hat{\mathbf{x}}$ and $\tau \leq \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\|$, the inexact estimator satisfies

$$\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{N}_0 \tilde{\mathbf{x}}_\tau\| = \tau.$$

Moreover, for τ small enough, $\tilde{\mathbf{x}}_\tau$ itself may be used as “reference point” for the extrapolation. This completes the set of arguments that generalize the results of section 3.3 to estimators developed with a non-Gaussian prior distribution, in a small neighborhood of $\hat{\mathbf{x}}$. The following lemma and corollary are given without explicit proof, as the arguments are very close to those in the Gaussian prior case, with $\mathbf{N}$ and $\mathbf{A}^t \mathbf{y}$ replaced respectively with $\mathbf{N}_0$ and $\mathbf{z}_0$.

Lemma 2 *Let $\hat{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\mathbf{x}}_\tau$ be the exact and inexact MAP estimators, respectively. For small τ , we have*

$$\frac{\tau^2}{\|\mathbf{N}_0\|^2} \leq \mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{x}}_\tau - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \mid \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] \leq \tau^2 \|\mathbf{N}_0^{-1}\|^2.$$

Corollary 2 *Let $\hat{\mathbf{x}}$ and $\tilde{\mathbf{x}}_\tau$ be the exact and inexact MAP estimators, respectively.*

For small τ , we have

$$\frac{\tau^2}{\|\mathbf{N}_0\|^2} \leq \text{MSE} [\tilde{\mathbf{x}}_\tau \mid \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}_\tau] - \text{MSE} [\hat{\mathbf{x}} \mid \mathbf{y}] \leq \tau^2 \|\mathbf{N}_0^{-1}\|^2.$$

3.4.3 Stopping test revisited

Corollary 2 may be interpreted as a stopping test for the numerical method used to solve problem (3.12). This test involves the Euclidean norm of the extrapolated normal system (3.14), which more generally corresponds to the norm of the gradient of the objective, a common measure of stationarity of the solution in nonlinear programming. To generate an inexact estimator for which the MSE is decreased to within a fraction α of the minimal MSE, one should stop at iterate $\mathbf{x}_k$ such that

$$\|\nabla L(\mathbf{x}_k)\| \leq \tau = \sqrt{\frac{\alpha \text{MSE}[\hat{\mathbf{x}} | \mathbf{y}]}{\|\mathbf{N}_0^{-1}\|^2}}.$$

Once again, $\text{MSE}[\hat{\mathbf{x}} | \mathbf{y}]$ is hard to evaluate exactly, as matrix $\mathbf{N}_0^{-1}$ is not represented explicitly. However, a lower bound is determined as

$$\text{MSE}[\hat{\mathbf{x}} | \mathbf{y}] \geq \sigma^2 \|\mathbf{N}_0^{-1}\| \left(1 + \frac{n-1}{\kappa(\mathbf{N}_0)}\right),$$

which may be evaluated as $\|\mathbf{N}_0^{-1}\|$ corresponds to the inverse of the smallest eigenvalue of $\mathbf{N}_0$. The stopping tolerance may then be rewritten as

$$\tau = \sqrt{\frac{\alpha \sigma^2}{\|\mathbf{N}_0^{-1}\|} \left(1 + \frac{n-1}{\kappa(\mathbf{N}_0)}\right)}. \quad (3.16)$$

It appears from relation (3.16) that the tolerance selection depends on the reference point from which the log-likelihood is extrapolated. This entails that the tolerance should not be computed from any $\mathbf{x}_0$, as the penalty curvature matrix $\mathbf{D}_\psi[\Delta \mathbf{x}_0]$ has a significant influence on $\|\mathbf{N}_0^{-1}\|$. For instance, edge-preserving penalty functions (such as the GGMRF and l_2l_1 functions mentioned earlier) have maximal curvature at $u = 0$, making the smallest eigenvalue of matrix $\nabla^2 R(0)$ rather large. Thus, a

stopping tolerance computed from this eigenvalue will be larger than it should to reach the expected MSE.

Therefore, the actual tolerance should be computed from some $\mathbf{x}_0$ that resembles $\hat{\mathbf{x}}$ to a certain degree, in order for the curvature matrix to be close to that at the exact solution. One could then generate an inexact estimator $\tilde{\mathbf{x}}_\tau$ for a value of τ that is small but does not entail too much computations. The final stopping tolerance would be computed from this pilot estimator. If it exceeds the initial tolerance, the pilot estimator satisfies the MSE constraint ; otherwise, the nonlinear solver would be restarted from the pilot value and made to reach stationarity to the final tolerance. Another interesting approach is to compute the reference point by a fast approximation procedure when such a procedure exists for the application considered. For example, in context of transmission tomography reconstruction, one may obtain the reference point by the filtered backprojection algorithm (Kak et Slaney, 1987).

3.5 Concluding remarks

We have exposed a relation between the defining feature of an inexact estimator and its conditional MSE. From this, we have formulated a stopping criterion for numerical methods for solving the estimation problem, based on the stationarity measure of the iterate.

Besides the cavalier treatment of the prior distribution of $\mathbf{x}$ under hypothesis 1, the salient weakness of the development above is the systematic undervaluation of the

MSE of the exact estimator. This yields unduly low stopping tolerances, leading to the execution of more iterations than necessary to ascertain the statistic properties of the solution we accept. Yet, for an application of edge-preserving tomographic reconstruction, this exact framework has proposed sensible tolerances, for which reconstruction runtimes were acceptable with respect to data and image dimensions.

This said, for applications such as deconvolution in signal and image processing, the trace of the covariance matrix of the exact estimator can be more easily computed. This should entail looser converge criteria. We will investigate this issue in depth in an expanded version of this paper, where the general Gaussian measure model with Gaussian prior will be fully developed.

Chapitre 4

Performance Comparison of Numerical Methods for Penalized-Likelihood Reconstruction in X-Ray Tomography

Soumis à *IEEE Transactions on Medical Imaging*.

Benoit Hamelin, Yves Goussard, Jean-Pierre Dussault,
Guy Cloutier, Gilles Beaudoin and Gilles Soulez

Abstract Numerical efficiency and convergence are matters of importance for penalized-likelihood reconstruction in X-ray tomography.

We propose a performance comparison of four numerical methods that

Received October 15th, 2009. This work was funded by Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) and by the Collaborative Health Research Project #323572-06 of the Canadian Institutes of Health Research. B. Hamelin also acknowledges a Postgraduate Scholarship from the NSERC.

Benoit Hamelin (email : benoit-2.hamelin@polymtl.ca) and Yves Goussard are with the Institut de génie biomédical, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Canada. Jean-Pierre Dussault is with the Département d'informatique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada. Guy Cloutier, Gilles Beaudoin and Gilles Soulez are with the Centre de Recherche du Centre Hospitalier de l'Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada.

DOI : unavailable yet.

fall into two categories : first, variants of the SPS framework (Erdoğan et Fessler, 1999b), a modern take on EM-type algorithms, that benefit from acceleration through ordered subset strategies ; second, Hessian-free general-purpose nonlinear solvers with bound constraints, used to minimize directly the regularized Gaussian log-likelihood.

The comparison is established on a common stopping criterion based on a stationarity measure of the image. It shows that while the ordered-subsets nonconvergent SPS variant has the fastest initial progress, it stalls rapidly on a suboptimal cyclical behavior. General-purpose solvers are more efficient than the convergent SPS variant at catching up and achieving the stopping condition.

Keywords: X-ray tomography, penalized-likelihood reconstruction, nonlinear optimization, numerical methods, expectation-maximization, ordered subsets. .

4.1 Introduction

We take interest in applications of X-ray computed tomography (CT) for contrast-enhanced imaging of peripheral blood vessels. This requires high image resolution and good noise robustness for the accurate measurement of the lumen of arteries. These image properties may be obtained through regularized algebraic reconstruction techniques with edge-preserving penalization of the likelihood (Fessler, 2000).

The penalized-likelihood tomographic reconstruction problem reduces to a large-

scale nonnegatively-constrained nonlinear program. Many numerical methods have been proposed to solve this problem. Among them, the iterated coordinate descent (ICD, (Sauer et Bouman, 1993)) and ordered subsets expectation-maximization (OS-EM) (Hudson et Larkin, 1994) classes of methods have gained strong traction within the medical imaging community. The latter class has also been improved upon in the last fifteen years (Fessler *et al.*, 1997; Erdoğan et Fessler, 1999a,b; Ahn *et al.*, 2006), yielding fast procedures that make use of implicit representations of the projection operator (which may not be column-accessible, as required by ICD and some other EM-like methods (Erdoğan et Fessler, 1999a)) and that parallelize more easily.

The nonlinear optimization community has also published some works on this problem recently. Experimentation on interior point methods for positron emission tomographic reconstruction are reported in Johnson et Sofer (2000) and Hager *et al.* (2009). General methods for large-scale constrained problems have also been proposed. Such methods either fall into the category of active-set algorithms (Hager et Zhang, 2006b; Birgin et Martínez, 2002; Zhu *et al.*, 1997), which typically handle only bound constraints over variables, or barrier algorithms (Wächter et Biegler, 2006), which handle more general constraint sets. These numerical methods have exhibited both efficiency and robustness in multiple applications.

However, they are largely shunned among tomography practitioners. A common criticism regards the handling of the nonnegativity constraint that should be enforced on the solution. On the one hand, many algorithms that can enforce it, such as interior-point methods, are perceived as “heavyweight” that hardly lend themselves

to the resolution of the large-scale clinical reconstruction problems with a black-box representation of the projection operator. On the other hand, “lightweight” nonlinear solvers, such as limited-memory quasi-Newton and nonlinear conjugate gradient methods, handle the constraint awkwardly and inefficiently, if at all. Advances in constrained nonlinear programming force the reconsideration of both of these points of view.

In this paper, we seek to address the question whether CT reconstruction should be performed with CT-specific algorithms, or if general-purpose nonlinear solvers offer an edge in numerical performance. To this end, we propose an initial performance analysis of reconstruction method families for CT. We consider modern EM-like, CT-specific algorithms. They are variants of the a separable paraboloidal surrogate (SPS) minimization iteration : the fast but non-convergent ordered subsets SPS (OS-SPS, (Erdoğan et Fessler, 1999b)) and the more recent TRIOT (Ahn *et al.*, 2006), used as a convergent relaxation of OS-SPS. These methods are compared to the direct resolution of the reconstruction problem with two general-purpose nonlinear solvers with nonnegativity constraints. We use an active-set limited-memory quasi-Newton solver (L-BFGS-B, Zhu *et al.* (1997)) and an interior-point solver set up to compute a limited-memory quasi-Newton representation of second-order derivatives (IPOPT, Wächter et Biegler (2006)). These four solvers are run until they reach a common stopping condition that ensures a bound on the mean square error of the solution (Hamelin *et al.*, 2009a). Under this condition, we observe that direct resolution by general-purpose solvers effectively appears competitive against

CT-specific methods. It also appears that the convergence criterion does not paint the whole picture : while the faster OS-SPS code does not converge with respect to this criterion, it still yields images of equivalent quality to those obtained through direct resolution.

The literature presents but few accounts of performance comparison between numerical methods for algebraic X-ray tomography. As new algorithms are proposed, these are compared to those they improve upon, but rarely to competitive alternatives. A pilot assessment of the state-of-the-art methods specific to tomographic reconstruction is offered in (De Man *et al.*, 2005). While it is limited in scope and makes no attempt at reconciling convergence conditions over each algorithm, it concludes that they are essentially equivalent to each other in terms of performance. Another brief but compelling comparison of methods of different classes is from (Erdoğan et Fessler, 1999a), where an EM-like coordinate descent method is compared to direct resolution of the reconstruction problem with L-BFGS-B for emission tomography. Both these contributions measure numerical efficiency through the decrease of the objective function in the first iterations. We have found that the decrease of the objective is only loosely bound to the quality of the reconstructed image, which changes significantly during later iterations, where the objective value decreases only by tiny amounts. Image quality is more strongly correlated to *stationarity* of the image with respect to the cost function of the reconstruction problem, i.e. the norm of the gradient of the cost function (Hamelin *et al.*, 2009a). This is the metric by which we will measure convergence in the following experiments.

The rest of this paper is organized as follows. Section 4.2 briefly recalls the theory behind regularized algebraic reconstruction for CT. Section 4.3 presents a terse derivation of the SPS algorithmic variants for X-ray tomography. Section 4.5 introduces the modulation transfer function (MTF), a tool for comparing images resulting from different reconstruction algorithms. Section 4.6 presents and discusses the reconstruction experiments on which the performance comparison is based. Finally, Section 4.7 offers concluding remarks.

4.2 Penalized-likelihood tomographic reconstruction

The following is a brief primer on regularized algebraic reconstruction for computed tomography. A more in-depth account may be gathered from (Fessler, 2000) for regularized tomography techniques and from (Bouman et Sauer, 1993a) for their specific applications to CT.

We assume that the X-ray beam used for the examination is monochromatic and that the photon counts at the detectors are high (structures that compose the imaged object have low attenuation coefficients). In this case, reconstruction reduces to solving the inverse problem based on the measurement equation

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \quad (4.1)$$

where $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ is the logarithm of the sinogram, $\mathbf{A}$ is a discrete integral operator over each raypath of the tomographic acquisition, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ the 2D object represented as a map of X-ray attenuation coefficients (image) and $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ is additive noise. We

consider the noise to be a zero-mean, white Gaussian process with covariance $\sigma^2 \mathbf{I}$.

The inversion is carried out by maximizing the posterior log-likelihood of $\boldsymbol{\mu}$ conditional to $\mathbf{y}$, with respect to a prior distribution of $\boldsymbol{\mu}$. As $\mathbf{y}$ conditioned to $\boldsymbol{\mu}$ follows a Gaussian distribution with mean $\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$ and of covariance $\sigma^2 \mathbf{I}$, the estimation problem may be expressed as

$$\min_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} F(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}\|^2 + \lambda \sum_{k=1}^J \nu_k \psi(\boldsymbol{\delta}_k^t \boldsymbol{\mu}) \quad (4.2)$$

The second term of the objective function, which stems from the prior distribution of the object, regularizes the problem by penalizing undesirable properties of the solution. These properties are determined by the rows of matrix $\boldsymbol{\Delta} = [\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2 \dots \boldsymbol{\delta}_J]^t$, which would then result from the concatenation of an identity matrix (to penalize pixel intensity) and various discrete difference operators (to penalize neighboring pixel variations). The penalization of each such property is balanced by the weights $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_J$; the whole penalization term is itself balanced against the data adequation term by master weight λ . The choice of the penalty function $\psi(u)$ also denotes prior assumptions on the solution. The choice of quadratic $\psi(u) = u^2/2$, which corresponds to a Gaussian marginal distribution of $\boldsymbol{\mu}$, assumes the solution is a smooth map. We rather expect the attenuation map to be piecewise constant, so we select the $l_2 l_1$ penalty function

$$\psi(u) = \sqrt{u^2 + \eta^2} - \eta \quad (4.3)$$

(Charbonnier *et al.*, 1997). This convex function is the upper branch of a vertical hyperbola and as such, behaves quadratically for $|u|$ close to 0 and linearly as $|u|$

goes to infinity. Penalty functions such as this are known to preserve discontinuities in the reconstructed image better than the quadratic penalty (Lange, 1990).

Problem (4.2) is a convex nonlinear program with nonnegativity constraint. For clinical-size data and a high-resolution image representation, the projection operator becomes large even when taking advantage of its significant sparsity. Products at left and right of this huge matrix dominate the computation runtime. This problem lends itself well to large-scale nonlinear optimization solvers. Among them, the L-BFGS-B solver of (Zhu *et al.*, 1997) and the interior point code of (Wächter et Biegler, 2006) stand out, with their easy memory requirements, fast direction update and efficient handling of the nonnegativity constraint.

4.3 SPS algorithmic framework for X-ray tomography

The medical imaging community has developed a large body of specific optimization methods for the resolution of estimation problems such as (4.2). The following brushes on the SPS algorithmic framework of (Erdoğan et Fessler, 1999b), developed further in (Ahn *et al.*, 2006). This modern EM-like family of algorithms fits the custom sparse representation of the projection operator $\mathbf{A}$ that we have developed (Gendron, 2008), which is not column-accessible.¹

The basis of many iterative methods for solving differentiable nonlinear optimization problems is to solve a quadratic approximation to the cost function. For

¹This particularity of our projection operator makes coordinate descent methods such as ICD (Sauer et Bouman, 1993) impractical, which is why they are not considered in this work.

instance, the Newton-Raphson iteration involves the minimization of a second-order Taylor development of the objective. The runtime cost of the optimization algorithm then depends on the chosen quadratic approximation and the approach to its minimization — as does its convergence rate.

For large-scale CT reconstruction, diagonal quadratic approximations to the cost function $F(\boldsymbol{\mu})$, termed separable paraboloidal surrogate (SPS) functions, have obvious advantages. Indeed, their storage requirements and minimization runtime are both proportional to the number of variables (pixels in the image). Formally, from the image $\boldsymbol{\mu}^k$ obtained at iteration k , the surrogate minimized at iteration $k + 1$ is expressed as

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\mu}^k) = & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^k)^\text{t} \mathbf{C}(\boldsymbol{\mu}^k)(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^k) + \\ & \nabla F(\boldsymbol{\mu}^k)^\text{t}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^k) + F(\boldsymbol{\mu}^k), \end{aligned} \tag{4.4}$$

with matrix $\mathbf{C}(\boldsymbol{\mu}^k)$ being diagonal. The curvature matrix is determined in order to majorize the cost function (4.2) by (4.4), through convexity analysis of the cost function. The reader is referred to (Erdoğan et Fessler, 1999b) for the development of the SPS for a general log-likelihood and a focus on the Poisson log-likelihood. Appendix 4.A details this development for a Gaussian log-likelihood. This is justified when the dataset is composed of high photon counts : the Poisson uncertainty distribution can then be approximated well by a Gaussian distribution. The minimization of the regularized Gaussian log-likelihood yields a linear least squares reconstruction problem with nonlinear penalization, which is numerically easier to solve than the similarly regularized Poisson log-likelihood minimization.

In short, the curvature matrix of the surrogate is expressed as

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\mu}) = \text{diag}[\mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{e}] + \lambda \mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\mu}^k), \quad (4.5)$$

with $\mathbf{e} = [1, 1 \dots 1]^t \in \mathbb{R}^m$ and $\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}; \bar{\boldsymbol{\mu}})$ a diagonal matrix for which the diagonal elements take the form

$$H_{ii}(\boldsymbol{\mu}; \bar{\boldsymbol{\mu}}) = \nu_i \omega_\psi(\mu_i) + 2 \sum_{k \in \mathcal{N}(i)} \nu_{ik} \omega_\psi(2\mu_i - \bar{\mu}_i - \bar{\mu}_k);$$

where $\mathcal{N}(i)$ denotes the set of pixels that are neighbors of pixel i and $\omega_\psi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \psi'(u)/u$. This last expression corresponds to the curvature of a polynomial proposed in (Erdoğan et Fessler, 1999b) for the majorization of a convex penalty function.

The minimization of the SPS provides a numerical method based on the recurrence

$$\boldsymbol{\mu}^{k+1} = \boldsymbol{\mu}^k - \mathbf{C}(\boldsymbol{\mu}^k)^{-1} \nabla F(\boldsymbol{\mu}^k). \quad (4.6)$$

The nonnegativity constraint is enforced at each iteration by the orthogonal projection of the updated image on the feasible set, which reduces to setting any negative pixel of the image to zero.

While the SPS algorithm outlined above is globally convergent, it is not very fast. In order to improve its convergence rate, it was cast in an ordered subset iteration (Erdoğan et Fessler, 1999b). This entails the partitioning of the data $\mathbf{y}$ into S subsets. At each iteration, S updates are performed using recurrence (4.6). For each of these updates, the gradient and curvature of the data adequation term are computed with only the data components of one subset. Therefore, these S image updates cost

little more than one projection and backprojection. While the regularization contribution to the gradient and curvature must be recalculated for each update, these are typically dominated in runtime cost by that of the operations with $\mathbf{A}$. In practice, faster progress of the image reconstruction can be observed when using a proper data partition, which satisfies $S\|\mathbf{y}_m - \mathbf{A}_m\boldsymbol{\mu}\| \approx \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}\|$ for each subset m .

The downside to this fast algorithm is that it does not converge to a feasible stationary point of problem (4.2). The partition of the data into S subsets entails the formulation of as many similar but distinct reconstruction problems. Each update tries to solve the problem specific to the current subset instead of (4.2). In practice, one effectively observes ordered subsets algorithms converge to a limit cycle of S points, for which image properties such as resolution and variance are not guaranteed.

The TRIOT algorithm (Ahn *et al.*, 2006) tries to preserve the cost efficiency of OS-SPS while overcoming its convergence problem. It takes advantage of the separable structure of the quantities $\nabla F(\boldsymbol{\mu})$ and $\mathbf{C}(\boldsymbol{\mu})$ used to compute the SPS update (4.6), which are summations of subset-specific terms, which change as the image is updated. TRIOT stores these terms in memory. At each image update, it then updates a single term of the gradient and curvature summations, which relies on one subset-specific projection and backprojection. Consequently, this algorithm performs S image updates at little more than the cost of one projection and one backprojection, like OS-SPS. In addition, each of these updates involves the whole data vector, which is the basis for proving the convergence.

However, empirical observations indicate that TRIOT is slower than OS-SPS. A

hybrid algorithm is proposed in (Ahn *et al.*, 2006), by which TRIOT is warm-started by a certain number of OS-SPS iterations. Once these OS-SPS iterations approach the accumulation cycle, TRIOT iterations are executed to convergence.

4.4 Convergence condition

The stopping condition for the reconstruction algorithm is rarely addressed explicitly in the literature. The criteria used for interrupting the iteration may sometimes be inferred from reported experimental methods, or the number of iterations is arbitrarily limited. As we are interested in the automatic interruption of the iteration with good preservation of the properties of the estimator, we use the stopping criterion proposed in (Hamelin *et al.*, 2009a), modified with respect to the nonnegativity constraint enforcement. This means that we stop once

$$\|\Xi F(\boldsymbol{\mu}^k)\|_2 \leq \tau \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{0.05\sigma^2}{\|\mathbf{Q}^{-1}\|_2} \left(1 + \frac{m-1}{\kappa(\mathbf{Q})}\right)}, \quad (4.7)$$

where $\Xi F(\boldsymbol{\mu})$ is the projected gradient of F on the feasible set, i.e. for each $1 \leq i \leq m$

$$[\Xi F(\boldsymbol{\mu})]_i = \begin{cases} [\nabla F(\boldsymbol{\mu})]_i & \text{if } \boldsymbol{\mu}_i - [\nabla F(\boldsymbol{\mu})]_i \leq 0 \\ \boldsymbol{\mu}_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We also have

$$\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^t \mathbf{A} + \lambda \boldsymbol{\Delta}^t \mathbf{D}(\boldsymbol{\mu}^{(0.1)}) \boldsymbol{\Delta};$$

σ^2 is an estimate of the variance of the measurement noise; $\mathbf{D}(\boldsymbol{\mu})$ is a diagonal matrix such that the entries of its diagonal are $\mathbf{D}_{ii}(\boldsymbol{\mu}) = \nu_i \psi''(\boldsymbol{\delta}_i^t \boldsymbol{\mu})$; $\boldsymbol{\mu}^{(0.1)}$ is an image such that $\|\nabla F(\boldsymbol{\mu}^{(0.1)})\|_2 \leq 0.1$; $\kappa(\mathbf{M})$ is the condition number of matrix $\mathbf{M}$.

