

Titre: Identification du modèle mathématique d'un hélicoptère réduit
Title:

Auteur: Japhet Honvo
Author:

Date: 2014

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Honvo, J. (2014). Identification du modèle mathématique d'un hélicoptère réduit
[Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/1669/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/1669/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Lahcen Saydy, Guchuan Zhu, & Ouassima Akhrif
Advisors:

Programme: génie électrique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

IDENTIFICATION DU MODÈLE MATHÉMATIQUE D'UN HÉLICOPTÈRE RÉDUIT

JAPHET HONVO
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
DÉCEMBRE 2014

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

IDENTIFICATION DU MODÈLE MATHÉMATIQUE D'UN HÉLICOPTÈRE RÉDUIT

présenté par : HONVO Japhet

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès Sciences Appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SAUSSIÉ David, Ph.D., président

M. SAYDY Lahcen, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ZHU Guchuan, Doctorat, membre et codirecteur de recherche

Mme AKHRIF Ouassima, Ph.D., membre et codirectrice de recherche

M. O'SHEA Jules, D. Ing., membre

DÉDICACE

*À mes parents,
mes frères, . . .*

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés sous la supervision des professeurs du département de génie électrique à l'École Polytechnique de Montréal, Monsieur Lahcen Saydy, Monsieur Guchuan Zhu et de la professeure du département de génie électrique de l'École de Technologie Supérieure de Montréal, Madame Ouassima Akhrif. Je tiens à remercier le professeur Saydy pour son encadrement technique et son soutien financier. Je tiens à remercier le professeur Zhu pour son encadrement technique et sa disponibilité à tout instant. Je tiens à remercier la professeure Akhrif pour son soutien financier et son encadrement technique, sa disponibilité et son sens pragmatique qui a permis l'aboutissement du projet. Par leurs conseils avisés et leur assistance remarquable, tous ont contribué à ma formation à travers les divers cours du cycle supérieur et au succès de ce travail.

Je tiens également à remercier les professeurs Gourdeau et Saussié pour l'espace mis à la disposition du projet dans le laboratoire de robotique. Ce laboratoire nous a fourni les ressources nécessaires pour réaliser nos différents tests de mesure.

Je tiens également à remercier le professeur Jules O'Shea pour sa disponibilité à évaluer ce travail.

Je remercie Jacques Girardin, technicien au département de génie électrique. Son soutien a été remarquable pour la conception du système embarqué. Je tiens également à souligner sa disponibilité en dehors des heures conventionnelles de travail pour la manutention lors des différents tests en vol réalisés.

Je remercie également Patrice Lavoutte pour son expertise en pilotage d'hélicoptère. Il est le pilote qui par son agilité, a évité plusieurs crashs au cours des différents tests en vol. Je remercie également le magasin *JacHobby* pour l'espace alloué au cours des tests en vol.

Je présente mes sincères reconnaissances à *Opal-RT*, la société développant le logiciel *RT-LAB* utilisé dans le cadre ce travail pour leur soutien tout au long de mes études. L'accessibilité au développement du logiciel *RT-LAB* a permis de mieux cerner les aspects temps-réel des systèmes d'acquisition.

Je remercie Monsieur Joseph Honvo, Monsieur Bernard Télisma, Monsieur Oméga-Samson Honvo et Monsieur Habacuc Honvo. À travers leurs différentes lectures et corrections, j'ai pu améliorer le travail présent.

RÉSUMÉ

L' hélicoptère réduit demeure un sujet intéressant pour la recherche en commande de vol. Il est facile à déployer de par sa petite taille et constitue un candidat idéal pour appliquer plusieurs algorithmes de commande de vol. Pour mieux appréhender la dynamique du vol de ce véhicule aérien, il est important de disposer d'un modèle mathématique. Le présent mémoire s'inscrit dans la logique d'obtenir un modèle mathématique en vol stationnaire de l'hélicoptère. Il vise la conception d'un banc de tests pour l'identification d'un modèle mathématique d'un hélicoptère réduit et pour l'application de différentes lois de commande de vol. Dans un premier temps, un développement est présenté sur la théorie de l'identification. Les méthodes d'identification présentées s'appliquent aux systèmes multivariables ; un accent particulier est mis sur l'identification des modèles d'état. La théorie se termine par la présentation d'algorithmes utilisés par le logiciel de simulation Matlab.

Par la suite, un modèle théorique de l'hélicoptère est développé à partir des lois de la mécanique classique. Ce modèle sert de base pour l'application des méthodes d'identification. Dans le cadre de cette recherche, des hypothèses pour réduire le modèle sont présentées. Le modèle théorique sert de canevas pour choisir les différentes composantes du banc de tests. Le mémoire se poursuit par la présentation de l'avionique utilisée. L'instrumentation est présentée sous deux volets : *la partie matérielle (Hardware)* et *la partie logicielle (Software)*. L'acquisition des paramètres de vol en temps réel est également présentée.

Enfin l'utilisation du banc de tests est détaillée au cours des tests au sol et en vol. Ces différents tests visent à recueillir les données nécessaires pour le déploiement des différentes techniques d'identification. Le mémoire se termine par les différents résultats obtenus et les perspectives d'amélioration du banc de test.

ABSTRACT

The remote-controlled helicopter remains an interesting topic for research in flight control. This kind of machine, easy to deploy due to their small size, is an ideal candidate to test multiple flight control algorithms. To better understand the dynamics of flight of this vehicle, it is important to have a mathematical model. This thesis follows the logic of obtaining a mathematical model for a stationary hovering helicopter. This thesis aims to provide a testbench for the identification of a mathematical model of a small helicopter and for the application of different flight control laws.

First, a review on the identification theory is introduced. The methods presented are applicable to multivariable systems. A particular focus is on the identification of state models. The theory concludes with the presentation of algorithms used in the Matlab/Simulink software. Second, a mathematical model of the helicopter is developed. As part of our research, hypotheses to reduce the model are presented. This model is the basis for determining the right identification methods. The mathematical model provides a guideline for specifying the various components of the test bench. The thesis continues with the presentation of the avionics used in the project. The instrumentation is presented in two parts: the hardware and the software. The acquisition of real-time flight parameters is also presented.

Finally, the use of the test bench is detailed for the ground tests and for the flight tests. These tests are designed to collect the data necessary for the deployment of various identification techniques. The thesis concludes with comments on significant results and suggestions of prospects for improving the test bench.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES ANNEXES	xiii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xiv
 CHAPITRE 1 INTRODUCTION	 1
1.1 Préambule	1
1.2 Objectifs	2
1.3 Plan	2
 CHAPITRE 2 REVUE DE LA LITTÉRATURE	 4
2.1 Le modèle théorique d'un modèle d'ordre réduit de l'hélicoptère et les techniques de commande	4
2.2 Instrumentation et Implantation du contrôleur digital	9
2.3 L'identification du modèle	10
 CHAPITRE 3 THÉORIE DE L'IDENTIFICATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES	
INVARIANTS	13
3.1 Identification des paramètres	14
3.1.1 Linéarité	14
3.1.2 Stationnarité	15
3.1.3 Systèmes discrets et systèmes continus	15
3.1.4 Systèmes déterministes et systèmes stochastiques	16

3.1.5	Récapitulatif	16
3.1.6	Généralités sur les modèles d'état	17
3.2	Aspect théorique de l'estimation des paramètres	18
3.2.1	Topologie des estimateurs	18
3.2.2	Estimation par minimisation de l'erreur de prédiction	19
3.2.3	Étude de cas de la méthode des moindres carrés : modèle d'état multi-variable	22
3.3	Application numérique de l'identification des modèles d'état	25
3.3.1	Acquisition des données	25
3.3.2	Suppression du vecteur des entrées	26
3.3.3	Suppression des bruits de mesure	27
3.3.4	Évaluation de la matrice d'observabilité	27
3.3.5	Estimation de B et D	29
3.3.6	Famille des méthodes d'identification des modèles d'état	29
3.4	Résumé	33
CHAPITRE 4 MODÈLE PARAMÉTRIQUE		34
4.1	Définition des repères	34
4.2	Modèle mathématique	35
4.2.1	Équations d'un corps rigide	36
4.2.2	Forces et Couples	40
4.2.3	Génération de la portance	42
4.2.4	Hélicoptère T-REX 550e	46
4.2.5	Analyse du modèle	52
CHAPITRE 5 INTSTRUMENTATION EMBARQUÉE		55
5.1	Contrôleur des servomoteurs	55
5.1.1	Utilité du matériel	55
5.1.2	Critères de choix	55
5.1.3	Caractéristiques techniques	56
5.2	Centrale inertielle	57
5.2.1	Utilité de la centrale inertielle	57
5.2.2	Critères de choix	57
5.2.3	Caractéristiques techniques	57
5.3	Ordinateur embarqué	58
5.3.1	Utilité du matériel	58
5.3.2	Critères de choix	58

5.3.3	Caractéristiques techniques et physiques	59
5.4	Logiciel d'acquisition	59
5.4.1	Logiciel de développement : <i>RT-LAB</i>	59
5.4.2	Modèle d'acquisition et de contrôle	61
CHAPITRE 6 IDENTIFICATION DU MODÈLE PARAMÉTRIQUE		66
6.1	Mesure des paramètres	66
6.2	Tests au sol	66
6.2.1	Localisation du centre de centre de gravité	67
6.2.2	Identification de la matrice d'inertie	68
6.2.3	Caractérisation des servomoteurs	70
6.2.4	Mesure des ratios de portance des différentes hélices	71
6.2.5	Analyse des tests au sol	72
6.3	Tests en vol	72
6.3.1	Motivation des tests en vol	72
6.3.2	Tests de caractérisation du gradient de portance de l'hélice principale	73
6.3.3	Utilisation des valeurs de gradients dans le modèle linéaire	73
6.3.4	Tests d'excitation sinusoïdale	74
CHAPITRE 7 CONCLUSION		83
7.1	Identification du modèle paramétrique	83
7.1.1	Travail accompli et résultats	83
7.1.2	Améliorations et perspectives	83
7.2	Modèle théorique en vol stationnaire	84
7.2.1	Travail accompli	84
7.2.2	Améliorations	84
7.3	Instrumentation embarquée et Banc de tests	85
7.3.1	Travail accompli	85
7.3.2	Améliorations	86
RÉFÉRENCES		88
ANNEXES		92

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 6.1	Paramètres mesurables	66
Tableau 6.2	Centre de gravité de l'hélicoptère	69
Tableau 6.3	Matrice d'inertie	70
Tableau 6.4	Paramètres du manufacturier des servomoteurs	71
Tableau 6.5	Paramètres des pales des hélice	71

LISTE DES FIGURES

Figure 4.1	Repère lié au véhicule	35
Figure 4.2	Schéma-bloc du modèle mathématique de l'hélicoptère	35
Figure 4.3	Schéma-bloc du modèle mathématique de l'hélicoptère	36
Figure 4.4	Schéma-bloc des équations d'un corps rigide	36
Figure 4.5	Schéma-bloc des Forces et des Couples	40
Figure 4.6	Schéma-bloc de la génération de la portance	42
Figure 4.7	Force aérodynamique	43
Figure 4.8	Hélicoptère <i>T-REX 550e</i>	46
Figure 4.9	Signal PWM avec différents rapports cycliques	47
Figure 4.10	Servomoteur	48
Figure 4.11	Schéma-bloc du plateau cyclique	48
Figure 4.12	Le plateau cyclique	49
Figure 4.13	Plateau cyclique du T-REX 550e	50
Figure 4.14	Localisation des servomoteurs du plateau cyclique	51
Figure 4.15	Inclinaisons du plan de l'hélice	51
Figure 5.1	Contrôleur de servomoteurs UAV100	56
Figure 5.2	Centrale inertie intérieure V-NAV 100	57
Figure 5.3	Schéma synoptique du contrôleur embarqué	60
Figure 5.4	Masque Simulink du contrôleur du processus asynchrone	61
Figure 5.5	Bloc Simulink de la Centrale Inertie	63
Figure 5.6	Bloc Simulink du Contrôleur des servomoteurs	63
Figure 5.7	Bloc Simulink du Sélecteur de Mode	64
Figure 5.8	Schéma synoptique du bloc Autopilote	64
Figure 5.9	Schéma synoptique de la boîte noire	65
Figure 5.10	Schéma synoptique de la section des rapports	65
Figure 6.1	Tests du centre de gravité	67
Figure 6.2	Localisation du centre de gravité	68
Figure 6.3	Vue de profil de la localisation du centre de gravité	68
Figure 6.4	Vue de haut de la localisation du centre de gravité	68
Figure 6.5	Pendule tri-filaire	69
Figure 6.6	Oscillations libres de l'hélicoptère	70
Figure 6.7	Schéma synoptique de l'hélicoptère	74
Figure 6.8	Schéma synoptique de l'hélicoptère	75

Figure 6.9	Bloc Entrée-Sortie du Compensateur Microblast	76
Figure 6.10	Bloc Entrée-Sortie du Compensateur Microblast Tangage	76
Figure 6.11	Bloc Entrée-Sortie du Compensateur Microblast Roulis	77
Figure 6.12	Entrées mesurées pour l'excitation fréquentielle du tangage	77
Figure 6.13	Sorties mesurées pour l'excitation fréquentielle du tangage	78
Figure 6.14	Entrées mesurées pour l'excitation fréquentielle du roulis	78
Figure 6.15	Sorties mesurées pour l'excitation fréquentielle du roulis	79
Figure 6.16	Comparaison entre les valeurs mesurées et le modèle estimé pour le tangage	80
Figure 6.17	Comparaison entre les valeurs mesurées et le modèle estimé pour le roulis	81
Figure 6.18	Comparaison entre les valeurs mesurées et le modèle estimé pour le compensateur	82

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Analyse spectrale	92
Annexe B	Linéarisation d'un système non linéaire	94

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

CVA	Canonic V ariate A nalysis
N4SID	Numerical algorithms for Subspace State Space
MIMO	M ulti I nput M ulti O utput
MLI	Modulation par L argeur d'Impulsion
MOESP	Multi O utput- E rror S tate P ace
PWM	P ulse W idth M odulation
ρ	Masse volumique de l'hélicoptère
Ω	Vitesse angulaire de l'hélice principale
β_{1c}	Inclinaison longitudinale de l'hélice
β_{1s}	Inclinaison latérale de l'hélice
β_s	Élevation du plan de l'hélice
m	Masse de l'hélicoptère
Θ_{twist}	Facteur de torsion de l'hélice
I	Matrice d'inertie
F	Vecteur des forces dans l'espace agissant sur le centre de gravité $[f_x f_y f_z]^T$
V	Vecteur des vitesses en translation du véhicule par rapport à l'air $[uvw]^T$
A	Surface du disque décrit par le mouvement de l'hélice
a	Gradient de portance de l'hélice principale
B	Nombre de pales de l'hélice
c	Corde de l'hélice principale
h_m	Distance du centre de gravité au centre de l'hélice principale suivant l'axe z
l_m	Distance du centre de gravité au centre de l'hélice principale suivant l'axe x
l_t	Distance du centre de gravité au centre de l'hélice de queue suivant l'axe x
h_t	Distance du centre de gravité au centre de l'hélice de queue suivant l'axe z
δ_r	Différentiel de hauteur pour le roulis
δ_c	Différentiel de hauteur pour le pas collectif
δ_t	Différentiel de hauteur pour le tangage
β_r	Inclinaison latérale de l'hélice principale

β_t	Inclinaison longitudinale de l'hélice principale
β_c	Élevation du plan de l'hélice principale
R	Rayon de l'hélice principale
T_{mr}	Portance de l'hélice principale
T_{tr}	Portance de l'hélice de queue
v_i	Vitesse induite par l'hélice principale
u, v, w	Vitesses linéaires du véhicule
a_{tr}	Gradient de portance de l'hélice de queue
c_{tr}	Corde de l'hélice de queue
T_{mrold}	Portance de l'hélice principale évaluée au pas précédent
P	Poids du véhicule
I_{mr}	Centre d'action de l'hélice principale exprimé par rapport au centre de gravité
τ_{mr}	Couple généré par la portance de l'hélice principale
τ_{tr}	Couple généré par la portance de l'hélice de queue
I_{tr}	Centre de l'hélice de queue exprimé par rapport au centre de gravité
Φ, Θ, Ψ	Angles d'Euler (Lacet, Tangage et Roulis)
ω	Vitesse angulaire du véhicule exprimé dans le repère inertiel
τ	Couple exercé par une force F par rapport au centre de gravité
TPP	Plan de l'hélice principale
$C.D.G$	Centre de gravité
$C.D.H.P$	Centre de l'hélice principale
$C.D.H.Q$	Centre de l'hélice de queue

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Préambule

De tout temps, l'humanité a été fascinée par tout ce qui vole. Les contes légendaires regorgent d'histoires de héros voguant sur des animaux magnifiques (la licorne et le dragon). Cette fascination se comprend aisément parce que voler n'est pas naturel chez l'homme. En effet, l'homme est capable de marcher (se déplacer sur le sol), de nager (se déplacer dans l'eau) de façon naturelle ; lorsqu'il s'agit de voler, il a recours à des moyens spécifiques de locomotion. Ce type de déplacement requiert le développement des véhicules aériens (les aéronefs). Pour arriver à cette fin, les scientifiques ont commencé à étudier le fluide qu'est l'air pour mieux comprendre ses capacités de sustentation. Deux branches de la science nous renseignent sur les propriétés de sustentation de l'air : la thermodynamique et la mécanique des Fluides.

Ainsi la thermodynamique qui étudie le déplacement de la chaleur à travers les fluides, nous enseigne que plus l'air est chaud, plus il est léger. Ce faisant, en disposant une bulle d'air chaud dans un milieu ambiant, cette bulle tend à s'élever par l'effet moindre de la gravité sur la bulle. Ce principe a permis de créer les montgolfières et les dirigeables. Cette catégorie d'aéronef est dénommée *aérostats*. Les aérostats ont été la solution au problème d'élevation dans les airs ; cependant un autre problème demeure : celui de la direction. En effet les aérostats sont trop liés à la direction des courants d'air. Il fallait améliorer les aéronefs. L'amélioration de la direction à travers les dirigeables n'était plus suffisante. Les regards se tournent vers un autre type d'engins volants : les cerfs-volants.

Depuis fort longtemps les cerfs-volants essaient les cieux. Ceux-ci utilisent le mouvement d'une surface plane légèrement incurvée par rapport à l'air pour créer de la portance. Ils utilisent les forces aérodynamiques pour avancer. Ces aéronefs qui utilisent le mouvement de l'air sont appelés *les aérodynes*. La mécanique des fluides qui étudie l'écoulement des fluides a permis de mieux comprendre les forces aérodynamiques. Le mouvement des fluides newtoniens dans l'espace est décrit par les équations de Navier-Stokes. Ces équations sont des équations aux dérivées partielles non linéaires. La résolution de ces équations dans l'espace continu, est ardue. Cette résolution figure en bonne place sur la liste des problèmes du millénaire recensés par l'Institut de Mathématiques Clay. Face à la difficulté de trouver des solutions exactes aux mouvements des fluides, les pionniers de l'aéronautique ont commencé par adopter une

approche plus expérimentale dans leur démarche scientifique. Ainsi Sir George Cayley a commencé par mener des expériences aérodynamiques pour prouver l'existence de la traînée induite lors de la génération de la portance. Dans la même veine, Otto Lilienthal après avoir observé les oiseaux, a constitué une table exhaustive des caractéristiques des ailes utilisées au cours de ses nombreux vols planés. Suite à leur initiative, l'aéronautique s'est associée à l'expérimentation puisqu'aujourd'hui encore les tests en vol sont utilisés pour évaluer les performances aérodynamiques des aéronefs.

De ce préambule, retenons deux points qui caractérisent la science du vol qu'est l'aéronautique :

- **la fascination des objets volants** s'explique par le caractère non naturel du vol pour l'homme ;
- **le recours à l'observation et à l'expérimentation** pour construire des engins capables de porter l'homme dans les airs.

Ces deux points serviront de levier pour présenter les objectifs de la présente étude.

1.2 Objectifs

Étant donné le caractère fascinant pour les objets volants, le présent travail vise à fournir un démonstrateur lors des journées portes ouvertes de l'École Polytechnique et pour la vulgarisation des sciences auprès des jeunes. Le démonstrateur servira également de banc d'essais pour l'expérimentation de la commande de vol. Le banc d'essais est constitué :

- d'un modèle réduit d'hélicoptère ;
- d'un ordinateur embarqué pour mesurer les paramètres de vol de l'hélicoptère ;
- et d'une composante logicielle pour l'application de divers algorithmes de vol.

Étant donné le caractère initiatique du projet, le travail théorique porte sur l'identification du modèle paramétrique de l'hélicoptère. Ce travail s'apparente à l'expérimentation telle que réalisée par les pionniers de l'aéronautique. Aussi les données recueillies par l'ordinateur embarqué seront utilisées pour affiner le modèle théorique obtenu à partir des principes élémentaires de la Physique. Les lignes qui suivront, dévoilent le plan suivant lequel le mémoire sera présenté.

1.3 Plan

Le mémoire débute avec un chapitre sur la théorie de l'identification des systèmes avec une emphase sur les méthodes d'identification des modèles d'état, la forme de représentation choisie pour représenter le vol stationnaire de l'hélicoptère. Le chapitre suivant présente un modèle paramétrique de l'hélicoptère en utilisant les principes élémentaires de la physique

newtonnienne et de la mécanique des fluides. Une fois la structure du modèle à identifier connue, le troisième chapitre présentera les outils logiciels et matériels développés dans le cadre de ce mémoire pour mesurer ces paramètres. Le dernier chapitre présente les différents tests réalisés pour l'identification du vol stationnaire de l'hélicoptère. Le mémoire se terminera avec une conclusion et les perspectives du projet.

CHAPITRE 2

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Le vol d'un modèle réduit d'hélicoptère est un sujet largement abordé dans la littérature. Ce fait s'explique par le faible budget requis pour le déploiement d'un hélicoptère et par la multitude de disciplines mises à contribution pour faire voler un hélicoptère. L'hélicoptère est un véhicule aérien qui utilise les forces aérodynamiques pour son mouvement. Ce faisant, une connaissance de la mécanique des fluides est requise pour modéliser la sustentation de l'hélicoptère. La miniaturisation des actionneurs électriques a permis de remplacer les commandes autrefois hydrauliques par des actionneurs électriques (les servomoteurs) ; cet effet de miniaturisation est d'autant plus important au niveau des modèles réduits d'hélicoptère. Cet aspect nécessite une connaissance des moteurs électriques pour la modélisation de ces véhicules. Finalement la miniaturisation des capteurs inertIELS grâce à la technologie MEMS (microelectromechanical systems) et des ordinateurs embarqués a permis d'embarquer les contrôleurs numériques sur les modèles réduits ; une connaissance de la microinformatique s'impose pour fournir des outils de commande très versatiles. Ces différentes disciplines mises à contribution ont permis de scinder la revue de littérature en trois sections :

- le modèle théorique de l'hélicoptère et les techniques de contrôle ;
- l'instrumentation du modèle réduit et l'implantation du contrôleur digital ;
- l'identification du modèle paramétrique de l'hélicoptère.

2.1 Le modèle théorique d'un modèle d'ordre réduit de l'hélicoptère et les techniques de commande

La modélisation théorique de l'hélicoptère réel est un sujet très présent dans la littérature scientifique. Au terme de la revue de la littérature sur les modèles présents dans la littérature, deux types de classification ressortent :

- la classification suivant la description des forces mises en jeu au niveau de l'hélicoptère ;
- la classification selon la linéarité du modèle.

L'élément principal de l'hélicoptère est l'hélice. Dans la modélisation théorique de l'hélicoptère, il est donc commun de commencer par la génération des forces aérodynamiques. Pour mieux représenter ces forces aérodynamiques, la mécanique des fluides propose deux points de vue : celui de Lagrange et celui d'Euler.

Pour étudier les fluides, la méthode de Lagrange suggère d'observer la particule du fluide dans

son mouvement. Ce principe est utilisé par Vilchis (2001) lorsqu'il présente la génération de la portance. Dans Vilchis (2001), la génération de la portance est expliquée à partir d'une analyse infinitésimale de la pale de l'hélice. Une formulation de Lagrange est également présentée dans Mahony et Lozano (1999). L'analyse de l'énergie de l'hélicoptère est utilisée pour obtenir un modèle. Dans la modélisation de l'hélice, l'énergie de rotation du rotor de queue est négligée de même que certains effets aérodynamiques présents au niveau des hélicoptères réels. Ces lacunes sont comblées en tenant compte de l'aéroélasticité utilisée par Callahan et Basset (1987) et Sopher *et al.* (1985). L'analyse de l'aéroélasticité d'un hélicoptère implique l'aérodynamique du rotor, l'interaction aérodynamique entre le rotor et le fuselage, la dynamique structurelle du rotor et les phénomènes dynamiques de couplage entre le rotor et le fuselage. Pour prendre en compte tous ces paramètres, Callahan et Basset (1987) utilise le logiciel CAMRAD pour l'analyse des hélicoptères. Dans Sopher *et al.* (1985), l'analyse de l'aéroélasticité se focalise sur la stabilité d'un rotor immobile (sans articulation de battement vertical) en vol stationnaire sous l'influence de la torsion induite par le battement des pales. Les angles de conicité et de flexion des pales sont pris en compte. Il est à noter que l'approche de Lagrange est très peu utilisée car elle est plus difficile à mettre en pratique. Si la précision de la formulation de Lagrange dans la modélisation n'est plus à démontrer, il demeure cependant que les modèles obtenus sont très complexes et leur utilisation pour la commande s'avère difficile. Aussi l'approche d'Euler est souvent utilisée pour modéliser les systèmes en mécanique des fluides.

L'approche d'Euler consiste à étudier le mouvement des fluides. Alors que l'observateur de Lagrange suit les particules, celui d'Euler est fixe et observe toutes les particules qui traversent son champ de vision. La description d'Euler fait intervenir les champs de vitesse. D'un point de vue pratique, cette description est plus facile à mettre en œuvre. La génération de la force aérodynamique s'explique par la vitesse de l'écoulement ; ce facteur est facilement mesurable par rapport à la trajectoire du fluide qu'impose la méthode de Lagrange. Elle est utilisée par Koo et Sastry (1998), Koo *et al.* (1998) et Mahony et Lozano (2005). Mahony et Lozano (2005) présente un modèle de Newton-Euler impliquant la position, les vitesses angulaires et linéaires et l'accélération de l'hélicoptère. Ce modèle identifie les différentes forces agissant sur le véhicule pour l'application du principe fondamental de la dynamique. Dans l'expression des forces aérodynamiques, l'accent est mis au niveau du mouvement du véhicule par rapport aux fluides ; ceci simplifie l'expression des forces aérodynamiques. Par la suite, la formulation de Newton-Euler implique le changement de repère pour l'application du principe fondamental de la dynamique qui nécessite un repère inertiel. La plupart des formulations de Newton-Euler sont similaires. Les différences mineures notées se situent à deux niveaux :

- la génération de la portance : les simplifications ne sont pas identiques d'un modèle à

un autre. Le régime de vol choisi étant généralement différent d'une étude à une autre, les hypothèses sont différentes.

- le nombre de degrés de liberté considéré : certains modèles tiennent compte du degré de liberté supplémentaire de l'hélice pour augmenter la précision du modèle.

La formulation de Newton-Euler étant celle choisie dans la présente étude, elle sera détaillée dans le chapitre 4.