Relation (4.7) is based on the $\mathbf{y}$ -conditional mean square error (MSE) analysis of intermediate solutions to (4.2) as estimators of the true $\boldsymbol{\mu}$; it seeks to obtain a MSE no larger than 1,05 times the MSE of the exact solution. As this MSE cannot be exactly computed, (4.7) relies on a minorization. From (Hamelin *et al.*, 2009a), for a reference approximate solution $\boldsymbol{\mu}^{(0.1)}$,

$$\text{MSE}[\hat{\boldsymbol{\mu}}] = \sigma^2 \text{Tr} [\mathbf{Q}^{-1}] \geq \sigma^2 \left(\|\mathbf{Q}\|_2 + \frac{m-1}{\|\mathbf{Q}^{-1}\|_2} \right),$$

since the trace of definite positive matrix $\mathbf{Q}$ equals the sum of its eigenvalues, and $\|\mathbf{Q}\|_2$ and $1/\|\mathbf{Q}^{-1}\|_2$ respectively correspond to its largest and smallest eigenvalues. We are aware that this minorizing approximation to the MSE might lead to an under-evaluation of the stopping tolerance. This would thereby set a stopping condition too strict to obtain an inexact MAP estimator with MSE no larger than 1.05 times the MSE of the exact estimator.

Condition (4.7) is computed according to the process described in (Hamelin *et al.*, 2009a) : first, a rather good estimate of the solution is obtained (here $\boldsymbol{\mu}^{(0.1)}$) to compute the denominator by determining the inverse of the smallest eigenvalue of $(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \lambda \boldsymbol{\Delta}^t \mathbf{D} (\boldsymbol{\mu}^{(0.1)}) \boldsymbol{\Delta})$. This yields the final stopping tolerance over the norm of the gradient and the reconstruction procedure is pursued until condition (4.7) is satisfied.

4.5 Image comparison methodology

While convergence to relation (4.7) is a sufficient condition for obtaining a certain degree of image quality, it is not a necessary condition. Since, as the experiments

in Section 4.6 will show, some of the algorithms considered in this paper do not converge in a practical timeframe. We need a methodology to compare images without resorting to a somewhat subjective visual appreciation.

Here, we propose to use the MTF (Droege et Morin, 1982; Ohkubo *et al.*, 2006; LaRivière et Vargas, 2006), which may be understood as the average degradation of the various spectral components of a reconstructed image with respect to an ideal model. Formally, let us consider an object represented as an ideal attenuation map μ . A scan of this object is performed and the image $\hat{\mu}$ is obtained through reconstruction from the projections (solution of problem 4.2). The reconstructed image suffers some degradation with respect to the ideal image : edges of structures are smoothed and some noise appears. Let us model this degradation as the output of a shift-invariant linear system with additive noise :

$$\hat{\mu} = \mu ** h + \beta. \quad (4.8)$$

The impulse response h of system (4.8) explains the smoothing of the reconstructed image,² while the properties of the stochastic process β determine the noise.

The modulation transfer function is a one-dimensional average frequency response of system (4.8). It is computed in (Torfeh *et al.*, 2007) by projecting the impulse response $h(x, y)$ along the x - and y -axes, yielding $h_x(t)$ and $h_y(t)$ respectively. The MTF is computed as the average of the Fourier transforms of $h_x(t)$ and $h_y(t)$.

In order to compute the MTF practically when the ideal image is known (si-

²Actually, it interprets as the average smoothing kernel for the reconstruction with respect to the ideal image, since the measurement model (4.1) inversed by the reconstruction is space-variant.

mulated data), we will further model the kernel of system (4.8) as a finite impulse response $\mathbf{h}$ and the noise as $\boldsymbol{\beta} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, s^2 \mathbf{I})$. We then reformulate the system as

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{M}\mathbf{h} + \boldsymbol{\beta},$$

where $\mathbf{M}$ is the convolution matrix against the ideal image. We may then estimate $\mathbf{h}$ and s^2 simultaneously by maximum likelihood, yielding

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}} &= (\mathbf{M}^t \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^t \hat{\boldsymbol{\mu}}, \\ \hat{s}^2 &= \frac{1}{m} \|\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{M}\hat{\mathbf{h}}\|^2.\end{aligned}$$

When dealing with real datasets, the actual image is rarely known. However, some phantoms are specifically designed to compute the MTF from specific object features instead of characterizing the impulse response of system (4.8). In section 4.6.3, we take the approach of (Droege et Morin, 1982), which is based upon a phantom composed of groups of hard parallel inserts, each group having these inserts closer together. Each such group yields one point of the MTF curve. The Catphan© 600 calibration phantom (The Phantom Laboratory, Greenwich, NY, USA) is composed of a segment that fits this purpose. This phantom has the advantage of providing a MTF curve that uses a large part of the image, as well as a good visual assessment of image quality.

4.6 Experimental comparisons

This section presents the results of reconstruction experiments aimed at comparing algorithms on performance terms. Section 4.6.1 lists the actual algorithms that

are compared hereafter. Section 4.6.2 exhibits the results of the reconstruction of data simulated from a resolution phantom, while section 4.6.3, that of data obtained by the actual scan of a standard calibration phantom. Section 4.6.4 discusses results from both simulation and real data.

Comparing the numerical performance of such different approaches to CT reconstruction is fraught with numerous difficulties, which we may separate into two categories. First, the comparison raises obvious methodological issues. The selection of proper datasets for reconstruction is one of them : we need to be able to assess image quality both visually and quantitatively, for simulated as well as real data. These choices are discussed in Section 4.6.2 and 4.6.3, respectively. Second, the measurement of numerical performance requires meticulous care. Knowing that projections and backprojections dominate the computation time per iteration, it is tempting to use the number of these operations as performance metric. However, though the considered methods are all considered “lightweight” in that they are Hessian-free, they each perform various tasks that add to the runtime of each iteration. We fall back to wall-clock time to measure performance and take lengths to run the experiments on the same machine and load conditions. Also, since the reconstruction runs are articulated by Matlab scripts, we made sure that the computations for each major iteration were performed by compiled C or FORTRAN code, to avoid runtime overhead due to the Matlab interpreter.

4.6.1 Implementation details and parameters

We want to assess the numerical performance of direct resolution of problem (4.2) against that of algorithmic variants from the SPS framework. For direct resolution, we use two nonlinear bound-constrained optimization solvers. Specifically, these are L-BFGS-B (Zhu *et al.*, 1997), which enforces constraints with an active set strategy, and IPOPT (Wächter et Biegler, 2006), an interior point barrier algorithm. They are set up to approximate the second derivatives of either the cost function (L-BFGS-B) or the Lagrangian (IPOPT) using a limited-memory quasi-Newton representation (with 25 vector pairs). For both solvers, we use the original implementation and run it from MATLAB (MathWorks, Natick, MA, USA) through a MEX interface.

Neither L-BFGS-B nor IPOPT have a native stopping criterion that match relation (4.7), but we have been able to embed ours without altering the solver code. In the case of L-BFGS-B, main iterations are driven by a user-supplied program, which answers notifications such as a request for evaluation of the objective and gradient at a new point, for example. One of these notifications is that an iteration was completed. It is then possible to test the current iterate against relation (4.7), using the last gradient vector that was computed, and interrupt the driver loop on a positive result.

IPOPT provides a similar hook for deciding interruption of an ongoing solve through a callback mechanism. The solver invokes a callback procedure at the end of each major iteration, supplying data such as current objective value, gradient norm and so on. This custom function then returns a flag indicating whether the iteration

should be stopped. However, being an interior point method, IPOPT does not supply any norm of the projected gradient of the objective. It rather assesses stationarity and feasibility of an iterate through first-order KKT conditions. Relation (4.7) may be adapted to these circumstances. Consider $\mathbf{z}^k \in \mathbb{R}^m$ the Lagrange multipliers associated to the nonnegativity constraint (computed along the solution by IPOPT) and $\zeta \in \mathbb{R}$, the barrier penalty parameter³ (also determined automatically). The iteration is stopped once both following conditions are satisfied :

$$\|\nabla F(\boldsymbol{\mu}^k) - \mathbf{z}^k\| \leq \tau \quad (4.9)$$

$$\zeta \leq \tau_\zeta. \quad (4.10)$$

It may be shown that the condition (4.9) implies (4.7), provided Lagrange multipliers satisfy KKT complementarity to a low magnitude. This provision is secured by the decrease of the barrier parameter, hence condition (4.10). At the moment, we have no theory to back up the choice of the value of τ_ζ , other than it has to be small. We use $\tau_\zeta = 10^{-6}$ in the following experiments, which has yielded good results in an adequate timeframe.

While we use black-box optimization codes (with custom stopping criteria implemented through available callback mechanisms) for direct resolution of (4.2), we offer our own implementation of the OS-SPS algorithm. We prefer it to that of (Erdoğan et Fessler, 1999b) primarily because it uses the same projection operator as the one used for the L-BFGS-B reconstructions. This operator uses a parcimonious represen-

³In IPOPT, the weight of the barrier penalty is proportional to the inverse of this parameter. It is then null for an exact KKT point and small for a satisfying iterate in practice.

tation of the X-ray propagation lines and leverages projection pattern symmetries (Gendron, 2008). This allows it to model large and complex scanner configurations (672 detectors, 1160 projection angles, angular flying focal spot, large image matrices). The secondary reason is that we have implemented the inner loop (which processes each subset) in C, which is hooked to a main loop coded in MATLAB through a MEX interface. As the inner work loops of L-BFGS-B and IPOPT are also in C or C++, the risk that runtime discrepancies may arise because of interpreter overhead are mitigated. Two SPS variants are included in the comparison. The first is simple OS-SPS with a partition of the data in 32 subsets. The second is TRIOT set up with 32 subsets as well and warm-started by OS-SPS iterations. As asymptotic accumulation of the relative descent of the objective was observed for all considered reconstruction problems, we fixed the switch from OS-SPS to TRIOT at iteration k such that

$$\frac{F(\boldsymbol{\mu}^{k-1}) - F(\boldsymbol{\mu}^k)}{F(\boldsymbol{\mu}^{k-1})} \leq 0.001.$$

In the cases considered, the switch occurs rather early in the reconstruction, between 5% and 9% of the total number of iterations.

As some methods fail to converge according to relation (4.7) on some datasets in a convenient time frame, the reconstruction is interrupted after a set runtime. This time limit is set to twice the runtime of the fastest converging variant.

The numerical performance is assessed through a plot of the stationarity measure used for convergence, as a function of time. The cost function is also plotted against time, since it is often used to compare the performance of algorithms in

the literature. We also report on two other graphs to control the convergence plot, because of the excessively slow convergence behavior (or square nonconvergence) in some cases. The first graph shows the MTF curves computed for the images yielded when each algorithm stops (either by convergence or forced interruption). The second graph plots the Euclidean distance between iterates and the “exact” solution, normalized by the Euclidean norm of that solution, against time. This exact solution is obtained by direct resolution of (4.2) with GENCAN (Birgin et Martínez, 2002), an alternative Hessian-free active-set nonlinear solver with box constraints. While reconstruction experiments with this solver did not yield competitive runtimes with respect to L-BFGS-B and IPOPT, it has proven very robust. We used it to perform reconstructions without any runtime restriction. In each case, it provided a solution with a projected gradient norm smaller than 10^{-13} , which is a very good approximation to the exact solution of (4.2).

4.6.2 Simulated data

The following experiments compare the performance of the algorithms for the reconstruction of the resolution phantom shown in Figure 4.1. The digital phantom was composed of a large ball of water inset with three concentric rings of balls. The innermost circle, mostly visible on Figure 4.1(b), was made of tiny inserts of iron, of varying radii. The median circle was made of larger spheres of glass, also of varying radii. The outermost circle, only visible on Figure 4.1(a), was made of ten larger balls of aluminum, all of equal radius. While the first two circles were soft and hard pixel

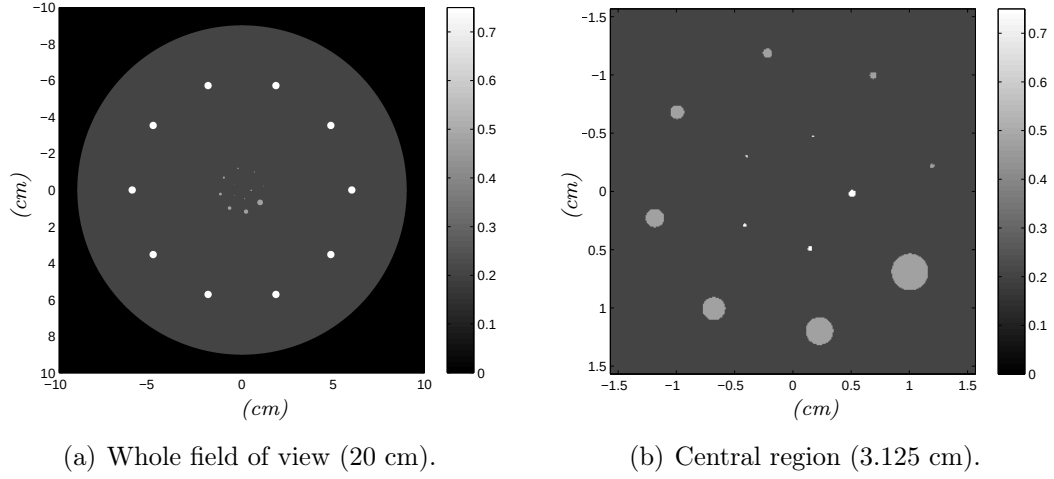


FIG. 4.1 – Resolution phantom used for data simulation (attenuation in cm^{-1} at 70 keV).

size gauges, the outermost circle served as a perturbation to resolution measurement.

The data were generated by a simulation designed to be as close as possible to a clinical scanner, such as the one used to obtain datasets in section 4.6.3. This goal was achieved by computing the projections using object maps of very high resolution and the operator of (Gendron, 2008), which accurately models the scanner configuration. Also, we took care to model the effects of imaging with a polychromatic X-ray source, from the point of view of both the object and the projections. This process is reminiscent of that described in (De Man *et al.*, 1999), but it is implemented with a different projection operator.

Therefore, the data was simulated by first composing a 2048×2048 material map. This resolution is more than four times higher than the highest used during reconstruction, in order to avoid the so-called *inverse problem crime* (Wirgin, 2004). This material map was converted to a set of attenuation maps at 20 to 119 keV,

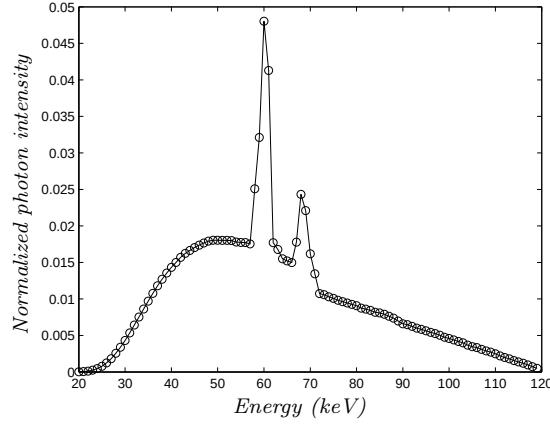


FIG. 4.2 – Spectrum of the polychromatic source used for data simulation (x-axis in keV, y-axis in unitless normalized photonic intensity).

by 1 keV increments. These images were then respectively projected according to a scan configuration of 672 detectors on a single fan-shape array and 1160 projection angles over a 20 cm field of view, from a source with flying focal spot on an angular trajectory. The projections were added to each other after weighting by the value of the source spectrum (Figure 4.2) known at their respective energy. The noiseless projections obtained by this sum were first used as mean parameter to the pseudo-random generation of an instance of a multi-Poisson distribution, yielding a vector with a signal-to-noise ratio (SNR) of about 55 dB. A pseudorandom Gaussian noise process was added to it, in order to generate a noisy projection vector with final SNR approximately 30 dB. This hybrid noise process effectively models the measurement uncertainty caused by X-ray propagation and captation phenomena (Poisson), and electronic and hardware sources (Gaussian).

The reconstruction was performed for a image of dimension 480×480 . The η parameter of the l_2l_1 penalty (4.3) was set to 0.001, which roughly corresponds to

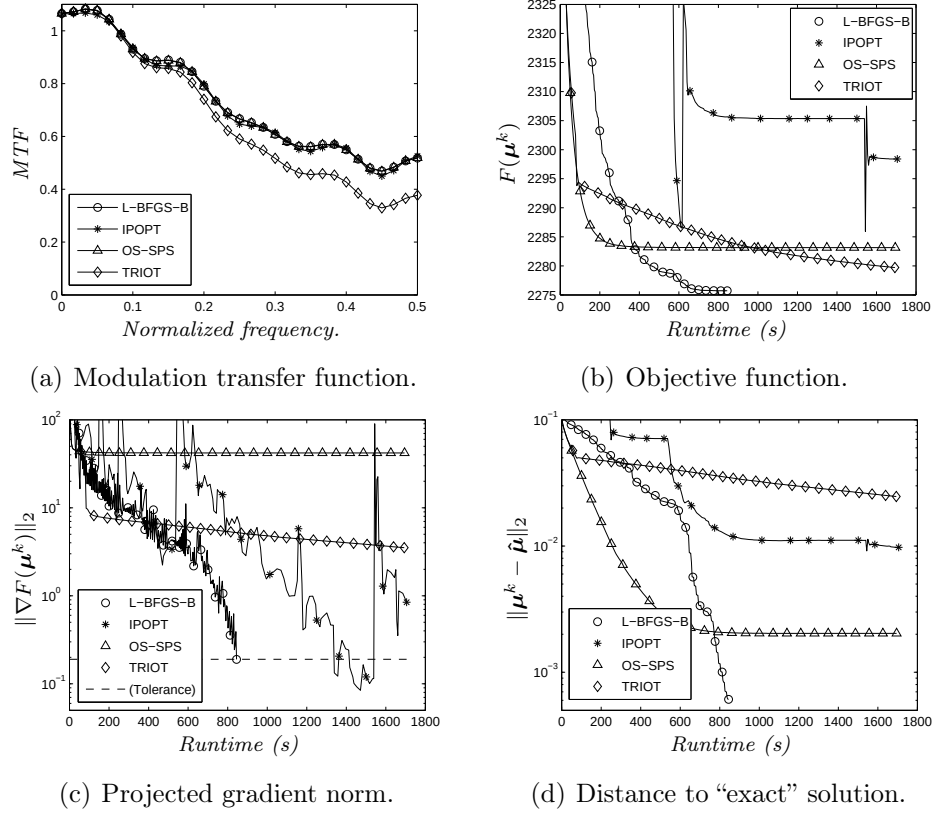


FIG. 4.3 – Results of the reconstructions of the simulated projections on an image of dimension 480. Though the stationarity measure for TRIOT is lower than that of OS-SPS, the image from the latter has a better MTF than the former, and it comes nearer to the exact solution. It stalls away from it, however, and L-BFGS-B is the fastest to close the distance. See Section 4.6.4 for details.

one hundredth of the expected contrast between structures of the image. The master weight parameter λ was calibrated through preliminary reconstructions in order to obtain satisfactory image quality. Each reconstruction algorithm was started with the image resulting from the filtered backprojection of the data.

Figure 4.3 recapitulates the performance results of the reconstruction for each algorithm. The images used to compute the MTF curves are displayed in Figure 4.4; though only the ROI is reproduced to better expose the differences, the MTFs were

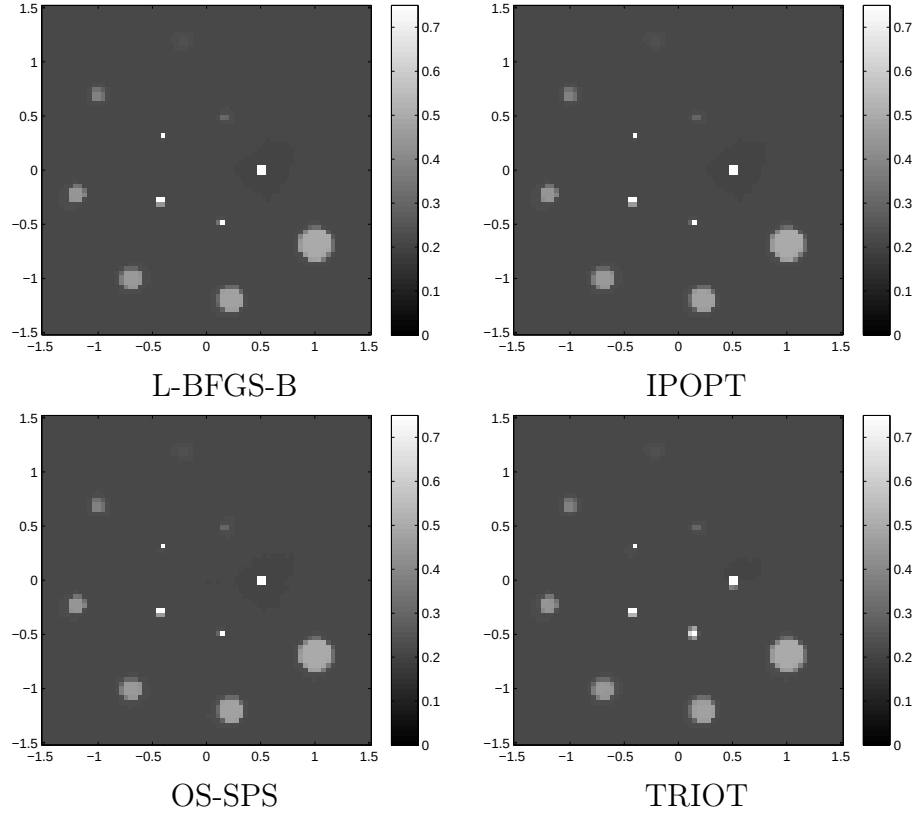


FIG. 4.4 – Central region of interest of the simulated phantom, reconstructed, full image reconstructed on a 480-pixels matrix. The image axes are in cm. Among convergent algorithms, TRIOT presents more structure smoothing (see innermost circle of metal inserts) than the L-BFGS-B and IPOPT reconstructions. Although it does not converge, OS-SPS has structures as sharp as L-BFGS-B and TRIOT.

computed from the full images.

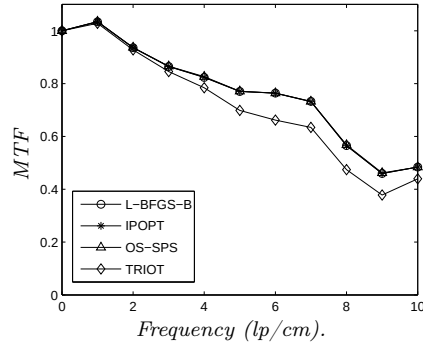
We observe convergence of L-BFGS-B and IPOPT. However, the runtime of IPOPT for the high-resolution reconstruction is in excess of twice that of L-BFGS-B, so it is presented as nonconvergent. As for the SPS variants, neither could converge within the set runtime limit. The gradient norm curves suggest that without a time limit, convergence should be observed for TRIOT, though not for OS-SPS.

4.6.3 Real data

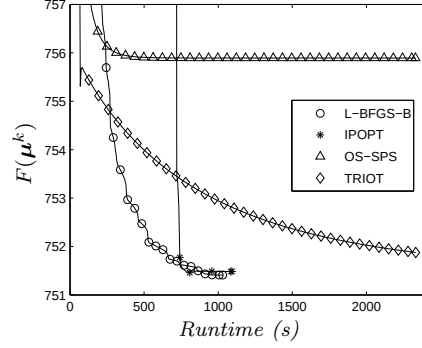
We also compare performances of the four algorithms over the reconstruction of real datasets. These datasets come from the scan of segment CTP528 of the Catphan© 600 calibration phantom, used to assess the axial resolution of the scanner.

The phantom data were acquired on a Siemens SOMATOM Sensation 16 (Siemens AG Medical Solutions, Computed Tomography, Siemensstr 1, D-91301 Forchheim, Germany) scanner deployed at the Centre Hospitalier de l'Université de Montréal (1560 Sherbrooke Est, Montréal, Québec, Canada, H2L 4M1). The scan geometry corresponds to that used with simulation experiments, except for the field of view, which spanned a area of diameter 25 cm. We used the axial scan protocols InnerEarSeq (120 kV peak, current-time 120 mAs, slice collimation 0.6 mm, slice distance 1.0 mm) designed for inner ear imaging. It yields data adjusted towards high-resolution reconstruction rather than high SNR.