Une similarité entre les deux points de vue (Lagrange et Euler) demeure quant à la forme du modèle obtenu. En effet, le modèle obtenu est généralement non linéaire à la suite de l'application des principes physiques. La non linéarité de l'hélicoptère peut se justifier de plusieurs façons. Deux raisons sont présentées ici :

- La première réside dans le comportement des fluides lors du mouvement de l'hélicoptère. Les équations qui gouvernent les fluides sont généralement non linéaires. Rougier (2007) présente ce phénomène de non linéarité lorsqu'il parle de l'effet de sol au décollage et à l'atterrissement de l'hélicoptère. L'effet de sol désigne la diminution de la traînée induite lorsque l'appareil est proche du sol. Pour les hélicoptères, l'effet de sol est défini par une augmentation de la portance lorsque l'hélicoptère est à une hauteur inférieure au diamètre de l'hélice. Il est particulièrement visible lorsque le disque du rotor principal se trouve à la moitié de cette hauteur. Comme pour les avions, un effet de sol apparaît lorsque le sol interfère avec le vortex produit aux extrémités des surfaces portantes principales ; dans le cas présent, il s'agit du vortex des extrémités de pales. Le sol diminue également l'accélération de l'air rejeté vers le bas à travers le disque du rotor. La vitesse descendante décroissante du flux induit améliore la portance pour un angle d'inclinaison donné. L'hélicoptère a besoin d'un angle d'attaque faible au niveau de l'hélice pour décoller grâce à cet effet de sol. Une fois hors de cette zone, l'hélicoptère nécessite plus de puissance pour maintenir son ascension. Ce changement de comportement induit un phénomène de non-linéarité entre la commande de pas collectif et la vitesse d'ascension de l'hélicoptère.
- La seconde raison est que l'hélicoptère est un véhicule sous-actionné. Un système sous-actionné est un système dont le nombre d'entrées est inférieur aux degrés de liberté. L'hélicoptère opère généralement avec quatre entrées : *le pas collectif, le pas longitudinal, le pas latéral et la commande de direction* mais dispose de six degrés de liberté qui sont les trois translations spatiales et les trois rotations spatiales. Il arrive donc que l'action d'une entrée cause des déplacements sur plusieurs degrés de liberté ; il existe un couplage entre les entrées et les différents degrés de liberté. Ce couplage se traduit par le fait que la superposition des entrées ne produit pas le même effet que les entrées prises séparément.

Pour traiter les modèles non linéaires, deux approches sont adoptées dans la littérature. La première consiste à utiliser les modèles non linéaires tels qu'ils sont et la seconde consiste à linéariser les modèles non linéaires afin d'utiliser les techniques de commandes linéaires qui sont plus développées. Concernant la première approche, Shim *et al.* (1998), Koo et Sastry (1998), Sira-Ramirez *et al.* (1994), Kaloust *et al.* (1997) et Koo *et al.* (1998) travaillent avec des modèles non linéaires. Dans Shim *et al.* (1998), un modèle non linéaire valable pour des conditions de vol stationnaire et pour des faibles vitesses est utilisé. Aussi le modèle est soumis à tour de rôle à diverses stratégies de commande non linéaire : la commande par logique floue et la linéarisation exacte. Dans Koo et Sastry (1998), une approche de commande non linéaire est présentée en tenant compte de la dynamique interne du modèle. La technique de commande utilisée est la linéarisation entrée-sortie. Dans cet article, il est démontré qu'une stratégie de commande non linéaire comme la linéarisation entrée-sortie avec la multitude de sorties impliquant le vol de l'hélicoptère n'est pas satisfaisante. Ce fait s'explique par la dynamique interne instable de l'hélicoptère. Pour pallier cette lacune, le nombre de degrés pris en compte est généralement réduit. Dans Kaloust *et al.* (1997) et Sira-Ramirez *et al.* (1994), un modèle simplifié de l'hélicoptère avec deux degrés de liberté est considéré : le premier degré de liberté concernant l'altitude du véhicule et le second, la position angulaire de l'hélice. En tenant compte d'un nombre réduit de degrés de liberté du véhicule, certains modes de la dynamique interne sont supprimés. Kaloust *et al.* (1997) propose une stabilisation en altitude en utilisant la méthode directe de Lyapunov. Pour assurer une stabilité semiglobale pour des pas collectif non nuls, la technique de backstepping est également utilisée. Sira-Ramirez *et al.* (1994) applique une commande par mode glissant pour la stabilisation en altitude en mode stationnaire.

Une autre approche pour pallier l'instabilité de la dynamique interne du véhicule est la linéarisation du modèle non linéaire. La littérature regorge de plusieurs exemples (Lee *et al.* (1993), Clarke et Sun (1998), Kienitz *et al.* (1993), Padfield (1996), Prouty (1995), Rozak et Ray (1997)) où les modèles d'hélicoptères ont été linéarisés avant leur utilisation.

Dans Mettler (2003), Bernard Mettler résume les travaux réalisés dans les projets d'hélicoptères autonomes de deux universités prestigieuses : Carnegie Melon University et Massachusetts Institute of Technologies. Cet ouvrage s'ouvre avec l'identification des systèmes linéaires multivariables par la méthode des réponses fréquentielles ; la boîte à outils **CIFER** est présentée pour répondre aux différents problèmes liés à l'identification des hélicoptères. Par la suite, le modèle paramétrique est présenté de façon à introduire graduellement les linéarisations possibles. Ainsi les non-linéarités du mouvement de l'hélicoptère se diluent au fur et à mesure des simplifications et il est difficile de trouver un modèle complet non linéaire de l'hélicoptère. Cette approche de l'auteur se comprend aisément par la méthode d'iden-

tification préconisée : la méthode d'identification par réponse fréquentielle. Les tests avec des excitations à différentes fréquences sont uniquement valable pour les systèmes linéaires. Dans son optique de présenter un modèle paramétrique linéaire, l'auteur présente des résultats issus de la linéarisation des forces aérodynamiques mises en jeu dans le déplacement de l'hélicoptère sans exposer les simplifications ; par ce fait les non-linéarités présentes au niveau des forces aérodynamiques sont occultées dans le modèle paramétrique proposé. Le livre de Cai (2011) plus récent, apporte plus de précisions au sujet du modèle théorique.

En effet, Cai (2011) est un ouvrage similaire à Mettler (2003). Il résulte des programmes de drones de l'Université de Singapour. L'approche de l'identification du modèle de l'hélicoptère présentée par Cai (2011) est détaillée. Tous les aspects reliés à l'identification y sont présentés. Le modèle paramétrique obtenu dépend largement des équations de la mécanique classique et de la mécanique des fluides. Les simplifications interviennent par la suite. Cependant le passage du modèle paramétrique non linéaire au modèle linéaire utilisé lors de l'identification est occulté ; cela rend difficile la lecture de la suite. Aussi l'introduction du balayage fréquentiel au cours de l'identification est moins expliquée et renvoie à Mettler (2003). Cai (2011) est plus dédié à l'identification des modèles réduits d'hélicoptères car ses équations prennent en compte les volets qui n'apparaissent que sur ces derniers. En ce sens, l'ouvrage apporte un supplément d'information par rapport à Mettler (2003). En résumé si Cai (2011) fournit les équations physiques régissant le mouvement de l'hélicoptère de façon non linéaire, il aborde très peu le sujet de la linéarisation qui apparaît au cours de la phase d'identification du modèle. La phase de linéarisation à partir d'un modèle complet non linéaire d'hélicoptère est abordé dans le rapport d'une équipe de l'Université d'Aalborg : Hald *et al.* (2005).

Hald *et al.* (2005) est un rapport d'une équipe du département de génie électrique de l'université sur la modélisation et le contrôle autonome d'un hélicoptère réduit. Ce rapport aboutit à un modèle paramétrique non linéaire. Cette approche est plus systématique que celle adoptée par Mettler (2003). Le modèle paramétrique est obtenu à partir des équations de mouvement de la mécanique classique. Cette méthode permet d'obtenir un modèle assez générique. Ce modèle paramétrique est assez théorique et ne prend pas en compte les spécificités des modèles réduits d'hélicoptère. En effet à la différence des hélicoptères grandeur nature, la dynamique des différents actionneurs des modèles réduits doivent être pris en compte dans une perspective de contrôle autonome. La réduction des hélicoptères offrent certaines possibilités comme le vol acrobatique et donc modifie le rapport entre la dynamique des actionneurs et du véhicule aérien. Cette insuffisance fait que le présent rapport est plus une étude qualitative d'un drone, qu'une réelle implantation d'un contrôleur sur un drone. Ces lacunes sont corrigées par un second rapport de l'université d'Aalborg (Fogh *et al.* (2004)) ; ce dernier rapport est beaucoup plus pratique dans son approche ; ce rapport sera abordé dans la sec-

tion 2.2. Certaines de ces lacunes sont indexées dans Cai (2011). Au cours de l'obtention du modèle paramétrique de l'hélicoptère, nous avons gravité autour de ces principaux ouvrages essayant de faire une synthèse de leurs différents travaux. Une fois les équations du mouvement de l'hélicoptère obtenues et les différents paramètres du modèle connus, la question de l'instrumentation pour recueillir les données utiles à l'identification se pose.

2.2 Instrumentation et Implantation du contrôleur digital

L'identification des paramètres de l'hélicoptère, requiert une certaine instrumentation pour mesurer les différentes variables d'état du modèle. Cette section est importante dans l'étude actuelle car la boîte à outils conçue dans le cadre de cette étude vise à simplifier les différentes étapes en partant de l'identification des paramètres du modèle jusqu'à la conception des lois de commande pour l'hélicoptère. La plupart des projets de drones présente peu les mécanismes d'acquisition des données. En effet, l'acquisition des données concerne une branche du génie qui n'est pas souvent le champ d'expertise des différents articles sur le sujet de l'identification des modèles réduits : L'informatique. Cette partie est souvent considérée comme utilitaire dans la plupart des ouvrages traitant du sujet. Ainsi Mettler (2003) survole le sujet en présentant les différents capteurs utilisés ; l'intégration des différents capteurs de mesure dans le CIPHER est peu expliquée. Cependant Cai (2011) détaille l'ordinateur embarqué et son logiciel ; les détails apportés au niveau du logiciel embarqué indiquent que l'implantation du contrôleur de vol nécessite des connaissances préalables de l'architecture du logiciel. Ainsi une fois la commande synthétisée par simulation, le mécanisme d'application de la commande n'est pas simple ; il requiert l'intervention d'un programmeur maîtrisant l'architecture. Le détail apporté par Cai (2011) sur l'ordinateur embarqué montre la complexité des projets de drones dus aux problèmes de vibration des capteurs embarqués et aux problèmes d'isolation des interférences électromagnétiques. Un autre rapport de l'Université d'Aalborg (Fogh *et al.* (2004)) a été mis à contribution de par son aspect pratique. Dans ce rapport, l'étude des drones est centrée sur les systèmes embarqués pour l'automatisation du vol. Ainsi il a été présenté comment les différents capteurs et actionneurs utilisent la ressource centrale du calculateur embarqué. Ce rapport développe les liens entre le modèle mathématique et le système embarqué. La conclusion majeure de la lecture de cet article est que l'implantation d'un contrôleur ne peut se baser uniquement sur la simulation d'un modèle paramétrique. Il faut tenir compte de la façon dont les commandes sont acheminées aux actionneurs et de la façon dont les actionneurs agissent sur les différentes hélices. Ce fait est très spécifique d'un modèle réduit à un autre ; ceci explique qu'il est souvent occulté dans la littérature. Une fois le modèle paramétrique connu et le banc de tests conçu pour l'instrumentation des différents

paramètres de vol, il a fallu cibler les tests adéquats pour identifier le modèle de l'hélicoptère réduit. Buskey *et al.* (2001) présente également l'utilisation d'une centrale inertielle pour stabiliser un modèle réduit d'hélicoptère en vol stationnaire.

Pour résoudre les problèmes d'implantation numérique de l'acquisition, la littérature sur la simulation numérique a été mise à contribution. Étant donné le temps de réponse rapide des véhicules aériens, la simulation temps-réel a été explorée. La simulation temps-réel a été considéré plus par la précision temporelle des données acquises par de tels systèmes que par la rapidité de la simulation. Ainsi Harman et Liu (2005) présente l'implantation d'un contrôleur robuste d'avion basé sur une architecture distribuée. Plusieurs unités de calcul sont utilisées pour implanter le contrôle. L'intérêt de l'article se trouve aussi dans la capacité à intégrer le modèle Simulink avec l'acquisition matérielle. Ceci se fait au moyen du logiciel de simulation temps-réel RT-LAB. Dans un même ordre d'idées, Cavalcanti et Papini (2005) présente un modèle intégré sous Simulink de l'avion Embraer 170 Jet. Pour la modélisation de l'avion Embraer 170 Jet, une estimation des paramètres dynamiques est faite à partir des algorithmes de Nelder-Mead Simplex et de Levenberg-Marquadt présentés respectivement dans Lagarais *et al.* (1998) et More (1977)

2.3 L'identification du modèle

Dans la littérature, les méthodes d'identification par réponses fréquentielles sont généralement mises en exergue. Mettler (2003) en utilisant sa boîte à outils **CIFER** fait la part belle à l'identification par des méthodes fréquentielles. Pour identifier le modèle du véhicule, une fois la structure du modèle établi, Mettler (2003) se focalise sur l'obtention d'un spectre de fréquences adéquat pour une identification du modèle. La structure du modèle généralement obtenu après linéarisation se déconnecte généralement de la réalité physique des paramètres du modèle.

De façon similaire, Cai (2011) introduit le balayage fréquentiel des entrées dans son identification. L'identification par balayage fréquentiel des entrées est largement utilisé dans l'identification des modèles réduits. Si cette approche d'identification fait largement ses preuves, elle présente néanmoins deux inconvénients :

- le balayage fréquentiel est efficace pour les modèles linéaires. Lorsque les modèles sont non linéaires, le spectre fréquentiel des entrées n'est pas identique au spectre fréquentiel des sorties. Il est donc difficile de capter toutes les dynamiques générées en sortie par un balayage fréquentiel.
- le balayage fréquentiel suppose une excitation à des fréquences données. Pour mettre en œuvre le balayage fréquentiel, il faut généralement disposer d'un intervalle continu

sur le domaine fréquentiel. Dans la pratique, il est très difficile d'effectuer le balayage fréquentiel des entrées sur des véhicules aériens. Les manœuvres de balayage fréquentiel des différentes entrées sont très risquées pour les véhicules aériens. En effet, l'hélicoptère évolue généralement dans un milieu assez perturbé

Ces deux raisons justifient l'exploration d'autres méthodes d'identification. L'identification des modèles est une méthode qui est utilisée dans des domaines autres que l'avionique. En tenant compte de la méthode d'identification de façon générale, une panoplie d'outils est présentée par Ljung (1999) pour identifier les modèles. La plupart des outils nous transportent hors du cadre du domaine fréquentiel qui est difficile à mettre en œuvre dans le cadre d'un véhicule réel. Les méthodes d'identification y sont présentées de façon théorique et font recours à plusieurs outils mathématiques. Les bases de l'identification ont été jetées avec l'identification de la trajectoire de l'astéroïde Cérès par le mathématicien Carl Friedrich Gauss en utilisant la méthode des moindres carrés (Gauss (1809)) et à partir des observations de Giuseppe Piazzi. L'identification tend généralement à minimiser l'erreur de prédiction à partir des observations précédentes. Le formalisme "méthodes de prédictions d'erreur" est introduit par Ljung (1974) pour désigner les techniques d'identification. La théorie de l'identification s'appuie également sur plusieurs outils de la statistique et de la probabilité. Aussi l'explication de la méthode des moindres carrés et son application aux observations temporelles sont présentées dans Yule (1927), Walker (1927) et celle du maximum de vraisemblance dans Whittle (1951). L'application de ces méthodes aux systèmes dynamiques comme c'est le cas dans l'étude présente est abordée par Astrom (1968), Astrom et Bohlin (1965) et Box et Jenkins (1973). Outre la statistique et la probabilité, il convient de rappeler que la théorie moderne de l'identification utilise également les outils de l'algèbre linéaire et de la géométrie. La représentation en modèles d'état des systèmes dynamiques introduite par Ho et Kalman (1966) et Kung (1978) a permis d'utiliser des méthodes d'identification basées sur la manipulation des matrices.

Ljung (1999) aborde la théorie de l'identification de façon générale. Il est important de caractériser le type de modèle auquel se réfère l'étude pour choisir l'outil adéquat. Le vol stationnaire de l'hélicoptère qui fait l'objet de l'identification est un phénomène non linéaire impliquant plusieurs entrées et plusieurs sorties. Il est possible cependant d'obtenir une approximation linéaire autour d'un point d'équilibre qui devient le modèle linéaire. Alors le vol stationnaire peut être modélisé de façon adéquate par un système linéaire multi-entrées et multi-sorties. Cette catégorie de systèmes s'adapte bien à la modélisation d'état. Ljung (1999) porte un intérêt particulier aux modèles d'état ; cet intérêt est justifié par la facilité de manipuler les représentations d'état avec des outils numériques puissants et largement utilisés par Matlab. En explorant les différents outils utilisés par Matlab, plusieurs méthodes sont

utilisées. Qin (2006) présente un aperçu de ces méthodes. Si ces méthodes sont largement présentes dans les processus chimiques, elles ne demeurent pas une exclusivité du domaine. Aussi Verhaegen (1994) qui a publié la méthode **MOESP**, présente l'identification d'un modèle de l'avion militaire F-14 comme application numérique. Le fait qu'elles sont présentes dans les processus chimiques s'expliquent par la possibilité d'avoir un vaste échantillon de données au cours des réactions chimiques. La chose est possible également avec l'augmentation des capacités de mémoire des ordinateurs embarqués sur les véhicules. Dans le chapitre suivant, les méthodes d'identification seront présentées de façon à comprendre leur mécanisme.

CHAPITRE 3

THÉORIE DE L'IDENTIFICATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES INVARIANTS

Le modèle mathématique est un système d'équations mathématiques qui visent à représenter un phénomène physique. Cette représentation est utile pour mieux apprêhender l'évolution du processus physique. Essentiellement trois façons existent pour formuler le modèle mathématique d'un phénomène physique :

- *la modélisation* : avec cette approche, le modèle se construit exclusivement à partir des lois mathématiques régissant le phénomène physique. Pour atteindre cet objectif, le phénomène physique est généralement subdivisé en des phénomènes physiques plus simples transcriptibles directement par des relations mathématiques. Par la suite, une intégrations des sous-systèmes permet d'obtenir un modèle complet. Cette approche exclut l'expérimentation. Elle part de la définition intrinsèque du phénomène physique. Cette méthode est généralement utilisée lorsque le phénomène physique est difficilement reproduisible ou lorsque les observations sont difficilement mesurables. Le réel inconvénient de cette approche est qu'il donne rarement un modèle pouvant décrire de manière précise le phénomène physique. L'obtention du modèle se basant exclusivement sur la théorie, le modèle est dit théorique. Les modèles obtenus par cette méthode sont généralement à but didacticiel.
- *l'identification* : avec cette approche, les observations du phénomène physique sont utilisées pour déterminer la représentation mathématique. À partir des mesures des entrées et des sorties du système, les techniques d'identification sont utilisées pour formuler le modèle mathématique représentant le phénomène. Le modèle généralement obtenu est qualifié de modèle boîte noire.
- *La combinaison des deux approches* : c'est l'approche la plus courante. Elle permet de combiner les avantages des deux premières approches. Par la modélisation, une structure paramétrique du modèle est obtenue. Les observations sont utilisées pour déterminer les différents paramètres du modèle. Par cette approche, le modèle théorique obtenu par la modélisation est éprouvé au monde réel. L'identification est plus efficace dans cette approche car l'usage de la modélisation permet de définir la structure du modèle. Cette méthode qui combine la modélisation et l'identification fera l'objet du présent chapitre.

La procédure d'identification d'un modèle requiert en général trois étapes qui sont :

- *l'acquisition des données qui caractérisent le phénomène physique* : à cette étape, l'utilisateur spécifie les entrées, les variables d'état et les sorties du système. Il décide également des différentes expériences à effectuer pour obtenir des données qui restituent au maximum le phénomène physique. L'instrumentation utilisée pour enregistrer les données est présentée au chapitre 5.
- *la paramétrisation du processus physique* : il s'agit de définir une structure pour le modèle à identifier. Cette étape est cruciale pour l'identification et la structure est obtenue à partir de la modélisation. Dans le cadre de la recherche, il s'agira de déterminer un modèle paramétrique pour le vol stationnaire de l'hélicoptère. Le modèle paramétrique est présenté au chapitre 4.
- *la sélection du modèle adéquat* : c'est la méthode d'identification proprement dite. Il s'agit de trouver les paramètres afin d'aboutir à une représentation du processus physique. Elle est également appelée méthode d'estimation des paramètres. La théorie de l'identification sera présentée dans le présent chapitre.

3.1 Identification des paramètres

Avant de présenter les méthodes d'estimation de paramètres, il est important de préciser le type de systèmes qui est utilisé. Le processus physique est généralement caractérisé par des entrées, des variables d'état et des sorties. Les variables d'état permettent de représenter la dynamique du système et jouent un rôle de mémoire dans la caractérisation des systèmes dynamiques. Cette caractérisation permet la formulation mathématique suivante :

$$G(u, t) : (u, x, t) \mapsto y, \quad (3.1)$$

où y désigne les sorties, u les entrées du système, x les variables d'état du système, t le temps et G une application décrivant la sortie du processus physique. De multiples propriétés des différents paramètres de l'équation (3.1) sont utilisées pour classifier les systèmes. Quelques caractéristiques des systèmes sont présentées pour identifier le type de système soumis à l'exercice de l'identification.

3.1.1 Linéarité

Un système est dit linéaire lorsqu'il obéit au *principe de superposition*. Le principe de superposition se traduit comme suit :

La sortie obtenue à partir de la combinaison linéaire de plusieurs entrées est égale à la combinaison linéaire des sorties générées par chacune des entrées prises séparément.

Ce principe appliqué à (3.1) se décrit par les relations suivantes :

$$G(u_1, x, t) \mapsto y_1, G(u_2, x, t) \mapsto y_2 \Rightarrow G(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, x, t) \mapsto \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \quad (3.2)$$

où α_1, α_2 sont des constantes réelles. G est une application linéaire.

La plupart des processus physiques sont non-linéaires. Par la linéarisation des modèles non-linéaires autour d'un point de fonctionnement d'intérêt, il est possible d'avoir une représentation approximative du processus physique. Dans le cas de la présente étude, le vol stationnaire de l'hélicoptère est étudié. Ce processus physique est non-linéaire. En fixant un point d'opération, le vol stationnaire sera représenté par un modèle linéaire. Ce processus sera revisité dans le chapitre 4

3.1.2 Stationnarité

Le système est dit stationnaire lorsqu'il ne dépend pas du temps. Cela se traduit par une invariance par rapport à une translation dans le temps.

Si au signal d'entrée $u(t)$, un système invariant associe une sortie $y(t)$, alors quel que soit le décalage temporel δ appliqué à l'entrée, le système associe au signal $u(t) = x(t - \delta)$ la sortie décalée $\tilde{y}(t) = y(t - \delta)$.

Un système linéaire et stationnaire peut s'exprimer à partir de sa réponse impulsionnelle comme suit :

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} g(\tau)u(t - \tau) d\tau, \quad (3.3)$$

où $g(\tau)$ est sa réponse impulsionnelle.

3.1.3 Systèmes discrets et systèmes continus

Le temps est la variable dépendante lorsqu'on représente les processus physiques. Ce fait s'explique par le caractère dynamique des processus physiques. Lorsqu'on s'intéresse à la façon dont le temps évolue, les systèmes se classifient en deux catégories. Lorsque le temps s'écoule de façon continue, le système est dit *continu*. Dans le cas où le temps est discrétisé, le système est *discret*. Lorsque des mesures sont prises pour identifier un système, le phénomène d'échantillonnage des entrées et des sorties doit être considéré. Au cours de l'identification, les systèmes seront considérés comme discrets. Cette discréttisation aboutit à la formule suivante :

$$y(kT) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)u(kT - n), \quad (3.4)$$

où T est la période d'échantillonnage. Pour faciliter la lisibilité de certaines expressions, T sera omis généralement.

3.1.4 Systèmes déterministes et systèmes stochastiques

La description faite au préalable du processus physique implique uniquement des entrées et des sorties. Cette définition des systèmes suppose que tout ce qui influence l'évolution du processus est déterminé et sous contrôle d'où la dénomination **déterministe**. Dans la pratique, il est quasiment impossible de maîtriser tous les paramètres influençant un phénomène. Des facteurs externes influençant le processus physique sont les perturbations. Deux phénomènes peuvent justifier la présence de perturbations dans la représentation du modèle :

- *les erreurs de mesure* : considérant que le processus d'identification implique des mesures des entrées et des sorties du processus physique, il est légitime d'inclure les erreurs de mesure et les biais des différents capteurs. Dans l'expérience actuelle, le phénomène de dérive des gyromètres est considéré comme une source de perturbation.
- *les entrées incontrôlables* : il s'agit des aléas extérieurs influençant le processus physique. Dans le cadre du vol stationnaire de l'hélicoptère, les rafales de vent qui influencent les forces aérodynamiques de l'hélicoptère sont des perturbations.

Certaines dynamiques non modélisées peuvent tomber dans la catégorie des perturbations. Si $v(kT)$ désigne la perturbation, l'expression (3.4) devient :

$$y(kT) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)u(kT - n) + v(kT). \quad (3.5)$$

Étant donné le caractère aléatoire des perturbations, il est commun d'introduire un modèle probabiliste pour les représenter. Ainsi $v(t)$ se formule comme suit :

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e(kT - n), \quad (3.6)$$

où $e(t)$ représente le *bruit blanc*.

3.1.5 Récapitulatif

Pour simplifier les sommes présentes dans la définition du modèle, nous introduisons l'opérateur avancement q . Ce facteur se définit comme suit :

$$qu(t) = u(t+1). \quad (3.7)$$

Ainsi un délai ou retard unitaire se traduit par q^{-1} . Avec cet opérateur, (3.5) peut s'écrire :

$$y(kT) = G(q)u(kT) + H(q)e(kT), \quad (3.8)$$

où

$$G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)q^{-k}, \quad (3.9)$$

et

$$H(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)q^{-k}, \quad (3.10)$$

(3.8) définit un modèle de façon unique. Pour définir une famille de modèle, le paramètre Θ est introduit et (3.8) se réécrit :

$$y(kT) = G(q, \theta)u(kT) + H(q, \theta)e(kT). \quad (3.11)$$

3.1.6 Généralités sur les modèles d'état

Il est à noter que les systèmes sont généralement complexes et comportent plusieurs entrées et plusieurs sorties. À cet égard y et u sont généralement des vecteurs où chacun des éléments représentent une entrée ou une sortie. Lorsque le système est linéaire, la représentation en modèle d'état est généralement utilisée.

Pour un système linéaire invariant continu, le modèle d'état se formule comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

où

$x(t) \in \mathbb{R}^n$: le vecteur des n variables d'état,

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: le vecteur des m commandes,

$y(t) \in \mathbb{R}^p$: le vecteur des p sorties,

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: la matrice des paramètres d'état,

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: la matrice de commande,

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$: la matrice d'observation,

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$: la matrice d'action directe.

Pour un système linéaire discret stochastique, la représentation d'état se formule comme suit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + v_k \end{cases} \quad (3.13)$$

où

$x_k \in \mathbb{R}^n$: le vecteur des n variables d'état à l'instant kT .

$u_k \in \mathbb{R}^m$: le vecteur des m commandes à l'instant kT .

$w_k \in \mathbb{R}^n$: le vecteur des n variables aélattoires affectant les mesures des états à l'instant kT .

$y_k \in \mathbb{R}^p$: le vecteur des p sorties à l'instant kT .

$v_k \in \mathbb{R}^p$: le vecteur des p perturbations affectant les sorties du système à l'instant kT .

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: la matrice d'état

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: la matrice de commande

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$: la matrice d'observation

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$: la matrice d'action directe

Dans le cadre d'un système physique, le vecteur d'état représente les variables internes qui définissent l'état du processus physique. Dans le cadre de la définition d'une structure de modèles d'état, les matrices A , B , C et D sont paramétrisées et (3.13) devient :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A(\theta) x_k + B(\theta) u_k + w_k \\ y_k = C(\theta) x_k + D(\theta) u_k + v_k \end{cases}, \quad (3.14)$$

où θ représente le paramètre à évaluer.