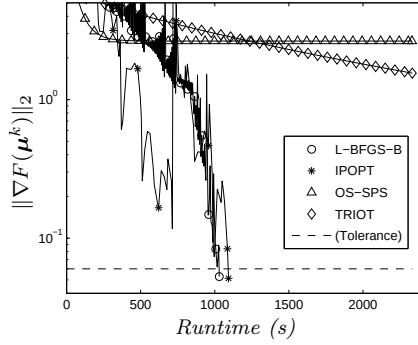
We reconstructed a high-resolution image of dimension 512×512 . Again, the η



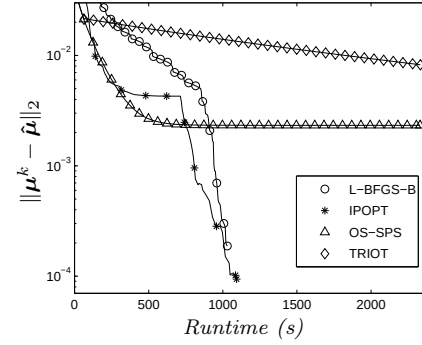
(a) Modulation transfer function.



(b) Objective function.



(c) Projected gradient norm.



(d) Distance to “exact” solution.

FIG. 4.5 – Results of the reconstructions of the **InnerEarSeq** data. The observations below Figure 4.3 hold here as well.

parameter of the l_2l_1 penalty was set to 0.001. The weight parameter λ was set through preliminary reconstructions to obtain image quality that is visually satisfactory. Each reconstruction algorithm was started with the image resulting from the filtered backprojection of the data.

The results of the real data reconstructions are displayed in 4.5 in the same fashion as that of simulated data; the images used to compute the MTF curves are included in Figure 4.6. Here, L-BFGS-B and IPOPT converge for both datasets, while neither SPS variant does. Actually, while IPOPT satisfies the stopping criterion, its final objective value is slightly larger than that of L-BFGS-B. It then seems that

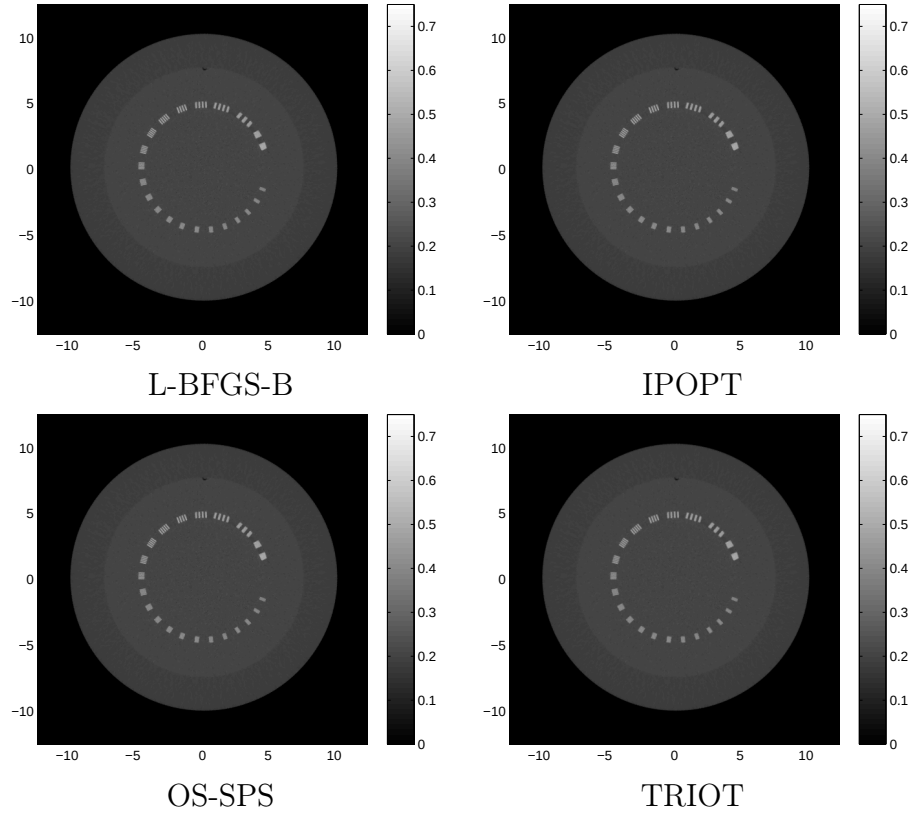


FIG. 4.6 – Images of the CTP528 segment of the Catphan phantom, acquired following the **InnerEarSeq** protocol. The image axes are in cm. In counterclockwise order, the bar groups further than that at 9 o'clock are smoother for the TRIOT image than for the other ones. This corroborates the difference between the MTF curves of Figure 4.5(a).

IPOPT has terminated too early, which is probably caused by our choice of too large a tolerance for the barrier parameter.

4.6.4 Discussion

Our experiments show that, while the multiple-subsets SPS variants decrease the objective faster at the beginning of the reconstruction, either their numerical behavior stagnates with respect to convergence condition (4.7) or the convergence-forcing strategy slows down their progress. Direct minimization variants (L-BFGS-B and IPOPT) eventually catch up and achieve convergence within a practical timeframe. The best runtimes are achieved by L-BFGS-B over the simulated dataset and by IPOPT over the real dataset, though by a lesser margin. As the simulated dataset constitutes an arguably more difficult reconstruction problem (the presence of hard high-frequency objects cause some beam hardening artifacts), the active-set L-BFGS-B solver appears more robust, while the interior point solver IPOPT seems more efficient over the easier reconstruction problem.

In addition, IPOPT presents an apparently erratic behavior with respect to decrease of the objective function and stationarity measure. The reason is that IPOPT actually solves barrier subproblems, so it is the current barrier function that is monotonically decreased. However, the decrease of the barrier function does not necessarily translate into a decrease of the objective function, as it may instead be caused by a decrease of the barrier penalty. In particular, when the barrier parameter changes, the penalty is suddenly given more weight, so the gradient that will drive the next

iteration will favor the reduction of the penalty term. The limited-memory quasi-Newton Hessian approximation worsens this behavior, as it has to be reset when changing the barrier penalty.

Image quality analysis calls for further interpretation of the results, especially considering the surprisingly good quality of the images obtained from OS-SPS. The asymptotic cyclical behavior of OS methods has been reported ((Ahn *et al.*, 2006), among others). From the reconstruction of all datasets, we observe that if it is run for a sufficiently long time, it progresses to images that cannot be distinguished from those obtained from convergent methods (at least from the MTF and visual assessment). We even observe that, for the high-resolution reconstruction of the simulated dataset, the MTF curve for OS-SPS is better than that of TRIOT, which has a lower projected gradient norm than OS-SPS by a full order of magnitude. It is then tempting to reject even the direct minimization approaches and devise an empirical stopping criterion (e.g. low decrease of the objective or projected gradient norm).

As is argued in (Ahn *et al.*, 2006) that convergent methods are less sensitive to data uncertainty than nonconvergent OS methods. They computed the histograms of the images obtained from OS-SPS and TRIOT for multiple pseudorandom data instances. These histograms show that OS-SPS images have a higher variance from the mean reconstruction than the TRIOT images. This evidence is complemented by the plots of the distance between iterates and the “exact solution.” While the exact solution is approached quickly by OS-SPS, progress stalls as OS-SPS enters

its cyclical behavior. In the presented timeframe, L-BFGS-B or IPOPT catch up to OS-SPS and stop at an image even closer to the exact solution. We may assume that TRIOT does so as well, as it seems to decrease the distance to the exact solution at a linear rate.

Therefore, any image computed by OS-SPS remains an inexact MAP estimator of the object (as defined in (Hamelin *et al.*, 2009a)). In the context of estimating the mean of a Gaussian distribution⁴, the MAP estimator (exact solution) minimizes the mean square error. Therefore, convergent algorithms may yield a solution with lower MSE, provided that they are set up with a stopping condition based on solution stationarity (such as relation 4.7).

Finally, with respect to reconstruction runtime, we observe that L-BFGS-B and IPOPT are competitive with SPS variants. For the two considered datasets, both solvers trump the convergent TRIOT, which could arguably be made faster by warming it up with more OS-SPS iterations. The performance comparison to OS-SPS is more difficult. It does yield images of good quality, but its nonconvergent behavior makes it hard to tell the runtime needed to reach this quality level. The plots of the distance of iterates to the exact solution suggest that this runtime is lower than that of L-BFGS-B and IPOPT. Nonetheless, we consider that the faster direct minimization variant (L-BFGS-B) in this case catches up to the progress of OS-SPS within a reasonable time.

⁴Using a non-quadratic penalty function in the regularization term of problem (4.2) entails a non-Gaussian prior distribution. However, it is assumed in (Hamelin *et al.*, 2009a) that close to the mean, the posterior probability distribution is approximately Gaussian. This affirmation is made under the same hypothesis.

4.7 Conclusion

Reconstruction experiments showed that, given a stopping criterion based on solution stationarity, reconstruction through direct minimization of the MAP estimation problem procures an image of the best quality we could observe, while faithfully indicating convergence. Ordered subsets methods inspired from the EM iteration may provide images of similar quality, but they fail to converge. Convergent variants of the OS method have shown inferior performance because of a poor local convergence rate.

Yet, we insist that OS methods must not to be rejected on the sole grounds that we are unable to reliably stop them. In a maximum-likelihood estimation framework,⁵ they appear preferable. Numerical convergence is often neglected in ML estimation, as the accumulation point often bears significant reconstruction noise. Early termination of the estimation process provides implicit regularization (Engl *et al.*, 1996), so methods that yield empirically good images within few iterations are favored. For regularized applications, OS-SPS would be very useful to warm start any convergent methods, including ones based on direct resolution of the regularized reconstruction problem through general-purpose solvers.

We will pursue the work reported here further with a full benchmarking effort. We intend to measure the performance other “lightweight” optimization solvers (i.e. matrix-free solvers) for the direct resolution of problem (4.2). This work will also cover the reconstruction of more datasets, in order to compare performances in a

⁵Maximum likelihood estimation differs from MAP estimation by omitting any regularization.

multitude of conditions.

4.A Derivation of the SPS iteration for Gaussian penalized-likelihood reconstruction

We seek a separable quadratic surrogate that interpolates and matches first-order derivatives with the cost function at a reference image $\boldsymbol{\mu}^k$ and majorizes it everywhere else. These conditions provide global convergence without resorting to line search or trust region strategies (Erdoğan et Fessler, 1999a).

In (Erdoğan et Fessler, 1999b), the elements of the diagonal of $\mathbf{C}(\boldsymbol{\mu}^k)$ are defined so that the SPS function (4.4) may fulfil these conditions. They take advantage of the structure of both the data adequation and regularization terms of the cost function (4.2), each being a sum of convex functions. Let us first consider the data adequation term, for which we have

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(y_i - \mathbf{a}_i^t \boldsymbol{\mu})^2 = \sum_{i=1}^n q_i(\mathbf{a}_i^t \boldsymbol{\mu}),$$

where $\mathbf{a}_i$ is the vector formed from the i -th row of matrix $\mathbf{A}$ and $q_i(u) = \frac{1}{2}(y_i - u)^2$.

For a set of coefficients $\{\alpha_{ij} \in [0, 1], 1 \leq j \leq m : \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} = 1\}$ and given reference image $\boldsymbol{\mu}^k$, the projection along raypath i may be expressed as

$$\mathbf{a}_i^t \boldsymbol{\mu} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \mu_j = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \left[\frac{a_{ij}}{\alpha_{ij}} (\mu_j - \mu_j^k) + \mathbf{a}_i^t \boldsymbol{\mu}^k \right].$$

Therefore,

$$\begin{aligned} q_i(\mathbf{a}_i^t \boldsymbol{\mu}) &\leq \tilde{q}_i(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\mu}^k) \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} q_i \left(\frac{a_{ij}}{\alpha_{ij}} (\mu_j - \mu_j^k) + \mathbf{a}_i^t \boldsymbol{\mu}^k \right) \end{aligned}$$

by convexity of function $q_i(u)$. The set of coefficients

$$\alpha_{ij} = \frac{a_{ij}}{\gamma_i}$$

is suggested in (Erdoğan et Fessler, 1999b), where $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n]^t = \mathbf{A}\mathbf{e}$ corresponds to the projection on a uniform image with pixel value equal to one. This yields the so-called *additive* separable paraboloidal surrogate

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\mu}^k) &= \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i(\boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\mu}^k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{a_{ij}}{\gamma_i} (y_i - \gamma_i(\mu_j - \mu_j^k) - \mathbf{a}_i^t \boldsymbol{\mu}^k)^2 \end{aligned}$$

for the data adequation term. It is shown in (Erdoğan et Fessler, 1999b) to have the best convergence rate with respect to variants of SPS obtained by other choices of α_{ij} .

Let us now consider the regularization term. Like for the adequation term, each subterm of the form $\lambda \nu_k \psi(\boldsymbol{\delta}_k^t \boldsymbol{\mu})$ is respectively majorized. However, The actual majorant depends on the structure of the vector $\boldsymbol{\delta}_k$. Two cases are presented here. First, $\boldsymbol{\delta}_k = \mathbf{e}_i$, i.e. a member of the canonical basis to $\mathbb{R}^m$. The subterm is then only function of μ_i , so it is already separable. Second, $\boldsymbol{\delta}_k = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ with $i \neq j$, i.e. a penalization of the difference between neighboring pixels μ_i and μ_j . As the penalty function $\psi(u)$ is convex, from reference image $\boldsymbol{\mu}^k$, the decomposition is (Erdoğan et

Fessler, 1999b)

$$\begin{aligned}
& \psi(\mu_i - \mu_j) \\
&= \psi\left(\frac{1}{2}[2\mu_i - \mu_i^k - \mu_j^k] + \frac{1}{2}[2\mu_j - \mu_i^k - \mu_j^k]\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\psi(2\mu_i - \mu_i^k - \mu_j^k) + \frac{1}{2}\psi(2\mu_j - \mu_i^k - \mu_j^k).
\end{aligned}$$

The addition of the functions and surrogates obtained from the previous analysis effectively forms a separable majorizing surrogate to the regularization term. However, for the nonquadratic penalty case under consideration, it must be minimized through an iterative approach. Erdoğan and Fessler rather propose to majorize the penalty function by the following parabola,⁶ which around a reference point $\bar{u}$ is defined as

$$\tilde{\psi}(u; \bar{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(\bar{u}) + \psi'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \frac{1}{2}\omega_\psi(\bar{u})(u - \bar{u})^2,$$

with $\omega_\psi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \psi'(u)/u$.

Putting everything together, it may be shown that the curvature matrix of the SPS (4.4) of the cost function (4.2) corresponds to (4.5). To avoid instability, zero elements of the diagonal of $\mathbf{C}(\boldsymbol{\mu}^k)$ are replaced with some small number. The minimization of the SPS at iteration $k + 1$ entails the resolution of the linear system $\nabla f(\boldsymbol{\mu}^{k+1}; \boldsymbol{\mu}^k) = 0$, which yields the update formula (4.6).

⁶A deeper discussion of this majorizing parabola, which was mentioned in section 4.3, and its applicability to convex penalty functions may be found in (Erdoğan et Fessler, 1999a).

Chapitre 5

Design of iterative ROI transmission tomography reconstruction procedures and image quality analysis

Soumis à *Medical Physics*.

Benoit Hamelin* and Yves Goussard

Institut de génie biomédical, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Canada.

Jean-Pierre Dussault

Département d'informatique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada.

Guy Cloutier, Gilles Beaudoin and Gilles Soulez

Centre de Recherche du Centre Hospitalier de l'Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada.

Abstract We consider an iterative edge-preserving CT reconstruction algorithms for high-resolution imaging of small regions of the field of view. In order to reduce the computational burden, we take interest in

*Electronic address: benoit-2.hamelin@polymtl.ca

a family of region-of-interest reconstruction techniques. Such reconstruction procedures perform a low-cost pilot reconstruction of the whole field of view, used to deduce the contribution of the region of interest to the projection data. These projections are used for a high-resolution reconstruction of the region of interest using a regularized iterative algorithm, resulting in significant computational savings.

The various processes by which the pilot reconstruction of the full field of view is obtained involve compromises between image quality in the region of interest and total runtime. Previous contributions to the literature have each focused on a single approach for this initial reconstruction. In this paper, we compare multiple such approaches, namely the filtered backprojection and a low-resolution regularized iterative method, in order to better assess these compromises.

First, we show how the image quality of the region of interest degrades with respect to the decrease in resolution of the reconstruction of the full field of view. Second, we point out cases where an iterative reconstruction of the full field of view at a low resolution yields better quality for the reconstruction of the region of interest on simulated data, when compared to an analytic reconstruction of the former. Finally, for less challenging objects studied through real data reconstructions, we show that the quality of the reconstruction of the region of interest is practically insensitive

to the choice of the reconstruction method for the full field of view.

PACS: 87.57cp,87.57nf,87.57nt,87.57Q-

Keywords: Computed tomography, Region of Interest, Targeted Reconstruction, Zoom-In Reconstruction, Image quality analysis.

5.1 Introduction

We take interest in high-resolution applications of computed tomography (CT) imaging. More specifically, we consider cases where a small region within the field of view (FOV) must be examined at high resolution within its anatomical context, the rest of the image being essentially ignored. Examples are contrast-enhanced cardiac imaging (Ziegler *et al.*, 2006, 2008) and peripheral vascular imaging. (Hamelin *et al.*, 2008) In several instances, usual reconstruction methods, such as filtered backprojection, fall short for these applications, as they are sensitive to data noise and common sources of image artifacts.

Such issues can be overcome by iterative reconstruction algorithms formulated from a statistical model of the data acquisition. (Fessler, 2000; Bouman et Sauer, 1993b) However, the high resolution requirement involves the representation of the image on a grid of large dimension, leading to a large memory footprint and heavy computational burden per iteration. Moreover, the number of unknowns in the resulting system of equations may approach and even overshoot the number of measurements. This underdetermination or weak overdetermination yields an ill-conditioned system, the solving of which takes a large number of iterations.

Yet, high image quality is only required in a small region of interest (ROI). Analytical methods allow the reconstruction of any subregion within the FOV from the subset of data comprising all raypaths that intersect it. However, iterative algorithms require the estimation of the full field of view (FFOV) to avoid data truncation artifacts. This being said, the only requirement for the reconstruction of the rest of the field of view (the *background*) is that its union to the ROI be consistent with the projections. In other words, image quality in the background may be sacrificed to numerical performance as long as the projections of the background and the ROI are related to the measurements well enough. This motivates the development of reconstruction algorithms that take advantage of this background-ROI decomposition to decrease the computation time.

ROI reconstruction algorithms have received a lot of interest recently. Three families of such methods were described in Hsieh *et al.* (2004), including the family covered by this paper, but without any reconstruction result. To our knowledge, Ziegler *et al.* (Ziegler *et al.*, 2006, 2008) presented the first reconstruction results of real data. Their implementation extracts the background from a FFOV reconstruction by filtered backprojection (FBP), and obtain the ROI with an unregularized maximum-likelihood expectation-maximization (ML-EM) procedure. This implementation was also reported in Rashed *et al.* (2007), where the effects of smoothing the projections after the subtraction of the contribution from the background were studied. A further enhancement was proposed in La Rivière (2006), where the projections of the background and the ROI image were estimated in an alternating sequence by

a penalized-likelihood method. We have taken an alternative approach in Hamelin *et al.* (2007), where the ROI was reconstructed simultaneously with a coarse-grid representation of the background, using a penalized-likelihood method. We also generalized the approach to a polychromatic-source projection model to reduce beam hardening artifacts. (Hamelin *et al.*, 2008) This contribution also introduced the separate iterative reconstruction of the FFOV on a coarse grid, from which the background was extracted. This approach was independantly developed in Stearns *et al.* (2006) for cardiac imaging, where the impact of the dimension of the FFOV grid on the visual quality of the ROI was investigated. An algorithm that generalizes this approach was proposed earlier in the context of emission tomography. (Brankov *et al.*, 2004) This method performs the reconstruction over an irregular mesh, with a high vertex density in the ROI and low vertex density in the background. Our own initial experiments had us leave out this line of investigation, as local grid regularity yields much better conditioning of the reconstruction problem.

In addition, recent contributions have shown that a small subset of projections is sufficient for the reconstruction of a ROI, provided that the ROI include a part of the complement of the support of the object. (Defrise *et al.*, 2006; Courdurier *et al.*, 2008; Kudo *et al.*, 2008) This local tomography approach achieves image quality that matches that of full-data reconstruction, at a low runtime cost thanks to reduced dimensions of the local projection operator. It is an interesting advance with respect to our goal of accelerating regularized penalized-likelihood reconstructions. However, sticking to full-data techniques permits the reconstruction of any ROI without prior

knowledge of the object² nor any constraint over the position and extent of the ROI. These are desirable features for the vascular imaging application under consideration.

The literature cited above has reported on variants of the ROI reconstruction procedure focusing on a single approach for the initial, hopefully inexpensive, FFOV reconstruction. Many such approaches seem interesting as they entail alternate compromises between ROI image quality and numerical performance. Thus arises the problem of choosing and parameterizing the method for the FFOV reconstruction. When designing a ROI reconstruction procedure, one needs to gauge what comes down to a compromise between image quality and computational efficiency. On the one hand, it is clear that an analytical approach to FFOV reconstruction yields lower runtimes than a coarse-grid iterative algorithm. On the other hand, the impact of background inaccuracy (caused by reconstruction noise or low spatial sampling rate) on the quality of the ROI reconstruction is far from obvious.

In this paper, we contribute a comparative study of iterative ROI reconstruction procedures to guide the choice of the FFOV reconstruction method. As these methods have distinct resolution-to-noise compromises in the ROI, we base this comparison on the modulation transfer function (MTF), which is computed under controlled variance of the reconstructed image. In addition, many aspects of the reconstruction procedure alter the resolution-to-noise balance as well. These aspects were treated in order to minimize the alteration of images, so that any noteworthy change would

²This prior knowledge of the object, referred to as “prior information” in Kudo *et al.* (2008), is not to be confused with the prior distribution of the object used to regularize the reconstruction problem (see Section 5.2.1).

stem from the choice of FFOV reconstruction.

The aforementioned comparison yields two main results. First, the practical relevance of the iterative FFOV reconstruction is established by showing that even a rather coarse grid (with respect to the spatial sampling rate in the ROI) allows for the reconstruction of a ROI devoid of significant degradation. Second, for a challenging reconstruction problem (e.g. object with metal structures, very high resolution requirement), iterative coarse-grid FFOV reconstruction yields better ROI image quality than FBP FFOV reconstruction. However, for objects that do not cause systematic artifacts,³ the ROI image quality is less sensitive to that of the background, making the case in favor of the faster FBP reconstruction of the FFOV.

The rest of the paper is organized as follows. The algorithmic framework for ROI reconstruction is presented in Section 5.2. The methodology for quantitative image quality analysis is described in Section 5.3. Reconstruction results on simulated phantoms are exposed in Section 5.4, and on real data acquired on a clinical scanner, in Section 5.5. Final conclusions are drawn in Section 5.6.

5.2 ROI reconstruction framework

We briefly recall the development of statistical reconstruction algorithms in X-ray computed tomography. The reader interested in a more thorough exposition is referred to Fessler (2000); Bouman et Sauer (1993b). The ROI reconstruction framework itself is then presented, followed by implementation issues for the actual procedure.

³For instance, objects with metal substructures cause severe beam hardening artifacts, and as such may benefit from iterative coarse-grid FFOV reconstruction.

5.2.1 Statistical CT reconstruction

Let us consider a discrete representation of the imaged object as a pixel grid $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, where m is the product of the width and height of the grid. Let us also have a discrete set of data $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ that correspond to the logarithm of the ratio of measured to incident photon counts. Under the assumptions of a monochromatic X-ray beam and large measured photon counts, the data may be related by the object through the linear relation $\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}$, with $\mathbf{b} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$. Matrix $\mathbf{A}$ is a discrete *projection operator* that approximates the integrals over the discrete object for each ray path covered by the scan.

The reconstruction reduces to the estimation of $\boldsymbol{\mu}$. We consider a maximum *a posteriori* estimator, which solves the penalized-likelihood reconstruction problem

$$\min_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}\|^2 + \lambda R(\boldsymbol{\mu}). \quad (5.1)$$

The term $\lambda R(\boldsymbol{\mu})$ penalizes undesirable variations between neighboring pixels, making the solution more robust to data perturbations. Formally, we choose

$$R(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{m^2} \sum_{j \in \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_i)} \nu_{ij} \psi(\mu_i - \mu_j),$$

with $\nu_{ij} = 1$ for horizontal or vertical neighbors and $\nu_{ij} = 1/\sqrt{2}$ for diagonal neighbors. We use the $l_2 l_1$ penalty function (Charbonnier *et al.*, 1997)

$$\psi(u) = \sqrt{u^2 + \eta^2} - \eta, \quad (5.2)$$

which effectively smoothes the pixel noise while preserving the edges between distinct structures of the image. The parameter η acts as a threshold between essentially

quadratic and linear behaviors.

5.2.2 Background/ROI decomposition of the projection operator

Define the ROI as a sub-vector $\boldsymbol{\mu}_{\text{roi}} \in \mathbb{R}^{(m_{\text{roi}})^2}$ of the object that represents a square sub-image of dimension $m_{\text{roi}} < m$. By reordering the components of the object vector so that $\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_{\text{bkg}}, \boldsymbol{\mu}_{\text{roi}}]^t$, we also reorder the columns of the projection operator so that it may be decomposed as (Hamelin *et al.*, 2007; Rashed *et al.*, 2007)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{bkg}}^1 & \mathbf{A}_{\text{roi}} \\ \mathbf{A}_{\text{bkg}}^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Provided that a good estimate $\mathbf{y}_{\text{roi}}$ of the contribution of the ROI to the projection may be obtained, the solution to problem (5.1) involves only the sub-matrix $\mathbf{A}_{\text{roi}}$. On the one hand, as $\mathbf{A}_{\text{roi}}$ has smaller dimensions than $\mathbf{A}$, one may expect a significant reduction in the runtime of projections (application of $\mathbf{A}_{\text{roi}}$) and backprojections (application of $[\mathbf{A}_{\text{roi}}]^t$), which dominate the computation time. On the other hand, the determination ratio⁴ of the system of equations $\mathbf{y}_{\text{roi}} = \mathbf{A}_{\text{roi}}\boldsymbol{\mu}_{\text{roi}}$ can be quite different from that of the FFOV system. Depending on the size and location of the ROI, more or less ray paths will intersect it and the number of rows of $\mathbf{A}_{\text{roi}}$ will vary in consequence. For the high resolution that we require, it may be expected that the system of equations for the ROI has a determination ratio that is closer to 1 than that for the FFOV. We might then have to deal with a reconstruction problem

⁴This is the ratio of the number of equations of a system to the number of unknowns. A system $y = Ax$ for which this factor is close to 1 will tend to yield an ill-conditioned normal system $A^t y = A^t A x$; one for which it is below 1 will yield an ill-posed, singular normal system.

that is more ill-conditioned than problem (5.1), which could damper some of the performance gain.

5.2.3 Design of the reconstruction algorithm

To keep the total reconstruction time low, we have to find a way to obtain a fast reconstruction of the background. Two approaches are considered here. In the first one, the background and the ROI image are estimated simultaneously by an iterative reconstruction procedure. The background is represented on a coarse, low-dimension grid in order to minimize the cost of its projections and backprojections. We reported on this approach in Hamelin *et al.* (2007) and found that the difference in discretization step between the background and the ROI images introduced a scale discrepancy between the corresponding sets of pixels. This resulted in severe ill-conditioning of the reconstruction problem, for which we were able to compensate with a heuristic rescaling.

The second approach is to alternate between the reconstruction of the FFOV, from which the background is extracted, and that of the ROI. The one-pass algorithm proposed in Ziegler *et al.* (2008); Hamelin *et al.* (2008) is as follows :

1. Obtain a low-cost FFOV reconstruction $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{FFOV}}$ (FBP or coarse-grid penalized-likelihood method).
2. Extract the background image $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{bkg}}$ from $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{FFOV}}$ by setting the pixels that stand in the ROI to zero.
3. Remove the background contribution from the projections : $\mathbf{y}_{\text{roi}} = \mathbf{y} - \mathbf{A}_{\text{bkg}} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{bkg}}$.

Note that $\mathbf{A}_{\text{bkg}}$ matches the coarse FFOV grid when using a PL method.

4. Obtain the ROI reconstruction as the solution to

$$\min_{\boldsymbol{\mu}_{\text{roi}} \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_{\text{roi}} - \mathbf{A}_{\text{roi}} \boldsymbol{\mu}_{\text{roi}}\|^2 + \lambda_{\text{roi}} R_{\text{roi}}(\boldsymbol{\mu}_{\text{roi}}) \quad (5.3)$$

When performing the reconstruction of the FFOV with a penalized-likelihood algorithm, this framework may be extended with a fifth step where the contribution of the ROI is subtracted from the projections, so as to further enhance the background reconstruction. However, our initial experiments with this multiple-pass approach have not resulted in images of better quality with respect to the single-pass variant. Its runtime was also longer.

5.2.4 Numerical methods

In general, the reconstruction problems (5.1) (on a coarse grid, for background extraction) and (5.3) have to be solved numerically. The choice of the numerical method and of its stopping condition may have a significant impact on the properties of the solution. The heart of the matter is that the resolution and variance of the image obtained at the termination of the numerical method vary according to the termination condition. Hence, we need a reliable stopping independent from and common to all the solvers.

In Hamelin *et al.* (2009a), we justified a stopping condition for unconstrained MAP estimation problems that majorizes the mean square error (MSE) of the iterate as an estimator of $\boldsymbol{\mu}$. This approach stops the iteration once the l_2 norm of the gradient of the cost function drops below a tolerance determined by how close the MSE

of the iterate should be relatively to that of the exact MAP estimator. This condition cannot be applied *per se* to problem (5.1), because of the nonnegativity constraint, nor (5.3), because its uncertainty model is not a zero-mean white Gaussian noise. Nonetheless, we assume that the iteration should be stopped according to stationarity of the iterate, in the spirit of Hamelin *et al.* (2009a). For bound-constrained reconstruction problems, we conjecture that iterate stationarity can effectively be measured by the norm of the projected gradient, (Nocedal et Wright, 2000) with a tolerance computed from a process adapted from that in Hamelin *et al.* (2009a).

This stopping condition can only be met by a convergent algorithm. The importance of asymptotic convergence for numerical methods is underscored in Ahn *et al.* (2006), where a nonconvergent method was found to produce images with less desirable properties in comparison to a convergent method in the same optimization transfer framework. This rules out ordered subsets (OS) methods, such as the popular OS-EM, which are known to asymptotically cycle among a set of suboptimal images. In Hamelin *et al.* (2009c), we have shown that the direct resolution of (5.1) with general-purpose nonlinear solvers achieved proper convergence within a time-frame competitive with OS methods. For the experiments reported in Sections 5.4 and 5.5, we use the L-BFGS-B (Zhu *et al.*, 1997) solver, which was found robust and fast in Hamelin *et al.* (2009c).

5.3 Methodology for image quality comparison

Reconstruction algorithms tend to attenuate or eliminate a certain part of the information that comprises any description of the scanned object, such as the position of edges between distinct discrete structures. This loss of information may be analyzed by modeling the reconstruction algorithm as a linear filter with the object as input. The characterization of the impulse or frequency response⁵ of this system allows one to compare the reconstruction algorithms in terms of image quality. One must remain aware, however, that this image quality measurement represents an average over the FOV, as tomographic reconstruction is not space-invariant.

A common tool for the analysis of the point-spread function (PSF) of a reconstruction algorithm is the spectrum of its 1D projection, the *modulation transfer function* (MTF). The MTF is sensitive to degradation by loss of resolution and makes it easy to compare image quality for various algorithms by tracing the corresponding MTFs on a common plot. However, as mentioned in the introduction, alternative algorithms have differing resolution and differing noise properties. One must be careful to equalize reconstruction noise for compared algorithms, so that any change in the resolution-to-noise compromise translates into a change in image resolution.

5.3.1 Simulation data

When dealing with synthetic data, for which the actual attenuation map is known, it is possible to estimate the PSF of the degradation. In Hamelin *et al.* (2009c), a

⁵In this context, the impulse response is noted the *point-spread function* of the reconstruction procedure.

procedure to this effect is described. It is based on the modeling of the estimated image as $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} ** \mathbf{h} + \boldsymbol{\beta}$, where $\boldsymbol{\mu}$ is the known image and $\boldsymbol{\beta}$, the reconstruction noise. The PSF $\mathbf{h}$, modeled as a 2D FIR filter, may then be estimated by maximum likelihood. An advantage of this approach is that it allows for the simultaneous estimation of the variance s^2 of the reconstruction noise : $\hat{s}^2 = \frac{1}{n} \|\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{M}\hat{\mathbf{h}}\|^2$. Typically, this formula yields an underestimated value of the reconstruction noise variance. It is however sufficient to calibrate the regularization hyperparameters in order to obtain reconstructions that have comparable PSFs, for which we expect almost equal reconstruction variance.

To make the image quality analysis easier, we use the PSF estimate to compute the average of the 0- and $(\pi/2)$ - modulation transfer functions (θ -MTF), as done in Torfeh *et al.* (2007). The θ -MTF is the discrete Fourier transform of the θ - line spread function (θ -LSF), which itself is the projection of the PSF on an axis at an angle of θ with the abscissa of the PSF. This average MTF (a MTF) is a 1-D function that shows well the degree at which high-frequency structures of the object are attenuated by the reconstruction.

5.3.2 Real data

In the case of real data, no reference image can be used to estimate the PSF directly. However, specific phantoms may allow us to determine it empirically, or even to directly compute the MTF. For example, a hard pin or wire cast in a uniform medium, as used in Torfeh *et al.* (2007), will provide the PSF by simple extraction of a sub-

image centered on the pin from the reconstructed image.

We rather adopt the approach proposed in Droege et Morin (1982), which uses a larger region of the object, thereby providing a degradation average over a larger sample. It measures image degradation from a region composed of an array of parallel metal bars, with decreasing space between bars from one region to another. When the bars are rendered well, the variance within the region is higher than that outside of the region. Reciprocally, when the bars are smoothed and undistinguishable, the region is almost uniform and its variance is close to that outside of the region.

Therefore, the method is based on a very specific phantom made of many such groups, each with bar interspace set according to a number of line pairs per cm (lp/cm). The contrast γ of the bars to the medium and the variance s^2 of a uniform medium region are measured. From the reconstructed image, for the bar group disposed at frequency ν lp/cm, a MTF point is derived from the variance $\eta^2(\nu)$ of the sub-image containing the bar group :

$$\text{MTF}(\nu) = \frac{\pi}{\gamma\sqrt{2}} \sqrt{\eta^2(\nu) - s^2}.$$

The CTP528 segment of phantom Catphan600© (The Phantom Laboratory, Greenwich, NY, USA) is built to compute the MTF in this manner. It is composed of aluminum bar groups of frequency ranging from 1 lp/cm to 21 lp/cm, cast in an epoxy cylinder (20 cm in diameter) along a circle centered on the rotation axis of the scanner. We will use it to experiment on real datasets, the results of which is reported in Section 5.5.

5.4 Numerical experiments over simulated data

The following experiments have two goals. First, in the context of background extraction from a coarse-grid iterative FFOV reconstruction, we want to study how the resolution-to-noise compromise changes along the dimension of the FFOV image grid. Second, we want to assess the sensitivity of the ROI image quality to background artifacts.

5.4.1 Phantom and simulation description

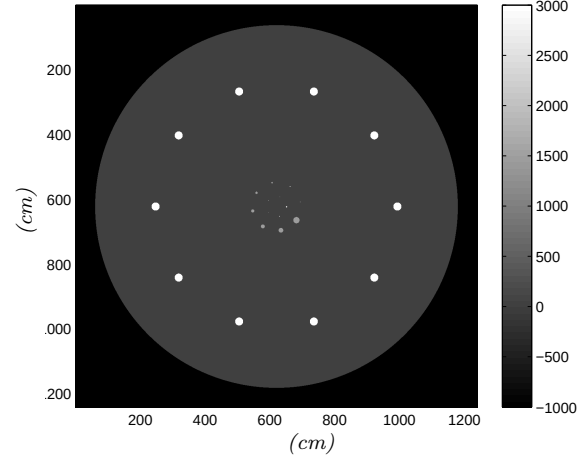
The numerical phantom under study is represented at Figure 5.1. It is designed to measure the central scanner resolution and present a significant challenge for both of the experiments mentioned above. First, the balls outside of the ROI are relatively small. Thus, some coarse choice of the FFOV reconstruction grid the FFOV reconstruction will not faithfully represent these balls, which should negatively affect the quality of the background projection and, therefore, the resolution and variance of the ROI reconstruction (experiment of Section 5.4.3). Second, we include metal balls both outside and inside of the central ROI. As the polychromatic aspect of the X-ray beam is included in the data simulation process, the FBP reconstruction of the FFOV is altered by strong beam hardening artifacts. This feature of the background extracted from the FBP image should complicate ROI reconstruction.

The data is obtained by the simulation of the projection of a map of objects. Since this process involves a polyenergetic distribution of the X-ray energy, we have to properly model the materials of these objects and the variation of their X-ray

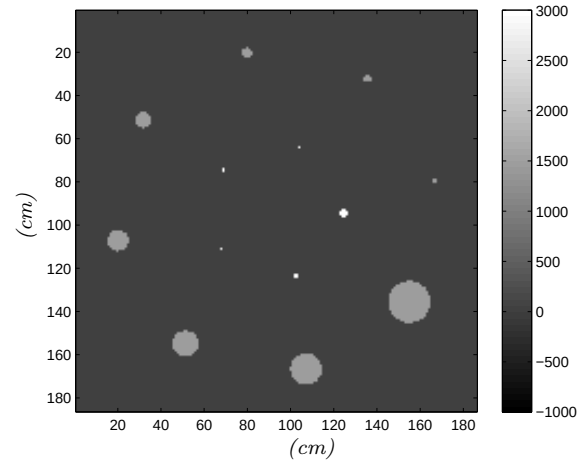
attenuation coefficients with respect to photon energy. Hence, the phantom is described as if it were a physical object, although it remains virtual. It consists of a soft tissue ball of diameter 18 cm. The outer ring is composed of 10 iron balls; the middle one, of glass balls (contrast to water approximately 0.4 cm^{-1} at 70 keV) of varying diameter and the inner one, of tiny iron balls (contrast to water approximately 6.9 cm^{-1} at 70 keV) also of varying diameter. The innermost ring is not expected to be well resolved on the reconstructed image grid and is made to study how tiny but hard (high-energy high frequency) structures are rendered by the reconstruction algorithm.

Here, the actual ROI that is reconstructed is a 3-cm square image in the middle of this phantom, which contains the two inner rings. It is represented by an image grid of dimension 186×186 , which yields the same pixel size as the representation of the FFOV by an image grid of dimension 1240×1240 .

Although the phantom in Figure 5.1 can be described using a set of ellipses, the data is simulated using a high-resolution discrete representation of the object and of the projection process. This allows for the faithful modeling of the nontrivial acquisition geometry (fan beam over 672 detectors, 1160 projection angles, angular flying focal spot, displaced detector array with respect to source-focus axis) of the scanner we use in the real data experiments of section 5.5. This scanner geometry is effectively encoded into our discrete projection code. In order to avoid the so-called inverse problem crime, (Wirgin, 2004) an object map of dimension 2048×2048 is constructed, which yields about half the pixel size required for these experiments.



(a) Whole field of view (1240×1240).



(b) Central region of interest (186×186). The pixel size corresponds to that of Figure 5.1(a).

FIG. 5.1 – Representation of the phantom used in numerical experiments on a $[-1000, 3000]$ HU scale, at target resolution 0.016 cm.

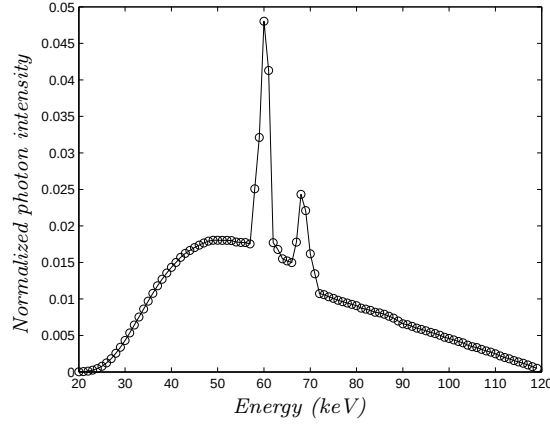


FIG. 5.2 – Spectrum of the polychromatic source used for data simulation (x-axis in keV, y-axis in unitless normalized photonic intensity).

The simulation takes into account the nonuniform spectrum of the X-ray beam (Figure 5.2) and the variation of attenuation coefficients to X photon energy. Poisson- and Gaussian-distributed pseudorandom noise was generated to obtain a signal-to-noise ratio (SNR) of approximately 30 dB. This roughly matches the average SNR obtained from reconstructions with the clinical scanner described in Section 5.5.1. Moreover, this Poisson-Gaussian noise model takes a rather good account of the various sources of noise that alter the actual measurements. (LaRivière *et al.*, 2006)

5.4.2 Hyperparameter selection

The reconstruction by a penalized-likelihood statistical approach requires the setting of the regularization weight parameter λ (equation (5.1)) and, when using a regularization term with a l_2l_1 penalization function, that of the threshold parameter η (equation (5.2)). The setting of these parameters has a direct impact on image quality. First, η is chosen so that the boundaries between the discrete structures of

the object are approximately linearly penalized (see Section 5.2.1). This happens provided x is sufficiently larger than η . Hence, η is set at a value that is about a hundredth of the expected boundary magnitude, which in this case is around 0.1 cm^{-1} . The actual value used in this work is $\eta = 0.002$.

Second, the proper setting of λ is critical to image comparison, as λ explicitly controls the resolution-to-noise compromise. Namely, a high value of λ will favor noise reduction at the expense of image resolution. Reciprocally, a low value will render an image with crisp edges and small structures, but with noise and artifacts. To ensure a fair comparison of images in terms of quality, these parameters must be set properly.

The calibration of the regularization weight depends on the region to reconstruct. Let us first consider the case of ROI reconstruction. As mentioned in Section 5.3, images are only comparable in terms of resolution if their variances are similar. For the MTF computation described in Section 5.3.1, s^2 is an acceptable measure of image variance. Hence, the penalty weight, which regulates the resolution-to-noise compromise, is set in order to equalize s^2 for all compared variants.

The detailed procedure is as follows. First, we select one of the ROI reconstruction procedures under consideration. We determine the regularization weight for it by trial and error, until we are satisfied with the visual aspect of the image (good compromise between resolution and noise). We then compute the MTF of this satisfying image, along with the variance s^2 of its reconstruction noise. For the other ROI reconstruction procedures under consideration, we determine the regularization

weight by trial and error too, until we find a value that yields an image for which the variance of the reconstruction noise is very close to that of the first method. We have observed that correspondance of at least two significant digits for s^2 does entail a similar aspect of the reconstruction noises.

The second case of interest is that of FFOV reconstruction on a coarse grid, for background extraction. The final ROI image quality is less sensitive to this calibration, so we use a heuristic method akin to the L-curve. (Hansen, 2000) For linear least squares problems (minimization of $\|y - Ax\|^2$) with Tikhonov regularization (quadratic penalty of the form $\lambda\|Dx\|^2$), the L-curve is a log-log plot of $\|Dx\|$ as a function of $\|y - Ax\|$, for multiple values of λ . It effectively shows how larger values of λ reduce the magnitude of undesirable properties of the solution, at the cost of worse data adequation. This plot typically has a sharp L shape, and λ is selected such that it is associated to the plot point at the corner of the L. For linear least squares problem with non-quadratic regularization (equation 5.1), we use a similar (non-logarithmic) plot of $\sqrt{R(\boldsymbol{\mu})}$ as a function of $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}\|$, for multiple values of λ . It yields a monotone decreasing curve, though smoother than the traditional L-curve.

5.4.3 Impact of grid dimension for FFOV reconstruction

The goal of this experiment is to characterize the degradation of the ROI image quality as the FFOV image grid (from which the background contribution to projections is computed) is made coarser, and thus establish that the runtime may be

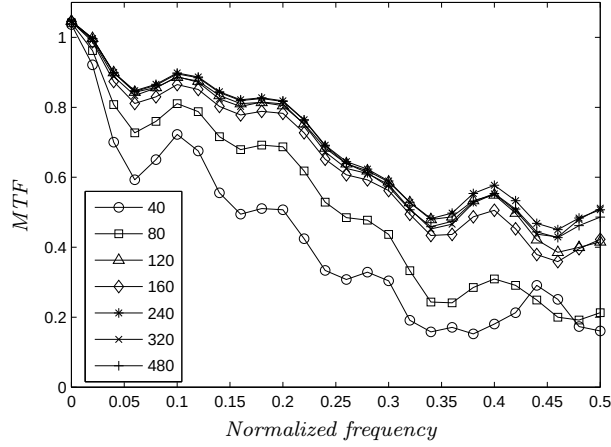


FIG. 5.3 – MTF of the ROI reconstruction for various grid sizes used for FFOV reconstruction, from which the background is extracted. We see significant degradation for dimensions 40 and 80. Dimensions 120 and 160 (the limit for a small total runtime) also lack a bit, but only in the 10% higher frequency range.

effectively reduced at little cost in ROI image quality. Here, we propose extensive quantitative image quality comparisons based on the MTF, which complement and corroborate the results in Stearns *et al.* (2006).

We then compare the MTF estimated for ROI reconstructions performed respectively with the background extracted from a 20-cm FFOV reconstruction realized over multiple coarse grids. Considered FFOV grid dimensions are 40 pixels (with corresponding resolution 0.500 cm), 80 (0.250 cm), 120 (0.167 cm), 160 (0.125 cm), 240 (0.0833 cm), 320 (0.0625 cm) and 480 (0.0417 cm). We seek to obtain a reconstruction variance s^2 between 0.199 and 0.201.

The MTF computed and FFOV grid dimension are shown in Figure 5.3. In the lower-frequency range, the ROI image quality only degrades significantly for a background (FFOV) grid dimension of 80 or 40. We observe equivalent image quality measurements over the 90% lower frequencies for any background representation

TAB. 5.1 – Number of iterations and time needed to perform phantom reconstructions for each FFOV grid dimension and reconstruction approach. Among grids for FFOV representation, 120 yields the best runtime; this hints at a good quality-runtime compromise when coupled with results of Figure 5.3. This variant runs also in only 56% more time than the one with FBP FFOV reconstruction, so its cost is affordable in cases where it can provide better image quality.

FFOV method	Dim. (pixels)	FFOV (iter.)	(s)	ROI (iter.)	(s)	Total (s)
PL l_2l_1	40	51	7.94	567	98.7	107
	80	75	23.2	468	83.3	107
	120	78	37.9	322	49.4	87.3
	160	115	78.0	341	63.0	141
	240	220	238	303	47.7	286
	320	375	523	317	61.6	584
	480	743	1639	321	65.7	1704
FBP	1240	—	—	288	56.0	56.0
PL quad.	120	101	45.5	312	47.8	93.3

over a grid of dimension greater or equal to 120. This grid dimension does correspond to a limit discretization that allows the representation of the background metal spheres by a square-shaped group of four pixels or a cross-shaped group of five pixels.

Numerical efficiency may be assessed using the upper part of Table 5.1. On the one hand, as expected, the runtime of FFOV reconstruction increases with the grid dimension. On the other hand, the runtime for ROI reconstruction decreases as the background grid dimension increases and the representation of background structures is enhanced; this runtime decrease stabilizes at FFOV grid dimension 120. This dimension represents a good compromise between image quality, which is only slightly degraded in the 10% higher frequency components, and runtime. We conjecture that such a compromise can be obtained in general.