3.2 Aspect théorique de l'estimation des paramètres

3.2.1 Topologie des estimateurs

Au cours de l'identification, des mesures des entrées, des variables d'état et des sorties du systèmes sont effectuées. L'estimation vise à reconstruire un modèle du système à partir des mesures prises ; la forme générale des estimateurs se décline comme suit :

$$\hat{y}(kT + 1) = W_u(q) u(kT) + W_y(q) y(kT) \quad (3.15)$$

L'estimateur utilise les mesures passées pour prédire les valeurs futures. Pour obtenir la forme générale de $W_u(q)$ et $W_y(q)$, considérons l'expression $e(t)$ obtenue à partir de(3.8),

$$e(kT) = H^{-1}(q) y(kT) - H^{-1}(q) G(q) u(kT)$$

La prédiction de la sortie part du principe que la mesure de la sortie inclut le bruit de mesure. Aussi la prédiction de la sortie est obtenue par la formule suivante :

$$\hat{y}(kT + 1) = y_{mes}(kT) - e(kT) = \left(1 - H^{-1}(q)\right) y(kT) + H^{-1}(q) G(q) u(kT),$$

où y_{mes} est la mesure de la sortie. Ainsi on peut déterminer $W_u(q)$ et $W_y(q)$ comme étant :

$$W_u(q) = H^{-1}(q)G(q) \quad (3.16)$$

et

$$W_y(q) = 1 - H^{-1}(q). \quad (3.17)$$

Ces expressions découlent de la prédiction de la perturbation ($\hat{v}(t)$) qui n'est pas mesurable. En introduisant le paramètre θ dans (3.15), la famille d'estimateurs est décrite par l'équation suivante :

$$\hat{y}(kT + 1) = W_u(q, \theta)u(kT) + W_y(q, \theta)y(kT) \quad (3.18)$$

L'objectif de la méthode d'estimation des paramètres consiste à trouver dans la famille des estimateurs, celui qui correspond le mieux aux valeurs mesurées. Il faut fixer une règle pour déterminer le meilleur candidat.

3.2.2 Estimation par minimisation de l'erreur de prédiction

La première méthode est la minimisation de l'erreur de prédiction. La méthode consiste à rechercher le candidat qui minimise l'erreur de prédiction donnée par :

$$\epsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t, \theta), \quad (3.19)$$

où ϵ est un vecteur de \mathbb{R}^N où N représente le nombre de mesures. La taille du vecteur offre plusieurs possibilités pour sélectionner le meilleur candidat. Il est parfois nécessaire de réduire les degrés de liberté de la séquence à travers un filtre linéaire. Il permet de considérer certaines mesures jugées plus fiables que d'autres. Lorsqu'il s'agit du domaine fréquentiel, le filtre peut être vu comme un poids appliqué à une certaine plage de fréquence. Dans le domaine temporel, le filtre appliqué est équivalent au filtrage des mesures des entrées et des sorties du système. Ce filtrage permet de concentrer l'erreur sur ce qui est considéré comme l'information utile. D'un point de vue numérique, il permet également d'optimiser les algorithmes d'identification en réduisant la taille de certains vecteurs. L'application du filtre L se traduit par la formulation suivante :

$$\epsilon_F(t, \theta) = L(q)\epsilon(t, \theta). \quad (3.20)$$

Au delà de l'intérêt numérique et de la réduction du degré de liberté, le filtrage permet de corriger certaines limites de la prédiction de l'erreur. Une fois l'erreur filtrée, l'outil d'évaluation

des différentes erreurs doit être choisi. Cet outil peut se formuler comme suit :

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N l(\epsilon_F(t, \theta)) \quad (3.21)$$

où l est une fonction définie de \mathbb{R}^N vers \mathbb{R}^+ , qui à chaque erreur filtrée associe un scalaire. Une telle fonction est généralement appelée une norme. La dernière étape de la minimisation de l'erreur de prédiction consiste à trouver le paramètre θ^* qui minimise la norme. Le paramètre θ^* est celui qui minimise la fonction objectif.

Le choix d'un filtre \mathbf{L} et d'une fonction objectif l permettent de classifier les méthodes d'estimation par minimisation de l'erreur de prédiction. Ainsi le critère de minimisation 3.21 est perçu comme une méthode de régression non linéaire dans Jennrich (1969) et dans Hannan (1971)

Estimation par la méthode des moindres carrés

Définition de la méthode Lorsque l est la norme quadratique dans le domaine scalaire, la méthode est dite des moindres carrés. Elle se formule comme suit :

$$l(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon^2 \quad (3.22)$$

La méthode des moindres carrés pour évaluer le paramètre désiré peut s'interpréter par l'utilisation de la distance comme outil de discrimination. Le paramètre idéal θ^* est celui qui minimisera la distance avec les données mesurées.

Avantages Le principal avantage de cette méthode est la simplicité des outils numériques qu'elle implique. En effet pour trouver le paramètre adéquat θ^* , il suffit d'une simple dérivation. Pour mieux comprendre sa simplicité, considérons un estimateur linéaire :

$$\hat{y}(kT|\theta) = \phi(kT)\theta \quad (3.23)$$

Alors (3.21) avec la méthode des moindres carrés peut se réécrire :

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} [y(t) - \phi(t)\theta]^2 \quad (3.24)$$

V_N est une norme donc une quantité positive. Lorsque $\frac{\partial V_N}{\partial \theta} = 0$, l'extrémum n'est autre que le minimum de la fonction objectif. L'expression du paramètre estimé θ^* est :

$$\theta^* = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi^T(t) \phi(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi^T(t) y(t) \quad (3.25)$$

La facilité avec laquelle le paramètre θ^* est obtenu et la simplicité des concepts mis en œuvre pour la déployer font de la méthode des moindres carrés, un outil puissant de l'estimation des paramètres. Remarquons cependant dans le précédent développement, l'aspect stochastique des mesures et des estimateurs a été négligé. La section suivante analysera la méthode des moindres carrés lorsque les bruits de mesures sont considérés. La facilité avec laquelle le paramètre θ^* est obtenu et la simplicité des concepts mis en œuvre pour la déployer font de la méthode des moindres carrés, un outil puissant de l'estimation des paramètres.

La méthode des moindres carrés utilise la norme euclidienne. Plusieurs normes sont également utilisées. La norme infinie (l_∞) qui est reliée aux perturbations non bornées est abordée par Schweppe (1973), Fogel et Huang (1982), Milanese et Vicino (1991), Deller (1990) et Walter et Piet-Lahanier (1990).

Limites Pour mettre en exergue certaines limites de la méthode, considérons que la mesure $y(k)$ contient du bruit $v(k)$. Ainsi l'estimateur prend la forme suivante :

$$\hat{y}(k|\theta) = \phi(k)\theta + v(k). \quad (3.26)$$

En réévaluant le paramètre θ_S^* on obtient :

$$\theta_S^* = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi^T(k) \phi(k) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi^T(k) (y(k) - v(k)) \quad (3.27)$$

Il est évident que θ_S^* dépend du bruit et la différence entre θ_S^* et θ^* (*mode déterministe*) est :

$$\theta^* - \theta_S^* = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi^T(k) \phi(k) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi^T(k) v(k) \quad (3.28)$$

Ce résidu est problématique parce que le bruit est difficilement quantifiable. Il importe de caractériser le bruit de mesure pour garantir que le paramètre estimé à partir du modèle déterministe θ^* (le seul évaluable) fait converger l'estimateur vers les valeurs mesurées. Pour cette garantie, il faut que θ_S^* tende vers θ^* lorsque les observations croissent (soit N tend vers

∞). Cela se traduit par la relation suivante :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \theta^* - \theta_S^* = \bar{E} [\phi^T(t)\phi(t)] \bar{E} [\phi^T(t)v(t)] = 0 \quad (3.29)$$

$\phi^T(t)\phi(t)$ est non singulière puisqu'elle dépend des entrées du système alors $\bar{E} [\phi^T(t)\phi(t)]$ est non nul. Ainsi (3.29) est satisfaite si $\bar{E} [\phi^T(t)v(t)]$ est nul. Cette condition implique deux hypothèses :

- $v(t)$ est une séquence aléatoire de variables indépendantes et de moyenne nulle ; un tel bruit est qualifié de bruit blanc.
- l'entrée du système est indépendante de $v(t)$; ce qui est généralement le cas des systèmes en boucle ouverte.

On peut conclure que (3.29) est vérifiée lorsque v est un bruit blanc gaussien. Cette limitation de la méthode des moindres carrés implique une meilleure connaissance des bruits pour une estimation par prédition d'erreurs aboutie. Cette connaissance passe par la maîtrise des informations stochastiques du bruit.

3.2.3 Étude de cas de la méthode des moindres carrés : modèle d'état multivariable

Les modèles d'état sont les représentations par excellence des systèmes multivariables. Le modèle d'état a été la forme de représentation utilisée pour le vol stationnaire de l'hélicoptère, ce qui justifie cette étude de cas. Avant de présenter l'usage des moindres carrés avec les modèles d'état, nous allons étendre le concept des moindres carrés aux systèmes multivariables.

Critère des moindres carrés pour le cas multivariable

Dans le cas multivariable, ϵ est un vecteur, le critère quadratique se réécrit :

$$l(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon^T \epsilon \quad (3.30)$$

Lorsque les sorties du système n'ont pas la même importance, une matrice de poids λ est utilisée pour discriminer les sorties les unes par rapport aux autres.

$$l(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon^T \lambda^{-1} \epsilon \quad (3.31)$$

Ainsi (3.24) devient :

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} [y(t) - \Phi^T \theta]^{-1} \lambda^{-1} [y(t) - \Phi^T \theta] \quad (3.32)$$

De façon identique au cas scalaire, θ^*

$$\theta^* = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t) \lambda^{-1} \phi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \phi(t) \lambda^{-1} y(t) \quad (3.33)$$

La méthode des moindres carrés est donc extensible aux systèmes multivariables. De plus il est possible de discriminer les sorties, les unes par rapport aux autres.

Application aux modèles d'état

La représentation d'état fait intervenir des variables internes que sont les variables d'état. Ces variables ne sont généralement pas mesurées. En fait dans le cadre de l'identification d'un système, seules les entrées et les sorties sont mesurées. Rappelons ici la forme d'un modèle d'état discret :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + v_k \end{cases} \quad (3.34)$$

Dans le cadre d'un modèle d'état, les matrices A , B , C et D représentent les paramètres à identifier. Dans un premier temps, le modèle d'état sera supposé être une boîte noire ainsi le paramètre Θ est la matrice augmentée suivante :

$$\Theta = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

En introduisant A et C dans la matrice de paramètres à identifier, il importe de reconstruire le vecteur des valeurs mesurées. En supposant que les variables d'état soient mesurables ou déductibles des mesures des entrées et des sorties du système, le vecteur d'entrées $\phi(k)$ s'écrit :

$$\phi(k) = \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Le vecteur des sorties est :

$$Y(k) = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Le vecteur représentant le bruit de mesure est :

$$E(k) = \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

(3.34) peut se réécrire :

$$Y(k) = \theta\phi(k) + E(k) \quad (3.39)$$

L'équation (3.39) se prête mieux à l'application de la méthode des moindres carrés. La reformulation du modèle d'état pose cependant un problème important : celui de la construction du vecteur d'état à partir des données mesurées. La détermination des variables d'état du système se base sur le principe d'observabilité du système. Un système est dit observable si l'observation des sorties du système permet de reconstruire les variables d'état du système. Pour déterminer les variables d'état, il faut observer les sorties et les entrées entre deux instants consécutifs (kT et $kT + 1$). Cette observation implique la construction d'estimateurs basés sur les observations des pas antérieurs. À partir de (3.34), on peut écrire que :

$$\begin{aligned} y(k+j) &= Cx(k+j) + Du(k+j) + v(k+j) \\ &= CAx(k+j-1) + CBu(k+j-1) + Cw(k+j-1) + Du(k+j) + v(k+j) \\ &= \dots \\ &= CA^j x(k) + CA^{j-1} Bu(k) + CA^{j-2} Bu(k) + \dots \\ &\quad + CBu(k+j-1) + Du(k+j) \\ &\quad + CA^{j-1} w(k) + CA^{j-2} w(k+1) + \dots \\ &\quad + Cw(k+j-1) + v(k+j) \end{aligned}$$

À partir des estimations pas-à-pas, on peut former les vecteurs suivants :

$$Y_r = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+r-1) \end{bmatrix} \quad U_r = \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+r-1) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

(3.41)

En collectant les estimations pas à pas, on obtient :

$$Y_r(k) = O_r x(k) + S_r U_r(k) + V(k) \quad (3.42)$$

De (3.42), nous avons la preuve que x_k peut être déduit à partir des entrées et des sorties. Les détails d'obtention des différentes matrices O_r et S_r seront présentés dans la section 3.3. La reconstruction du vecteur d'état à partir des mesures impose une préparation avant l'application de la méthode d'estimation. L'algorithme simple de la méthode d'identification des modèles d'état peut se libeller comme suit :

- **déterminer les dimensions requises pour former une matrice Y_r consistante :** cette étape tient compte de la connaissance théorique du modèle.
- **déterminer l'ordre n du modèle d'état :** il est déduit du rang de la matrice Y_r
- **estimer les matrices A , B , C et D et la covariance du bruit :** cette étape est l'application de la méthode des moindres carrés à la regression linéaire (3.39)

Ces étapes reprennent quelque peu les trois points présentés au préalable à savoir la collecte des données, l'établissement de la structure du modèle et l'identification proprement dite. Ces différents points seront davantage visités dans la section concernant l'application numérique de la méthode d'identification des modèles d'état.

3.3 Application numérique de l'identification des modèles d'état

La méthode d'identification des modèles d'état utilise d'une part les outils de l'algèbre linéaire étant donné le caractère matriciel de la représentation d'état et d'autre part quelques concepts de géométrie à cause de la forme vectorielle que revêtent les entrées, les sorties et les variables d'état. Aussi nous ferons certains rappels de ces disciplines lors du déploiement numérique de la méthode d'état.

3.3.1 Acquisition des données

À partir de la forme de la représentation d'état, il a été démontré au préalable que le vecteur des sorties Y pouvait se traduire par la combinaison linéaire suivante :

$$Y(k) = O_r x(k) + S_r u(k) + V(k) \quad (3.43)$$

À partir de cette relation, il est possible de déterminer la matrice d'observabilité O_r . À partir de la matrice d'observabilité, il est possible de déterminer C et A car

$$O_r = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Pour obtenir la matrice d'observabilité O_r , il incombe donc d'éliminer les termes en U et le bruit de mesures.

3.3.2 Suppression du vecteur des entrées

Pour supprimer les termes en U , certaines considérations géométriques du vecteur Y constitué à partir des données mesurées sont présentées. Si Y est considéré comme un vecteur, (3.43) peut être considéré comme une combinaison linéaire des vecteurs X , U et V . Pour éliminer les termes en U , tout en conservant les autres termes de la combinaison linéaire, il faut considérer le projeté orthogonal de Y par rapport à U . Tout d'abord, rappelons la formulation du projeté orthogonal.

Projection orthogonale

Soit deux vecteurs A et B . La projection orthogonale de A sur B notée A/B est obtenue par la relation suivante :

$$\begin{aligned} A/B &= AB^T(BB^T)^{-1}B \\ &= A\Pi_B \end{aligned}$$

Dans le cas où (BB^T) n'est pas inversible, la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose est utilisée. La composante orthogonale à B du vecteur A , notée A/B^\perp est obtenue en soustrayant A/B de A alors.

$$\begin{aligned} A/B^\perp &= A - AB^T(BB^T)^{-1}B \\ &= A(I - \Pi_B) \\ &= A\Pi_{B^\perp} \end{aligned}$$

Suppression du vecteur des entrées

L'objectif étant de supprimer les termes U du vecteur des sorties Y , on multiplie Y par Π_{U^\perp} et (3.43) est équivalent à :

$$Y\Pi_{U^\perp} = O_r X(k)\Pi_{U^\perp} + V\Pi_{U^\perp} \quad (3.45)$$

Une fois que les termes en U sont supprimés, il faut annihiler l'effet du bruit.

3.3.3 Suppression des bruits de mesure

Il est impossible de supprimer les bruits comme cela a été le cas pour les entrées. En effet, les entrées sont mesurées et bien connues tandis que le bruit est aléatoire. Généralement les caractéristiques du bruit qui sont connus sont sa bande passante et sa valeur moyenne. Pour supprimer le bruit, un filtre est utilisé pour réduire son impact. Désignons par Φ^T le filtre à appliquer (3.45). Le filtrage introduira un effet de moyennage sur les valeurs observées. Ce moyennage représente une normalisation par rapport au nombre d'échantillons, on obtient :

$$\frac{1}{N}Y\Pi_{U^\perp}\Phi^T = \frac{1}{N}O_rX(k)\Pi_{U^\perp}\Phi^T + \frac{1}{N}V\Pi_{U^\perp}\Phi^T \quad (3.46)$$

Au moyen de l'application du filtre, on vise à ce que l'effet du bruit soit nul lorsque le nombre de mesures augmente. Pour constituer un tel filtre il est important que les paramètres du filtre soient non corrélées avec le bruit. Lorsque le système est en boucle ouverte, les entrées passées sont des candidats idéaux pour construire un tel filtre. Pour que le filtre soit efficace, il faut que le bruit soit un bruit blanc. Lorsque ce n'est pas le cas, la méthode de maximum de vraisemblance qui implique de meilleurs outils pour caractériser le bruit est requis. Il est possible toutefois de considérer les bruits comme nuls au cours de l'identification. Lorsque le système est linéaire, le traitement du bruit peut se faire par analyse spectrale des données mesurées.

3.3.4 Évaluation de la matrice d'observabilité

Une fois le bruit supprimé, le résultat obtenu dans (3.46) est le suivant :

$$G = \frac{1}{N}O_rX(k)\Pi_{U^\perp}\Phi^T = O_rT \quad (3.47)$$

Nous sommes en présence d'un système surdéterminé qui correspond à l'expression de la matrice d'observabilité dans une base T donnée. Il importe d'extraire l'information utile pour trouver les matrices A et C . Lorsque l'ordre du système est connu, l'obtention des matrices A et C se fait à partir de la topologie de la matrice d'observabilité (présentée en (3.44)). Lorsque l'ordre du système n'est pas connu, il faut déterminer l'ordre de la matrice G puis supprimer les colonnes au-delà du rang du G . Une méthode plus systématique pour opérer la réduction de la matrice est la décomposition en valeurs singulières.

Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières est une factorisation d'une matrice M de dimension $(j \times k)$. Cette factorisation de matrice stipule que pour toute matrice M de dimension

$(j \times k)$ dont les coefficients sont réels ou complexes, il est possible d'écrire :

$$M = USV^* \quad (3.48)$$

avec U une matrice unitaire $(j \times j)$, S une matrice $(j \times k)$ dont les coefficients diagonaux sont des réels positifs ou nuls et tous les autres sont nuls, et V^* est la matrice adjointe à D , matrice unitaire $(k \times k)$. Cette décomposition permet de concentrer l'information de la matrice M autour des valeurs singulières. Supposons que M dispose de n valeurs singulières, la matrice V dispose sur sa diagonale les différentes valeurs singulières en ordre décroissant (dans le cas des coefficients réels). Au-delà de n , les valeurs des matrices sont nuls. La matrice S a la topologie suivante :

$$S_{j,k} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

De fait la matrice peut être réécrite de la façon suivante :

$$M = U_1 S_1 V_1^*, \quad (3.50)$$

où U_1 est une matrice $(j \times n)$, S_1 est une matrice $(n \times n)$ et V_1 est une matrice $(n \times n)$.

En appliquant la décomposition en valeurs singulières à la matrice G présentée en (3.46), la matrice d'observabilité est obtenue à partir du produit $U_1 S_1$. Ce produit représente la matrice d'observabilité dans une base donnée. En considérant la topologie de la matrice d'observabilité, l'estimation de C s'exprime de la façon suivante :

$$\hat{C} = O_r(1 : p, 1 : n), \quad (3.51)$$

où p représente le nombre de sorties et n l'ordre du système.

De façon similaire, l'estimation de A est obtenue à partir de \hat{C} et O_r . En effet,

$$O_r(p+1 : pr, 1 : n) = O_r(1 : p(r-1), 1 : n) \hat{A} \quad (3.52)$$

Toutefois, il est rare que la décomposition en valeurs singulières de la matrice G donne des colonnes nulles. Cela s'explique par la présence du bruit dans la matrice G . En effet, le filtrage n'annule pas totalement le bruit mais le réduit. Alors l'expression de la matrice G est généralement la suivante :

$$G = O_r T + E_N, \quad (3.53)$$

où E_N est le résidu du bruit filtré. E_N est responsable de certaines valeurs singulières non nulles. Lorsque l'ordre du système est connu, il est simple de les déterminer parce que ce sont les n premières colonnes de S qui sont prises en compte. Lorsque l'ordre n'est pas connu, il faut mettre en place une méthode pour déterminer les valeurs singulières suffisamment importantes à considérer dans la dynamique du système. Pour ce faire, les matrices de poids W_1 et W_2 sont utilisées. Le choix des différentes matrices de pondération permet de classifier les différents algorithmes de la méthode. Les différents choix seront exposés dans la section 3.3.6. Une fois \hat{A} et \hat{C} estimés, il faut déterminer \hat{B} et \hat{D} .

3.3.5 Estimation de B et D

Avec \hat{A} , le vecteur d'état peut s'exprimer facilement :

$$\hat{x}(t+1) = \hat{A}\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (3.54)$$

En nous rappelant l'opérateur de délai q introduit précédemment dans (3.7), (3.54) devient :

$$\hat{x}(t) = (qI - \hat{A})^{-1}Bu(t). \quad (3.55)$$

À partir du vecteur d'état estimé, la sortie du modèle peut se réécrire :

$$\hat{y}(t|B, D) = \hat{C}(qI - \hat{A})^{-1}Bu(t) + Du(t). \quad (3.56)$$

L'estimation des matrices B et D revient à appliquer la méthode des moindres carrés.

3.3.6 Famille des méthodes d'identification des modèles d'état

Pour formaliser le concept de l'identification des modèles d'état, les différentes étapes de la méthode seront libellées d'après les points suivants :

- à partir des données d'entrées et des sorties, la matrice G est formée :

$$G = \frac{1}{N}Y\Pi_{U^T}^{\perp}\Phi^T \quad (3.57)$$

- La sélection des matrices de pondération W_1 et W_2 permet de fixer le rang du système :

$$\hat{G} = W_1 G W_2 \quad (3.58)$$

- la décomposition en valeurs singulières permet de déterminer la matrice d'observabilité étendue

- la transposition de la matrice d'observabilité dans une base requise permet d'obtenir les matrices A et C
 - l'estimation des matrices B et D s'obtient à partir de la méthode des moindres carrés.
- Le choix des différentes matrices de poids permet de différencier les algorithmes d'identification des modèles d'état. Trois de ces algorithmes sont présentés ci-dessous :

N4SID

L'acronyme “*N4SID*” se définit comme suit “Numerical algorithms for Subspace State Space”. Il a été présenté dans Van Overschee et DeMoor (1994a). Cet algorithme justifie son choix des matrices de poids W_1 et W_2 à l'aide de l'estimation des variables d'état et de la covariance du bruit. Elle se fonde sur le fait que le vecteur d'état est une combinaison des entrées et des sorties passées. Ce faisant, il est possible de formuler un prédicteur \hat{y} sous la forme suivante :

$$\hat{y}(t+k-1|t-1) = \alpha_1 y(t-1) + \dots + \alpha_{s_1} y(t-s_1) + \beta_1 u(t-1) + \dots + \beta_{s_2} u(t-s_2) \quad (3.59)$$

Ce prédicteur permet de réécrire le vecteur de sortie comme une combinaison des entrées et des sorties passées :

$$y(t+k-1) = \theta_k^T \phi_s(t) + \gamma_k^T U_l(t) + \epsilon(t+k-1) \quad (3.60)$$

En combinant plusieurs prédicteurs, il est possible de faire une projection de la prédiction sur l'espace des entrées et des sorties et on obtient :

$$Y_l(t) = \Theta \Phi(t) + \Gamma U_l(t) + E(t), \quad (3.61)$$

où Φ , $U_l(t)$, Γ , Θ , Y_l et $E(t)$ sont définies comme suit :

$$\Phi(t) = [y^T(t-1), \dots, y^T(t-s_1), u^T(t-1), \dots, u^T(t-s_2)]$$

$$U_l(t) = [u^T(t) \dots u^T(t+l-1)]$$

$$\Gamma = [\Gamma_1 \dots \Gamma_l]$$

$$\Theta = [\theta_1 \dots \theta_l]$$

$$Y_l = [y^T(t) \dots y^T(t+l-1)]$$

$$E(t) = [\epsilon^T(t) \dots \epsilon^T(t+l-1)]$$

L'application des méthodes des moindres carrés pour retrouver $\hat{\Theta}$ et $\hat{\Gamma}$ donne la relation suivante :

$$[\hat{\Theta} \quad \hat{\Gamma}] = [\hat{\Theta} \quad \hat{\Gamma}] \begin{bmatrix} \Phi \Phi^T & \Phi U^T \\ U \Phi^T & U U^T \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.62)$$

Rappelons que la méthode *N4SID* est basée sur l'estimation des variables d'état à partir d'une projection sur l'espace formé par les entrées et les sorties antérieures. L'hypothèse se tient lorsque (3.43) et (3.61) sont comparées. Il ressort de ces deux expressions que la dépendance par rapport aux états dans (3.43) est substituée par une dépendance par rapport à Φ qui représente les sorties et les entrées passées. Considérant ce point, il n'est utile pour estimer les variables d'état que de déterminer le paramètre $\hat{\Theta}$. En appliquant l'inversion de la matrice dans (3.62), on obtient :

$$\hat{\Theta} = Y \Pi_{U^T}^\perp \Phi^T (\Phi \Pi_{U^T}^\perp \Phi^T)^{-1} \quad (3.63)$$

Une fois $\hat{\Theta}$ évalué, la fonction \hat{G} peut être exprimée de la façon suivante :

$$\hat{G} = \hat{\Theta} \Phi = Y \Pi_{U^T}^\perp \Phi^T (\Phi \Pi_{U^T}^\perp \Phi^T)^{-1} \Phi \quad (3.64)$$

De la forme de \hat{G} , on fixe de W_1 :

$$W_1 = I \quad (3.65)$$

et l'expression de W_2 se déduit :

$$W_2 = \Pi_{U^T}^\perp \Phi^T (\Phi \Pi_{U^T}^\perp \Phi^T)^{-1} \Phi \quad (3.66)$$

La méthode se complète par les étapes précitées lors de la présentation de la famille d'algorithmes (3.3.6).

Cependant deux inconvénients caractérisent cette méthode :

- **la sensibilité par rapport aux échelles des entrées et des sorties** : l'échelle des entrées et des sorties affecte le conditionnement des matrices impliquées dans le processus d'identification. Le problème est généralement levé en enlevant les biais de mesure des entrées et des sorties. Cela fait partie du conditionnement des données mesurées.
- **la taille des matrices** : la méthode tend à évaluer le vecteur d'état au complet. En termes de calcul, les temps de résolution de système peuvent être considérables pour les systèmes à plusieurs variables d'état.

La prochaine méthode tend à corriger le problème de taille des matrices.

MOESP

L'acronyme “*MOESP*” se définit comme suit “**M**ulti **O**utput-**E**rror **S**tate **sP**ace”. Il a été présenté dans Verhaegen (1994). La majeure différence avec la méthode *N4SID* se situe dans l'extraction de l'information utile de la matrice d'observabilité. Alors que **N4SID** suggère une projection sur la matrice d'Hankel formée par les entrées et les sorties précédentes, **MOESP**

utilise la décomposition RQ pour extraire l'information utile. La factorisation RQ se présente comme suit :

$$\begin{aligned} U_l & \quad R_{11} \quad 0 \quad 0 \quad Q_1^T \\ \Phi_S & = R_{21} \quad R_{22} \quad R_{23}Q_2^T \\ Y_l & \quad R_{31} \quad R_{32} \quad R_{33}Q_3^T \end{aligned} \quad (3.67)$$

L'introduction de la factorisation RQ se traduit au final par une modification de la forme de la matrice W_2 .

$$W_2 = \Pi_{UT}^\perp \Phi^T (\Phi \Pi_{UT}^\perp \Phi^T)^{-1} \Phi \Pi_{UT}^\perp \quad (3.68)$$

Cette nouvelle valeur de W_2 empêche d'obtenir le vecteur complet d'état. La factorisation RQ se traduit par une projection du vecteur complet d'état orthogonalement au vecteur d'entrées. Il faut se départir de cette projection pour obtenir le vecteur d'états complet. L'avantage de cette méthode est de réduire la taille des matrices au cours du processus tout en conservant la même convergence. Dans la pratique, toutes les variables d'état n'ont pas besoin d'être exprimés pour la mise à jour des estimations des erreurs de sortie ; d'où le nom de la méthode. Ce principe réduit considérablement la taille des matrices mises en jeu par la méthode. Cependant tout comme **N4SID**, elle est sensible à l'échelle des entrées et des sorties. Pour assurer une efficacité de la méthode, un traitement s'impose pour enlever les biais de mesures. Le problème d'échelles des entrées et des sorties est corrigé par la méthode suivante **CVA**.