5.4.4 Impact of the choice of FFOV reconstruction method

We compare MTFs computed for ROIs obtained by a common edge-preserving PL method, but with the background extracted from an FFOV reconstruction performed by either the filtered backprojection (FBP) or a good coarse-grid PL procedure. For the latter, we also compare two variants for the penalty function used in the regularization term : the l_2l_1 penalizer of equation (5.2) or the quadratic penalizer $\psi(x) = x^2/2$. Such a quadratic penalizer tends to yield reconstruction problems with better conditioning, which may be solved at a lower runtime.

The FBP reconstruction of the FFOV is performed at target resolution, that is on a grid of dimension 1240. The two PL reconstructions are rather obtained on a grid of dimension 120, which is the optimal observed in Section 5.4.3. The regularization weight for the variant with the quadratic penalizer is calibrated using the L-curve heuristic. The other experimental and algorithmic settings are the same as those described in Section 5.4.3.

The MTFs estimated for the ROI reconstructions are shown in Figure 5.4. The three FFOV reconstruction approach seem to yield ROI images for which low-frequency structures are equally well reconstructed. However, better high-frequency image quality is obtained for ROIs computed from a background reconstructed by an iterative algorithm with edge-preserving regularization. This may be explained by the severe degradation the FBP reconstruction suffers from, due to the beam hardening artifacts caused by the large metal balls in the background. The PL approaches do attenuate these artifacts, so they may yield a more faithful background

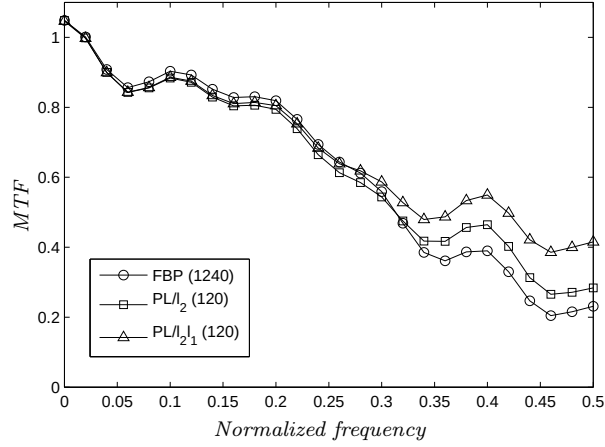


FIG. 5.4 – MTF of the ROI reconstruction for various FFOV reconstruction approaches. For this difficult case, both variants that extract the background from a coarse-grid PL FFOV image outperform the one that does from a FBP image. In turn, the edge preserving FFOV reconstruction also yields slightly better ROI image quality than the one with quadratic penalty, which also comes out slower according to Table 5.1.

contribution to projections.

Runtimes for each algorithm can be compared from Table 5.1. The fastest FFOV reconstruction is obtained with the FBP : its runtime is equal to that of the construction of the projection operator $\mathbf{A}$ for the PL algorithms. If we remove that overhead from the runtime measurements, FBP becomes free with respect to its iterative counterparts. Moreover, the quadratically-penalized PL variant has a total runtime that is larger than that of the l_2l_1 -penalized one ; the former thus holds no advantage over the latter.

5.5 FFOV reconstruction comparison on a real dataset

The experiments of Section 5.4 have exhibited an object for which better ROI image quality was obtained when the background was extracted from a PL FFOV reconstruction. However, the assumptions on which FBP is established are not stretched so much in many CT applications. It is thus interesting to repeat the FFOV reconstruction method comparison over a physical phantom acquired on a clinical scanner. Since MTF computation for real data must be done on a specific type of phantom, we do away with the metal objects in the background that plagued the analytical FFOV reconstruction with such strong artifacts.

The following reports on this real data reconstruction experiment. Section 5.5.1 describes the materials and experimental protocol. Section 5.5.2 presents and discusses the results.

5.5.1 Materials and methods

The dataset under consideration comes from the scan of the CTP528 segment of the Catphan600© phantom described in Section 5.3.2. The phantom may be fixed on the table of the scanner so that the table is out of the FOV during acquisition. As the epoxy cylinder is the only object within the FOV, we consider a FFOV of diameter 25 cm. The target reconstruction resolution for the phantom is 0.0244 cm, which is a little more than the gap between bars in the 21 lp/cm group; this corresponds to a 1024×1024 grid representation of the FFOV. We then perform the reconstruction

of seven ROIs within this FOV, each comprising from two to four bar groups. The settings for each ROI are described in Table 5.2.

The scanner used to image this phantom was a Siemens SOMATOM Sensation 16 (Siemens AG Medical Solutions, Computed Tomography, Siemensstr. 1, D-91301 Forchheim, Germany) deployed at the Notre-Dame hospital of the Centre Hospitalier Universitaire de Montréal (1560 Sherbrooke Est, Montréal, Québec, Canada, H2L 4M1). The CTP528 segment of the phantom was scanned using the **InnerEarSeq** protocol (120 kV peak, current-time 120 mAs, slice collimation 0.6 mm, slice distance 1.0 mm), which acquires projections on a 672-detector array at 1160 angles around the object. The polychromatic X-ray source used for the scan has an angular flying focal spot. This means that the focal spot on the cathode shifts between two positions on the acquisition plane during a projection. This effectively doubles the number of measurements (for a total of 1559040) and increases the image resolution that can be obtained.

Here, two variants of the ROI reconstruction method are compared, which differ by how they obtain the FFOV reconstruction from which the background is extracted. First, we consider the analytical FFOV image output by the scanner for the segment's central slice. The dimension of the scanner-reconstructed image is 512×512 , which makes its pixel size twice coarser as that of the ROI. Second, we have the reconstruction performed by an edge-preserving PL algorithm on a grid of dimension 160. This FFOV reconstruction converged in 91 iterations, which took 110.7 seconds.

TAB. 5.2 – Description and runtime of the ROI reconstructions to compute MTFs from the line pair circle of segment CTP528. The total column add the 110.7 s runtime of the PL FFOV reconstruction to that of the ROI. All ROIs from PL FFOV reconstructions were obtained in about half the iterations and runtime, which suggests a certain quality to the background representation. Total runtime remain higher, though, as scanner images for background extraction are essentially free.

#	Bar groups (lp/cm)	Center (cm) (x, y)	Dimension		Scanner			PL l_2l_1	
			(cm)	(pix.)	(iter.)	ROI (s)	(iter.)	ROI (s)	Total (s)
1	1,2	(4.06, 2.81)	3.75	154	109	53.2	53	23.3	134.0
2	3,4,5	(0.00, 4.69)	4.69	192	123	67.0	64	34.7	145.4
3	6,7,8	(−4.06, 2.66)	3.75	154	111	43.3	59	25.4	136.1
4	9,10,11	(−4.38, −0.78)	3.75	154	117	56.3	48	16.2	126.9
5	12,13,14	(−2.50, −4.06)	3.13	128	111	43.1	49	12.5	123.2
6	15,16,17	(0.63, −4.38)	3.13	128	106	35.7	51	13.1	123.8
7	18,19,20,21	(3.59, −2.66)	3.13	128	111	37.6	53	13.8	124.5

5.5.2 Results and discussion

The computed MTFs for each variant are shown in Figure 5.5. The MTF curve for the variant for which the scanner performs the FFOV reconstruction is consistently lower than its counterpart. The magnitude of this difference is small, however. For all practical means, the ROI image quality measure is not significantly different for the two considered reconstruction procedures.

This contrasts with the results discussed in Section 5.4.4. The respective background for each ROI of this phantom contains no object that could cause the heavy beam hardening artifacts that plagued the FBP reconstruction of the synthetic phantom of Figure 5.1. The monochromatic X-ray source hypothesis that underlies the analytical reconstruction procedure then holds much better than in the experiments of Section 5.4. Moreover, the data formation model embodied in the projection matrix $\mathbf{A}$ is not as accurate for real data as it is for simulated projections. This inaccuracy may account for the loss of the high-frequency information that the PL-FFOV

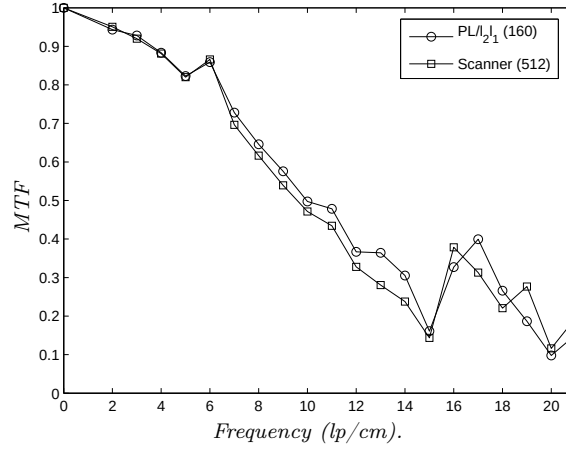


FIG. 5.5 – MTFs of the ROI reconstruction of the bar group circle of phantom Catphan600 (segment CTP528) for FFOV reconstruction by either a coarse-grid iterative algorithm or by the scanner (which uses FBP). Image degradation is excessive (MTF below 0.4) beyond the 10 lp/cm frequency for both methods. While the PL-FFOV variant appears of slightly higher quality from 6 to 10 lp/cm, the difference may stem from penalty weight settings unrepresentative of actual image variance, so we do not consider it significant.

variant could eke out of the synthetic data.

The number of iterations and runtime for the reconstruction of the various ROIs are reported in the right part of Table 5.2. The variant for which the scanner reconstruction is used for the FFOV exhibits higher numbers of iterations, which may be due to the reconstruction kernel used by the scanner under the `InnerEarSeq` protocol.

The PL-FFOV variant remain the most runtime-intensive, despite the FBP-FFOV having a higher ROI reconstruction runtime in all cases. As was mentioned in Section 5.4.4, analytical methods can be considered free when compared to iterative algorithms for background estimation. This argument is even stronger when the scanner performs real-time reconstructions. It is clear that the FBP-FFOV approach

is preferable in the general case, seeing how it entails no loss of ROI reconstruction quality with respect to the latter.

5.6 Conclusion

We have described a framework for the statistical reconstruction of a region of interest in transmission tomography. It involves an initial fast reconstruction of the full field of view, which is used to remove the contribution of the background from the projections. The data thus modified is used to perform the reconstruction of the ROI, using a tailored projection model of low dimension.

For the reconstruction of “easy” datasets, that were not degraded too much by artifact-inducing effects, we have found that using an analytical algorithm for the initial FFOV reconstruction is preferable to an iterative coarse-grid procedure. Indeed, it provides equivalent reconstruction quality of the ROI, at much reduced runtime cost. Yet, for datasets that stretch the assumptions behind these analytical algorithms or that have low SNR (low-dose imaging applications, for instance), the use of an iterative reconstruction procedure has proven beneficial to ROI image quality. Moreover, the choice of a low grid dimension has yielded image quality close to the best, at a runtime cost close to that of the FBP-FFOV counterpart.

We intend to pursue this line of research by applying the ROI reconstruction framework to a data formation model that accounts for the polychromaticity of the X-ray source. Iterative reconstruction algorithms derived from such a model are known to significantly reduce the beam hardening artifacts caused by metal struc-

tures present in the imaged object. (De Man *et al.*, 2001) We have already reported promising preliminary results for a coarse-grid iterative FFOV reconstruction. (Hamelin *et al.*, 2008) It will be interesting to look how robust a polychromatic ROI reconstruction would be to a background estimate extracted from a FBP reconstruction of the FFOV.

We also seek to extend the framework to a cylindric ROI in context of a 3D helicoidal reconstruction. The PL approach to FFOV and background reconstruction may be more compelling in this case, as analytical reconstruction procedures tend to be less robust in this context than for 2D applications.

Acknowledgments This work was funded by Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) and by the Collaborative Health Research Project #323572-06 of the Canadian Institutes of Health Research. B. Hamelin also acknowledges a Postgraduate Scholarship from the NSERC.

Chapitre 6

Metal Artefact Reduction by Least-Squares Penalized-Likelihood Reconstruction with a Fast Polychromatic Projection Model

Soumis à *Physics in Medicine and Biology*.

B Hamelin,^{*} Y Goussard,^{*} J P Dussault,[†]

G Cloutier,[‡] G Beaudoin[‡] and G Soulez[‡]

Abstract We consider penalized-likelihood reconstruction for X-ray computed tomography of objects that contain small metal structures. To reduce the beam hardening artefacts induced by these structures, we derive the reconstruction algorithm from a projection model that takes into account the photon emission spectrum and nonlinear variation of attenua-

^{*}Institut de génie biomédical, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Canada.

[†]Département d'informatique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada.

[‡]Centre de Recherche du Centre Hospitalier de l'Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada.

Corresponding author: `benoit-2.hamelin@polymtl.ca`

tion to photon energy. This algorithm requires excessively long runtimes to attain convergence. We contribute refinements in the representation of the object and the modelling of the photon emission spectrum aimed at reducing the runtime.

These refinements yield an algorithm for which the reconstruction runtime is reduced by at least one order of magnitude on each considered dataset. For real data that were preprocessed for metal artefact reduction, the enhanced polychromatic algorithm provides the best observed image quality for objects with large metal structures. For objects with small metal structures, the gains are less significant with respect to a penalized-likelihood algorithm derived from a monochromatic projection model.

PACS: 87.57cp,87.57nf,87.57nt,87.57Q-

6.1 Introduction

We take interest in metal artefact reduction in computed tomography (CT) reconstruction. The application subcontext is that of vascular imaging in the presence of a metal stent.

For the usual reconstruction algorithms, metal objects are responsible for severe beam hardening artefacts. This phenomenon is caused by the nonlinear variation of the attenuation of X photons with respect to photon energy, coupled to the nonuniformity of the polychromatic X-ray beam used for scanning the body. A large

proportion of the higher-energy photons that compose this beam propagate through metal structures as well as through organic tissues. Reconstruction algorithms based on a monochromatic projection model, such as filtered backprojection, fail to predict these high photon counts properly. This induces strong artefacts in the form of dark streaks in the direction of greatest attenuation.

Another important source of artefacts is measurement noise, which may be attributed to two main causes. First, X-ray propagation through the object is best described in terms of particle interaction phenomena, which confers a stochastic aspect to the photon counts. Second, tomographic data suffers from many alterations that induce systematic artefacts in reconstructed images. These alterations stem from limitations of the hardware and projection model and include off-focal radiation and detector effects such as afterglow and crosstalk (LaRivière *et al.*, 2006). Most modern scanners implement various data preprocessing techniques to reduce these artefacts, many of which can amplify data noise (LaRivière et Vargas, 2006).

Recent literature is rife with contributions concerned with metal artefact reduction. Many of these contributions realize the reduction by preprocessing the sinogram, to which a common analytical reconstruction algorithm (e.g. filtered backprojection, Feldkamp-Davis-Kress reconstruction, etc.) is applied. The preprocessing is either a subtraction of the contribution of the metal structures (which are reconstructed apart from the rest of the object) completed by interpolation (Rinkel *et al.*, 2008; Oehler *et al.*, 2008), or a nonlinear mapping to a monochromatic sinogram representation (Mou *et al.*, 2008; LaRivière *et al.*, 2006). However, these algorithms are sensitive to

measurement noise, as they do not account or compensate for it. Moreover, metal artefact reduction by sinogram subtraction and simplistic interpolation may induce other artefacts in reconstructed images (Müller et Buzug, 2009).

Statistical reconstruction algorithms (Fessler, 2000) are more robust to the data inconsistencies that cause these artefacts. They intrinsically take the stochastic aspect of the data formation process into account and can compensate for it through the introduction of prior information on the object. Oehler et Buzug (2007) used such a reconstruction procedure on a sinogram that had been preprocessed by a metal artefact method such as mentioned above.

In addition, the statistical framework for CT reconstruction can be adapted to projection models that describe the beam hardening effect. The development of algorithms in this framework around a polychromatic projection model has been the onus of many contributions since 2000. De Man *et al.* (2001) offered an algorithm hinged on a discrete representation of the source spectrum and a polyenergetic object representation mapped from a single attenuation image at a reference energy. Using the same model, we proposed an alternative reconstruction algorithm that was faster and more robust to data preprocessing (Hamelin *et al.*, 2008). An approach similar to that of De Man *et al.* was described by Chueh *et al.* (2008), where the explicit source spectrum is replaced with spectral data gathered from blank scans. Elbakri et Fessler (2002, 2003) presented an algorithm for beam hardening reduction, though not explicitly for metal imaging. This approach relies on the decomposition of the object into two material maps, so that it may be represented by a single material

proportion image. This object representation is also used by O’Sullivan et Benac (2007), who solve it with a different algorithm.

The main criticism leveled against statistical reconstruction concerns its high computational cost. These methods tend to require a lot of memory to run and a lot of runtime to converge. However, we rest on the hypothesis that the gain in image quality with respect to faster analytical algorithms can translate into clinical benefits. As such, the primary goal of this paper is to present strategies to reduce the runtime of polychromatic statistical reconstruction algorithms. While these strategies are specifically designed around the projection model of De Man *et al.* (2001), some may be ported to other similar setups. Namely, runtime reduction relies on two ideas. The first one is a targeted reconstruction approach, by which an initial reconstruction on a coarse image grid is used as the *background* to bootstrap the reconstruction of a small *region of interest* (ROI), represented on a finer grid. The second one is a concise discrete model of the source spectrum that takes the X photon emission phenomena into account. Along with the efficient algorithm of Hamelin *et al.* (2008) for solving the regularized polychromatic reconstruction problem, these enhancements to the model of De Man *et al.* yield a dramatic reduction of the computational cost without altering image quality.

The secondary goal is to compare the performance of some algorithmic variants over real datasets, both in terms of image quality and numerical efficiency. These datasets are obtained from the acquisition of a vascular phantom implanted with a metal stent, as well as some other metal objects to present various degrees of beam

hardening at different points along the rotation axis. The data are preprocessed by the scanner software to reduce various families of artefacts, among which beam hardening artefacts. All algorithmic variants that we compare are based on projection models that do not take this undisclosed preprocessing into account. This comparison yields some insight in the performance of preprocessing at improving image quality with respect to polychromatic projection modelling.

The rest of the paper is organized as follows. Section 6.2 recalls polychromatic reconstruction by a penalized-likelihood approach. Section 6.3 discusses the refinements to the projection model that lead to a faster implementation. Section 6.4 presents the validation of the enhancements to the polychromatic projection model through the reconstruction of said simulation datasets. Section 6.5 compares reconstruction algorithms with metal artefact reduction over real datasets. Finally, Section 6.6 offers concluding remarks.

6.2 Polychromatic reconstruction

The following development is concerned with the polychromatic projection model of De Man *et al.* (2001), specially tailored for the reduction of metal artefacts (as opposed to that of sole beam hardening artefacts). Nonetheless, the acceleration techniques developed in Section 6.3 for this model and reconstruction problem may be ported to the models of Elbakri et Fessler (2003).

6.2.1 Projection model

The basic deterministic data formation model stems from the discretization of the Beer-Lambert law of X-ray attenuation (Kak et Slaney, 1987) that takes into account the nonuniform source emission spectrum :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \int_0^{E_{\text{kVp}}} b(E) \exp(-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}(E)) dE \approx \sum_{k=1}^K b_k \exp(-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}^k). \quad (6.1)$$

Equation (6.1) introduces many symbols that will be used throughout : $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ represents the photonic intensity measured at each detector and projection angle ; $\mathbf{b} = [b_1, b_2 \dots b_K]^t \in \mathbb{R}^K$ is the source emission spectrum discretized over K equispaced energy values and scaled in order to properly approximate the integral over the continuous spectrum ; $\boldsymbol{\mu}^k \in \mathbb{R}^m$ is the attenuation image of the object at energy value k ; $\mathbf{A}$ is a $n \times m$ matrix that embodies the numerical integration of the image along each of the n raypaths. The difficulty with the derivation of a reconstruction algorithm from (6.1) is that K attenuation images must be computed. The corresponding system of nonlinear equations is woefully underdetermined. The core of the contributions in statistical methods for polychromatic reconstruction is a model for mapping a unique image to energy-dependant attenuation images.

The solution proposed by De Man *et al.* (2001) is to compute these K attenuation maps from a reference image $\boldsymbol{\mu}^0$ at a chosen energy E_0 through the decomposition of Alvarez-Macovski (Alvarez et Macovski, 1976). This approach expresses the attenuation coefficient of an object for any photon energy as the weighted sum of the contributions of the photo-electric effect and of Compton scattering to X-ray

attenuation. These effects are assumed to depend only on the material, while the weights vary according to energy. Formally, $\boldsymbol{\mu}^k = \Phi_k \boldsymbol{\phi} + \Theta_k \boldsymbol{\theta}$, with $\Phi_k = (E_0/E_k)^3$ and $\Theta_k = f_{\text{KN}}(E_k)/f_{\text{KN}}(E_0)$, where E_0 is a reference energy level and $f_{\text{KN}}(E)$ is the Klein-Nishina function (De Man *et al.*, 2001).

The Alvarez-Macovski decomposition still represents the object with two attenuation maps. To reduce this representation to a single map, De Man *et al.* (2001) computed the $\boldsymbol{\phi}$ and $\boldsymbol{\theta}$ values by least squares for a small set of materials for which the energy to attenuation coefficient map is known. He used these values to set up empirical nonlinear maps $\phi(\boldsymbol{\mu}^0)$ and $\theta(\boldsymbol{\mu}^0)$ from attenuation at the reference energy to attenuation by photo-electric effect and by Compton scattering, respectively. The polychromatic projection model (6.1) may then be recast as

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^K b_k \exp \left\{ -\mathbf{A} [\Phi_k \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\mu}^k) + \Theta_k \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\mu}^k)] \right\}, \quad (6.2)$$

where $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\mu}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \mu_i \mapsto \phi(\mu_i)$ and similarly for $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\mu})$.

6.2.2 Penalized-likelihood reconstruction

Hard structures in the image object lead to low photon counts. In this case, measurement uncertainty is dominated by photon propagation processes, which are best described by a Poisson distribution (LaRivière *et al.*, 2006) with mean $\mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{b})$ (6.2). This statistical approach reduces reconstruction to the estimation of its parameter $\boldsymbol{\mu}$.

In this context, the maximum *a posteriori* (MAP) bayesian estimation framework yields a robust algorithm. This framework allows one to introduce known information on the solution through the definition of a prior distribution. Considering Poisson-

distributed photon counts and a prior distribution from the exponential family, the polychromatic reconstruction problem is expressed as

$$\min_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} \sum_{i=1}^n [p_i(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{b}) - \tilde{y}_i \ln p_i(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{b})] + \lambda R(\boldsymbol{\mu}), \quad (6.3)$$

where $p_i(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{b})$ denotes the i -th component of vector $\mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{b})$ and $R(\boldsymbol{\mu})$ is the penalty term, weighted by λ against the first term, which measure data adequation.

When dealing with real data, the preprocessing done by the scanner software contributes significantly to data noise. Data uncertainty is therefore not dominated anymore by photon propagation events. Similarly to Fessler (1994), who proposed this approach for precompensated data in positron emission tomography, Hamelin *et al.* (2008) used a Gaussian distribution of data uncertainty, which is a good approximation to the Poisson distribution for large photon counts. The reader is referred to Hamelin *et al.* (2008) for a full justification. With a Gaussian uncertainty model, the MAP estimator is the solution to the regularized nonlinear least squares problem

$$\min_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} + \ln \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\beta})\|^2 + \lambda R(\boldsymbol{\mu}). \quad (6.4)$$

The special case of $K = 1$ is of particular interest. Equation (6.1) then devolves in the monochromatic projection model, e.g. $\ln \mathbf{p}(\boldsymbol{\mu}, 1) = \ln \exp(-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}) = -\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$. This yields the common monochromatic reconstruction problem

$$\min_{\boldsymbol{\mu} \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}\|^2 + \lambda R(\boldsymbol{\mu}), \quad (6.5)$$

which is treated at length by Oehler et Buzug (2007); Fessler (2000). Since projection data is preprocessed for metal artefacts and since it is based on a seemingly

more robust data uncertainty model, the reconstruction algorithm derived from problem (6.5) provides a compelling alternative to polychromatic reconstruction. Indeed, it only requires one projection and backprojection (respectively, the product at right and at left of operator $\mathbf{A}$) per iteration, compared to two for the polychromatic algorithms.