CVA

L'acronyme **CVA** se définit comme suit “**C**anonic **V**ariate-**A**nalysis”. Il a été présenté dans Larimore (1990). Cette méthode se base sur la corrélation entre l'erreur de prédiction de sortie et les données passées. Cette hypothèse part du fait que le prédicteur utilisé par les précédentes méthodes n'est pas parfait. Pour améliorer la prédiction, une séquence de corrélation est introduite dans la fonction objectif utilisée pour déterminer le paramètre optimal $\hat{\theta}_N$. Cette introduction de la corrélation peut se traduire comme une modification du prédicteur : il n'est plus linéaire puisqu'il ne dépend plus uniquement des valeurs présentes. Le prédicteur joue un rôle de mémoire. Cette mémoire peut se traduire par un filtre sur les valeurs antérieures soit :

$$M = L_c \Phi_s \quad (3.69)$$

La corrélation introduite pour vérifier la qualité du prédicteur se traduit de façon géométrique comme une évaluation du produit vectoriel entre les valeurs futures et les valeurs passées dans Van Overschee et DeMoor (1996). Plus les valeurs sont corrélées, plus ce vecteur est grand. Cette corrélation introduite dans la fonction objectif se traduit par une modification des

poids W_1 et W_2 . La forme des poids s'inspire de la corrélation entre Φ et \mathbf{U} d'une part et \mathbf{Y} et \mathbf{U} d'autre part. La démonstration exhaustive de la forme des poids est présentée dans Van Overschee et DeMoor (1994b). La forme des différents poids W_1 et W_2 est reportée ici :

$$W_1 = \left(\frac{1}{N} Y \Pi_{U^T}^{\perp} Y \right)^{-1/2} \quad (3.70)$$

$$W_2 = \left(\frac{1}{N} \Phi \Pi_{U^T}^{\perp} \Phi \right)^{-1/2} \quad (3.71)$$

En considérant les nouveaux poids lors de l'identification, on constate que la méthode est insensible à l'échelle des entrées et des sorties. L'introduction de la corrélation a pour effet de normaliser les entrées et les sorties. Le seul inconvénient est la nécessité d'exprimer la racine carrée d'une matrice. Si la méthode s'avère efficace par la normalisation des données mesurées, elle nécessite un temps de calcul prohibitif pour un système embarqué. En effet, la méthode implique une inversion des matrices. La taille des données étant variable, le temps de calcul de l'inverse des matrices est non déterministe donc peu approprié pour une acquisition temps-réel.

3.4 Résumé

Ce chapitre présente un éventail de méthodes d'identification en particulier celles reliées aux modèles d'état. Pour utiliser ces différentes méthodes, la boîte à outils de Matlab sera utilisée. La sélection du meilleur outil d'identification est guidée généralement par le type des données fournies. La qualité des données mesurées est également évaluée par la boîte à outils. Ainsi lorsque la corrélation est établie entre les données antérieures (entrées et sorties passées) et l'erreur de prédiction, l'outil d'identification sélectionnera la méthode **CVA** lors de l'identification du système. De la même façon, l'outil est en mesure d'évaluer les différents algorithmes et de sélectionner celui qui correspond au maximum avec les données.

Pour limiter les temps de calcul et comme cela est précisé au début du chapitre, deux étapes sont nécessaires avant l'étape d'identification présentée dans le présent chapitre. Il s'agit tout d'abord de fournir une structure adéquate représentant le vol stationnaire de l'hélicoptère. Cette structure du modèle passe par une connaissance des phénomènes physiques mis en jeu dans le vol stationnaire d'un hélicoptère et ensuite par la mesure des données représentant de façon fidèle le vol stationnaire de l'hélicoptère. Le chapitre suivant exposera le modèle paramétrique de l'hélicoptère qui sera soumis à l'identification.

CHAPITRE 4

MODÈLE PARAMÉTRIQUE

Tout d'abord, l'hélicoptère est considéré comme un corps rigide dont les équations du mouvement sont régies par les lois de Newton-Euler. Par la suite, la mobilité de l'hélice par rapport au reste du véhicule est considérée. Étant donné que l'hélicoptère est un véhicule aérien, l'aérodynamique a été utilisée pour déterminer les forces appliquées. Finalement, les spécificités inhérentes au modèle réduit de l'hélicoptère viendront compléter le modèle paramétrique de l'hélicoptère.

4.1 Définition des repères

L'hélicoptère est considéré comme un solide rigide disposant de six degrés de liberté ; ces degrés se définissant comme les trois translations et les trois rotations possibles dans l'espace. Trois repères seront utilisés pour étudier la dynamique de l'hélicoptère. Pour utiliser les lois de la mécanique classique, il est important de disposer d'un repère galiléen. Pour définir un tel repère, il est important de préciser deux hypothèses :

- la durée de l'expérience étant réduite (une dizaine de minutes), la Terre est supposée fixe pendant toute l'expérience.
- l'expérience couvrant un espace réduit (une centaine de mètres carrés), la Terre est supposée plate.

À partir de ces hypothèses, le repère Terrestre-fixe est défini comme suit :

- l'origine est un point fixe de la Terre
- l'axe x est choisi arbitrairement tangent à la couche terrestre
- l'axe z est choisi vertical orienté vers le bas
- l'axe y est également tangent à la couche terrestre et orienté de façon à obtenir un trièdre droit.

Ce repère est utilisé comme référence et supposé galiléen, donc propre à l'usage des lois de la mécanique classique.

Pour évaluer les forces s'exerçant sur le véhicule, un deuxième repère est défini, le repère Véhicule présenté à la figure 4.1. Il se définit comme suit :

- l'origine est le centre de gravité du véhicule
- l'axe x pointe vers le nez de l'hélicoptère dans le plan symétrique du véhicule
- l'axe y pointe vers la droite de l'hélicoptère

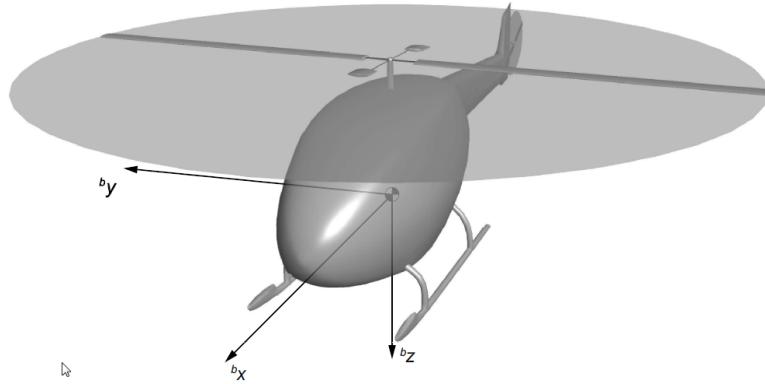


Figure 4.1 Repère lié au véhicule

– l'axe z pointe vers le fond du véhicule pour former un trièdre droit.

Ce repère est lié au véhicule. En effet les forces générant le mouvement de l'hélicoptère se trouvent liés au mobile ; il est donc plus aisé de les exprimer dans un tel repère.

Finalement pour assurer la transition entre ces deux premiers repères, un troisième est défini comme étant spatial. Ce repère s'oriente tout comme le repère Terre mais son origine est le centre de gravité de l'hélicoptère. Ce repère est défini pour assurer une cohérence au niveau de l'orientation du véhicule tout au long de l'expérience. Pour simplifier l'expérience, au début de la simulation, les choix arbitraires du repère Terre s'appuient sur la position de l'hélicoptère au démarrage. Ainsi les orientations des repères s'alignent parfaitement au démarrage.

4.2 Modèle mathématique

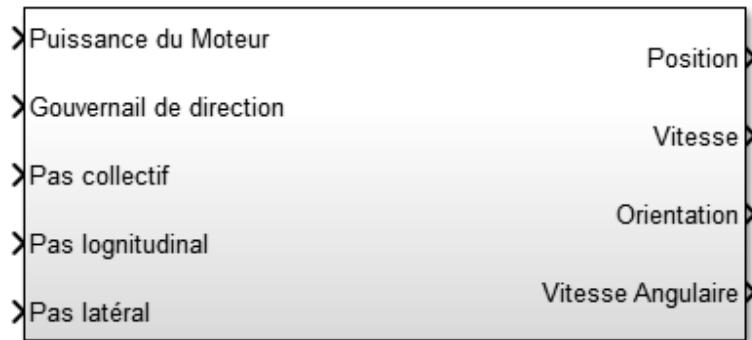


Figure 4.2 Schéma-bloc du modèle mathématique de l'hélicoptère

la figure 4.2 présente les entrées et les sorties du modèle de l'hélicoptère. Pour mieux étayer le modèle de l'hélicoptère, il a été subdivisé en sous-blocs. Cette division du modèle

suit d'une part les entités physiques qui régissent le mouvement de l'hélicoptère et d'autre part les changements de repère pour rendre possibles l'application des lois de la mécanique classique. La figure 4.3 présente cette subdivision du modèle. Le modèle mathématique se

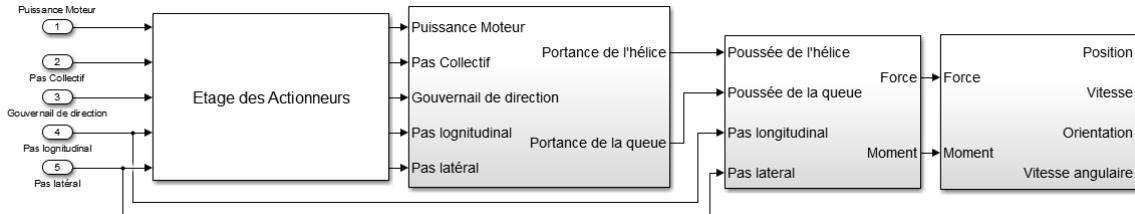


Figure 4.3 Schéma-bloc du modèle mathématique de l'hélicoptère

décompose en quatre parties :

- le premier bloc est le plateau cyclique qui est l'élément central du contrôle de l'hélicoptère
- le deuxième bloc illustre la génération des forces aérodynamiques mises en jeu au niveau de l'hélicoptère
- le troisième bloc détaille la répartition de la poussée sur les différents axes et la génération des différents couples sur l'engin. Il explicite l'expression des forces aérodynamiques dans le repère véhicule.
- le quatrième bloc présente les équations de mouvement d'un solide rigide dans l'espace

4.2.1 Équations d'un corps rigide

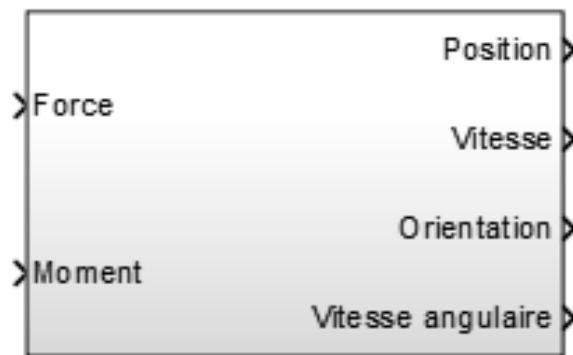


Figure 4.4 Schéma-bloc des équations d'un corps rigide

Ce paragraphe détaille la dynamique de l'hélicoptère. Le véhicule est considéré comme un corps rigide dans l'espace pour l'application des lois de la dynamique. Pour ce faire, une

transition est faite entre le repère véhicule et le repère inertiel dans lequel les lois de la mécanique classique. Les forces et les couples qui s'appliquent au véhicule sont généralement présentés dans le repère *Véhicule* ; ce repère étant mobile, les lois de Newton ne pourraient pas s'y appliquer. Il incombe de les ramener dans le repère inertiel adéquat où les lois de la mécanique classique sont satisfaites. Cette transformation se fait au moyen de la matrice de rotation introduite plutôt pour la transformation du poids. Après cette transformation, les lois de Newton sont appliquées pour établir le lien entre la force et le couple d'une part et les accélérations et les vitesses qui décrivent la dynamique du véhicule. D'autre part, la matrice de rotation sera présentée ; ensuite l'application de cette matrice de rotation aux différentes forces s'exerçant sur le véhicule et enfin les lois de la mécanique classique (Euler et Newton) seront appliquées au solide rigide qu'est l'hélicoptère.

Matrices de rotation et angles d'Euler

La rotation autour de l'axe x (axe longitudinal) induit un mouvement de roulis donc l'angle de rotation est ϕ et la matrice de rotation est :

$$C_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La rotation autour de l'axe y (axe latéral) induit un mouvement de tangage donc l'angle de rotation est θ et la matrice de rotation est :

$$C_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

La rotation autour de l'axe z (axe vertical) induit un mouvement de lacet donc l'angle de rotation est ψ :

$$C_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Ces différentes rotations sont utilisées pour les transformations entre le repère Véhicule et le repère inertiel. La séquence des rotations est définie comme $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$ et donne lieu à

la matrice :

$$R(\Theta) = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & c(\theta)s(\psi) & -s(\theta) \\ s(\phi)s(\theta)c(\psi) - c(\phi)s(\psi) & s(\phi)s(\theta)c(\psi) + c(\phi)c(\psi) & s(\phi)c(\theta) \\ c(\phi)s(\theta)c(\psi) + s(\phi)s(\psi) & c(\phi)s(\theta)s(\psi) - s(\phi)c(\psi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

où $c(\alpha) = \cos(\alpha)$, $s(\alpha) = \sin(\alpha)$ et $\alpha \in \{\theta, \phi, \psi\}$

Cette matrice de rotation permet la transformation du repère spatial au repère véhicule.

Vitesses angulaires

La vitesse angulaire du véhicule par rapport au repère inertiel est utile dans l'expression des mouvements de rotation. Dans l'analyse du modèle, la vitesse angulaire du véhicule est exprimée de deux façons différentes ; ces deux notations sont justifiées par les deux repères de travail : le repère Véhicule et le repère Spatial. La représentation de la vitesse angulaire

dans le repère inertiel est notée $\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$; cette dernière représentation est utile pour évaluer

l'orientation du véhicule, les angles d'Euler. La seconde représentation, notée ω est celle fournie par les capteurs fixés sur le véhicule et représente la projection de la vitesse angulaire dans le repère Véhicule. La relation entre ces deux expressions est décrite dans Bak (2002) comme étant :

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_x(\Phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + C_x(\Phi)C_y(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

D'où

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \dot{\Theta} \Leftrightarrow \dot{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi)\tan(\theta) & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \frac{-\sin(\phi)}{\cos(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{bmatrix} \omega \quad (4.5)$$

Lois de Newton et accélérations linéaires

Pour déterminer la dynamique de l'hélicoptère, il est important de considérer le principe fondamental de la dynamique qui stipule que :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

où $\sum \vec{F}$ désigne la résultante des forces appliquées sur le véhicule, m la masse du véhicule et \vec{a} l'accélération du véhicule. Cette loi s'applique dans un repère galiléen. Le repère terrestre est considéré comme galiléen. Étant donné le fait que l'étude de la dynamique de l'hélicoptère implique plusieurs repères, il sera utile de rappeler le théorème du changement de base d'une dérivée vectorielle qui se formule comme suit :

$$\left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_{R_1} + \Omega_{R/R_1} \wedge \vec{V},$$

où \vec{V} est le vecteur à dériver et Ω_{R/R_1} est la vitesse angulaire entre les deux bases. En considérant que le principe fondamental de la dynamique n'est applicable que dans un repère inertiel alors l'accélération sera considérée dans le repère terrestre. À partir du principe fondamental, on obtient l'accélération dans le repère Terre, cette accélération n'est autre que la dérivée du vecteur vitesse dans le repère Terre. Ceci se traduit par les équations suivantes :

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F} = \frac{d\vec{V}}{dt}_T$$

Par le changement de base pour la dérivée d'un vecteur ici le vecteur \vec{V} , on obtient que :

$$\frac{d\vec{V}}{dt}_T = \frac{d\vec{V}}{dt}_V + \omega_{E/V} \wedge \vec{V}_V$$

En combinant les deux équations, il résulte que :

$$\frac{d\vec{V}}{dt}_V = \frac{1}{m} \vec{F} - \omega_{E/V} \wedge \vec{V}_V. \quad (4.6)$$

Équations des mouvements en rotation et Accélérations angulaires

Les équations des mouvements en rotation sont déterminées en appliquant au principe de conservation du moment angulaire. En effet le principe de conservation du moment angulaire stipule que :

$$\tau = \dot{\vec{H}},$$

où τ désigne l'ensemble des moments externes s'appliquant sur le véhicule et \vec{H} est le moment angulaire du véhicule. Cette relation est valable dans un repère inertiel. Pour ce faire, il est important de rappeler le changement de base pour la dérivée du vecteur \vec{H} ,

$$\dot{\vec{H}} = \frac{d\vec{H}}{dt}_T = \frac{d\vec{H}}{dt}_V + \omega_{E/V} \vec{V}_V.$$

Par ailleurs, $\vec{H} = I\omega$, où I est la matrice d'inertie. En combinant ces deux équations, il résulte que :

$$\tau = \frac{dI}{dt} \omega + I \frac{d\omega}{dt} + \omega I \omega.$$

Le corps étant rigide, I est constant alors

$$\dot{\omega} = I^{-1} (\tau - \omega I \omega) \quad (4.7)$$

4.2.2 Forces et Couples

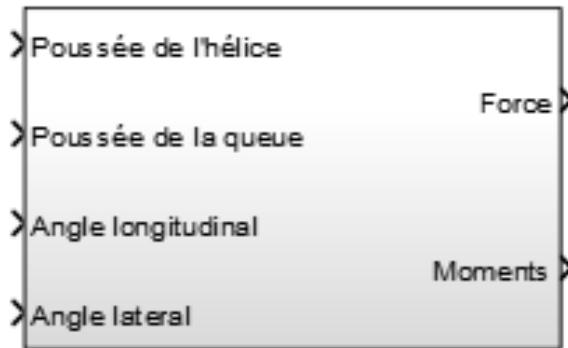


Figure 4.5 Schéma-bloc des Forces et des Couples

Ce bloc résume la distribution des différentes forces sur les différents axes du véhicule. Pour ce faire, il est important d'énumérer les principales forces qui s'appliquent sur le véhicule :

- la portance de l'hélice principale T_{mr}
- la portance du rotor de queue T_{tr}
- le poids de l'appareil P

Pour une meilleure clarté, la contribution de chaque force est présentée.

Contribution de la portance de l'hélice principale T_{mr}

Comme l'indique la figure 4.15, l'inclinaison du disque de l'hélice distribue la portance sur les différents axes du véhicule. Cette distribution obéit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} f_{x,mr} = -T_{mr} \sin(\beta_{1c}) \\ f_{y,mr} = T_{mr} \sin(\beta_{1s}) \\ f_{z,mr} = -T_{mr} \cos(\beta_{1s}) \cos(\beta_{1c}) \end{cases} \quad (4.8)$$

Une fois les différentes composantes de la portance identifiées, il est possible de déterminer le couple exercé par l'hélice principale. Le centre d'application de la portance est le centre de l'hélice principale. L'expression du couple dépendant de la distance de la force par rapport au centre de gravité, les coordonnées des différents centres d'application sont exprimés par rapport au centre de gravité. Soit le centre d'application I_{mr} défini comme suit

$$\begin{pmatrix} x_{mr} \\ y_{mr} \\ z_{mr} \end{pmatrix}$$

L'expression du couple généré par T_{mr} est τ_{mr} :

$$\tau_{mr} = \begin{bmatrix} f_{y,mr}z_{mr} + f_{z,mr}y_{mr} \\ f_{x,mr}z_{mr} + f_{z,mr}x_{mr} \\ f_{x,mr}y_{mr} + f_{y,mr}x_{mr} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Contribution de la portance du rotor de queue T_{tr}

S'agissant du rotor de queue, le plan de l'hélice de queue étant solidaire de l'hélicoptère, seule la composante suivant l'axe latéral est non nulle.

$$\begin{cases} f_{x,tr} = 0 \\ f_{y,tr} = T_{tr} \\ f_{z,tr} = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Le centre d'application de la portance, I_{tr} $\begin{pmatrix} x_{tr} \\ y_{tr} \\ z_{tr} \end{pmatrix}$ est le centre de l'hélice. L'expression du couple généré par T_{tr} est τ_{tr} :

$$\tau_{tr} = \begin{bmatrix} f_{y,tr}z_{tr} \\ 0 \\ f_{y,tr}x_{tr} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Contribution du poids

Le poids étant une force inertielle s'exprimant dans le repère inertiel, la matrice de transformation est appliquée pour obtenir la contribution du poids aux divers axes du véhicule d'où :

$$\begin{cases} f_{x,P} = -mg \sin(\theta) \\ f_{y,P} = mg \sin(\phi) \cos(\theta) \\ f_{z,P} = mg \cos(\phi) \cos(\theta) \end{cases} \quad (4.12)$$

Le poids s'appliquant au centre de gravité, il ne génère aucun couple.

Analyse et Commentaires

Dans cette partie, les forces de traînée ont été volontairement négligées. Cette considération est motivée par deux raisons :

- l'effet de la traînée est négligeable en vol stationnaire
- la traînée est un effet indésirable de la génération de la portance donc une perturbation. Si la traînée découle de la génération de la portance, son effet sera considéré dans l'analyse comme perturbateur. Il incombera donc au contrôle de palier à cette perturbation.

4.2.3 Génération de la portance

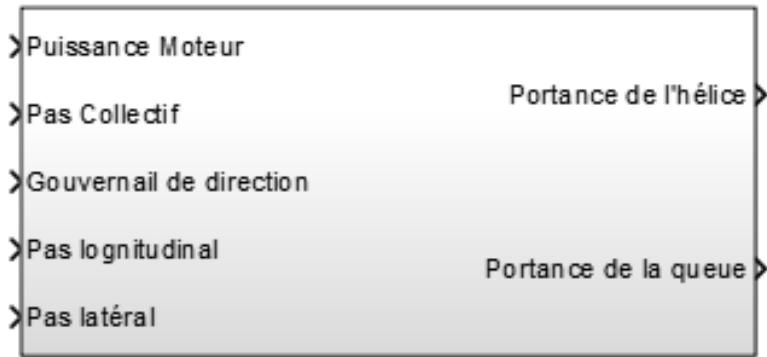


Figure 4.6 Schéma-bloc de la génération de la portance

Expression de la portance de l'hélice principale

Cette partie se concentre sur la génération de la portance. Le mouvement relatif d'un solide dans un fluide génère une force aérodynamique. Dans le cadre de l'hélicoptère, le fluide est l'air et le solide est l'hélice principale. La force aérodynamique générée se décompose comme le présente la figure 4.7. La traînée est la composante horizontale de la force qui s'oppose au mouvement de l'hélice. La portance est la composante verticale de cette force qui s'oppose au centre de gravité. D'après Heffley et Mnich (1988), la génération de la portance est décrite par l'équation suivante :

$$T_{mr} = (w_b - v_i) \frac{\rho \Omega R^2 a B c}{4}, \quad (4.13)$$

où

- ρ la densité de l'air,

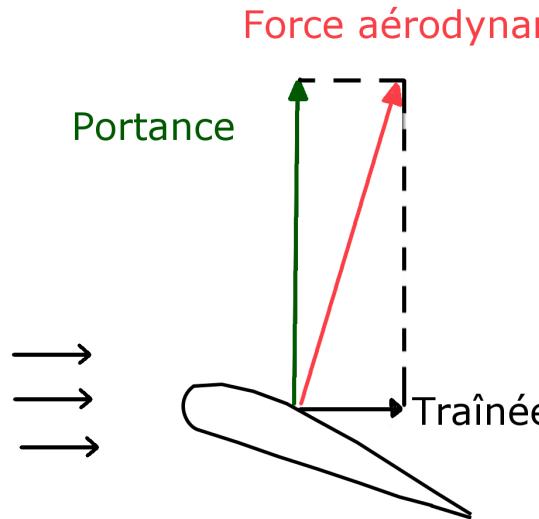


Figure 4.7 Force aérodynamique

- Ω la vitesse angulaire du rotor,
- R est le rayon de l'hélice,
- a le gradient de la portance,
- B le nombre de pales de l'hélice,
- c la corde de l'hélice,
- w_b est la vitesse de l'hélice relative à l'air et
- v_i est la vitesse induite par le déplacement de l'hélice par rapport au fluide.

La vitesse de l'hélice relative à l'air, w_b est définie comme suit :

$$w_b = w_r + \frac{2}{3}\Omega R \beta_c + \frac{3}{4}\theta_{twist}, \quad (4.14)$$

$$w_r = w + (\beta_{1c} + i_s)u - \beta_{1s}v, \quad (4.15)$$

$$\hat{v}^2 = u^2 + v^2 + w_r(w_r - 2v_i), \quad (4.16)$$

$$A = \pi R^2, \quad (4.17)$$

où

- u, v, w sont les vitesses en translation,

- w_r est la composante de w_b due aux mouvements en translation dans l'espace,
- θ_{twist} est un paramètre qui traduit la torsion de la pale,
- les angles β_{1c} , β_{1s} et i_s traduisent les inclinaisons du plan de l'hélice.

La vitesse induite v_i est définie comme suit :

$$v_i = \sqrt{\left(\frac{\hat{v}^2}{2}\right)^2 + \frac{T_{mr}}{2\rho A} - \hat{v}^2/2}. \quad (4.18)$$

Cette définition suggère une évaluation récursive de la portance puisque v_i , la vitesse induite est produite par la portance et sert également à évaluer cette portance.

Analyse pour la simplification de l'expression de la portance

L'étude portant sur le vol stationnaire de l'hélicoptère, le vecteur vitesse V est considéré comme nul. En ce qui concerne les pales de l'hélice principale, θ_{twist} est nul. En tenant compte de ces hypothèses, l'expression de la vitesse induite est :

$$v_i = \sqrt{\frac{T_{mr}}{2\rho A}}. \quad (4.19)$$

Et la vitesse de l'hélice par rapport à l'air est :

$$w_b = \frac{2}{3}\Omega R\beta_c. \quad (4.20)$$

Alors l'expression simplifiée de la portance de l'hélice principale en vol stationnaire est :

$$T_{mr} = \left(\frac{2}{3}\Omega R\beta_c - \sqrt{\frac{T_{mrold}}{2\rho A}}\right) \frac{\rho\Omega R^2 a B c}{4} \quad (4.21)$$

Analyse et considérations pratiques

De tous les paramètres cités, a le gradient de portance nécessite des essais en soufflerie. Ce gradient dépend généralement du profil de la pale de l'hélice principale. Ω la vitesse angulaire de l'hélice est constante. Pour maintenir cette vitesse constante, un couplage est fait entre la puissance fournie par le moteur et l'angle de pas collectif β_c . Lorsque l'angle d'attaque augmente, la résistance de l'air sur la pale augmente et la vitesse angulaire de l'hélice diminue. L'entrée Puissance du moteur indiquée à la figure 4.6, est utilisée pour maintenir la vitesse angulaire de l'hélice. Étant donné ce couplage entre le pas collectif et la puissance du moteur, l'entrée de la puissance du moteur sera ignorée et la vitesse angulaire de l'hélice sera considérée comme constante.

Expression de la poussée de l'hélice de queue

De façon similaire, la portance exercée par le rotor de queue, T_{tr} peut être estimée mais les simplifications au niveau de la poussée de la queue sont d'un autre ordre étant donné le plan de rotation de l'hélice de queue.

$$T_{tr} = (w_b - v_i) \frac{\rho \Omega R_{tr}^2 a_{tr} B c_{tr}}{4}, \quad (4.22)$$

où ρ la densité de l'air, Ω la vitesse angulaire du rotor, R est le rayon de l'hélice, a le gradient de la portance, B le nombre de pales de l'hélice, c la corde de l'hélice, w_b est la vitesse de l'hélice relative à l'air et v_i est la vitesse induite par le déplacement de l'hélice sur le fluide. La vitesse de l'hélice relative à l'air, w_b est définie comme suit :

$$w_b = w_r + \frac{2}{3} \Omega_{tr} R_{tr} \beta_p, \quad (4.23)$$

$$w_r = v_a + r l_t + p h_t, \quad (4.24)$$

$$\hat{v}_{tr}^2 = (w_a + q l_t)^2 + u_a^2 + w_r (w_r - 2v_i), \quad (4.25)$$

$$A = \pi R^2, \quad (4.26)$$

où

- u, v, w sont les projections sur les axes de l'hélicoptère de la vitesse de translation,
- w_r est la composante de w_b due aux mouvements en translation dans l'espace,
- θ_{twist} est un paramètre qui traduit la torsion de la pale.
- les angles β_{1c}, β_{1s} et i_s traduisent les inclinaisons du plan de l'hélice.