The penalty term takes the form $R(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{j=1}^J \nu_j \psi(\boldsymbol{\delta}_j^t \boldsymbol{\mu})$, where $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2 \dots \boldsymbol{\delta}_J$ determine image properties to penalize; ν_j weight the relative penalization of these properties and $\psi(u)$ is the penalty function. In this case, we expect the image to be of discrete structures with uniform attenuation properties. Therefore, the vectors $\boldsymbol{\delta}_j$ are rows of linear transformations of the image that determine what to penalize : here, these transformations are the identity and first-order differences. This piecewise constant assumption also prompts the use of a penalty function that preserves the discontinuities that separate the structures of the object. We use the l_2l_1 penalty $\psi(u) = \sqrt{u^2 + \eta^2} - \eta$ (Charbonnier *et al.*, 1997), which has quadratic behaviour close to the origin and linear asymptotic behaviour.

De Man *et al.* (2001) solves (6.3) with a coordinate descent method (IMPACT) that generalizes the development of Fessler *et al.* (1997) (who considered the maximization of the regularized Poisson log-likelihood based on a monochromatic projection model). However, this method is inadequate for the application under consideration, as it requires the projection operator $\mathbf{A}$ to be both row- and column-accessible. We have previously developed a parcimonious representation of this operator that takes into account the symmetries that arise among the projection patterns (Gendron,

2008). While this structure makes penalized-likelihood reconstruction of large-scale scans feasible, it is only row-accessible. As we cannot afford the projection runtime to update a single pixel of the image, we reject coordinate descent methods.

Chueh *et al.* (2008) has proposed a full-image update OS-EM algorithm tailored for polychromatic reconstruction with a very similar model. Elbakri et Fessler (2002) and O’Sullivan et Benac (2007) also contributed interesting methods, which should not prove difficult to port to the projection model developed above. However, experiments by Hamelin *et al.* (2009c) on the monochromatic reconstruction problem have shown general-purpose optimization solvers to be competitive with these EM-type methods with respect to local convergence properties. For the polychromatic reconstruction experiments performed in Sections 6.4 and 6.5, we used L-BFGS-B (Zhu *et al.*, 1997) to solve (6.3), (6.4) and (6.5) directly.

Whatever iterative method is used, the runtime of the reconstruction remains excessive. Each iteration requires the computation of one or two projections and backprojections, each being costly for high-resolution image grids. The reduction of the amount of computation is addressed in the next section.

6.3 New efficient implementation of the polychromatic projection model

Two elements may be held responsible for the long runtimes. First, the large dimension of both the data and image vectors require at least four products (two projections and backprojections) with $\mathbf{A}$, since most L-BFGS-B iterations accept the

first steplength attempt, but about one iteration in 50 backtrack once or twice). These products account for about 70% of the runtime of each iteration. Second, another large part (more than 25%) of the runtime is spent computing scalar exponentials of the modeled projections, which are summed after weighting by the emission spectrum. Both these issues are addressed through lower-dimension representations of the object (Section 6.3.1) and of the source spectrum (Section 6.3.2).

6.3.1 Background/ROI decomposition

For vascular imaging, high resolution is only actually needed in a small region around the blood vessel of interest. The rest of the image only serves to provide consistency to the data, so high resolution may not be necessary there.

This prompts the idea of decomposing the image into two zones : the region of interest (ROI) and the rest of the image, which we term the *background*. While good image quality is required in the former, the latter needs only be so good as to avoid hampering ROI image quality. To reduce the cost of the application of the projection operator, we propose using a coarser image grid to represent the background. This decomposition was initially proposed by Hsieh *et al.* (2004). The multiresolution approach to its implementation has been studied by Hamelin *et al.* (2009b) and Stearns *et al.* (2006) in the case of statistical reconstruction with a monochromatic projection model.

Formally, we reorder the pixels in order to decompose the object vector as $\boldsymbol{\mu} =$

$[\boldsymbol{\mu}_{\text{bkg}}^t, \boldsymbol{\mu}_{\text{roi}}^t]^t$. The projection operator is similarly decomposed in the form

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{bkg}}^1 & \mathbf{A}_{\text{roi}} \\ \mathbf{A}_{\text{bkg}}^2 & 0 \end{bmatrix},$$

where $\mathbf{A}_{\text{bkg}}^2$ is formed from the set of raypaths that do not intersect the ROI.

The deterministic projection model then takes the form $\mathbf{y} = \mathbf{A}_{\text{bkg}}\boldsymbol{\mu}_{\text{bkg}} + \mathbf{A}_{\text{roi}}\boldsymbol{\mu}_{\text{roi}}$,

with $\mathbf{A}_{\text{bkg}} = [(\mathbf{A}_{\text{bkg}}^1)^t, (\mathbf{A}_{\text{bkg}}^2)^t]^t$. For the polychromatic projection model (6.2), we

need to compute the projection of both the photo-electric effect and Compton scattering contributions to the attenuation, so the model is re-expressed as

$$\tilde{\mathbf{y}} = \sum_{k=1}^K b_k \exp \left\{ -\mathbf{A}_{\text{bkg}} [\Phi_k \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\mu}_{\text{bkg}}) + \Theta_k \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\mu}_{\text{bkg}})] - \mathbf{A}_{\text{roi}} [\Phi_k \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\mu}_{\text{roi}}) + \Theta_k \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\mu}_{\text{roi}})] \right\}.$$

A possible approach is the simultaneous reconstruction of the background and the ROI. However, Hamelin *et al.* (2007) showed that the difference in pixel size between the two images introduced a scale discrepancy that resulted in ill-conditioning of the reconstruction problem. Instead, we propose a two-steps reconstruction. In the first step, a reconstruction $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\text{bkg}}$ of the full object is obtained on an image grid with the pixel size of the background. This reconstruction is expected to be rather fast, as this image grid is of low dimension. The background image $\boldsymbol{\mu}_{\text{bkg}}$ is extracted from $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\text{bkg}}$ by setting to zero its pixels that belong to the ROI. In the second step, we perform a ROI-only reconstruction, using fixed background projections. With $\boldsymbol{\zeta}_{\text{bkg}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\mu}_{\text{bkg}})$ and $\boldsymbol{\xi}_{\text{bkg}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\mu}_{\text{bkg}})$, we devise a reconstruction algorithm around the ROI projection model

$$\tilde{\mathbf{y}} = \sum_{k=1}^K b_k \exp \left\{ -\Phi_k \boldsymbol{\zeta}_{\text{bkg}} - \Theta_k \boldsymbol{\xi}_{\text{bkg}} - \mathbf{A}_{\text{roi}} [\Phi_k \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\mu}_{\text{roi}}) + \Theta_k \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\mu}_{\text{roi}})] \right\}. \quad (6.6)$$

This reconstruction is also fast since operator $\mathbf{A}_{\text{roi}}$ has both a lower number of rows and of columns than the original $\mathbf{A}$.

6.3.2 Source spectrum representation

An aspect of the polychromatic projection model that significantly inflates the runtime is the weighted summation of $K \approx 100$ sinograms. While these are generated from only two image projections, they require the computation of Kn exponentials. With the high-resolution uniform grid representation of the object, a profile of the runtime of the projection model (6.2) indicates that 30% of the runtime is spent on these exponentials. In addition, the X-ray emission physics is such that, on the considered energy interval, the emission spectrum is a wide-band function. A sub-sampling of the discrete spectrum representation suffers from significant aliasing, which hampers metal artefact reduction in the reconstruction image.

However, careful consideration of the emission phenomena can lead to a concise source spectrum model. These phenomena are general emission (*bremsstrahlung*), for which photon energy is smoothly distributed, and characteristic emission, for which generates photons of specific energy. Our approach is thus to model these phenomena separately. On the one hand, general emission admits a continuous spectrum model, which we found we could sample at a low frequency. On the other hand, since the anode from which the X photons are emitted is made of tungsten, we model characteristic emission with a pair of dirac impulses : one at 60 keV, the other at 69 keV. Let us call $b^g(E)$ the general emission spectrum and $b^c(E)$ the characteristic emission

spectrum; we can then rewrite the basic projection model (6.1) as

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{y}} &= \int_0^{E_{\max}} (b^g(E) + b^c(E)) \exp[-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}(E)] dE \\
&= \int_0^{E_{\max}} [b^g(E) + \beta_1^c \delta(E - 60) + \beta_2^c \delta(E - 69)] \exp[-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}(E)] dE \\
&= \int_0^{E_{\max}} b^g(E) \exp[-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}(E)] dE + \beta_1^c \exp[-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}(60)] + \beta_2^c \exp[-\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}(69)].
\end{aligned}$$

Defining $\boldsymbol{\beta}$ as the values of a sampling of $b^g(E)$ (scaled by the sampling period) to which β_1^c and β_2^c are concatenated, we retrieve a polychromatic projection model in the summation form of (6.2), but with $\mathbf{b}$ replaced with $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{K'}$, $K' < K$.

To compute the components of $\boldsymbol{\beta}$, we assume that for any energy level, the emitted photons either stem from general emission only or from the superposition of the two phenomena. From the full discrete representation of the spectrum, the components tainted with characteristic emission are removed. A piecewise-polynomial function is then adjusted by least squares to the remaining spectrum elements. This empirical function is taken as the continuous general emission model $b^g(E)$ and used to subtract its contribution to the spectral components composed of the two emission phenomena. What remains of these components is divided in two subsets, each respectively attributed to a characteristic emission spike. The characteristic emission energy is computed for these two spikes and the square root of this energy is used as the gain factors β_1^c and β_2^c . Finally, we have

$$\boldsymbol{\beta} = [b^g(E_1), b^g(E_2) \dots b^g(E_{K'-2}), \beta_1^c, \beta_2^c]^t \in \mathbb{R}^{K'},$$

where $b^g(E_k)$ denote samples from the continuous function $b^g(E)$. An example of the remodeled source spectrum is shown in Figure 6.1(b).

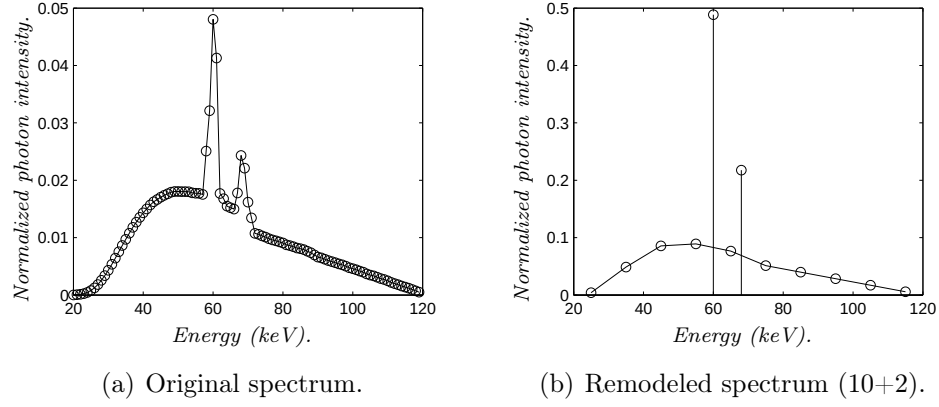


FIG. 6.1 – Spectrum of the polychromatic source used for data simulation and its remodelling with resampling of the general emission over 10 energy values. Compared to the original spectrum, the characteristic emission impulses for the remodeled spectrum are twice as tall relatively to general emission because they cumulate the energy of the spikes. Also, the general emission contribution at the impulse energies is added only for proper graphic comparison with the original spectrum.

6.3.3 Reconstruction problem summary

Putting these refinements together, we end up solving two polychromatic reconstruction problems : one for the full image (from which we extract the background) and one for the ROI. Both are accelerated by using the concise source spectrum model embodied by vector β . Considering Gaussian data uncertainty, the full image reconstruction is then obtained by solving (6.4) on a coarse image grid, while the ROI reconstruction is obtained by solving

$$\min_{\mu_{\text{roi}} \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \ln \mathbf{p}_{\text{roi}}(\mu_{\text{roi}}, \beta)\|^2 + \lambda \sum_{n=1}^J \nu_n \psi(\delta_n^t \mu) \quad (6.7)$$

where

$$\mathbf{p}_{\text{roi}}(\mu_{\text{roi}}, \beta) = \sum_{k=1}^{K'} \beta_k \exp \{ -\Phi_k \zeta_{\text{bkg}} - \Theta_k \xi_{\text{bkg}} - \mathbf{A}_{\text{roi}} [\Phi_k \phi(\mu_{\text{roi}}) + \Theta_k \theta(\mu_{\text{roi}})] \}.$$

The reconstruction experiments of Section 6.5.2 validate the reconstruction al-

gorithm derived from the Gaussian uncertainty model against the one derived from the Poisson model (6.3), as well as against monochromatic reconstruction (6.5). The former is accelerated by the background/ROI decomposition and concise source spectrum model. The latter ignores source spectrum information but may also be formulated in terms of the background/ROI decomposition, which provides excellent runtime reduction (Hamelin *et al.*, 2009b). The modifications brought respectively to problems (6.3) and (6.5) for ROI reconstruction echo these that lead from (6.4) to (6.7).

6.4 Numerical experiments over simulated data

This first run of results aims at validating the two enhancements brought to the polychromatic projection model. The goal is to quantify the runtime reduction and ascertain the conditions under which image quality is preserved.

6.4.1 Methods

The synthetic dataset must have the same properties as one that provokes beam hardening artefacts for monochromatic algorithms. Therefore, in addition to having some metal structures, all components of the phantom must model the variation of attenuation with respect to photon energy. Moreover, the data simulation process must take into account the nonuniform emission spectrum of the X-ray source.

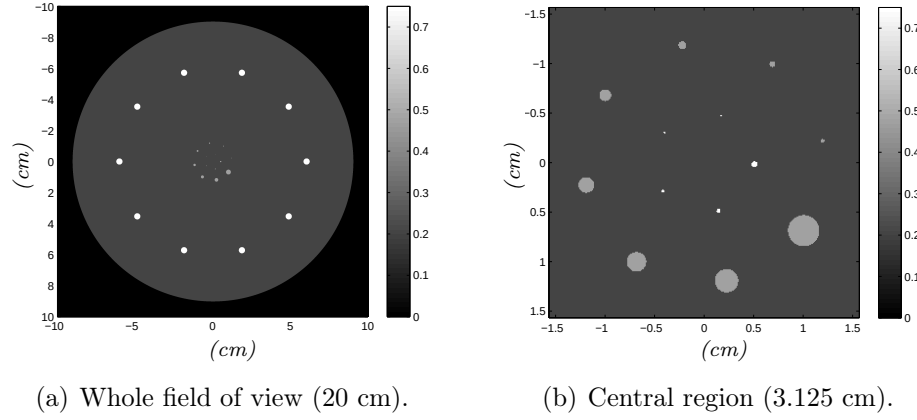


FIG. 6.2 – Resolution phantom used for data simulation (attenuation in cm^{-1} at 70 keV).

Phantom

Although it is entirely virtual, the resolution phantom (shown in Figure 6.2) is best described in terms of physical structures and materials, because it is simulated by the generation of attenuation maps at multiple energy levels from a 2D distribution of materials. It was composed of a large ball of water inset with three concentric rings of balls. The innermost circle, mostly visible on Figure 6.2(b), was made of tiny inserts of iron, of varying radii. The median circle was made of larger spheres of glass, also of varying radii. The outermost circle, only visible on Figure 6.2(a), was made of ten larger balls of iron, all of equal radius. While the first two circles were soft and hard pixel size gauges, the outermost circle served as a perturbation to resolution measurement.

The data were simulated using the polychromatic projection model (6.1) with the source spectrum model represented in Figure 6.1(a) and the efficient projection operator code of Gendron (2008). The attenuation maps were derived from a material

map of dimensions 2048×2048 , in order to avoid the inverse problem crime (Wirgin, 2004). Poisson- and Gaussian-distributed pseudorandom noise were generated so as to obtain a signal-to-noise ratio (SNR) of approximately 30 dB. This hybrid noise effectively models the measurement uncertainty caused by X-ray propagation phenomena (Poisson) and electronic and hardware sources (Gaussian).

Selection of the regularization parameters

All reconstruction problems considered above include a regularization term set up with two parameters. They are its weight λ against data adequation and η , which determines the transition between quadratic and linear behaviour of the penalty function. This is chosen heuristically as 1% of the typical discontinuity jump between different structures in the image. As this typical jump is of the order of 0.1, we set $\eta = 0.001$.

The regularization weight has a direct impact on the properties of the reconstructed image. For a low weight value, the image has high resolution and a high noise level. A higher weight value smoothes out the noise, but also the image discontinuities, resulting in a loss of resolution. We then consider two separate cases. On the one hand, the coarse full-image reconstructions are not compared to each other in terms of quality. A high weight value is thus chosen in order to reduce as much as possible the beam hardening artefacts, which dominate the reconstruction noise.

On the other hand, for images involved in quality comparison (through MTF computation as explained by Hamelin *et al.* (2009c) for simulated datasets or visual appreciation for real datasets), we try to better preserve image quality. The MTF

curves for alternative reconstruction algorithms are comparable inasmuch as they are obtained from reconstructed images with a similar variance. The computation process of the MTF for simulated data yields an image variance estimate that, while not ideal, is good enough to assess MTF comparability. We then choose, using preliminary reconstructions, a weight that gives for each compared image close values of the reconstruction variance estimate (correspondance of at least the first two significant digits).

Nonlinear solver setup

The L-BFGS-B box-constrained nonlinear solver is used for each reconstruction problem. Memory is allocated in order to store 25 vector pairs to defined the approximative representation of the Hessian of the cost function. Also, the solver is set up to stop once the l_2 norm of the projected gradient drops below a certain tolerance. Hamelin *et al.* (2009a) justify a stopping condition based on such a stationarity measure for the truncated resolution of unconstrained linear least square problems with convex differentiable penalization. However, the set of reconstruction problems under consideration rely on a nonlinear data adequation cost. Also, the uncertainty from the ROI projection model is not accurately modeled as white Gaussian noise, on which the development of Hamelin *et al.* (2009a) is based. Still, we conjecture that stationarity is the best assertion of convergence and that the results of Hamelin *et al.* (2009a) may be generalized to these experiments.

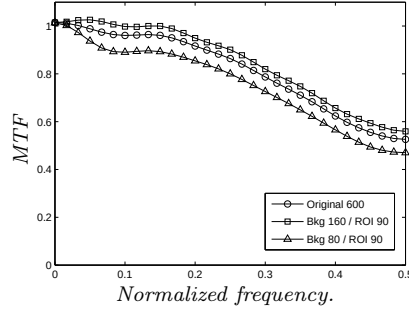
6.4.2 Validation of background/ROI image decomposition

The goal of this experiment is to assess the loss of image quality due to the background/ROI object representation against the reduction in runtime.

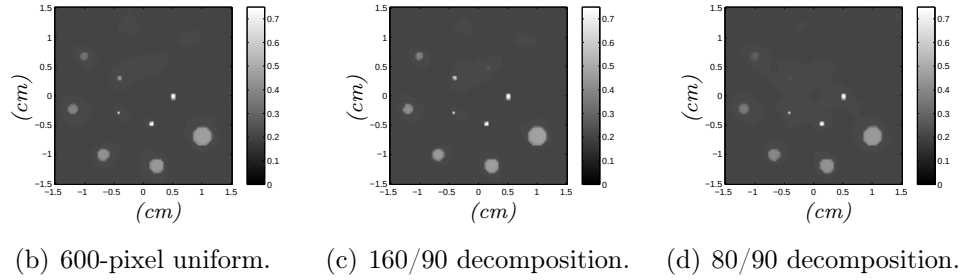
Reconstruction on two background/ROI decompositions of the object are compared to that on a high-resolution uniform image. The 3-cm ROI is represented on a 160-pixel image grid, which matches pixel size with the 600-pixel image that covers the 20-cm full field of view (FFOV). The background is extracted from either a 160-pixel or a 80-pixel image of the FFOV. All reconstructions are performed with the full source spectrum model and using the Gaussian data uncertainty distribution.

Image quality is assessed from the images and modulation transfer function (MTF) curve presented in Figure 6.3. The MTF curve, a 1D spectral representation of the average degradation of the image modeled as a linear space-invariant blur, is obtained by maximum-likelihood deconvolution of a finite-support point-spread function. The process is described in more details by Hamelin *et al.* (2009c). In addition, runtime for each reconstruction is displayed in Table 6.1.

Clearly, some background/ROI decomposition does not affect image quality. It even seems to enhance it somewhat, as the MTF of the 160/90 decomposition looks better than that of the uniform grid. Since MTF curves are highly sensitive to image degradation by smoothing, this effect may be caused by the separate calibration of the FFOV and ROI reconstructions, with the coarse-grid FFOV bearing the bulk of artefact smoothing. Since it is also possible to vary the regularization weight spatially for the uniform-grid reconstruction, the small difference between MTF curves is



(a) MTF.



(b) 600-pixel uniform. (c) 160/90 decomposition. (d) 80/90 decomposition.

FIG. 6.3 – Comparative reconstruction results over various background/ROI decompositions. The 160/90 decomposition essentially preserves image quality, while the 80/90 decomposition entails a sensible loss of resolution for equal variance.

inconsequential to image quality comparison.

However, one can observe sharper decrease of the MTF curve for the 80/90 decomposition. This marks a limit of the background coarseness beyond which we may expect degradation of the ROI image. Although the actual degradation remains slight in this case, Hamelin *et al.* (2009b) has shown that worse results can be obtained from excessively coarse grids for the FFOV reconstruction.

Both decompositions achieve a reduction of runtime of 79% and 85% respectively, in comparison to the reconstruction on the uniform grid. Their runtimes are strongly dominated by that of the initial reconstruction, which suggests that any means of accelerating this step would translate into direct benefits.

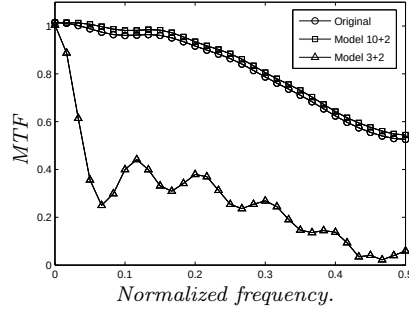
TAB. 6.1 – Runtime of the reconstruction experiments of Section 6.4. Both the background/ROI object representation and concise source spectrum model decrease the runtime significantly (except for the 3+2 source model, which degenerates the polychromatic projection model).

Source	Image grid		Iterations		Runtime (min)		
	Bkg.	ROI	Bkg.	ROI	Bkg.	ROI	Total
100	- 600 -		- 991 -		—	—	338.4
100	160	90	283	160	44.9	23.4	68.3
100	80	90	164	130	25.6	27.0	52.6
100	- 600 -		- 991 -		—	—	338.4
10+2	- 600 -		- 580 -		—	—	129.0
3+2	- 600 -		- 3098 -		—	—	536.0

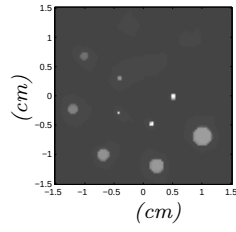
6.4.3 Validation of alternative source spectrum modelling

Two concise source spectrum models (as described in Section 6.3.2) are compared to the original discrete spectrum model in context of reconstruction. The first two models involve either sampling the general emission subspectrum on 10 elements (named the “10+2” spectrum) or 3 elements (“3+2”). All reconstructions are performed on a uniform 600-pixel image, using the Gaussian distribution of measurement uncertainty. Figure 6.4 presents the reconstructed image and MTF comparison. Numerical performance is displayed in Table 6.1.