La vitesse induite v_i est définie comme suit :

$$v_i = \sqrt{\left(\frac{\hat{v}_{tr}^2}{2}\right)^2 + \frac{T_{tr}}{2\rho A} - \hat{v}_{tr}^2/2} \quad (4.27)$$

Cette définition suggère une évaluation récursive de la portance puisque v_i , la vitesse induite est produite par la portance et sert également à évaluer cette portance.

Analyse et considérations pratiques

Dans le cadre de la présente étude, le mouvement en lacet de l'hélicoptère est négligé. Aussi l'identification des paramètres liés à cette dynamique n'est pas couverte.

La présentation du modèle se termine par la présentation des paramètres spécifiques au type d'hélicoptère choisi. Ces paramètres seront présentés au cours de la description de

l'hélicoptère.

4.2.4 Hélicoptère T-REX 550e

Dans le cadre de la réalisation du banc de tests, il a fallu choisir un modèle réduit d'hélicoptère. L'hélicoptère choisi est le *T-REX 550e* présenté à la figure 4.8. C'est un hélicoptère réduit radiocommandé de la compagnie Align.



Figure 4.8 Hélicoptère *T-REX 550e*

Critères de choix

Le choix a été motivé par les critères suivants :

- le type de motorisation : La motorisation électrique est choisie pour le vol intérieur. L'absence de gaz d'échappement limite l'impact environnemental. L'autre raison est la variation du centre de gravité. Le moteur étant alimenté par des piles électriques, le véhicule ne subit aucune variation du poids au cours du vol.

- la charge utile du véhicule : étant donné le système embarqué à bord du véhicule, la charge utile a été utilisée pour sélectionner le véhicule. La charge utile a été estimée à 750 g. Le *T-REX 550e* a une charge utile de 1 kg.
- l'agilité du véhicule : les modèles réduits permettent d'implémenter le vol 3D. Le vol 3D permet à l'hélicoptère d'effectuer les figures acrobatiques et de disposer des angles roulis et de tangage au-delà de 90 degrés. Le *T-REX 550e* est capable du vol 3D. Cette propriété permettra d'élargir les types de commande de vol envisageables avec la plateforme actuelle.

Actionneurs de l'hélicoptère

Les actionneurs de l'hélicoptère sont des servomoteurs électriques présentés à la figure 4.10. Ce sont des servomoteurs digitaux par opposition aux servomoteurs analogiques qui reçoivent directement un courant continu. Le servomoteur digital est un moteur qui convertit le signal *PWM* en position angulaire. Le signal *PWM* est présenté à la figure 4.9

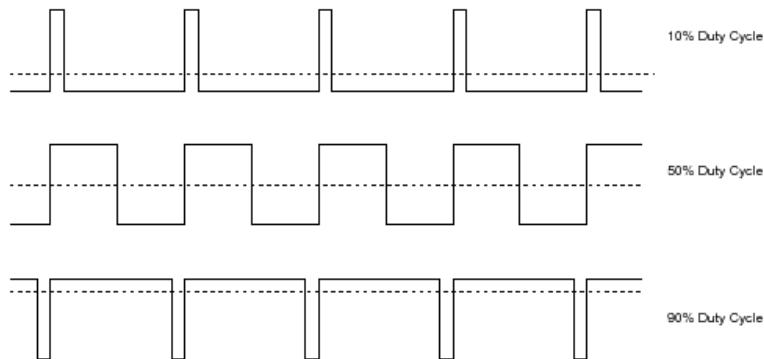


Figure 4.9 Signal *PWM* avec différents rapports cycliques

Le servomoteur digital est composé des parties suivantes :

- le contrôleur : c'est un circuit électrique qui reçoit la commande généralement un signal *PWM*, la convertit en courant *DC*. Cette commande est comparée avec la position mesurée par le capteur de position et fournit la commande adéquate au moteur. La conversion du signal *PWM* en courant continu se fait au moyen d'un filtre passe-bas.
- le moteur : il s'agit d'un moteur *DC* sans balai. Il convertit le courant *DC* reçu du contrôleur en déplacement mécanique vers la position désirée. Ce moteur dispose d'un système d'engrenages pour modifier la vitesse et le couple du servomoteur. Le moteur *DC* est approximé par une fonction de transfert du premier ordre parce que la dynamique électrique est négligeable par rapport à la dynamique mécanique du moteur.

- le capteur de position : il mesure la position angulaire. Il s'agit généralement d'un potentiomètre donc s'approxime par un gain dans la boucle de retour de la position.

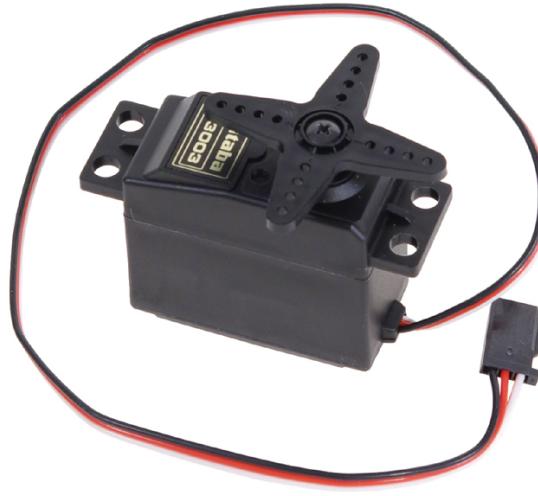


Figure 4.10 Servomoteur

Plateau cyclique du *T-REX 550e*



Figure 4.11 Schéma-bloc du plateau cyclique

Description Le plateau cyclique est l'élément essentiel de l'hélicoptère puisqu'il réunit en son sein le pas collectif, le pas cyclique latéral et le pas cyclique longitudinal. Le plateau cyclique (figure 4.12) est le mécanisme utilisé pour l'inclinaison des pales et l'inclinaison du plan de rotation de l'hélice. En fait, c'est un plateau qui coulisse le long de l'axe central de l'hélice et il peut en même temps osciller dans tous les sens autour d'une rotule. Ce sont ces oscillations, commandées par le pilote au moyen du manche cyclique, qui sont à la base de

la variation cyclique du pas. Cette dernière est utilisée pour contrôler la direction de la force aérodynamique et par extension la portance T_{mr} . Le changement de direction de la portance permet à l'hélicoptère de se mouvoir horizontalement. La variation de l'angle d'incidence des pales est liée à l'action du pas collectif. Elle permet de modifier l'amplitude de la portance de l'hélice principale. La portance étant en tout temps perpendiculaire au plan formé par la circonvolution des pales, la variation de son amplitude fait monter ou descendre le véhicule. Le plateau cyclique influence donc l'amplitude et l'orientation de la poussée principale T_{mr} .

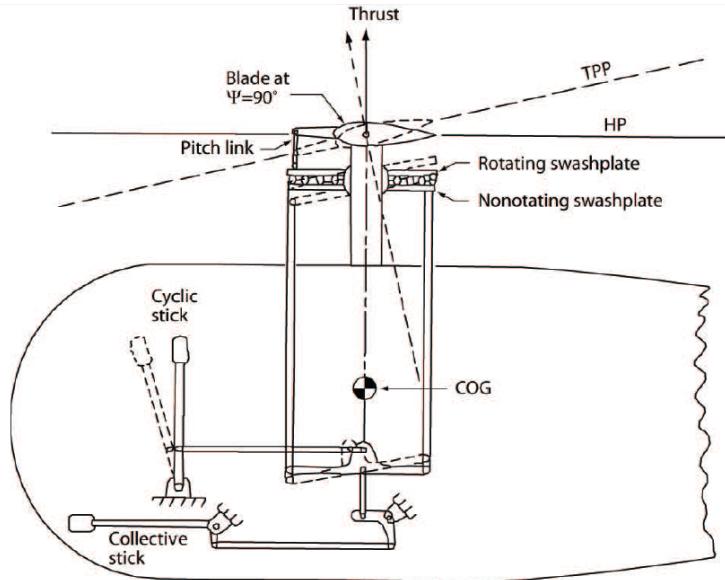


Figure 4.12 Le plateau cyclique

Analyses et considérations pratiques Le plateau cyclique est conçu diversement d'un hélicoptère à un autre ; ce fait explique qu'il n'est pas souvent décrit dans la littérature et inclus dans les modèles d'hélicoptère réduits. Dans le développement d'un modèle précis, il est judicieux de décrire le plateau cyclique du modèle réduit parce qu'il permet de mieux cerner le couplage entre les différents contrôles de l'hélicoptère. De par sa conception, l'hélicoptère impose un couplage des différents actionneurs dans la réalisation de ces différentes missions. Ce couplage se retrouve au niveau du plateau cyclique qui contrôle les mouvements en altitude et en attitude de l'hélice principale. Par ailleurs, il faut rappeler que les actionneurs du plateau cyclique étant des servomoteurs, le plateau cyclique induit une constante de temps dans la commande ; pour ce faire il doit être pris en compte pour la précision de la commande. Le plateau cyclique de l'hélicoptère est présenté à la figure 4.13. Il est mû par trois servomoteurs chacun disposé au sommet d'un triangle équilatéral ; ce qui explique les trois entrées représentées par Servomoteur1, Servomoteur2 et Servomoteur3. La disposition



Figure 4.13 Plateau cyclique du T-REX 550e

des servomoteurs actionnant le plateau cyclique est présentée à la figure 4.14

Par leurs différentes actions les servomoteurs inclinent le plan de l'hélice ; ces différentes inclinaisons sont présentées à la figure 4.15

Analyse de la géométrie du plateau cyclique L'action des servomoteurs sur le plateau cyclique tel que décrit est fortement couplée. Le couplage est dû au fait que les mêmes actionneurs sont utilisés pour induire les différentes rotations à l'hélice. Pour mieux expliquer la genèse de ces rotations, une notation est introduite. Cette notation s'inspire du fait que les inclinaisons de l'hélice impliquent des différences de hauteur entre les différents actionneurs. Ainsi une différence de hauteurs entre les servomoteurs 1 et 2 sera notée $\delta_{1/2}$

Mouvement de roulis de l'hélice Pour le roulis de l'hélice seuls les servomoteurs 2 et 3 sont sollicités, le servomoteur 1 étant situé sur l'axe longitudinal. Pour imprimer un mouvement de roulis à l'hélice, il faut une élévation au niveau du servomoteur 2 et un abaissement au niveau du servomoteur 3. Pour éviter les contraintes sur la structure, les changements de niveau de part et d'autre seront considérés comme égaux. Soit δ_r cette variation de hauteur qui est définie comme suit si β_r l'inclinaison latérale de l'hélice :

$$\delta_r = \frac{d}{2} \tan(\beta_r), \quad (4.28)$$

et d est le côté du triangle équilatéral ayant à ses sommets les trois servomoteurs

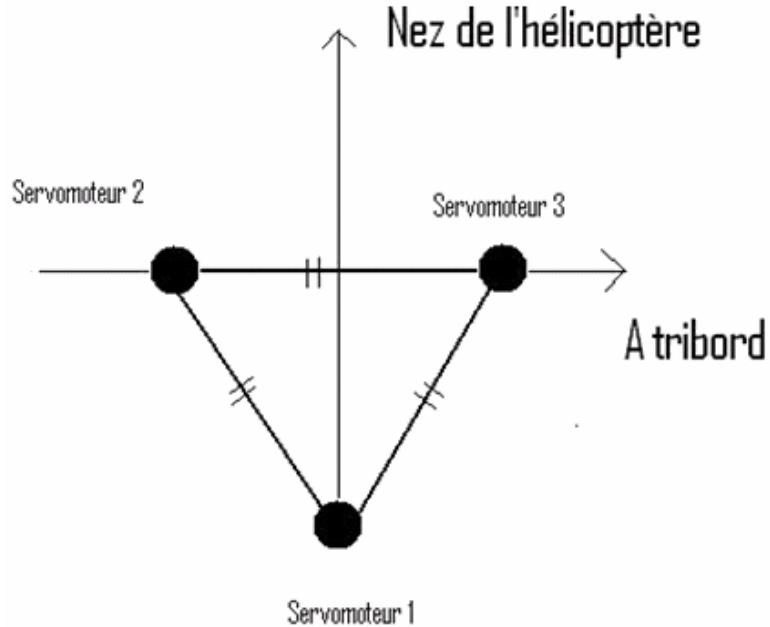


Figure 4.14 Localisation des servomoteurs du plateau cyclique

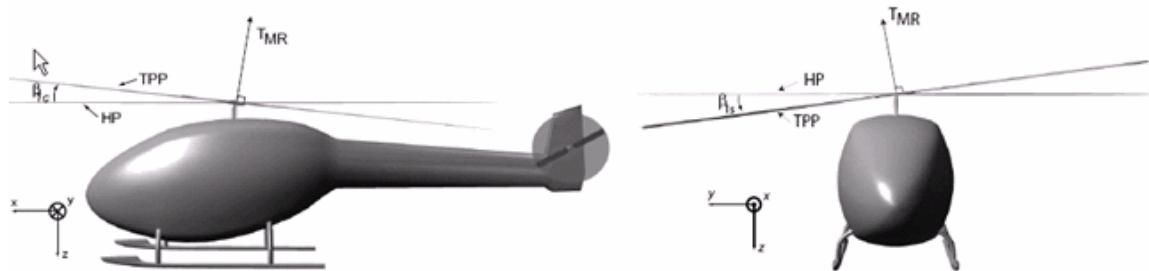


Figure 4.15 Inclinaisons du plan de l'hélice

Mouvement de tangage de l'hélice Pour le tangage de l'hélice tous les servomoteurs sont utilisés. Pour imprimer un mouvement de tangage à l'hélice, il faut une élévation au niveau du servomoteur 1 et un abaissement simultané au niveau des servomoteurs 2 et 3. Pour éviter les contraintes sur la structure, les changements de niveau de part et d'autre seront considérés comme égaux. Soit δ_t cette variation de hauteur qui est définie comme suit si β_t l'inclinaison longitudinale de l'hélice :

$$\delta_t = \frac{d\sqrt{3}}{4} \tan(\beta_t), \quad (4.29)$$

et d est le côté du triangle équilatéral ayant à ses sommets les trois servomoteurs

Mouvement d’élévation de l’hélice Pour l’élévation ou l’abaissement de l’hélice, tous les servomoteurs sont utilisés. Cette variation du plateau de l’hélice produit une variation de l’angle d’attaque de l’hélice et donc une variation de l’amplitude de la portance. Pour produire une telle variation, tous les servomoteurs sont mis à contribution de façon égale. Si δ_c est la variation en hauteur induit par chaque servomoteur et β_c l’angle du pas collectif.

$$\delta_c = k_1\beta_c + k_2, \quad (4.30)$$

où k_1 et k_2 sont des constantes déterminées expérimentalement.

Analyse dynamique du plateau cyclique Au préalable nous avons vu que le plateau cyclique induisait un couplage entre les pas cycliques et le pas collectif. Il convient de rappeler que toutes les actions du plateau cyclique s’effectuent sur un disque en mouvement. L’analyse précédente considère le disque du rotor comme un disque statique. A ce niveau, la vitesse du rotor est prise en compte d’où le caractère dynamique de l’analyse. Considérant que le disque du rotor en mouvement, il existe une constante de temps entre l’action réelle du pilote et l’inclinaison du plan de l’hélice.

4.2.5 Analyse du modèle

L’analyse du modèle se fera en considérant les différents modes de vol de l’hélicoptère. L’étude de la mécanique du vol de l’hélicoptère peut décomposer le déplacement du véhicule en plusieurs phases que sont :

- le vol stationnaire : c’est la phase de vol où la force de sustentation de l’hélicoptère annule le poids du véhicule. De façon vectorielle, cela se traduit par une force aérodynamique ayant la même direction et la même intensité que le poids. Dans ce mode, l’altitude est constante et les vitesses de translation sont nulles.
- le vol vertical : c’est la phase de vol où la force aérodynamique conserve la même direction que le poids mais une intensité différente. Cette différence d’intensité se traduit par un mouvement ascendant ou descendant. Ce mode se traduit par une changement de l’altitude tout en limitant les déplacements horizontaux.
- le vol en palier : c’est un mode de vol où la direction de la force aérodynamique est différente de celle du poids. Ce changement de direction est possible par le plateau cyclique qui imprime des inclinaisons au plan de l’hélice.

La présente étude portera sur le mode de vol stationnaire.

Par ailleurs, la subdivision du modèle a permis de distinguer deux sources principales de force au niveau des équations de portance : l’hélice principale et l’hélice de la queue. Dans

la conception des modèles réduits d'hélicoptère, ces deux sources de force ont inspiré deux mécanismes de stabilisation que sont :

- l'hélice stabilisante présente au niveau du plateau cyclique : elle est disposée en angle droit par rapport à l'hélice principale et permet de maintenir l'horizon lors des rafales de vent.
- le gyromètre compensateur présent au niveau du rotor de queue : ce gyromètre permet de compenser l'effet gyroscopique issu du mouvement de l'hélice principale. Il modifie l'angle des pales de l'hélice de queue en fonction de la vitesse de l'hélice

Considérant le *T – REX 550e* utilisé pour l'étude, l'hélice stabilisante est remplacée par un dispositif numérique mais le principe est identique. Ce détail de conception des hélicoptères réduits illustrent la possibilité de traiter indépendamment les différentes entrées du système. La présente étude se concentre sur la stabilisation de l'assiette de l'hélicoptère en vol stationnaire. Dans le cadre de l'étude, certaines simplifications du modèle sont possibles. Les hypothèses suivantes seront prises en compte :

- le lacet (ψ) sera considéré comme fixe donc la vitesse angulaire (r) autour l'axe z est considérée comme nulle.
- l'altitude(z) est supposée fixe donc la vitesse suivant l'axe z (w) est nulle.

Considérant ces hypothèses, le système décrivant le mouvement de l'hélicoptère se trouve réduit. Ainsi les nouvelles entrées du système sont :

- le pas latéral
- le pas longitudinal
- le pas collectif

Les sorties à prendre en compte sont :

- le tangage et le roulis pour les angles
- les vitesses angulaires suivant les axes x , y .

Notons ici l'absence de la vitesse et de l'accélération linéaires parmi les sorties. Cette absence est justifiée par le fait que l'étude porte sur l'assiette de l'hélicoptère, la position se trouve secondaire. Bien entendu ces variables du modèle ne sont pas exclues du modèle mais feront partie de la dynamique interne du système. Ce fait s'explique par le couplage des commandes au niveau de l'hélicoptère. En effet une variation du pas longitudinal ou du pas latéral induit une variation d'altitude donc une vitesse suivant l'axe z .

Notons ici la présence du pas collectif parmi les entrées du modèle. Le pas collectif a été présenté comme l'entrée modulant l'amplitude de la portance et *a priori* dans le cadre du vol stationnaire, elle devrait demeurer constante. Dans le cas de certains modèles réduits d'hélicoptère, c'est souvent le cas lorsque la variation de l'amplitude de la portance peut se faire à travers des hélices stabilisantes ; tel n'est pas le cas de l'hélicoptère de l'expérience.

La modulation de l'amplitude est de façon numérique au moyen d'un contrôleur numérique qui modifie la valeur du pas collectif en fonction de l'inclinaison. Ceci justifie l'inclusion du pas collectif comme entrée du modèle mathématique simplifié. Aussi l'examen du modèle de l'hélicoptère devra inclure l'identification du contrôleur numérique pour garantir la stabilité. Les hypothèses posées au cours de cette analyse serviront de base pour la linéarisation du modèle une fois les paramètres du modèle non linéaire identifié. Il est important de rapporter que les simplifications faites pour aboutir au modèle à deux degrés de liberté actuel seront revues au cours de l'identification du modèle. L'hélicoptère considéré étant réel, certains phénomènes négligés au cours de la simplification du modèle ont réellement un impact sur la position stationnaire de l'hélicoptère.

CHAPITRE 5

INTSTRUMENTATION EMBARQUÉE

Une fois le modèle paramétrique obtenu, il est nécessaire d'identifier les paramètres du système. Pour ce faire, l'instrumentation a été conçue pour mesurer les variables dynamiques du système. Cette partie présentera le système embarqué à bord de l'hélicoptère pour faire les mesures adéquates. Le fil conducteur de cette partie sera l'identification des principaux paramètres du modèle. En effet, on distingue dans la présentation du modèle trois types de données au niveau du modèle paramétrique que sont les entrées, les variables d'état et les sorties qui sont des combinaisons des variables d'état. Aussi pour identifier le modèle de l'hélicoptère, il a fallu mesurer les différents types de données. Tout d'abord, l'instrument utilisé pour mesurer les entrées du système : le contrôleur des servomoteurs. Ensuite la centrale惯uelle utilisée pour mesurer les variables d'état sera décrite. Enfin l'ordinateur embarqué et le logiciel utilisés pour interfaçer les différentes cartes seront présentés.

5.1 Contrôleur des servomoteurs

5.1.1 Utilité du matériel

Les servomoteurs sont les actionneurs du véhicule. Par leurs différentes positions, ils permettent d'imprimer les inclinaisons nécessaires aux hélices. La carte d'acquisition est le point d'entrée (en phase de lecture) et de sortie (en phase d'écriture) vers les actionneurs du système. Cette carte permet de mesurer les entrées du modèle théorique. Lors de la phase d'essais en vol, la carte d'acquisition se comporte en *man-in-the-middle*. Le *man-in-the-middle* est une technique de *hacking* qui permet de s'insérer dans une communication entre deux tierces parties. Pour que l'insertion soit discrète, il faut être en mesure de décrypter et d'encrypter les messages sans porter préjudice à la communication. Dans le cadre de l'étude, il s'agissait de ne pas retarder l'application des commandes sur l'hélicoptère pour ne pas modifier le pilotage de l'hélicoptère. La carte d'acquisition lit les données provenant de l'opérateur externe et les redirige vers les servomoteurs.

5.1.2 Critères de choix

Pour cette carte d'acquisition, le nombre de canaux disponibles, le mode de communication et le poids de la carte ont constitué les principaux critères. Considérant les contrôle

du modèle réduit choisi, il fallait au minimum 7 canaux répartis de la façon suivante : 5 canaux sont utilisés pour les différentes entrées ; 1 canal est utilisé pour la sauvegarde des données et 1 dernier canal pour permute le mode de vol (autonome ou manuel). Le mode de communication est le mode série étant donné la disponibilité des ports de l'ordinateur embarqué et surtout que la carte soit en mesure de communiquer les données en roue libre, sans qu'il soit nécessaire de l'interroger. Ce mode est important pour limiter le temps de latence imposé par les communications. Étant donné sa position dans l'acquisition, il fallait ce mode de communication pour éviter que la carte n'ajoute un délai dans la retranscription des commandes.

5.1.3 Caractéristiques techniques

Les servomoteurs utilisés au niveau de l'hélicoptère utilisent en entrée un signal en modulation de largeur d'impulsion (Pulse Width Modulation) ; c'est un signal carré dont la largeur de l'impulsion est proportionnelle à la commande. Une carte d'acquisition est dédiée pour la lecture et la génération des signaux *PWM*. Il s'agit de l'UAV100 présenté à la figure 5.1. Cette carte est fabriquée par la compagnie *PONTECH*. Les caractéristiques techniques sont



Figure 5.1 Contrôleur de servomoteurs UAV100

les suivantes :

- Communication : RS232 (115200 bps)
- Nombre de servomoteurs en lecture/écriture : 8
- Fréquence de rafraîchissement des données : 50 Hz
- Alimentation : 5VDC
- Courant de sortie par servomoteur : 0.7A

- Dimensions : 5,1 cm × 9 cm × 1,5 cm
- Poids : 30 g

5.2 Centrale inertielle

5.2.1 Utilité de la centrale inertielle

Le modèle théorique comporte des variables d'état comme : l'orientation (tangage, roulis et lacet), les vitesses angulaires et les accélérations en translation. Pour la plupart ces variables d'état sont des paramètres inertIELS. Il est impératif donc de recourir à une centrale inertielle dans le cadre de l'identification du modèle de l'hélicoptère. Pendant les essais en vol, la centrale inertielle est utilisée pour mesurer les paramètres inertIELS

5.2.2 Critères de choix

Tout comme le lecteur de signaux *PWM*, le poids et le mode de communication ont été déterminants dans le choix de la centrale inertielle. Étant donné que la dynamique de vol capturée par le modèle paramétrique couvre les six degrés de l'hélicoptère, il est nécessaire que la centrale inertielle dispose des trois axes dans la mesure des accélérations linéaires et des vitesses angulaires.

5.2.3 Caractéristiques techniques

La centrale inertielle choisie est le V-NAV 100 présenté à la figure 5.2. Elle est fabri-



Figure 5.2 Centrale inertielle intégrée V-NAV 100

quée par la compagnie *VECTORMAN*. Elle est composée d'un gyromètre trois axes, d'un accéléromètre trois axes et d'un compas trois axes. Tous ses capteurs sont interfacés par un microcontrôleur *ARM*. Ce microcontrôleur fait un pré-traitement des valeurs calculées. Ainsi le microcontrôleur implémente un filtrage de Kalman des différentes valeurs reçues des capteurs. Les paramètres du filtre, la fréquence d'échantillonnage des données sont configurables par la communication *USB* de la centrale inertie. Le fait que la centrale inertie dispose de son unité de calcul est un atout pour l'ordinateur embarqué. Les caractéristiques techniques de la centrale inertie se déclinent comme suit :

- orientation : Tangage ($\pm 90^\circ$) Roulis ($\pm 180^\circ$) Lacet ($\pm 180^\circ$)
- vitesses angulaires : $\pm 2000^\circ/s$
- accélération : $\pm 16g$
- fréquence d'échantillonnage : 200Hz
- communication : Serial on *USB* (921600bps)
- alimentation : 5V / 0.5A
- dimensions : 8cm \times 8cm \times 2.3cm
- Poids : 60g

5.3 Ordinateur embarqué

5.3.1 Utilité du matériel

L'identification du modèle de l'hélicoptère requiert des tests en vol. Étant donné le caractère mobile du véhicule, il est donc nécessaire de penser à un contrôleur embarqué pour enregistrer les différentes entrées et les variables d'état du système.

5.3.2 Critères de choix

Les critères qui ont guidé le choix de l'ordinateur sont :

- le poids : l'ordinateur doit être le plus léger possible pour être facilement portable.
- l'architecture : l'architecture de l'ordinateur est importante pour permettre un prototypage rapide de la commande.
- la robustesse du matériel : le système sera embarqué sur le véhicule et donc sujet aux vibrations. La robustesse apparaît comme un critère essentiel pour le choix de l'ordinateur embarqué

5.3.3 Caractéristiques techniques et physiques

L'ordinateur embarqué est un PC/104. Le PC/104 est un pc industriel qui se distingue par sa petite taille (9 cm × 9.6 cm × 2.3 cm). Il est doté d'un processeur 486 d'une fréquence de 800 MHz, d'une mémoire vive de 512 Mo. Il dispose de :

- Processeur : Vortex 800Mhz
- Mémoire vive :512Mo
- Péphériques d'entrée/sortie : quatre ports sériels RS-232, deux ports USB, deux ports PS2, deux ports Ethernet
- Alimentation : 5VDC
- Dimensions : 9 cm × 9.6 cm × 2.3 cm
- Poids : 110 g

Le système d'exploitation utilisé est le système temps-réel *QNX*. L'ordinateur permet d'acquérir les données des différents capteurs, de lire et de générer les signaux de commande pour les différents actionneurs de l'hélicoptère. Le schéma synoptique du contrôleur est présenté à la figure 5.3.

Pour mener à bout cette acquisition, une partie logicielle est associée au matériel présenté. Cette couche logicielle fait l'objet du prochain développement.

5.4 Logiciel d'acquisition

Cette section sera divisée en deux parties : la première partie est consacrée au logiciel de prototypage rapide utilisé *RT-LAB* et la seconde partie au modèle d'acquisition et de contrôle développé pour l'instrumentation et le contrôle du véhicule.

5.4.1 Logiciel de développement : *RT-LAB*

Pour interfaçer les différents modules, le logiciel *RT-LAB* a été utilisé. C'est un logiciel de simulation temps-réel avec du matériel dans la boucle. Ce logiciel permet d'intégrer des données du monde réel dans la simulation. Pour accéder aux mesures des différents capteurs, un programme asynchrone est développé. Ce programme permet de lire et d'écrire et de lire des données sur le port série et le port *USB*. Le port série est utilisé pour communiquer avec le contrôleur des servomoteurs et le port *USB* pour la centrale inertie. Le programme asynchrone communique avec le modèle Simulink à travers la bibliothèque Simulink Asynchrone développée par *RT-LAB*. Cette bibliothèque est composée des blocs suivants :

- un bloc de contrôle qui spécifie le programme asynchrone et paramétre la communication utilisée. Au moyen du masque du bloc présenté à la figure 5.4 , on peut spécifier :

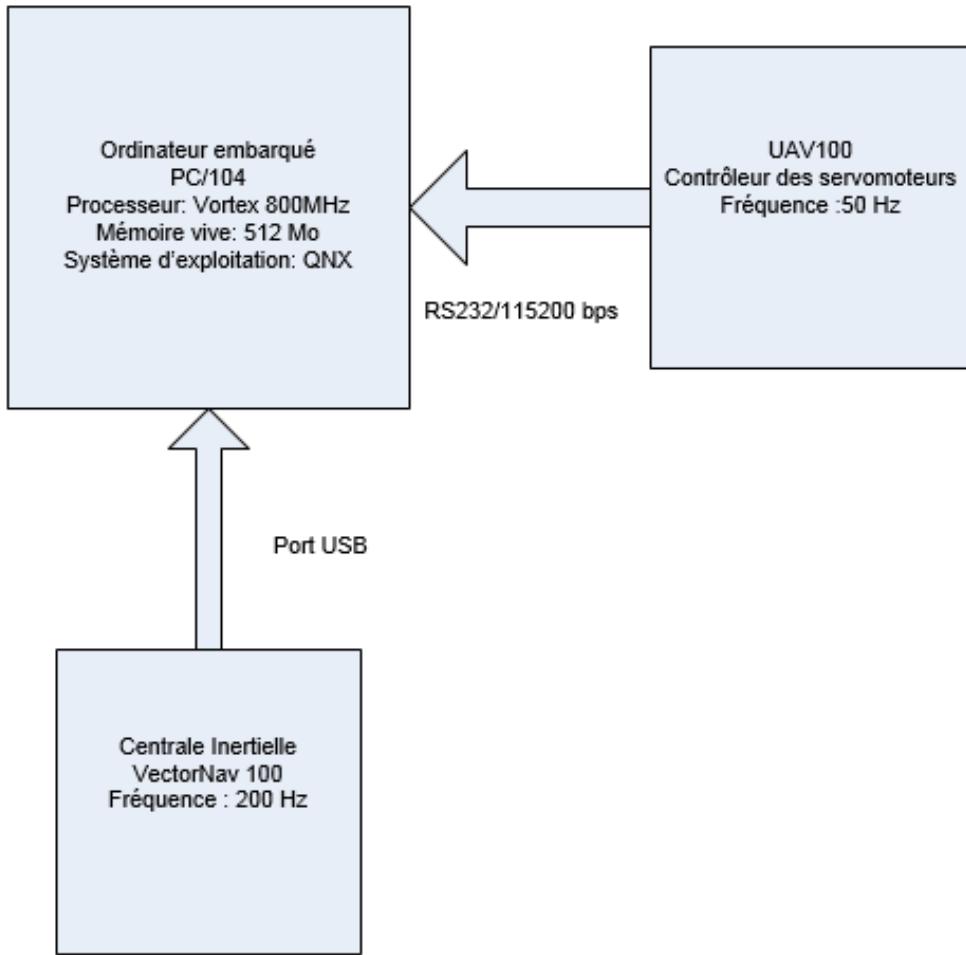


Figure 5.3 Schéma synoptique du contrôleur embarqué

- le type de carte émulant le périphérique *USB* au moyen du *Vendor Id* et du *Device Id*.
- la vitesse de communication du port série utilisé par le contrôleur des servomoteurs (BaudRate)
- le format des données échangées par le protocole série (Parity, Data Size, Stop Bits, Flow Control)
- l'exécutable du processus asynchrone utilisé pour l'acquisition des données.
- le bloc de réception de données : ce bloc permet de recevoir des données des périphériques. Deux instances de ce bloc sont utilisées dans le modèle d'acquisition : une instance pour le contrôleur des servomoteurs et la seconde pour la centrale inertielle. Pour différencier chacune des instances du bloc, un identifiant spécifié dans le masque

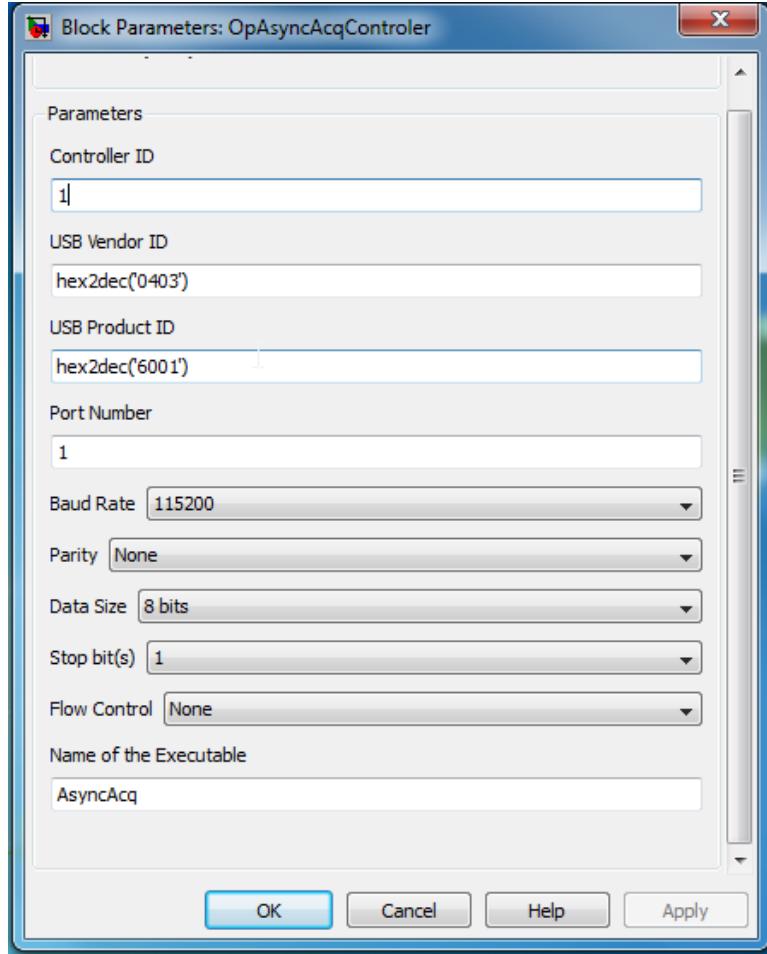


Figure 5.4 Masque Simulink du contrôleur du processus asynchrone

de chacun des blocs est utilisé.

- Le bloc d'envoi de données : ce bloc est utilisé pour envoyer des données du modèle vers les périphériques. Tout comme les blocs de réception, deux instances de ces blocs sont utilisés : une instance pour le contrôleur de servomoteurs et le second pour la centrale inertie.

La présentation des blocs de la librairie asynchrone permettra de mieux comprendre le fonctionnement du modèle d'acquisition. Dans la prochaine section, nous présenterons comment ces différents outils sont intégrés pour obtenir le système embarqué.

5.4.2 Modèle d'acquisition et de contrôle

Le modèle d'acquisition est un modèle typique de *RT-LAB*. Il est composé de deux sous-systèmes :

- le premier sous-système nommé `sm_autopilot` est le sous-système maître. Il est celui-

qui est déployé sur l'ordinateur embarqué.

- le deuxième sous-système nommé **sc_console** est une console comme son nom l'indique. Elle nous permet de suivre le fonctionnement du système embarqué. Ce sous-système est exécuté sur la machine hôte.

Il est important de rappeler que dans le contexte de *RT-LAB*, chaque sous-système s'exécute exclusivement sur un cœur du CPU. Étant donné le PC/104 ne dispose que d'un cœur, le modèle d'acquisition ne dispose que d'un sous-système sur l'ordinateur cible.

Sous-système maître

Le sous-système maître représente le logiciel qui sera déployé sur le système embarqué. Comme mentionné précédemment, le modèle Simulink regroupe toutes les fonctionnalités disponibles dans le modèle d'acquisition et de contrôle de l'hélicoptère. Le sous-système maître s'articule autour d'une machine à états disponible dans la boîte à outils "State Flow". Cette machine à états joue le rôle d'ordonnanceur du programme d'acquisition embarqué. Il est synchronisé à partir du temps de simulation qui est garanti temps réel par la librairie "Real Time Workshop" de Matlab Simulink et le système d'exploitation temps réel *QNX*. Les dépassemens de pas de calcul sont enregistrés par les fonctions de mesures de temps introduites dans le code généré par le logiciel *RT-LAB*. La machine à états organise les différentes tâches en suivant un organigramme prédéfini. L'organigramme est déterminé principalement par les différentes caractéristiques des capteurs embarqués sur la plateforme. Ainsi l'acquisition des paramètres inertiels est faite à une fréquence de 200 Hz alors la position des servomoteurs est enregistrée à 50 Hz. Pour synchroniser ces différentes acquisitions, le modèle Simulink roule à un pas de calcul d'une milliseconde. Ce compromis a été établi à partir des mesures de dépassement de pas de calcul par le logiciel *RT-LAB* et la nécessité de faire certaines opérations entre les différentes acquisitions. Il faut mentionner également que l'ordinateur embarqué ne disposant que d'un seul cœur, toute l'activité de ce dernier n'est pas dédié au modèle d'acquisition. Certaines fonctions incompressibles du système d'exploitation s'exécutent également au cours de l'acquisition. La caractéristique temps réel de l'acquisition est validée par un test longue durée prenant en compte une horloge externe. L'erreur était inférieure à une dizaine de secondes sur une dizaine d'heures soit un ratio 1 sur 3600. Cet aspect est acceptable pour l'expérience qui dure généralement une dizaine de minutes. L'ordonnanceur peut modifier son comportement à partir des commandes envoyées à partir du pilote au cours des tests en vol. Les principales actions du modèle d'acquisition sont présentées à travers les sections suivantes.

Bloc IMU Le bloc IMU est le sous-système utilisé pour communiquer avec la centrale inertielle. Il est présenté à la figure 5.5. Le vecteur IMU_DATA à la sortie du bloc IMU_Processing

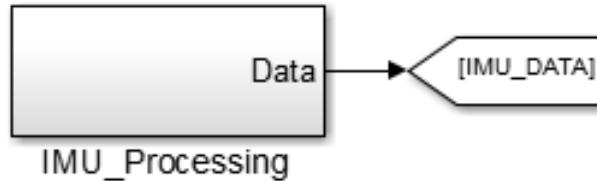


Figure 5.5 Bloc Simulink de la Centrale Inertielle

est composé de :

- l’orientation du véhicule : le tangage, le roulis et le lacet
- le vecteur vitesses angulaires
- le vecteur accélération linéaire

Ce bloc fournit la plupart des variables d’état du modèle.

Bloc Servo Reader-Writer Le bloc Servo Reader-Writer occupe une place centrale dans le modèle d’acquisition. Il est présenté à la figure 5.6. Le bloc Servo Reader-Writer est im-

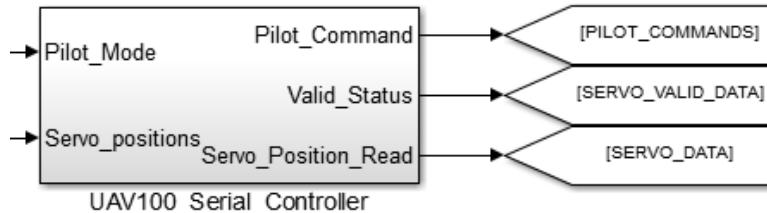


Figure 5.6 Bloc Simulink du Contrôleur des servomoteurs

portant à cause de sa dualité du contrôleur de servomoteurs. Comme présenté en 5.1, ce contrôleur a la possibilité de lire et d’écrire les positions des différents servomoteurs. Ceci justifie le fait que ce bloc dispose de deux entrées et de trois sorties. Les interfaces d’entrée du bloc sont :

- **Pilot_mode** : elle précise si le bloc est en mode lecture ou écriture des positions. Dans le mode manuel, le bloc se met en mode lecture des positions des servomoteurs. Dans le mode autopilote, le bloc écrit les positions fournies à son entrée.
- **Servo_Positions** : elle représente les positions des servomoteurs en mode autopilote. Ces informations sont acheminées vers les servomoteurs en mode autopilote.

Les interfaces de sortie du bloc sont :

- **Servo_Position_Read** : elle fournit les positions des servomoteurs. Cette information est utile lors de la phase d’identification du modèle de l’hélicoptère. Elle est également utilisée par l’autopilote lors de la phase de transition du mode pilotage manuel au mode pilotage automatique.
- **Commandes du pilote** : elle représente les commandes du pilote. Les commandes de pilotage sont acheminées par le même canal que la position des servomoteurs, ceci explique le fait que le bloc Servo Reader-Writer est utilisé pour les récupérer. Par ce fait, il apparaît que le mode lecture est toujours présent au niveau du bloc à cause des commandes du pilotes qui sont lues en tout temps.
- **Valid_Status** : elle fournit l’état de validité des positions lues. En mode écriture, les valeurs lues ne sont plus valides. Ce statut est utilisé pour la sauvegarde des données. En mode écriture, les données ne sont pas sauvegardées puisque la lecture est totalement asynchrone dans ce mode.

Bloc Sélection de mode Le bloc Mode Selection est présenté à la figure 5.7. Ce bloc

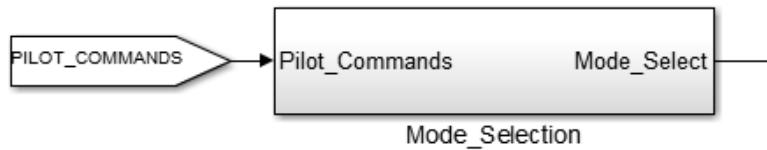


Figure 5.7 Bloc Simulink du Sélecteur de Mode

permet d’interpréter les commandes reçues du pilote. Actuellement, trois commandes sont disponibles :

- une commande pour sauvegarder les données dans le fichier ;
- une commande pour permuter le mode de pilotage (manuel ou automatique) ;
- une commande pour permuter l’atterrissage du véhicule (non supportée).

Bloc Autopilote Le bloc Autopilote est présenté à la figure 5.8 Ce bloc utilise les variables

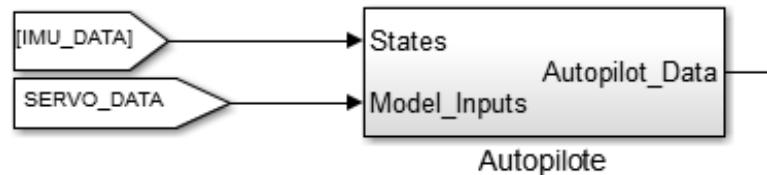


Figure 5.8 Schéma synoptique du bloc Autopilote

d’état et les entrées du système pour évaluer la commande. Ce bloc est celui qui sera modifié

pour le test des différents contrôleurs. Dans la phase de validation du modèle du véhicule et de tests de différents contrôleurs, ce bloc sera couramment modifié. Il sera détaillé davantage dans les sections suivantes.

Bloc Boîte Noire Le bloc Boîte Noire est présenté à la figure 5.9. Ce bloc est utilisé

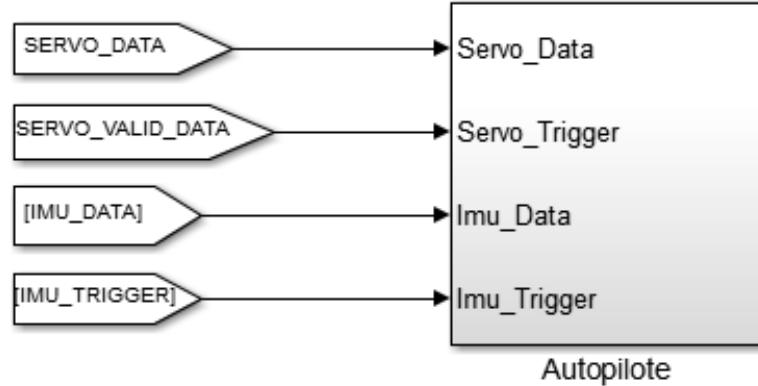


Figure 5.9 Schéma synoptique de la boîte noire

pour enregister les données en vol. Étant donné que les entrées et les variables d'état ne sont pas échantillonnées, ces deux types de variable sont enregistrées dans deux fichiers différents. Les fréquences d'enregistrement de chacune des variables sont spécifiées par les entrées *Servo_Trigger* et *Imu_Trigger*

Section de rapport Cette section présente les données renvoyées à la console. Cette partie n'est pas essentielle pour la compréhension du modèle. Elle est cependant utile pour le déverminage et la surveillance du système. Elle est présentée à la figure 5.10

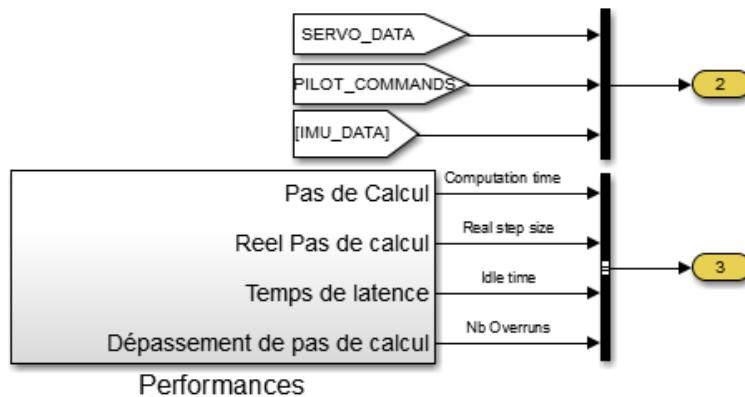


Figure 5.10 Schéma synoptique de la section des rapports

CHAPITRE 6

IDENTIFICATION DU MODÈLE PARAMÉTRIQUE

Une fois le modèle paramétrique établi, il est nécessaire de déterminer les principaux paramètres. Cette partie développe les méthodes d'identification des systèmes utilisées dans le cas d'espèce. Dans un premier temps, un aperçu des différentes méthodes est fait pour mieux fixer les raisons qui soutiennent les différents choix. Par la suite, le déploiement de la méthode d'identification choisie à travers les tests en vol et les tests au sol. Finalement, ce chapitre s'achève avec une analyse qualitative et quantitative des différents paramètres.

6.1 Mesure des paramètres

Le modèle théorique du véhicule présente plusieurs paramètres physiques mesurables. Les paramètres mesurables sont consignés dans le tableau 6.1 :

Tableau 6.1 Paramètres mesurables

Paramètres	Valeur
Rayon de l'hélice principale	0.57 m
Corde de la pale de l'hélice principale	0.05 m
Rayon de l'hélice de queue	0.05 m
Corde de la pale de l'hélice de queue	0.020 m
Masse du véhicule	4 kg

6.2 Tests au sol

Les tests au sol regroupent les tests effectués pour l'identification des paramètres sans faire voler l'hélicoptère. Dans cette catégorie, nous avons effectué trois (03) tests :

- le test de suspension pour déterminer le centre de gravité ;
- le test de suspension multifilaire pour déterminer la matrice d'inertie ;
- le test de caractérisation des servomoteurs.

6.2.1 Localisation du centre de centre de gravité

Description

La localisation du centre de gravité est déterminée par le test de suspension. Cette méthode est basée sur l'équilibre statique du pendule. En effet lorsqu'un corps rigide est suspendu à un pendule à point fixe, les forces qui s'appliquent sur ce corps rigide sont la tension du fil et le poids du corps. Si le corps est à l'équilibre, le poids et la tension s'annulent mutuellement et leurs droites d'action s'alignent. Étant donné que le point d'application du poids est le centre de gravité, il est évident que le centre de gravité recherché se trouve sur le prolongement du câble tendu par l'effet du véhicule. Considérant que le point dans l'espace peut être considéré comme l'intersection de deux droites, il est nécessaire de répéter la suspension du véhicule en choisissant des points d'attache garantissant l'obtention des droites d'action non linéaires. L'intersection des droites d'action induites par la suspension du véhicule indique la position géométrique du centre de gravité.

Mode opératoire

Dans le cas d'espèce, les points d'attache choisis sont le centre de l'hélice principale et la queue du véhicule. Ces deux points ont été choisis sur le plan médian de l'hélicoptère car ce dernier présentait une symétrie par rapport à ce plan. Les droites d'action ont été enregistrées à partir des images 6.1. Après un traitement des images, le point d'intersection des droites



(a) Suspension au centre de l'hélice (b) Suspension au bout de la queue

Figure 6.1 Tests du centre de gravité

d'action est localisé sur la figure 6.2. Comme le présente la figure 6.2 , Le centre de gravité est

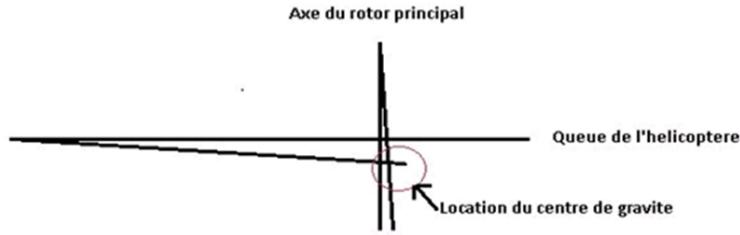


Figure 6.2 Localisation du centre de gravité

localisé par rapport aux centres d'action des forces aérodynamiques que sont les portances de l'hélice principale et de l'hélice de queue. Ce choix est motivé par l'usage du centre de gravité dans l'estimation des couples correspondants à ces différentes forces. Les différentes distances sont présentées sur les figures 6.3 et 6.4 et consignées dans le tableau 6.2 :

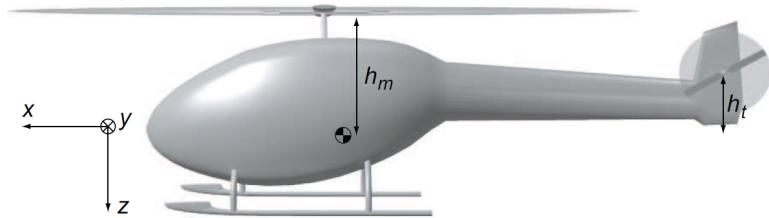


Figure 6.3 Vue de profil de la localisation du centre de gravité

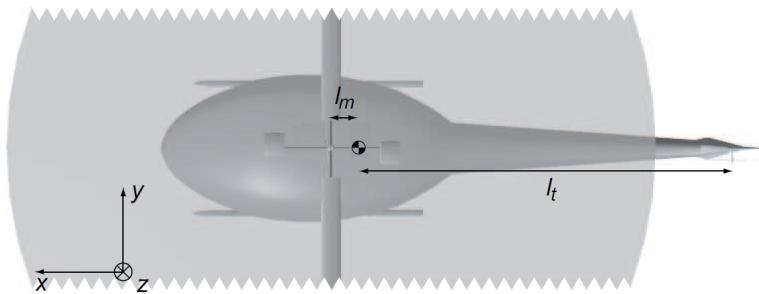


Figure 6.4 Vue de haut de la localisation du centre de gravité

6.2.2 Identification de la matrice d'inertie

Description

La matrice d'inertie est composée des moments d'inertie autour des différents axes. Le moment d'inertie autour d'un axe peut être déterminé expérimentalement en suspendant le

Tableau 6.2 Centre de gravité de l'hélicoptère

Paramètres	Valeur (m)
Distance du C.D.G au centre de l'hélice principale suivant l'axe z (h_m)	0.25
Distance du C.D.G au centre de l'hélice principale suivant l'axe x (l_m)	0.18
Distance du C.D.G au centre de l'hélice de queue suivant l'axe z (h_t)	0.10
Distance du C.D.G au centre de l'hélice de queue suivant l'axe x (l_t)	0.78

véhicule de façon à obtenir des oscillations libres autour dudit axe. La période des oscillations libres et la géométrie du pendule permettent de déterminer le moment d'inertie. Le mécanisme de suspension choisi est un pendule trifilaire présenté à la figure 6.5. Le pendule est formé de

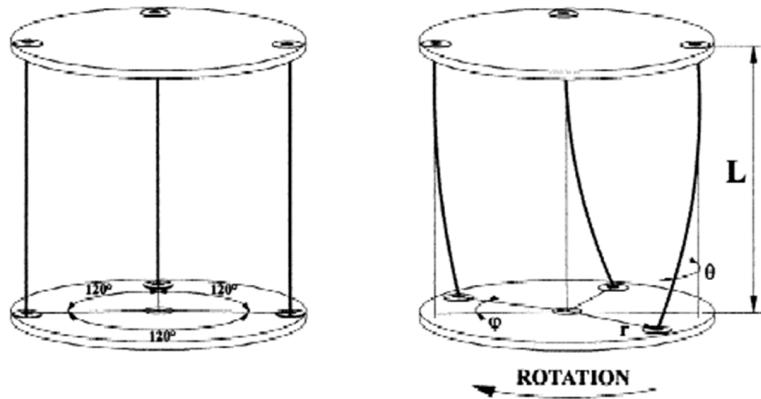


Figure 6.5 Pendule tri-filaire

trois (03) câbles flexibles qui permettent d'induire des oscillations autour de l'axe de référence. Considérant les caractéristiques géométriques du pendule trifilaire présenté à la figure 6.2, le moment d'inertie autour de l'axe CC obéit à la relation suivante :

$$I_{cc} = \frac{mgR_1R_2R_3\tau^2}{4\pi^2l} \frac{R_1 \sin(\phi_1) + R_2 \sin(\phi_2) + R_3 \sin(\phi_3)}{R_2R_3 \sin(\phi_1) + R_1R_3 \sin(\phi_2) + R_1R_2 \sin(\phi_3)} \quad (6.1)$$

Mode opératoire

Pour évaluer le moment d'inertie, il est nécessaire disposer l'axe autour duquel la mesure est faite sur le centre de gravité. Pour faciliter l'évaluation de la formule précédente, les câbles supportant le pendule ont été disposés de façon à former un triangle équilatéral dont le centre du cercle circonscrit au triangle appartient à l'axe de rotation autour duquel la mesure du moment d'inertie est faite. Ce faisant, les angles sont égaux et on a $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi = \frac{2\pi}{3}$ et les rayons sont égaux $R_1 = R_2 = R_3 = r$ alors la formule précédente se déduit comme

suit :

$$I_{cC} = \frac{mgr^2\tau^2}{4\pi^2 L} \quad (6.2)$$

Pour mesurer la durée des oscillations, l'ordinateur embarqué a été mis à contribution. En effet, les différentes mesures de la centrale inertielle sont enregistrées à une fréquence de 200 Hz, ainsi la période a pu être déterminé avec une précision de +/- 5 ms. Les oscillations sont enregistrées par l'ordinateur embarqué et présentées à la figure suivante 6.6. À partir du script A de l'analyse spectrale, la période des oscillations est évaluée. Cette période est utilisée pour déterminer la matrice d'inertie.

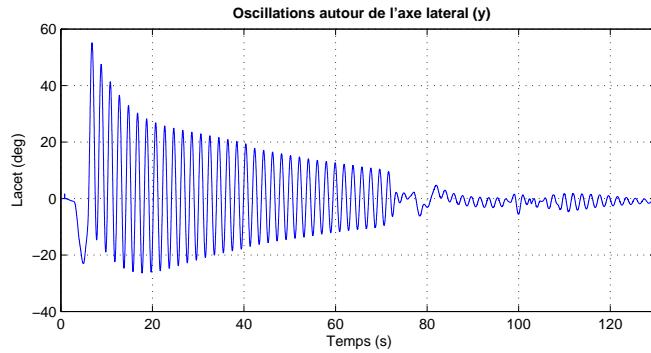


Figure 6.6 Oscillations libres de l'hélicoptère

La matrice d'inertie est consignée dans le tableau 6.3

Tableau 6.3 Matrice d'inertie

Définition des paramètres	Valeur ($kg.m^2$)
Moment d'inertie suivant le roulis	0.37
Moment d'inertie suivant le tangage	0.3545
Moment d'inertie suivant le lacet	0.2963

6.2.3 Caractérisation des servomoteurs

À partir de la description des composantes du servomoteur, les approximations suivantes sont considérées :

- le contrôleur est approximé par un gain car la dynamique est plus rapide que la fréquence naturelle du servomoteur.
- le moteur *DC* est approximé par une fonction de transfert du premier ordre parce que la dynamique électrique est négligeable par rapport à la dynamique mécanique du moteur.