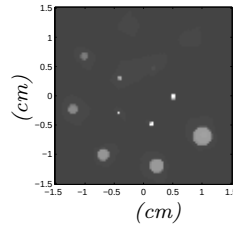
The 10+2 spectrum produces a reconstruction with the same quality as the full spectrum : the small difference that may be observed is of insignificant magnitude. This spectrum model also provides a 60% runtime decrease. Moreover, a greedy general emission subsampling such as the 3+2 spectrum yields an important loss in image quality. We may expect that as the complexity of the source spectrum model



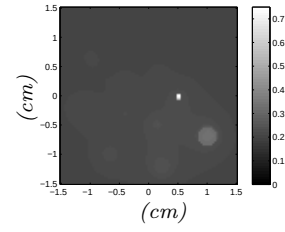
(a) MTF.



(b) Full (100) source spectrum.



(c) 10+2 spectrum.



(d) 3+2 spectrum.

FIG. 6.4 – Comparative reconstruction results over various source spectrum models. The quality of polychromatic reconstruction is preserved by the 10+2 spectrum model (Figure 6.1(b)), while it degrades significantly with the 3+2 model.

is reduced, the polychromatic projection model naturally decays to a monochromatic model. It is not surprising then that this model incurs a 61% *increase* of the runtime, as the algorithm becomes less robust to beam hardening.

6.5 Reconstruction of real data

These experiments are presented as a proof of concept for polychromatic reconstruction. It is understood that the datasets studied here are preprocessed for metal artefact reduction and that monochromatic reconstruction approaches (both analytical and statistical) are invariably faster. However, an evaluation of both the feasible image quality and computational cost of polychromatic algorithms is necessary to

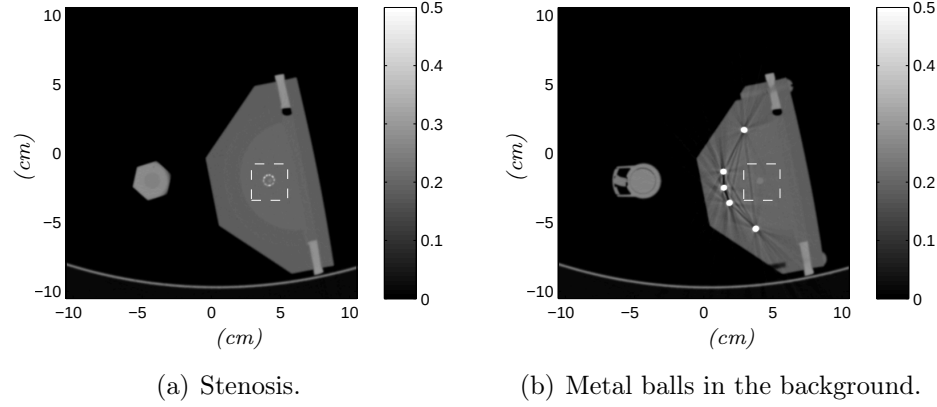


FIG. 6.5 – Scanner reconstruction of the slices of interest.

establish their relevance.

6.5.1 Methods

The phantoms used for these experiments are described in Cloutier *et al.* (2004). They were made of one half of an hexagonal cylinder hollowed in a circular shape. This pool was filled with agar gel that mimics the attenuating properties of soft tissues. A polyurethane tube was inserted with a lost-cast material technique using sugar-based isomalt into the gel pool. A metallic stent was implanted around the tube at a middle position along the agar pool and a 70% stenosis was created in the mid portion of the stent. Metal balls were set near the bottom of the pool, on planes perpendicular to the cylinder axis. The phantom was filled with a 2.8% solution of 430 mg/ml of iohalamate meglumine (Conray 43, Mallinckrodt Medical, Pointe-Claire, Quebec, Canada) diluted with a 0.9% NaCl solution. This concentration was used to simulate the contrast obtained after bolus injection during CT angiography.

Two axial slices are of interest. The first one cuts through the stented part of

the vessel model, at the site of stenosis. Since the stent is surrounding the tube, the vessel shows as a stenosed area filled with the contrast solution. The space left between the stenosed lumen and the stent struts is filled by the agar gel simulating the density of an atherosclerosis lesion. The second plane cuts through metal balls set in a non-stenosed area outside the stented portion.

The scanner used to image this phantom is a Siemens SOMATOM Sensation 16 (Siemens AG Medical Solutions, Computed Tomography, Siemensstr 1, D-91301 Forchheim, Germany) deployed at the Notre-Dame hospital of the Centre Hospitalier Universitaire de Montréal (1560 Sherbrooke Est, Montréal, Québec, Canada, H2L 4M1). The phantom was scanned using the **SpineSeq** protocol, an axial protocol similar to the helical one already deployed for contrast-enhanced vascular studies. Projections are acquired on a 672-detector array at 1160 angles around the object. The reconstruction kernel used on the scanner is geared towards noise reduction. The polychromatic X-ray source used for the scan has an angular flying focal spot, which effectively doubles the number of measurements (for a total of 1559040) and increases the image resolution that can be obtained. Figure 6.5 shows the images output by the scanner for both sites of interest and scan protocols used. The montage on the scanner table include two phantom assemblies buttressed against each other. The ROI is delineated with a dashed line within each image.

We compare the two polychromatic reconstruction variants to monochromatic reconstruction. The background/ROI representation of the object is used in all cases, with a 42-cm FFOV obtained on a 160-pixel image grid and a 2.625-cm ROI obtai-

ned on a 64-pixel grid. The polychromatic algorithms make use of the 10+2 source spectrum model.

Again, two regularization parameters must be chosen for each dataset and algorithm. In all cases, we set $\eta = 0.001$, for reasons described in Section 6.4.1. As for regularization weight λ , two cases are considered. For the coarse-grid FFOV reconstructions, a weight is chosen just large enough to obtain a visually satisfactory reduction of image noise. For the ROI reconstructions and for each dataset, we first determine the weight for one of the polychromatic algorithms as for the background. We then compute the empirical variance of the pixels of the image, excluding a square zone that contains the blood vessel model (and stent). We then choose the weight for the two other algorithms in order to obtain a similar image variance (excluding the vessel zone) from preliminary reconstructions.

6.5.2 Results

Figure 6.6 shows the reconstruction results for the stenosis-and-stent and metal-balls-in-background slices. The ROI from the scanner reconstructions is displayed along the results for the statistical reconstructions algorithms, for reference. All images are rescaled to map the gray levels on a scale from 0.2 to 0.25. The run-time for each reconstruction case is reported in Table 6.2.

We observe that the statistical algorithms suppress most artefacts present in the scanner images. Let us first consider the stenosis images. It may be seen that stent wire thickness is less exaggerated and that the contour of the blood vessel

TAB. 6.2 – Comparative results of the reconstruction of real datasets. The monochromatic algorithm is the fastest in all cases. The Gaussian polychromatic variant arrives second in all cases, converging in between 2 and 3 times as much time. The Poisson polychromatic variant converges after 5 to 7 times as much.

Slice	Projection model	Iterations		Runtime (min)		
		Bkg.	ROI	Bkg.	ROI	Total
Stent	Mono.	133	36	5.4	0.1	5.5
	Poly. Poisson	287	25	24.4	0.5	24.9
	Poly. Gauss.	146	31	15.2	0.9	16.1
Balls	Mono.	160	30	7.1	0.1	7.2
	Poly. Poisson	572	21	45.8	0.6	46.4
	Poly. Gauss.	191	35	16.4	0.7	17.1

is better contrasted to the background. This spread of the stent wires in all cases likely stems from data preprocessing in order to reduce the metal artefacts, which has succeeded since no streak nor shadow can be observed, even on the scanner image. The best contrast of the stent struts to the intrastent lumen is obtained for the Gaussian polychromatic variant. Still, the contour of the vessel is rendered with enough contrast for all statistical methods.

In the second slice, where the background contains metal balls, data preprocessing could not completely compensate for the low photon counts that yield the beam hardening artefacts, as the scanner images show. The statistical methods then provide a significant reduction of these remaining artefacts. However, for the monochromatic and Poisson polychromatic algorithms, heavier regularization weights had to be set to reduce the artefacts, resulting in poor resolution. Such regularization settings must be chosen when the data doesn't match the projection model well according to the

log-likelihood being minimized. For the monochromatic algorithm, poor data adequation may be traced down to the improper modelling of the X-ray beam used for imaging. For the Poisson polychromatic variant, the Poisson log-likelihood embodies a good modelling of the uncertainties induced by the physics of X-ray propagation and detection. Therefore, if the dataset is modified for the purposes of reducing artefacts of various sources (see Section 6.1), the uncertainty distribution will shift away from the Poisson probabilistic model.

For all considered datasets, the monochromatic algorithm has come out the fastest by a large margin and the Gaussian polychromatic variant is second. This poor numerical performance of the Poisson polychromatic variant is also a symptom of poor adequation of the projection model to data with respect to the log-likelihood. It appears that the Poisson polychromatic algorithm lacks robustness against data preprocessing. This contrasts with the Gaussian variant, which seems to be less sensitive to preprocessing-induced data inconsistency in all respects. It is likely that for a raw dataset, the Poisson and Gaussian variants perform similarly, both in terms of image quality and runtime.

Finally, for objects containing only small metal objects (such as stent wires), the metal artefact reduction realized through sinogram preprocessing appears sufficient. Therefore, the polychromatic algorithms do not yield significantly better images than their monochromatic counterpart, which converges much faster. However, the artefacts induced by larger metal structures cannot be sufficiently eliminated by the preprocessing, in which case the Gaussian polychromatic algorithm proposed in this

paper should be preferred.

6.6 Conclusion

We have presented multiple refinements to a polychromatic projection model and reconstruction algorithm based of the work of De Man *et al.* (2001). These refinements yield a runtime reduction by one order of magnitude. However, this is not sufficient to recommend the algorithm for vascular imaging, where only small metal structures such as a stent are encountered. Monochromatic reconstruction is rather recommended in this case, for its sheer speed and its good resolution-to-noise compromise.

Future work will focus on an extension to 3D statistical reconstruction, for both monochromatic and polychromatic projection models. The main challenge is that even for coarse axial grids, the runtime of statistical FFOV reconstruction is inconvenient. We would then like to extract the background from the scanner reconstructions.

Acknowledgments

This work was funded by Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) and by the Collaborative Health Research Project #323572-06 of the Canadian Institutes of Health Research. B. Hamelin also acknowledges a Postgraduate Scholarship from the NSERC.

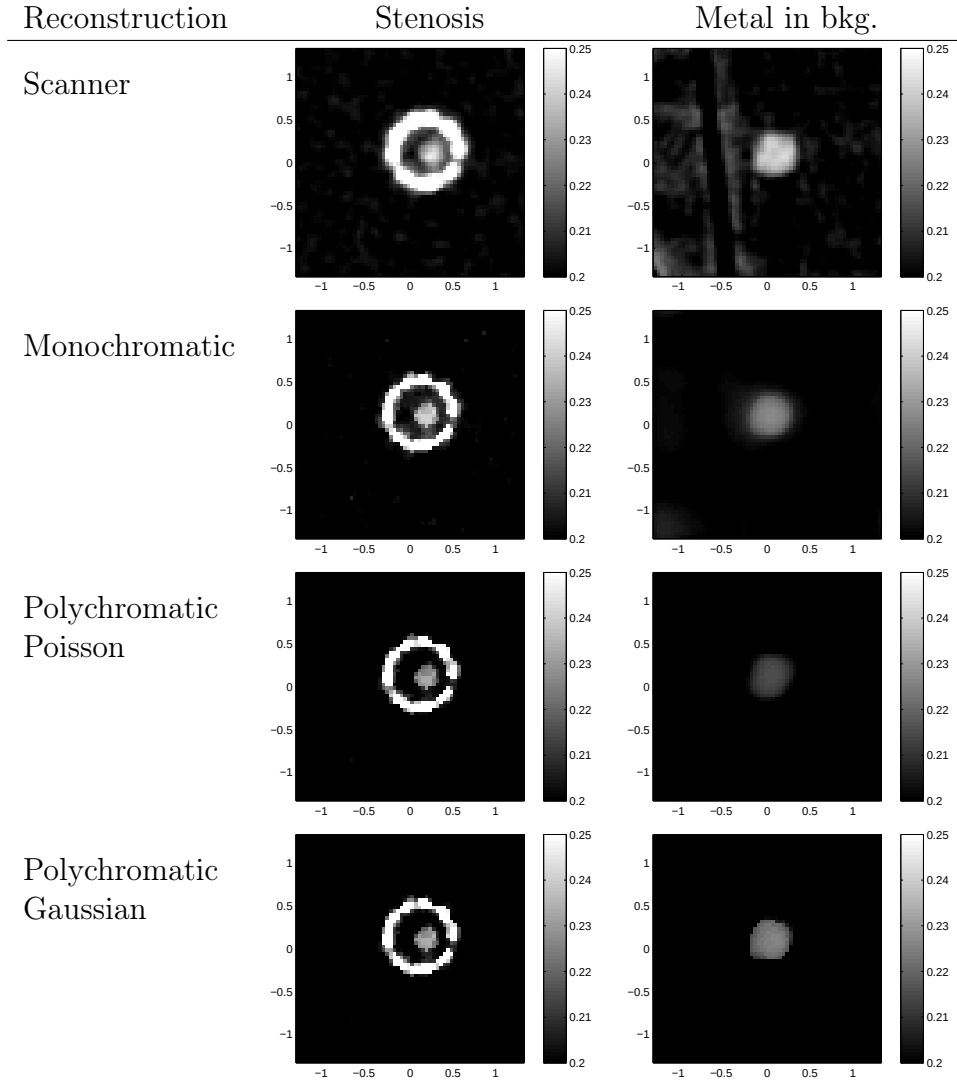


FIG. 6.6 – Real data reconstruction images. For the stenosis images, the statistical algorithms provide less noise and a better definition of stent struts. While a higher contrast between the stent struts and the intrastent lumen is obtained with the polychromatic algorithms, the vessel contour is delineated equally well for all statistical reconstructions. For the images with metal balls in the background, the scanner reconstruction suffers from strong artefacts, which are practically eliminated for all statistical reconstructions. The Gaussian polychromatic variant yields the best resolution.

Chapitre 7

Discussion générale

Pour faciliter l’articulation de certaines critiques portant sur le travail dans son ensemble, rappelons-en les principaux éléments. Tout d’abord, le problème de réduction de temps de calcul a été posé par l’énoncé d’une condition d’arrêt liée aux propriétés statistiques de l’image reconstruite. Cette condition d’arrêt permet une comparaison rigoureuse et originale de méthodes numériques convergentes malgré que ces méthodes ne convergent pas vers le point stationnaire de l’objectif par la même séquence d’images.

De telles méthodes appartenant à deux familles ont donc pu être comparées. D’une part, nous avons considéré des méthodes de reconstruction basées sur la substitution de l’objectif par une approximation quadratique séparable. Ces algorithmes sont communément utilisés pour la reconstruction tomographique basée sur l’estimation MAP. D’autre part, nous avons proposé l’usage d’algorithmes d’optimisation non linéaire d’usage général qui convenaient à la résolution du problème de reconstruction régularisé. Ces approches ont reçu peu d’intérêt dans la littérature sur la tomographie, malgré que les algorithmes soient tenus en haute estime par la communauté de

l'optimisation. Il ressort de la comparaison que certains algorithmes de cette seconde famille sont tout à fait adéquats pour la reconstruction tomographique, apparaissant plus rapides que certains algorithmes de la première famille. Ces résultats soutiennent le choix de du solveur L-BFGS-B pour le reste du travail.

Un progrès majeur a été réalisé par l'adoption de la décomposition de l'image en arrière-plan et en ROI, tel que décrite par Hsieh *et al.* (2004). L'utilisation de cette approche exige cependant de faire certains choix quant à la méthodologie à adopter pour la reconstruction préliminaire dont l'arrière-plan est extrait. Les résultats du chapitre 5 montrent que la présence d'artéfacts forts dans l'arrière-plan peut effectivement réduire la qualité d'image dans la ROI ; d'où l'intérêt d'utiliser une approche régularisée pour la reconstruction préliminaire. Dans ce cas, il est possible de choisir une grille de reconstruction grossière sans nuire significativement à la qualité d'image dans la ROI, réduisant ainsi le temps de calcul global. Par ailleurs, il est apparu qu'en l'absence de structures de l'objet propres à causer l'apparition d'artéfacts forts, l'usage d'une approche analytique pour la reconstruction préliminaire ne nuit pas à la qualité d'image dans la ROI. Dans ce cas, cette reconstruction de l'arrière-plan est à toute fin pratique gratuite, puisque calculée en temps réel par le tomographe. Le temps de calcul de la reconstruction de la seule région d'intérêt est alors inférieur à une minute. Cette comparaison des méthodologies applicables à la reconstruction préliminaire constitue une contribution originale.

Finalement, le problème de la réduction des artéfacts métalliques a été résolu par un nouvel algorithme de reconstruction régularisé basé sur un modèle poly-

chromatique de projection. Cet algorithme est accéléré par plusieurs améliorations innovatrices de l'algorithme de De Man *et al.* (2001) :

1. L'adaptation de la grille image hybride (arrière-plan et ROI) au modèle de projection polychromatique ;
2. Le développement d'un modèle discret de petite dimension du spectre d'émission de la source de rayons X ;
3. La formulation d'un algorithme régularisé de moindres carrés non linéaires basé sur la modélisation de l'incertitude sur les données par une loi gaussienne.

Chacune de ces améliorations a pu être mise en œuvre de manière à ne pas diminuer la qualité d'image obtenue dans la ROI, corroborant les résultats obtenus au chapitre 5 pour la reconstruction monochromatique. Le temps de calcul de la ROI a cependant pu être réduit d'un ordre de grandeur. De plus, l'algorithme de moindres carrés proposé s'est montré plus robuste que, sur des données réelles prétraitées, l'algorithme découlant du modèle de De Man *et al.* (2001) donne la meilleure qualité d'image pour des objets comportant des structures métalliques de grande taille.

Devant cette synthèse des contributions, trois critiques peuvent être élevées. La première concerne le critère d'arrêt développé au chapitre 3. Ce critère n'est effectivement pas appliqué de manière rigoureuse dans les chapitres 5 et 6. La raison est que le problème de reconstruction d'une région d'intérêt (équation 5.3), de même que le problème de reconstruction basé sur un modèle de projection polychromatique (équations 6.3, 6.4 et problèmes dérivés), ne correspond pas au problème d'estimation (3.1). Pour la reconstruction polychromatique, cela est flagrant, puisque le

modèle de projection n'est pas une simple application linéaire. La reconstruction d'une région d'intérêt est un cas plus subtil : la distinction vient du fait que les données $\mathbf{y}_{\text{roi}}$ ne sont pas distribuées selon une loi gaussienne décorrélée. Néanmoins, la reconstruction pour ces deux cas a été arrêtée sur une condition de stationarité de la solution intermédiaire. C'est le choix empirique de la tolérance d'arrêt (suffisamment petite pour vraisemblablement obtenir une erreur d'estimation proche de l'erreur minimale) qui fait l'objet de cette critique. Il est clair qu'il faudrait approfondir l'étude du chapitre 3 de manière à définir des tolérances appropriées pour ces problèmes de reconstruction, qui sont critiques aux solutions proposées pour la réduction des artéfacts et du temps de calcul.

La deuxième critique est à propos du choix de la grille image pour la reconstruction de l'arrière-plan à partir de données réelles. Pour un large plan imagé (plus de 25 cm), il n'est possible de réduire le temps de calcul de la reconstruction qu'en choisissant une grille de petite dimension pour la reconstruction initiale. Par exemple, dans le cas présenté au chapitre 6, on emploie une grille de dimension 160×160 pour représenter un plan carré de 41 cm de côté, ce qui implique une résolution plutôt grossière d'environ 0.26 cm. Ainsi, pour le plan dont les reconstructions sont présentées dans la deuxième colonne de la figure 6.6 (page 170), les billes de métal de l'arrière-plan étaient mal représentées, puisque leur diamètre était de l'ordre de la taille des pixels. Cela correspond à la situation défavorable décrite par la figure 5.3 (page 130), qui suggère que pour une représentation aussi grossière de l'arrière-plan, la reconstruction de la région d'intérêt perd en qualité d'image.

Ce problème illustre les limites pratiques de la décomposition de l'image en arrière-plan et ROI. En posant une limite sur la dimension de la grille image pouvant servir à la reconstruction initiale par estimation MAP, on risque la dégradation systématique de la ROI si l'arrière-plan comporte de petits objets qui contribuent significativement à l'énergie des projections. Heureusement, de tels objets ne sont pas typiques en dehors de la ROI chez les patients subissant l'examen angiographique décrit en introduction.

La troisième critique porte sur le choix de l'algorithme d'optimisation utilisé pour la résolution des problèmes de reconstruction polychromatiques (6.3) et (6.4). Le choix de L-BFGS-B, une méthode quasi-Newton à mémoire limitée, est basé sur les résultats d'une comparaison de performance numérique quant à la résolution du problème de reconstruction monochromatique (4.2). Pourtant, le modèle de projection polychromatique est non linéaire, de sorte que sa courbure change à chaque itération. Le problème est donc vraisemblablement différent du point de vue du comportement numérique. Par exemple, il est possible qu'une méthode qui tient compte d'une information de courbure plus riche (Newton tronqué, Dembo *et al.* (1982)) procure une meilleure performance. Bien que l'algorithme L-BFGS-B converge correctement à un point critique des problèmes (6.3) et (6.4), il apparaît intéressant de comparer les performances numériques de quelques autres algorithmes d'optimisation applicables.

Cette critique présente un problème plus large, soit que certaines techniques numériques qui auraient permis une réduction du temps de calcul ont été effectivement laissées de côté dans les algorithmes finaux. Par exemple, la conclusion du chapitre 4

mentionne qu'un algorithme à sous-ensembles ordonnés devrait être employé pour amorcer le travail de reconstruction. En effet, on y remarque que les premières itérations d'un tel algorithme progressent plus rapidement vers la solution que celles des méthodes numériques convergentes qui y ont été comparées. Pourtant, cette amélioration n'a pas été intégrée aux algorithmes de reconstruction présentés dans les chapitres 5 et 6. Naturellement, comme les articles qui constituent ces chapitres ne portent pas sur les méthodes numériques de reconstruction, la description de cet aspect aurait fait digression du propos de ces articles. Plus généralement, cette thèse a présenté une méthodologie menant à la réduction du temps de calcul. Cependant, les outils logiciels qui ont mené aux résultats qui y sont présentés ne sont que des prototypes. Le déploiement de ces méthodes de reconstruction pour l'usage clinique nécessiterait un effort de développement et de validation supplémentaire, propre à mettre en œuvre tous les aspects permettant la réduction du temps de calcul.

Conclusion

En résumé, l'objectif principal du travail a été atteint. Les contributions originales de ce travail ont permis une réduction significative et satisfaisante du temps de calcul. Ces contributions concernent trois aspects de la problématique de la reconstruction tomographique. Premièrement, nous avons justifié le choix d'une méthode numérique non conventionnelle pour la reconstruction. Ce choix était basé sur une comparaison de performances des méthodes rendue équitable par la définition d'une condition d'arrêt commune à tous les algorithmes comparés.

Deuxièmement, nous avons proposé une décomposition de l'image reconstruite en deux zones, l'arrière-plan et la région d'intérêt (ROI). Cette décomposition permet d'obtenir une qualité d'image satisfaisante dans la deuxième en y concentrant l'effort de reconstruction, à partir d'une reconstruction de faible coût de l'arrière-plan. En ce sens, nous avons caractérisé la méthodologie de la reconstruction de l'arrière-plan, montrant quelles approches devaient être retenues selon les circonstances.

Troisièmement, nous avons mis en œuvre ces techniques dans le cadre de la reconstruction basée sur un modèle polychromatique de projection. En plus d'intégrer à cet algorithme la décomposition arrière-plan/ROI, nous avons proposé la modélisation de faible dimension du spectre d'émission de la source de rayons X. Nous

avons finalement proposé un algorithme de reconstruction alternatif basé sur une modélisation gaussienne alternatif de l’incertitude sur les données (s’opposant à la modélisation par une loi de Poisson, plus commune) qui s’est avéré plus robuste aux caractéristiques particulières des données réelles considérées.