- le capteur est approximé par un gain dans la boucle de retour de la position.

À partir des différentes approximations, le moteur est représenté par un système du premier ordre. Le servomoteur intègre un filtrage et un contrôleur pour stabiliser la position ; *in fine* il est donc défini par un système linéaire du deuxième ordre. Pour caractériser le servomoteur, l'analyse d'une réponse à l'échelon est suffisante. Dans le cadre de l'étude, l'expérience d'identification n'a pas été réalisée. Une approximation du modèle de servomoteur a été obtenue en utilisant les données du manufacturier et les exemples de la littérature. Les informations du manufacturier sont consignées dans le tableau 6.4 Les valeurs limite des différents paramètres

Tableau 6.4 Paramètres du manufacturier des servomoteurs

Paramètres	Valeur
Fréquence naturelle (w_n)	200Hz
Vitesse angulaire maximale (ω)	3770 rad/s
Couple maximal (τ_{servo})	9.60 kg.cm

du servomoteur ont permis d'introduire des saturations dans le modèle du servomoteur. Les réponses observées à l'échelon n'indiquent aucune oscillation et le servomoteur a été considéré comme un système du deuxième ordre et la valeur du coefficient d'amortissement a été fixé à 1.

6.2.4 Mesure des ratios de portance des différentes hélices

La mécanique des fluides offre des outils permettant de mesurer la portance des profils à partir des mesures physiques des profils. Dans le cadre de la présente étude, l'outil **xfoil** développé par le Massachusetts Institute of Technology a été utilisé. Pour chacune de nos hélices, il a été requis de préciser le type de profil et de mesurer la corde et l'épaisseur maximale de chacune de nos pales. Les mesures et les résultats sont consignées dans le tableau 6.5

Tableau 6.5 Paramètres des pales des hélice

Paramètres	Pale de l'hélice de queue	Pale de l'hélice principale
Type de profil	NACA0012	NACA0012
Corde (mm)	25	50
Épaisseur maximale (mm)	3	6.7
Gradient de portance	6.8632	6.9097

6.2.5 Analyse des tests au sol

Les tests au sol ont permis d'identifier la plupart des paramètres inconnus. Cet état est dû au mode du vol imposé : le vol stationnaire. Par cette imposition, le modèle paramétrique est moins tributaire des paramètres aérodynamiques qui sont généralement obtenus de façon empirique. Cependant des tests en vol sont conduits car les conditions de la stationnarité ne sont pas complètement déterminées. En effet, le vol stationnaire que l'étude a pour but de modéliser se réalise sous certaines conditions précises de vol. Lors de l'analyse du modèle théorique, certaines hypothèses ont été avancées comme :

- l'omission des forces de traînée : la traînée n'est pas nulle car elle est partie intégrante de la force aérodynamique générée par le mouvement de l'hélice dans l'air. L'effet de la traînée peut être déduit par l'analyse des données de vol. En vol stationnaire, l'hélicoptère est soumis à la portance, au poids et aux forces de traînée. La valeur de la portance est déductible à partir de l'angle d'incidence de l'hélice par rapport à l'air. À partir de cette valeur, l'effet de la traînée pourra être évaluée dans la modélisation du vol stationnaire.
- l'omission des surfaces de contrôle du modèle réduit : les modèles réduits des hélicoptères disposent de surfaces de contrôle ajustables pour modifier la position du centre de gravité et la stabilité du véhicule. Ces surfaces de contrôle ont été largement présentées dans Cai (2011). Dans l'analyse théorique, ces surfaces ont été négligées pour rester le plus proche possible des hélicoptères réels. De plus l'ajustement de ces surfaces dépend fortement du positionnement du système embarqué. Leur effet est important pour la stabilité de l'appareil en vol stationnaire lorsque le centre d'action de la portance ne coïncide pas avec le centre de gravité comme c'est le cas pour l'hélicoptère présent. Aussi leur effet se déduit également à partir des mesures en vol.

Pour les raisons précédemment citées, le modèle représentant fidèlement le vol stationnaire de l'hélicoptère ne saurait être présenté par uniquement des paramètres mesurés au sol. Il a fallu compléter les tests par des tests en vol. Les mesures réalisées au sol ont servi cependant de point d'ancrage pour l'identification.

6.3 Tests en vol

6.3.1 Motivation des tests en vol

À partir des différentes mesures et des différents calculs, les différents inconnues du modèle paramétrique ont été évaluées. Il est judicieux d'expliquer l'utilité et la motivation des tests en vol. Les tests en vol ont pour but de valider les différentes données obtenues aux cours des différentes mesures au sol. Par exemple, le coefficient de portance des hélices qui est

généralement évalué en soufflerie, a été obtenu à partir des tables de données. Un test en vol stationnaire pourra déterminer sa valeur réelle. Les approximations faites au niveau de la dynamique des actionneurs pourront être également validées. Par ailleurs, les tests en vol sont inéluctables dans la logique d'une implantation réelle du contrôleur sur le véhicule. C'est un prérequis pour évaluer que la commande générée par le contrôleur embarqué stabilise parfaitement le véhicule. Pour toutes les raisons précitées, les tests suivants ont été initiés :

- tests de caractérisation du gradient de portance de l'hélice principale ;
- tests d'excitation sinusoïdale.

6.3.2 Tests de caractérisation du gradient de portance de l'hélice principale

Pour identifier le gradient de portance de l'hélice principale, l'hélicoptère a été soumis en vol stationnaire à différentes vitesses de rotation de l'hélice. Le vol stationnaire a été choisi parce qu'il simplifie grandement l'évaluation de la portance comme l'indique son expression en vol stationnaire :

$$T_{mr} = \left(\frac{2}{3} \Omega R \beta_c - \sqrt{\frac{T_{mrold}}{2\rho A}} \right) \frac{\rho \Omega R^2 a B c}{4} \quad (6.3)$$

En vol stationnaire, la portance se conserve donc $T_{mr} = T_{mrold}$ donc le gradient s'exprime sous la forme :

$$a = \frac{4T_{mr}}{\rho \Omega R^2 \left(\frac{2}{3} \Omega R \beta_c - \sqrt{\frac{T_{mr}}{2\rho A}} \right)} \quad (6.4)$$

La vitesse de rotation de l'hélice est mesurée avec un tachymètre optique qui est actionné pendant le vol stationnaire. L'inclinaison de l'hélice a été déterminée par déduction de la lecture des entrées des différents servomoteurs commandant le plateau cyclique. La relation entre ces entrées et l'inclinaison de l'hélice a été exposée dans le chapitre précédent. Le vol stationnaire a été exécuté avec trois vitesses différentes et à des conditions atmosphériques différentes. Le gradient de portance est utilisé pour déduire l'effet de la traînée et des surfaces de contrôle lors du vol stationnaire. Ces phénomènes sont nécessaires pour déterminer la position d'équilibre de l'hélicoptère.

6.3.3 Utilisation des valeurs de gradients dans le modèle linéaire

À partir des différentes valeurs de gradient, il a été possible de déterminer l'effet de la traînée et des surfaces stabilisantes de l'hélicoptère. À partir du modèle non linéaire du vol stationnaire excluant la dynamique des servomoteurs a pu être obtenu. La linéarisation du modèle complet autour de la position de l'hélicoptère en utilisant le logiciel Simulink.

6.3.4 Tests d'excitation sinusoïdale

Le test de réponse fréquentielle est un test initié pour évaluer la dynamique du véhicule. Il permettra d'évaluer le temps de réponse et d'étudier la stabilité du modèle paramétrique une fois celui-ci linéarisé. Dans le cadre de l'expérience, la plage de fréquence des excitations est fixée en tenant compte des contraintes physiques du véhicule et de l'instrumentation. En effet les actionneurs reçoivent leur commande à une fréquence de 50 Hz. Dans la littérature (Mettler (2003)), il est recommandé de viser 10 échantillons lors des tests en réponse fréquentielle ; ce qui fixe la fréquence maximale des excitations à 5 Hz. L'excitation de façon sinusoïdale requiert une certaine dextérité chez le pilote et bien souvent les données des tests en vol ne reflètent pas souvent le contenu fréquentiel désiré. Cette situation est présentée à la figure 6.7. Cette situation est justifiée par la présence d'autocompensateurs au niveau de l'hélicoptère.

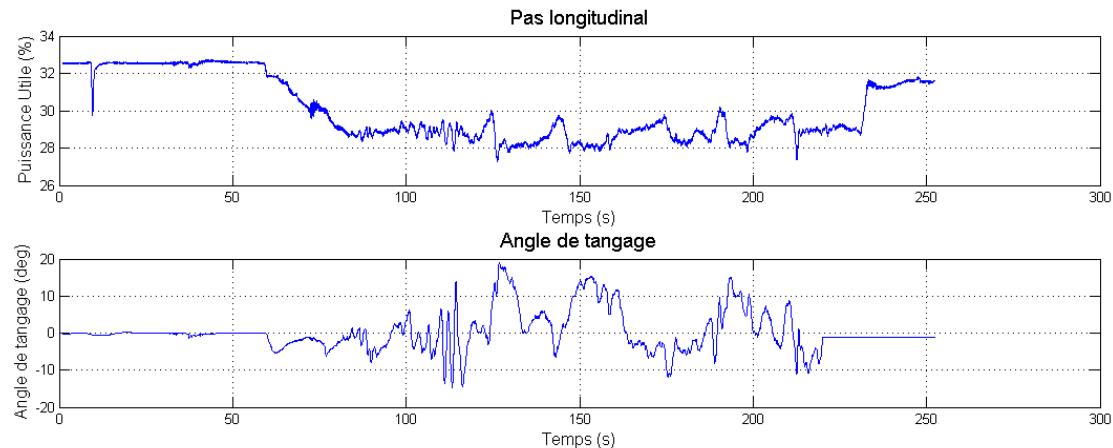


Figure 6.7 Schéma synoptique de l'hélicoptère

Les commandes d'oscillations sinusoïdales du pilote sont contrebalancées par les corrections des autocompensateurs. Pour ce faire, une alternative est proposée pour suppléer un temps soit peu l'opérateur et obtenir des données fiables et nécessaires pour l'identification du véhicule. Cette alternative est présentée dans la section relative à la préparation du présent test (6.3.4).

Préparation des tests d'excitation sinusoïdale

Face à la difficulté d'obtenir des excitations sinusoïdales précises par l'opérateur, l'analyse du véhicule a révélé des possibilités intéressantes pour la réalisation des tests en vol. L'hélicoptère utilisé appartient à la catégorie des modèles réduits *flybarless*. Cette catégorie d'hélicoptère utilise un compensateur numérique pour stabiliser l'hélicoptère en vol. En

fait c'est une solution numérique de substitution aux hélices autostabilisantes qui étaient présentes sur les anciens modèles d'hélicoptère. La figure 6.8 présente le schéma synoptique du véhicule avec son compensateur. Ces compensateurs numériques sont généralement ex-

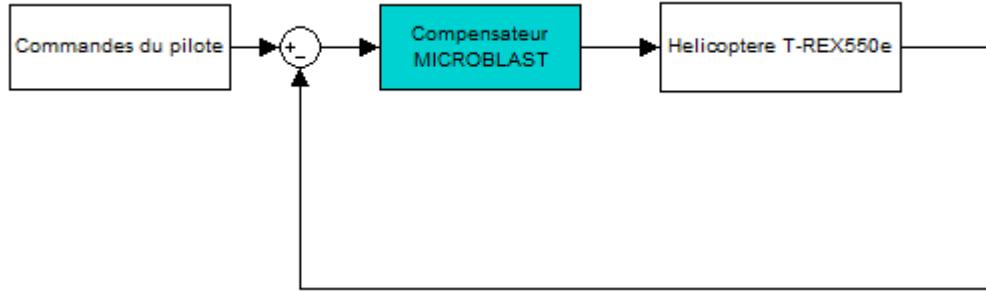


Figure 6.8 Schéma synoptique de l'hélicoptère

clus au cours des tests en vol pour capter uniquement la dynamique du véhicule en vol. Mettler (2003) considère de réduire leur effet pour capter la dynamique réelle du véhicule. Cette pratique rend le pilotage beaucoup plus ardu et rend les réponses aux excitations sinusoïdales difficilement contrôlables par l'opérateur. L'alternative proposée est d'utiliser ces compensateurs numériques comme point de départ de nos tests. L'objectif est d'identifier le compensateur numérique une fois correctement réglé avec le véhicule et de le reproduire avec l'ordinateur embarqué. Une fois ce contrôle intégré dans l'ordinateur embarqué, les excitations sinusoïdales sont générées à partir de l'ordinateur embarqué avec pour référence le compensateur. L'opérateur ne réalise plus la manœuvre de la commande sinusoïdale mais est présent au cours des tests pour parer à toute éventualité. Lorsque le véhicule devient instable, l'opérateur substitue la génération des excitations sinusoïdales par le compensateur intégré au niveau de l'ordinateur embarqué. Cette approche implique une identification du compensateur MICROBLAST auparavant

Identification du compensateur du véhicule Une fois le compensateur de vol bien réglé après des vols d'essais, les données relatives à son identification sont enregistrées au sol. En effet, le compensateur agit comme un contrôleur qui utilise la commande du pilote et les mesures sur l'orientation du véhicule pour appliquer la commande adéquate au véhicule. La structure du contrôleur ne dépendant guère de l'aérodynamique, point n'est besoin de test en vol pour l'identifier. Pour procéder à l'identification du contrôleur, le véhicule est disposé sur un balancier permettant des oscillations suivant le roulis, le tangage et le lacet. Le compensateur étant découplé en deux blocs : l'un contrôlant le roulis et le tangage qui sont influencés principalement par l'hélice principale et l'autre, le lacet qui est influencé par les deux hélices. Dans le cadre de la présente étude, l'identification s'est limité au premier

bloc présenté à la figure 6.9. Aussi le premier bloc du compensateur se révèle un système



Figure 6.9 Bloc Entrée-Sortie du Compensateur Microblast

multi-entrées et multi-sorties où :

- les entrées sont : le tangage, le roulis, la vitesse angulaire suivant l'axe x , la vitesse angulaire suivant l'axe y , l'accélération suivant x , l'accélération suivant l'axe y
- les sorties sont les commandes aux différents servomoteurs du plateau cyclique.

La structure du contrôleur suggère deux types d'excitation pour l'identification du bloc.

- une excitation suivant le tangage qui affecterait également la vitesse angulaire autour de l'axe y et l'accélération suivant l'axe x . Ce type d'excitation permettrait d'identifier le bloc 6.10



Figure 6.10 Bloc Entrée-Sortie du Compensateur Microblast Tangage

- une excitation suivant le roulis qui affecterait également la vitesse angulaire autour de l'axe x et l'accélération suivant l'axe y . Ce type d'excitation permettrait d'identifier le bloc 6.11

Pour générer les excitations sinusoïdales nécessaires à l'identification, l'hélicoptère a été placé sur un balancier de façon à générer des oscillations au niveau du tangage et du roulis.

Présentation des mesures Les données mesurées pour les excitations au niveau du tangage sont présentées à la figure 6.12 pour les entrées et à la figure 6.13 pour les sorties.



Figure 6.11 Bloc Entrée-Sortie du Compensateur Microblast Roulis

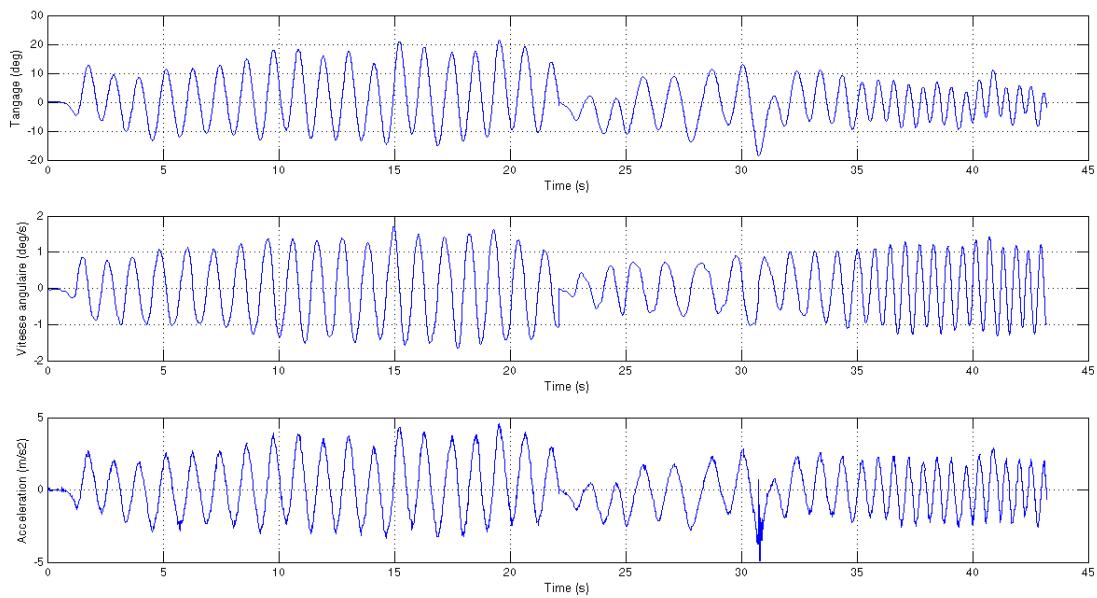


Figure 6.12 Entrées mesurées pour l'excitation fréquentielle du tangage

Les données mesurées pour les excitations sinusoïdales suivant le roulis sont présentées à la figure 6.14 pour les entrées et à la figure 6.15 pour les sorties.

Les données recueillies au cours des tests de réponse fréquentielle ont fait l'objet d'un prétraitement pour extraire l'information utile. Les biais et les offsets de mesure ont également été traités pour présenter le contenu fréquentiel utile et nécessaire à l'identification.

Identification du modèle de compensateur En superposant l'analyse spectrale des sorties et des entrées mesurées, il apparaît que le contenu fréquentiel des entrées et des sorties est identique ; il est possible d'affirmer que les blocs soumis à l'identification sont linéaires. Il est donc possible d'utiliser des représentations linéaires pour identifier les différents blocs.

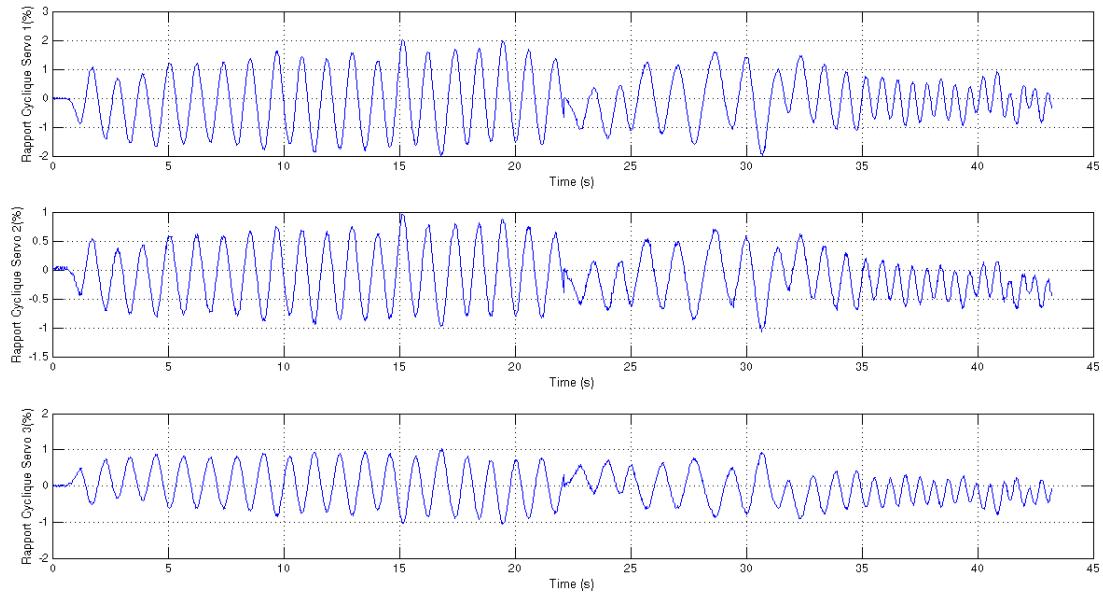


Figure 6.13 Sorties mesurées pour l'excitation fréquentielle du tangage

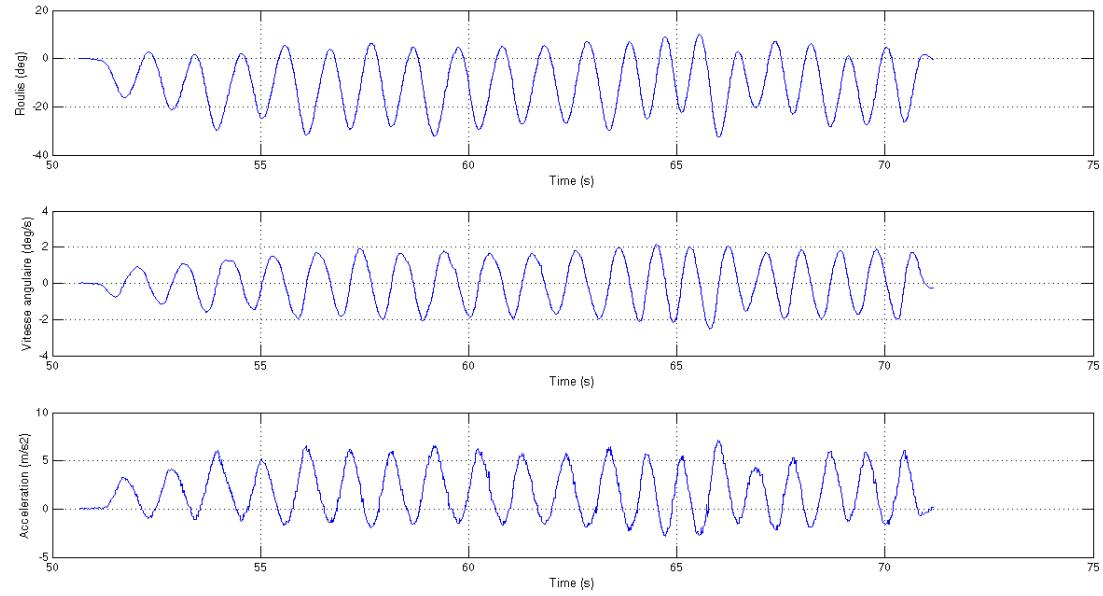


Figure 6.14 Entrées mesurées pour l'excitation fréquentielle du roulis

Considérant la topologie du compensateur se déclinant en deux classes d'entrées indépendantes l'un de l'autre mais affectant les mêmes sorties, la forme choisie pour représenter le

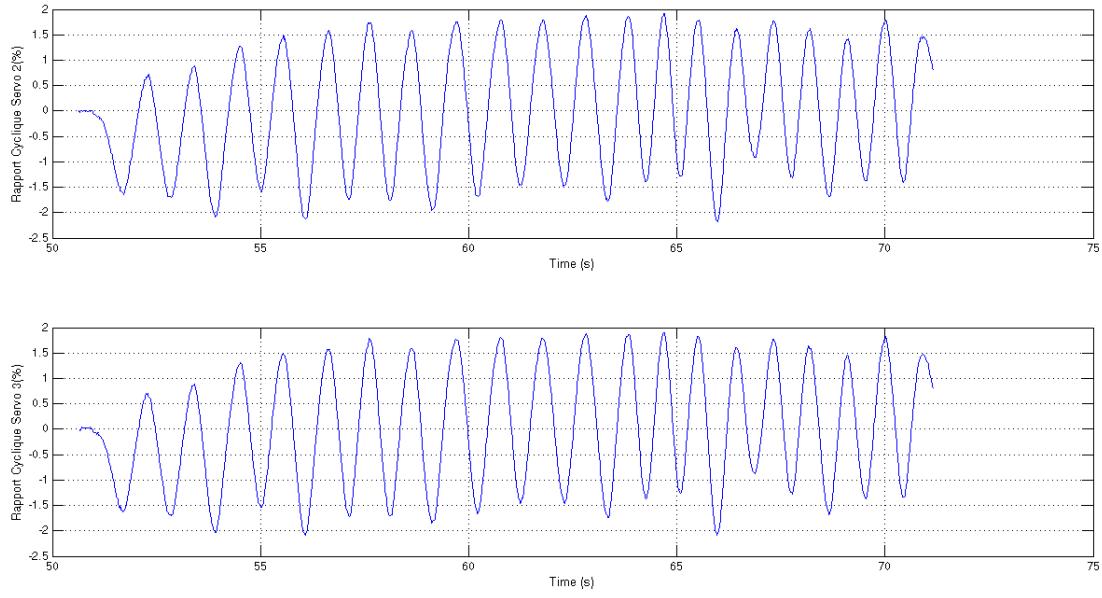


Figure 6.15 Sorties mesurées pour l'excitation fréquentielle du roulis

compensateur MICROBEAST est le modèle d'état. En effet, le modèle d'état représente les systèmes linéaires à partir des matrices lesquelles par le mécanismes d'augmentation des matrices facilitent la combinaison de plusieurs sous-systèmes. L'ordre du système a été dicté par les entrées des différents blocs et par la structure du compensateur MICROBEAST. Il a été fixé à 2. À partir de toutes ces informations, les différents blocs ont pu être identifiés avec la méthode `ssest` de Matlab. Une fois les modèles de chacun des blocs identifiés, il a été procédé à une comparaison avec les données mesurées. Ces comparaisons sont présentées aux figures 6.16 et 6.17

Une fois les matrices de chacun des blocs obtenus, elles ont été combinées pour donner la structure finale du compensateur présenté à la figure 6.9. La représentation du compensateur est présentée par les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -6.1881 & -26.5464 & 0 & 0 \\ -25.3426 & -130.5023 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1.3769 & -26.2449 \\ 1 & 0 & 1.5823 & -82.9699 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

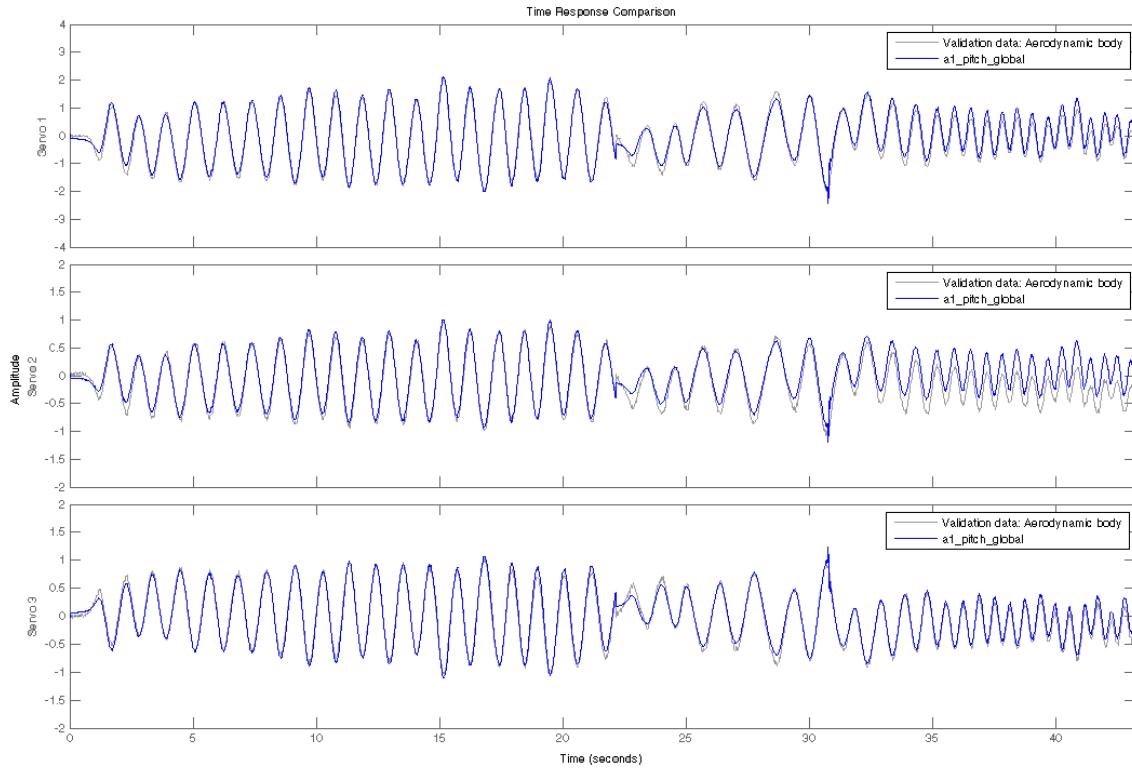


Figure 6.16 Comparaison entre les valeurs mesurées et le modèle estimé pour le tangage

$$B = \begin{bmatrix} 0.2823 & 0 & 0 & 1.8273 & -0.6406 & 0 \\ 1.4866 & 0 & 0 & 8.0974 & -3.7296 & 0 \\ 0 & -0.0756 & -1.1245 & 0 & 0 & 1.0378 \\ 0 & -0.2090 & -3.9564 & 0 & 0 & 3.3156 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$C = \begin{bmatrix} 21.6159 & 3.7891 & 0 & 0 \\ 9.1176 & 2.3653 & 26.0544 & -12.0090 \\ -12.5185 & -1.2932 & 26.5752 & -12.0707 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Une fois le modèle obtenu ce dernier a été comparé avec les données mesurées à la figure 6.18
À partir du compensateur identifié, il a été possible de conduire des excitations sinusoïdales.