Perspectives

Les résultats présentés dans cette thèse ouvrent la voie à un certain nombre de pistes de recherche qui n’ont pu être explorées dans le cadre de cette thèse.

Afin d’adresser la deuxième critique présentée au chapitre 7, il serait intéressant, dans le cadre de la reconstruction polychromatique, d’extraire l’arrière-plan de l’image calculée par le scanner. En effet, le chapitre 6 montre que la reconstruction polychromatique de la seule région d’intérêt est complétée en moins d’une minute : le temps de calcul de la reconstruction préliminaire domine fortement le temps de calcul total de 25 minutes. Cependant, des essais préliminaires ont montré qu’en utilisant un tel procédé de reconstruction, le contour de l’image de la ROI obtenue est anormalement sombre et non continu avec l’arrière-plan. Un effet semblable, quoique de moindre intensité, est obtenu avec la reconstruction monochromatique de la ROI. Notre interprétation de ces artéfacts est que l’emploi de modèles de projection différents pour la reconstruction de l’arrière-plan et de la ROI mène à une répartition différente de l’énergie des projections sur les deux régions. Comme ces régions sont reconstruites en séquence, lors de la reconstruction de la région d’intérêt, le modèle de projection attend davantage d’énergie que les projections ne lui en allouent. Un

algorithme estimant un paramètre de redistribution de l'énergie des projections ainsi que les pixels de la ROI est en cours de développement.

Un autre aspect qui mérite plus ample attention est la résolution des objets métalliques reconstruits sur les données réelles. La figure 6.6 suggère en effet que les branches du stent sont excessivement lissées par les approches de reconstruction itératives. Pour le protocole **SpineSeq**, ce lissage est effectivement encore plus prononcé sur la reconstruction du scanner. Cependant, le lissage n'est pas dû aux algorithmes de reconstruction eux-mêmes, puisque sur des données de simulation, les petits objets métalliques sont rendus à une excellente résolution.

Ce phénomène doit donc être lié aux prétraitements subis par les données à même le scanner. Sachant que nous avons un algorithme efficace pour la réduction des artéfacts métalliques, deux avenues de recherche peuvent être envisagées. D'une part, de nouveaux tests devraient être conduits à partir de données réellement brutes n'ayant subi aucun prétraitement. Ce travail a déjà été entamé en collaboration avec le Dr Carl Chartrand, à partir d'acquisitions réalisées sur des appareils de marque Phillips utilisés au site Saint-Luc du CHUM. Apparemment, les données brutes recueillies sur ces appareils n'ont subi aucun prétraitement, au contraire de celles obtenues sur les appareils Siemens utilisés dans ce travail. D'autre part, pour continuer à employer les appareils Siemens, il faut étudier la possibilité d'annuler les prétraitements, vraisemblablement par déconvolution. Dans une approche où les prétraitements sont modélisés par un système linéaire invariant, il faudrait déterminer approximativement la réponse impulsionnelle, qui pourrait être intégrée au modèle de projection.

L'estimation de la réponse impulsionnelle pourrait être réalisée par une approche semblable à celle d'Arreckx (2009).

Finalement, les algorithmes développés dans le cadre de ce travail doivent être appliqués à la reconstruction d'images tridimensionnelles à partir de données acquises par un protocole à trajectoire hélicoïdale. Cette recherche est en cours, puisque les principales difficultés méthodologiques ont été effectivement résolues. Le temps de calcul, par contre, est élevé à ce stade des travaux, alors que l'arrière-plan est extrait d'une reconstruction itérative à basse résolution axiale. Le temps de calcul de la ROI en forme de prisme rectangulaire dans le volume imagé est par ailleurs supérieur à celui obtenu pour une ROI bidimensionnelle, par au moins un ordre de grandeur. Ainsi, les dimensions du problème de reconstruction 3D accentuent les difficultés de mise en œuvre rencontrées en 2D, soulignant l'importance de compléter l'exploration des méthodes numériques convergentes les plus rapides.

Références

- Sangtae AHN, Jeffrey A. FESSLER, Doron BLATT et Alfred O. HERO, III : Convergent incremental optimization transfer algorithms : Application to tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(3):283–296, mars 2006.
- Robert E. ALVAREZ et Albert MACOVSKI : Energy-selective reconstructions in X-ray computerized tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 21(5):733–744, septembre 1976.
- Sylvain ARRECKX : Traitement de la postluminescence en tomographie à rayons x. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2009.
- Dimitri P. BERTSEKAS : On the goldstein-levitin-polyak gradient projection method. *IEEE Transactions on Automatic and Control*, 21(2):174–184, avril 1976.
- Ernesto G. BIRGIN et José M. MARTÍNEZ : Large-scale active-set box-constrained optimization method with spectral projected gradients. *Computational Optimization and Applications*, 23:101–125, 2002.
- Charles A. BOUMAN et Ken D. SAUER : A generalized Gaussian image model for

- edge-preserving MAP estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, IP-2 (3):296–310, juillet 1993a.
- Charles A. BOUMAN et Ken D. SAUER : A local update strategy for iterative reconstruction from projections. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(2):534–548, février 1993b.
- Jovan G. BRANKOV, Yongyi YANG et Miles N. WERNICK : Tomographic image reconstruction based on a content-adaptive mesh model. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 23(2):202–212, 2004.
- William L. BRIGGS, Van Emden HENSON et Steve F. MCCORMICK : *A Multigrid Tutorial*. SIAM, 2nd édition, 2000.
- Emmanuel CANDÈS et Franck GUO : New multiscale transforms, minimum total variation synthesis : Applications to edge-preserving image reconstruction : Image and video coding beyond standards. *Signal Processing*, 82(11):1519–1543, novembre 2002.
- Pierre CHARBONNIER, Laure BLANC-FÉRAUD, Gilles AUBERT et Michel BARLAUD : Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, IP-6(2):298–311, février 1997.
- Ho-Shiang CHUEH, Wen-Kai TSAI, Chih-Chieh CHANG, Shu-Ming CHANG, Kuan-Hao SU et Jyh-Cheng CHEN : Development of novel statistical reconstruction

algorithms for poly-energetic X-ray computed tomography. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 92:289–293, 2008.

James CLAYTON, Gary VIRSHUP, Ming YANG, Radhe MOHAN et Lei DONG : Improvements in medical CT image reconstruction accuracy in the presence of metal objects by using X-rays up to 1 MeV. In Tribikram KUNDU, éditeur : *Health Monitoring of Structural and Biological Systems 2009*, volume 7295, pages 72951P–1–11. Proceedings of SPIE, 2009.

Guy CLOUTIER, Gilles SOULEZ, Salah D. QANADLI, Pierre TEPPAZ, Louise ALLARD, Zhao QIN, François CLOUTIER et Louis Gilles DURAND : A multimodality vascular imaging phantom with fiducial markers visible in DSA, CTA, MRA and ultrasound. *Medical Physics*, 31(6):1424–1433, juin 2004.

Mathias COURDURIER, Frédéric NOO, Michel DEFRISE et Hiroyuki KUDO : Solving the interior problem of computed tomography using *a priori* knowledge. *Inverse Problems*, 24(6):065001 (27pp), décembre 2008.

Bruno DE MAN, Samit BASU, Jean-Baptiste THIBAUT, Jiang HSIEH, Jeffrey A. FESSLER, Charles BOUMAN et Ken SAUER : A study of four minimization approaches for iterative reconstruction in X-ray CT. In *2005 IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, pages 2708–2710, 2005.

Bruno DE MAN, Johan NUYTS, Patrick DUPONT, Guy MARCHAL et Paul SUETENS :

- Metal streak artifacts in X-ray computed tomography : A simulation study. *IEEE Transactions on Nuclear Sciences*, 46(3):691–696, juin 1999.
- Bruno DE MAN, Johan NUYTS, Patrick DUPONT et Paul SUETENS : An iterative maximum-likelihood polychromatic algorithm for CT. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(10):999–1008, octobre 2001.
- Alvaro R. DE PIERRO : On the relation between the ISRA and the EM algorithm for positron emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 12(2):328–333, juin 1993.
- Alvaro R. DE PIERRO : A modified expectation maximization algorithm for penalized likelihood estimation in emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 14(1):132–137, mars 1995.
- Michel DEFRISE, Frédéric NOO, Rolf CLACKDOYLE et Hiroyuki KUDO : Truncated Hilbert transform and image reconstruction from limited tomographic data. *Inverse Problems*, 22(3):1037–1053, juin 2006.
- Alexander H. DELANEY et Yoram BRESLER : Multiresolution tomographic reconstruction using wavelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(6):799–813, juin 1995.
- Ron S. DEMBO, Stanley C. EISENSTAT et Trond STEIHAUG : Inexact newton methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19:400–408, 1982.

- Ronald T. DROEGE et Richard L. MORIN : A practical method to measure the MTF of CT scanners. *Medical Physics*, 9(5):758–760, septembre 1982.
- Idris A. ELBAKRI et Jeffrey A. FESSLER : Statistical image reconstruction for polyenergetic X-ray computed tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(2):89–99, février 2002.
- Idris A. ELBAKRI et Jeffrey A. FESSLER : Segmentation-free statistical image reconstruction for polyenergetic X-ray computed tomography with experimental validation. *Physics in Medicine and Biology*, 48(7):2453–2477, août 2003.
- Heinz W. ENGL, Martin HANKE et Andreas NEUBAUER : *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- Hakan ERDOĞAN et Jeffrey A. FESSLER : Monotonic algorithms for transmission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(9):801–814, septembre 1999a.
- Hakan ERDOĞAN et Jeffrey A. FESSLER : Ordered subsets algorithms for transmission tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 44(11):2835–2851, novembre 1999b.
- Jeffrey A. FESSLER : Penalized weighted least-squares image reconstruction for positron emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(2):290–300, juin 1994.

Jeffrey A. FESSLER : Statistical image reconstruction methods for transmission tomography. In J. Michael FRITZPATRICK et Milan SONKA, éditeurs : *Handbook of Medical Imaging*, volume 2, chapitre 1, pages 1–70. SPIE Press, Bellingham, WA, 2000.

Jeffrey A. FESSLER, Edward P. FICARO, Neal H. CLINTHORNE et Kenneth LANGE : Grouped-coordinate ascent algorithms for penalized-likelihood transmission image reconstruction. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 16(2):166–175, avril 1997.

Natalie FORTIER, Guy DEMOMENT et Yves GOUSSARD : GCV and ML methods of determining parameters in image restoration by regularisation : Fast computation in the spatial domain and experimental comparison. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 4(2):157–170, juin 1993.

Kirsten GARCES : Une nouvelle génération d’endoprothèses pour la prévention de la resténose à la suite de l’ACTP. Rapport technique 40, Office canadien de coordination de l’évaluation des technologies de la santé, octobre 2002.

David GENDRON : Méthodes algébriques pour la reconstruction en tomographie à rayons X. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2008.

Allen A. GOLDSTEIN : Convex programming in hilbert space. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70:709–710, 1964.

Gene H. GOLUB, Michael HEATH et Grace WAHBA : Generalized cross-validation

as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21(2):215–223, mai 1979.

Jian-wei GU, Li ZHANG, Zhi-qiang CHEN, Yu-xiang XING et Zhi-feng HUANG : A method based on interpolation for metal artifacts reduction in CT images. *Journal of X-Ray Science and Technology*, 14:11–19, 2006.

William W. HAGER, Bernard A. MAIR et Hongchao ZHANG : An affine-scaling interior-point CBB method for box-constrained optimization. *Mathematical Programming*, 119(1):1–32, juin 2009.

William W. HAGER et Hongchao ZHANG : Algorithm 851 : CG_DESCENT, a conjugate gradient method with guaranteed descent. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 32(1):113–137, mars 2006a.

William W. HAGER et Hongchao ZHANG : A new active set algorithm for box constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 17(2):526–557, juillet 2006b.

Benoit HAMELIN, Yves GOUSSARD et Jean-Pierre DUSSAULT : Penalized-likelihood region-of-interest CT reconstruction by local object supersampling. In *29th Annual International Conference of the IEEE EMBS*, pages 739–742, 2007.

Benoit HAMELIN, Yves GOUSSARD et Jean-Pierre DUSSAULT : On the stopping criterion for numerical methods used to solve linear systems with additive Gaussian noise. Rapport technique EPM-RT-2009-10, École Polytechnique de Mont-

réal, septembre 2009a. http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2009/09/2404.html.

Benoit HAMELIN, Yves GOUSSARD, Jean-Pierre DUSSAULT, Guy CLOUTIER, Gilles BEAUDOIN et Gilles SOULEZ : Design of iterative ROI transmission tomography reconstruction procedures and image quality analysis. Soumis pour publication à *Medical Physics*, 2009b.

Benoit HAMELIN, Yves GOUSSARD, Jean-Pierre DUSSAULT, Guy CLOUTIER, Gilles BEAUDOIN et Gilles SOULEZ : Performance comparison of numerical methods for penalized-likelihood reconstruction in X-ray tomography. Soumis pour publication à *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2009c.

Benoit HAMELIN, Yves GOUSSARD, David GENDRON, Jean-Pierre DUSSAULT, Guy CLOUTIER, Gilles BEAUDOIN et Gilles SOULEZ : Iterative CT reconstruction of real data with metal artifact reduction. *In Proceedings of the International Symposium on Biomedical Imaging*, pages 1453–1456, mai 2008.

Per Christian HANSEN : Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Review*, 34(4):561–580, décembre 1992.

Per Christian HANSEN : The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. *In* P. JOHNSTON, éditeur : *Computational Inverse Problems in Electrocardiology, Advances in Computational Bioengineering*, pages 119–142. WIT Press, 2000.

- Jiang HSIEH, Jean-Baptiste THIBAUT, Charles BOUMAN et Ken SAUER : Iterative method for region-of-interest reconstruction. US Patent, 2004.
- H. Malcolm HUDSON et Richard S. LARKIN : Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(4):601–609, décembre 1994.
- Jérôme IDIER, éditeur. *Approche Bayésienne pour les Problèmes Inverses*. Traitement du Signal et de l’Image. Hermes Science – Lavoisier, Paris, France, 2001.
- Kye Young JEONG et Jong Beom RA : Reduction of artifacts due to multiple metallic objects in computed tomography. In Ehsan SAMEI et Jiang HSIEH, éditeurs : *Medical Imaging 2009 : Physics of Medical Imaging*, volume 7258, pages 72583E–1–8. Proceedings of SPIE, 2009.
- Calvin A. JOHNSON et Ariela SOFER : A primal-dual method for large-scale image reconstruction in emission tomography. *SIAM Journal on Optimization*, 11(3):691–715, mars 2000.
- Peter M. JOSEPH et Robin D. SPITAL : A method for correcting bone-induced artifacts in computed tomography scanners. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 2(1):100–108, janvier 1978.
- Avinash C. KAK et Malcolm SLANEY : *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, New York, NY, 1987.

C. Tim KELLEY : *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. SIAM, Philadelphia, 1995.

Koji KOBAYASHI, Atsushi KATSUMATA, Koichi ITO et Takafumi AOKI : Three-dimensional metal artifact reduction method for dental conebeam CT scanners. In Ehsan SAMEI et Jiang HSIEH, éditeurs : *Medical Imaging 2009 : Physics of Medical Imaging*, volume 7258, pages 72583D–1–8. Proceedings of SPIE, 2009.

Stefan KRÜGER, Andreas H. MAHNKEN, Anil M. SINHA, Anja BORGHANS, Katrin DEDDEN, Rainer HOFFMAN et Peter HANRATH : Multislice spiral computed tomography for the detection of coronary stent restenosis and patency. *International Journal of Cardiology*, 89(2 – 3):167–172, juin 2003.

Hiroyuki KUDO, Matias COURDURIER, Frédéric NOO et Michel DEFRISE : Tiny *a Priori* knowledge solve the interior problem in computed tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 53:2207–2231, 2008.

Patrick J. LA RIVIÈRE : Monotonic iterative reconstruction algorithms for targeted reconstruction in emission and transmission computed tomography. In *IEEE Nuclear Science Symposium*, pages 2924–2928, 2006.

Kenneth LANGE : Convergence of EM image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9(4):439–446, décembre 1990. Corrections, June 1991.

Kenneth LANGE et Richard CARSON : EM reconstruction algorithms for emission

and transmission tomography. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 8(2): 306–316, avril 1984.

Kenneth LANGE et Jeffrey A. FESSLER : Globally convergent algorithms for maximum a posteriori transmission tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(10):1430–1438, octobre 1995.

Patrick J. LARIVIÈRE, Junguo BIAN et Phillip A. VARGAS : Penalized-likelihood sinogram restoration for computed tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(8):1022–1036, 2006.

Patrick J. LARIVIÈRE et Philip VARGAS : Evaluation of noise and resolution properties of penalized-likelihood CT sinogram smoothing and restoration algorithms. In Michael J. FLYNN et Jiang HSIEH, éditeurs : *Medical Imaging 2006 : Physics of Medical Imaging*, volume 6142, pages 61420X–1–61420X8. Proceedings of SPIE, 2006.

Laurent LÉTOURNEAU-GUILLON, Gilles SOULEZ, Gilles BEAUDOIN, Vincent L. OLIVA, Marie-France GIROUX, Zhao QIN, Nicolas BOUSSION, Éric THERASSE, Jacques de GUISE et Guy CLOUTIER : CT and MR imaging of nitinol stents with radiopaque distal markers. *Journal of Vascular and Interventional Radiology*, 15(6):615–624, Jun 2004.

Dong C. LIU et Jorge NOCEDAL : On the limited memory BFGS method for large scale optimization. *Mathematical Programming*, 45(3):503–528, décembre 1988.

Nathalie MENVIELLE : Réduction des artéfacts métalliques en tomographie à rayons

X. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique, Montréal, Canada, 2004.

Xuanqin MOU, Shaojie TANG, Tao LUO, Yizhai ZHANG et Hengyong YU : Beam hardening correction based on HL consistency in polychromatic transmission tomography. *In* Jiang HSIEH et Ehsan SAMEI, éditeurs : *Medical Imaging 2008 : Physics of Medical Imaging*, volume 6913, pages 691333–1–10. Proceedings of SPIE, août 2008.

Jan MÜLLER et Thorsten M. BUZUG : Spurious structures created by interpolation-based CT metal artifact reduction. *In* Ehsan SAMEI et Jiang HSIEH, éditeurs : *Medical Imaging 2009 : Physics of Medical Imaging*, volume 7258, pages 72581Y–1–8. Proceedings of SPIE, 2009.

Erkan Ü. MUMCUOĞLU, Richard LEAHY, Simon R. CHERRY et Zhenyu ZHOU : Fast gradient-based methods for bayesian reconstruction of transmission and emission PET images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(4):687–701, décembre 1994.

Stephen G. NASH : Users's guide for TN/TNBC : Fortran routines for nonlinear optimization. Rapport technique 397, Mathematical Sciences Department, The Johns Hopkins University, Baltimore, MD, 1984.

Kati NIINIMÄKI, Samuli SILTANEN et Ville KOLEHMAINEN : Bayesian multiresolu-

- tion method for local tomography in dental X-ray imaging. *Physics in Medicine and Biology*, 52(52):6663–6678, novembre 2007.
- Jorge NOCEDAL et Stephen J. WRIGHT : *Numerical Optimization*. Operations Research. Springer Verlag, New York, NY, 2000.
- May OEHLER et Thorsten M. BUZUG : Statistical image reconstruction for inconsistent CT projection data. *Methods of Information in Medicine*, 46:261–269, 2007.
- May OEHLER, Bärbel KRATZ, Tobias KNOPP, Jan MÜLLER et Thorsten M. BUZUG : Evaluation of surrogate data quality in sinogram-based CT metal-artifact reduction. In Philip J. BONES, Michael A. FIDDY et Rick P. MILLANE, éditeurs : *Image Reconstruction from Incomplete Data V*, volume 7076, pages 707607–1–10, San Diego, août 2008. Proceedings of SPIE.
- Seungseok OH, Adam B. MILSTEIN, Charles A. BOUMAN et Kevin J. WEBB : A general framework for nonlinear multigrid inversion. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(1):125–140, janvier 2005.
- Masaki OHKUBO, Sinichi WADA, Toru MATSUMOTO et Kanae NISHIZAWA : An effective method to verify line and point spread functions measured in computed tomography. *Medical Physics*, 33(8):2757–2764, août 2006.
- Joseph A. O’SULLIVAN et Jasenka BENAC : Alternating minimization algorithms for transmission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 26(3):283–297, mars 2007.

Tin-Su PAN et Andrew E. YAGLE : Numerical study of multigrid implementations of some iterative image reconstruction algorithms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 10(4):572–588, décembre 1991.

Elijah POLAK et Gerard RIBIÈRE : Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 3(1):35–43, 1969.

Essam A. RASHED, Hiroyuki KUDO, Tsutomu ZENIYA et Hidehiro IIDA : Practical statistical models for region-of-interest tomographic reconstruction and long object problem. *In IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, pages 3505–3511, 2007.

Jean RINKEL, William P. DILLON, Tobias FUNK, Robert GOULD et Sven PREVRHAL : Computed tomography metal artifact reduction for the detection and quantitation of small features near large metallic implants : A comparison of published methods. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 32(4):621–629, jul–aou 2008.

Ken D. SAUER et Charles A. BOUMAN : A local update strategy for iterative reconstruction from projections. *IEEE Transactions on Signal Processing*, SP-41(2):534–548, février 1993.

K. Sam SHANMUGAN et Arthur M. BREIPOHL : *Random Signals : Detection, Estimation and Data Analysis*. John Wiley & Sons, 1988.

Charles W. STEARNS, Ravindra M. MAJESHWAR et Scott D. WOLLENWEBER :

An efficient algorithm for targeted reconstruction of tomographic data. *In IEEE Nuclear Science Symposium*, pages 2808–2811, 2006.

Kunio TANABE : Projection method for solving a singular system of linear equations and its applications. *Numerische Mathematik*, 17(3):203–214, juin 1971.

Ranjini TOLAKANAHALLI, Joshua E. MEDOW, Jiang HSIEH, Guang-Hong CHEN et Charles A. MISTRETTA : Reduction of metal artifacts using subtracted CT projection data. *In* Ulrich BONSE, éditeur : *Developments of X-Ray Tomography IV*, volume 5535, pages 636–643. Proceedings of SPIE, 2004.

Tarraf TORFEH, Stéphane BEAUMONT, Jean-Pierre GUÉDON et Eloïse DENIS : Evaluation of two software tools dedicated to an automatic analysis of the CT scanner image spatial resolution. *In Proceedings of the IEEE International Conference of the Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 3910–3913, Cité Internationale, Lyon, France, août 2007.

Andreas WÄCHTER et Larry T. BIEGLER : On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106(1):25–57, mai 2006.

Armand WIRGIN : The inverse crime, 2004. URL <http://arxiv.org/abs/math-ph/0401050v1>.

Xiaoye WU, David A. LANGAN, Dan XU, Thomas M. BENSON, Jed D. PACK, An-

drea M. SCHMITZ et J. Eric TKACZYK : Monochromatic CT image representation via fast switching dual kVp. *In* Ehsan SAMEI et Jiang HSIEH, éditeurs : *Medical Imaging 2009 : Physics of Medical Imaging*, volume 7258, pages 725845–1–9. SPIE, février 2009.

Ciyu ZHU, Richard H. BYRD, Peihuang LU et Jorge NOCÉDAL : Algorithm 778. L-BFGS-B : Fortran subroutines for Large-Scale bound constrained optimization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23(4):550–560, 1997.

Andy ZIEGLER, Tim NIELSEN et Michael GRASS : Iterative reconstruction of a region of interest for transmission tomography. *In* Michael J. FLYNN et Jiang HSIEH, éditeurs : *Medical Physics 2006 : Physics of Medical Imaging*, volume 6142, pages 614223–1–12. Proceedings of the SPIE, 2006.

Andy ZIEGLER, Tim NIELSEN et Michael GRASS : Iterative reconstruction of a region of interest for transmission tomography. *Medical Physics*, 35(4):1317–1327, avril 2008.