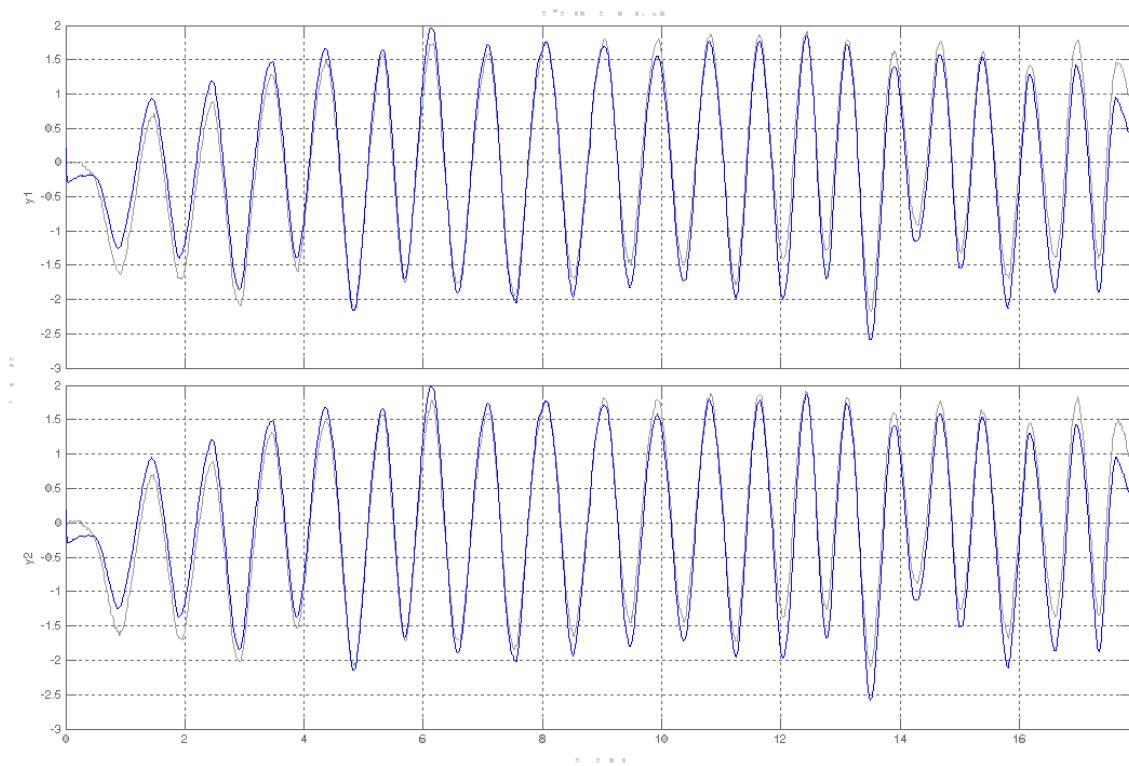


Figure 6.17 Comparaison entre les valeurs mesurées et le modèle estimé pour le roulis

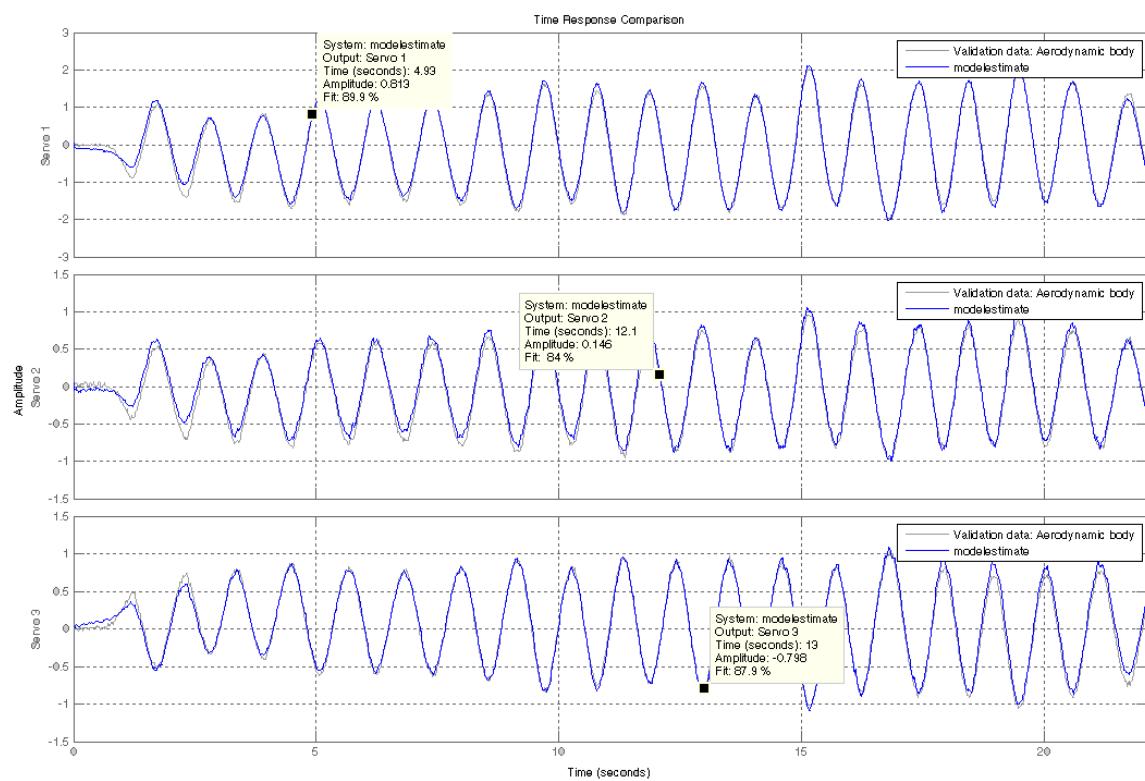


Figure 6.18 Comparaison entre les valeurs mesurées et le modèle estimé pour le compensateur

CHAPITRE 7

CONCLUSION

La conclusion se décline en trois points qui sont les principaux objectifs annoncés au début du mémoire à savoir :

- l'application des méthodes d'identification
- l'obtention d'un modèle représentant le vol stationnaire
- la conception d'un banc de tests

7.1 Identification du modèle paramétrique

7.1.1 Travail accompli et résultats

À partir de la théorie de l'identification des modèles d'état, il a été proposé des méthodes d'identification basées sur l'utilisation des données temporelles. Les données temporelles ont été privilégiées aux données fréquentielles pour la simple raison que ces dernières sont difficiles à obtenir. En effet, les données de vol brutes sont des données temporelles ; l'extraction des données fréquentielles revient à rejeter certaines données de vol. La possibilité d'utiliser les données de vol temporelles réduit considérablement le nombre de vols de tests à effectuer. Par ailleurs la méthode d'identification des modèles d'état ne nécessite pas des valeurs initiales pour garantir la convergence de l'identification. La convergence de la méthode d'identification dépend uniquement de l'éventail de l'échantillon. Pour le cadre des modèles linéaires, l'éventail des échantillons est déterminé par l'intervalle fréquentiel des entrées. L'intervalle fréquentiel des excitations définit la validité du modèle identifié.

7.1.2 Améliorations et perspectives

La méthode d'identification utilisée nécessite une certaine quantité de données pour garantir la convergence des paramètres identifiés. L'évaluation des paramètres n'est pas efficace à chaque pas de calcul. La méthode utilise les données de plusieurs pas de calcul pour confirmer la validité du paramètre identifié. De plus, les données de vol recueillies au cours des différents tests nécessitent un prétraitement comme la suppression des biais de mesures et l'extraction des données utiles. Pour toutes ces raisons, il est difficile d'appliquer l'identification des paramètres en vol. Pour corriger ce problème, il faut envisager des algorithmes d'identification qui sont présentées dans Young (1984) et Solo et Kong (1995). Young (1984)

fait une étude exhaustive des techniques d'identification récursives alors que Solo et Kong (1995) s'intéresse plus à la convergence asymptotique de ces algorithmes. Ces algorithmes d'identification récursifs découlent d'un traitement de signal adaptatif (Widrow et Stearns (1985)) et une commande adaptative (Astrom et Wittenmark (1989), Landau (1979) et Goodwin et Sin (1984)). Landau (1979) aborde l'approche par modèle de référence qui pourrait être une bonne approche pour compléter le travail présent. Cette approche part d'un modèle de référence qui pourrait être celui obtenu dans l'étude présente. Le modèle est raffiné par la suite avec la capture de nouvelles données. L'identification est dite incrémentale. L'autre limite majeure de la méthode d'identification des modèles d'état est le fait qu'elle n'est applicable que pour les modèles linéaires. Dans le vol de l'hélicoptère, les non-linéarités sont nombreuses et quelques-unes des raisons de ces non-linéarités ont été expliquées. Cependant les méthodes d'identification présentées sont un sous-ensemble des méthodes génériques que sont les méthodes par prédition d'erreur. Ces méthodes peuvent aisément se décliner en des méthodes parfaitement adaptées aux systèmes non linéaires. Pour atteindre cet objectif, il faut généralement considérer des fonctions objectives différentes et des modèles de regression non-linéaires.

7.2 Modèle théorique en vol stationnaire

7.2.1 Travail accompli

Dans le travail présent, l'hélicoptère a été étudié en vol stationnaire et le modèle représenté s'est concentré sur l'assiette de l'hélicoptère en vol stationnaire. Concrètement le modèle obtenu représente les mouvements en roulis et en tangage à une altitude fixe.

7.2.2 Améliorations

Lorsqu'on considère que l'hélicoptère dispose de six degrés de liberté, il reste alors quatre degrés de liberté à couvrir. Il s'agit du mouvement de lacet et les mouvements en translation qui nécessitent l'ajout des capteurs spécifiques à cet effet. Ce point sera présenté dans l'instrumentation embarquée.

Une fois tous les degrés de liberté couverts, l'utilisation des quaternions pourrait être envisagée. Les quaternions présentent un double avantage dans le contrôle de l'hélicoptère. Le premier avantage des quaternions est la simplification du flux de l'information. Au moyen des quaternions, l'essentiel de l'information du mouvement de l'hélicoptère se fait à travers des vecteurs. Cette conceptualisation du mouvement rend l'usage des logiciels de simulation tels que Matlab et Simulink plus abordable. La seconde raison qui milite pour les quaternions est la réduction de la phase de traitement des données de vol. Le quaternion a la capacité de

concentrer les six degrés de liberté en un seul vecteur.

D'un point de vue plus conceptuel, certaines non-linéarités peuvent être prises en compte dans le modèle non-stationnaire. Les non-linéarités introduites par le plateau cyclique peuvent être introduites également dans la représentation actuelle. En effet ces dernières ont été négligées principalement pour maintenir une forme générique au modèle utilisé. Le plateau cyclique dépend du modèle d'hélicoptère choisi. L'introduction du lacet dans le modèle théorique peut introduire des non-linéarités également dans le modèle. Finalement la prise en compte de certains paramètres aérodynamiques peut être également envisagée. Il demeure cependant impératif d'explorer tout à d'abord les méthodes d'identification des systèmes non linéaires avant d'envisager un tel processus.

7.3 Instrumentation embarquée et Banc de tests

7.3.1 Travail accompli

L'instrumentation constitue le banc de tests pour l'acquisition des données. Elle est composée d'un ordinateur embarqué PC/104 sur lequel roule un modèle en temps réel qui permet de faire l'acquisition des paramètres de vol. L'instrumentation embarquée permet de mesurer les données inertielles de l'hélicoptère. La centrale inertuelle donne des mesures de tangage, de roulis et de roulis, de vitesses angulaires et les accélérations. Une fois les paramètres inertIELS connus, il est possible d'implanter tout type de contrôle à partir de l'ordinateur embarqué actuel. Par ailleurs le logiciel embarqué et l'architecture du modèle de simulation permettent d'introduire les types de contrôle sans se soucier des contraintes temporelles imposées par les systèmes embarqués. En effet le modèle de simulation roule à une vitesse de 1 ms. La lecture des données de la centrale inertuelle s'effectue toute les 5 ms et la mise à jour des commandes des servomoteurs toutes les 20 ms. Avec le système embarqué actuel, l'usager n'a plus qu'à se soucier des lois de commande sur le modèle théorique. L'application se fait par discréétisation de la commande obtenue. Une fois la commande discrète obtenue, il faut prendre en considération les temps d'échantillonnage des différentes entités (entrées et sorties). Avec le logiciel de simulation temps réel (*RT-LAB*), l'usager a la possibilité de noter les dépassements de la loi de commande implémentée. Un point intéressant dans le système embarqué est le fait de pouvoir réutiliser l'ordinateur embarqué pour d'autres types d'engins en conservant la même architecture logicielle. Le modèle de simulation n'est pas spécifique à l'hélicoptère. Il peut être utilisé pour n'importe quel type de véhicules (quadrioptères, hexacoptères, avions, sous-marins) qui utilisent les paramètres inertIELS pour son déplacement et des servomoteurs comme actionneurs. L'ordinateur embarqué est utilisable pour les engins et le logiciel embarqué est déployable sur n'importe quel ordinateur embarqué en autant que ce

dernier supporte un système d'exploitation temps-réel *Linux* ou *QNX*. La fiabilité du banc de tests a été testée en supplémentant le contrôleur MICROBLAST au cours des tests en vol.

7.3.2 Améliorations

Certains points restent à considérer au niveau de l'instrumentation embarquée. Au niveau de la stabilisation en position, il a été constaté une certaine dérive à partir de quelques secondes. Ce phénomène de dérive s'explique par l'usage intrinsèque des capteurs inertIELS. Dans les systèmes de navigation moderne, les capteurs inertIELS sont couplés à d'autres systèmes de géolocalisation tels que le GPS pour offrir une option de recalage. L'absence de *GPS* dans notre système embarqué limite grandement les fonctionnalités. L'ajout d'un tel capteur permettra d'améliorer les performances du système en stabilisation stationnaire.

L'autre limite de l'ordinateur embarqué est l'absence d'un système de communication sans-fil permettant de modifier le comportement du programme en plein vol. L'architecture logicielle s'y prête parfaitement. Avec le logiciel RT-LAB, la simulation temps-réel qui s'exécute sur l'ordinateur embarqué peut communiquer avec une console à travers le réseau Ethernet. En ajoutant une carte sans-fil sur le système embarqué, il est possible de régler les paramètres de contrôle en plein vol. Pour l'instant, la télécommande est utilisé à cet effet et le nombre de possibilités est limité.

Les possibilités dans les précédentes sessions que sont la prise en charge des différents degrés de liberté, la prise en compte de nouveaux paramètres dynamiques dans la génération de la portance, se heurtent à un problème de taille de l'ordinateur embarqué : le nombre de cœurs. En effet l'ordinateur embarqué dispose présentement d'un seul cœur. Cette caractéristique limite l'ajout de certaines fonctionnalités comme l'enregistrement vidéo et les algorithmes de reconnaissance. L'exercice fait dans cette maîtrise montre que le contrôle du lacet à travers le rotor de queue peut se découpler du contrôle du roulis et du tangage. Ce découplage se traduit dans le langage informatique par la parallélisation des différentes tâches. Pour garantir un fonctionnement parallèle rigoureux des différentes tâches, il est nécessaire de disposer de plusieurs cœurs physiques. Cette multiplicité des cœurs garantit l'indépendance des échelles temporelles. Ainsi les tâches plus lentes n'affectent pas le fonctionnement des tâches plus rapides. Une analyse exhaustive montre que une topologie à quatre cœurs permettrait de couvrir amplement les besoins de l'hélicoptère. En effet les tâches de contrôle au niveau de l'hélicoptère peuvent être divisées en deux catégories : les tâches critiques rapides et les tâches plus lentes. Le contrôle du lacet peut être considéré comme une tâche critique rapide. En effet, le mouvement du lacet de l'hélicoptère est fortement influencé par l'effet gyroscopique de l'hélice principale qui tourne à une vitesse de 1600 tours par minute. Elle nécessite un contrôle beaucoup plus rapide et le servomoteur disposé à cet effet fonctionne à

une fréquence de 300 Hz (6 fois plus élevé que les autres servomoteurs). Dans le même ordre d'idées, la génération de la portance est un phénomène recursif comme présenté au niveau du modèle théorique. Cette récursivité prend en compte la vitesse de l'appareil et la vitesse de rotation de l'hélice. Il est important d'évaluer l'effet de la portance le plus rapidement possible. Ainsi le contrôle du lacet et la génération de la portance peuvent être effectuées sur le même cœur. Le contrôle du roulis et du tangage et des mouvements en translation peuvent être effectués sur un deuxième cœur. Certaines tâches ne sont pas forcément temps réel mais indispensables pour le fonctionnement du système embarqué. Il s'agit de la sauvegarde des données de vol, l'acquisition vidéo, la navigation (interprétation des commandes de la base au sol et l'intégration des données *GPS*). Cette catégorie peut être disposée sur les deux derniers coeurs.

RÉFÉRENCES

- ASTROM, K. J. (1968). Lectures of the identification problem - the least squares method. Rapport technique, Division of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden.
- ASTROM, K. J. et BOHLIN, T. (1965). Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. *IFAC Symposium on Self-Adaptive Systems, Teddington, England.*
- ASTROM, K. J. et WITTENMARK, B. (1989). *Adaptive Control*. Addison-Wesley, Reading, MA.
- BAK, T. (2002). *Modeling of Mechanical Systems*.
- BOX, G. E. P. et JENKINS (1973). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco.
- BUSKEY, G., WYETH, G. et ROBERTS, J. (2001). Autonomous Helicopter Hover Using an Artificial Neural Network. *IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, Seoul, Korea*. pp. 1435–1440.
- CAI, G. (2011). *Unmanned rotorcraft systems*. London, [Angleterre] : Springer.
- CALLAHAN, C. et BASSET, D. (1987). Application of a Comprehensive Analytical Model of Rotorcraft Aerodynamics (CAMRAD) to the McDonnel Douglas AH-64A Helicopter. *American Helicopter Society, 43rd Annual Forum, St. Louis Missouri, USA*. pp. 243–357.
- CAVALCANTI, S. et PAPINI, M. (2005). Preliminary Model Matching of the EMBRAER 170 Jet. Rapport technique, Institute for Aerospace Studies, University of Toronto.
- CLARKE, T. et SUN, X. D. (1998). Minimal State Space Model Realisation of a Nonlinear Helicopter. *IEEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 145, pp. 415–422.
- DELLER, J. (1990). Set membership identification in digital signal processing. *Accoust. Speech and Signal Process. Mag.*, vol. 6, pp. 4–20.
- FOGEL, E. et HUANG, Y. F. (1982). On the value of information in system identification-bounded noise case. *Automatica*, vol. 18, pp. 224–238.
- FOGH, M., MIKKELSEN, T. H., MUSTAFIC, E., PETTERSEN, R. et SOMMERSET, J. M. (2004). Autonomous helicopter. Rapport technique, AALBORG UNIVERSITY, Department of Control Engineering.
- GAUSS, C. F. (1809). *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. Perthes et Besser.

- GOODWIN, B. et SIN, K. S. (1984). *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- HALD, U., HESSELBÆK, M., HOLMGAARD, J., JENSEN, C., JAKOBSEN, S. et SIEGUMFELDT, M. (2005). Autonomous helicopter modelling and control. Rapport technique, AALBORG UNIVERSITY, Department of Control Engineering.
- HANNAN, E. (1971). Nonlinear time series regression. *Journal of Applied Probability*, vol. 8, pp. 767–780.
- HARMAN, D. et LIU, H. (2005). Robust flight control : A real-time simulation investigation. Rapport technique, Institute for Aerospace Studies, University of Toronto.
- HEFFLEY, R. K. et MNICH, M. A. (1988). Minimum-Complexity Helicopter Simulation Math Model. Rapport technique, NASA.
- HO, B. et KALMAN, R. E. (1966). Efficient construction of linear state variable models from input/output functions. *Regelungstechnik*, vol. 14, pp. 545–548.
- JENNICH, R. (1969). Asymptotic properties of nonlinear least squares estimators. *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 40, pp. 633–643.
- KALOUST, J., HAM, C. et QU, Z. (1997). Nonlinear Autopilot Control for a 2-DOF Helicopter Model. *IEEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 144, pp. 612–616.
- KIENITZ, K., WU, Q. et MANSOUR, M. (1993). Robust Stabilization of a Helicopter Model. *29th Conference on Decision and Control*. pp. 1385–1390.
- KOO, T. J., HOFFMANN, H., SINOPOLI, B. et SASTRY, S. (1998). Hybrid Control of an Autonomous Helicopter. *Preprints of the Third IFAC International Workshop on Motion Control*.
- KOO, T. J. et SASTRY, S. (1998). Output Tracking Control design of a Helicopter Model Based on Approximate Linearization. *37th IEEE Conference on Decision and Control*.
- KUNG, S. (1978). A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition. *12th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers*. pp. 705–714.
- LAGARAIS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H. et E., W. P. (1998). Convergence properties of the nelder-mead simplex in low dimensions. *SIAM Journal of Optimization*, vol. 9, pp. 112–147.
- LANDAU, I. D. (1979). *Adaptive Control. The Model Reference Approach*. Marcel Dekker, New York.
- LARIMORE, W. E. (1990). Canonical variate analysis in identification, filtering and adaptive control. *29th Conference on Decision and Control*. pp. 596–604.

- LEE, E. H., SHIM, H., PARK, H. et LEE, K. I. (1993). Design of Hovering Attitude Controller for a Model Helicopter. *IEEE Inter. Soc. Instrument and Control Engineers*, pp. 1385–1390.
- LJUNG, L. (1974). On Convergence for prediction error identification methods. Rapport technique, Division of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden.
- LJUNG, L. (1999). *System Identification : Theory for the user*. Prentice Hall.
- MAHONY, R. et LOZANO, R. (1999). An Energy Based approach to the regulation of a model helicopter near hover. *European Control Conference*.
- MAHONY, R. et LOZANO, R. (2005). Dynamics of Helicopter with Flexible Rotor Blades. Rapport technique, HEUDIASYC-UTC, France.
- METTLER, B. (2003). *Identification Modeling and Characteristics of Miniature Rotorcraft*. Kluwer Academic Publishers.
- MILANESE, M. et VICINO, A. (1991). Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty : an overview. *Automatica*, vol. 27, pp. 997–1009.
- MORE, J. J. (1977). The levenberg-marquardt algorithm : Implementation and theory. *Lecture Notes in Mathematics 630*, pp. 105–116.
- PADFIELD, G. D. (1996). *Helicopter Flight Dynamics : The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modeling*. AIAA Education Series.
- PROUTY, R. W. (1995). *Helicopter Performance, Stability and Control*. Krieger Publishing Company.
- QIN, S. J. (2006). An overview of subspace identification. *Computers and Chemical Engineering*, vol. 30, pp. 1502–1513.
- ROUGIER, P. (2007). *Mécanique du vol de l'hélicoptère*. Paris : Hermès science : Lavoisier.
- ROZAK, J. N. et RAY, A. (1997). Robust Multivariable Control of Rotorcraft in Forward Flight. *Journal of The American Helicopter Society*, vol. 43, pp. 149–160.
- SCHWEPPE, F. C. (1973). *Uncertain Dynamic Systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J.
- SHIM, H., KOO, T. J. et SASTRY, S. (1998). A comprehensive Study of Control Design for an Autonomous Helicopter. *37th IEEE Conference on Decision and Control*.
- SIRA-RAMIREZ, H., ZRIBI, M. et AHMED, S. (1994). Dynamical Sliding Mode Control Approach for vertical Flight Regulation in Helicopters. *IEEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 141, pp. 19–24.
- SOLO, V. et KONG, X. (1995). *Adaptative Signal Processing Algorithms*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J.

- SOPHER, R., CASSARINO, S. J. et DIVISION, S. A. (1985). Effects of Analytical Modeling Assumptions on the Predicted Stability of a Model Hingeless Rotor. *American Helicopter Society, 41st Annual Forum, Ft. Worth.*
- VAN OVERSCHEE, P. et DEMOOR, B. (1994a). N4SID : Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica*, vol. 30, pp. 75–93.
- VAN OVERSCHEE, P. et DEMOOR, B. (1994b). Unifying theorem for three subspace system identification algorithms. *Automatica*, vol. 31, pp. 1853–1864.
- VAN OVERSCHEE, P. et DEMOOR, B. (1996). *Subspace Identification for Linear Systems : Theory - Implementation - Applications*. Kluwer Academic Publishers.
- VERHAEGEN, M. (1994). Identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations form from input-output data. *Automatica*, vol. 30, pp. 61–74.
- VILCHIS, J. C. A. (2001). *Modélisation et Commande de l'hélicoptère*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- WALKER, G. (1927). On periodicity in series of related terms. *Philosophical Transactions of the Royal Society, ser. A*, vol. 131, pp. 518–532.
- WALTER, E. et PIET-LAHANIER, H. (1990). Estimation of parameter bounds from bounded error data : a survey. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 32, pp. 449–468.
- WHITTLE, P. (1951). *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. Thèse de doctorat, Uppsala University, New York.
- WIDROW, B. et STEARNS, S. (1985). *Adaptative Signal Processing*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- YOUNG, P. C. (1984). *Recursive Estimation and Time-Series Analysis*. Springer Verlag, Berlin.
- YULE, G. U. (1927). On a method for investigating periodicities in disturbed series with special reference to Wolfer's sunspot numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society, ser. A*, vol. 226, pp. 267–298.

ANNEXE A

Analyse spectrale

Dans le cadre du traitement des données mesurées, il a fallu faire l'analyse spectrale des signaux mesurés pour identifier la fréquence fondamentale ou les composantes fréquentielles des signaux mesurés. L'analyse fréquentielle a été requise lors de l'identification de la période des oscillations libres (identification de la matrice d'inertie) et de l'analyse des tests en vol. Le script utilisé est le suivant :

```

1 %% Analyse spectrale des donnees mesurees.
2 %% Auteur: Japhet HONVO
3 %
4 clear all
5
6 %Chargement du fichier de donnees
7 load imu_122316.mat
8 %Formattage et Selection des donnees
9 interest_data = orientation_122316(:,61404:71720);
10 fs = 200;                                % Sample frequency (Hz)
11 t = interest_data(1,:);                  % Time vector
12 t = t - interest_data(1,1);
13 [nbr_row,nbr_col] = size(interest_data);
14 tau =zeros(1,nbr_row-1);
15
16 %% Graphique des oscillations mesurees pour le lacet
17 plot(t,interest_data(2,:))
18 xlabel('Temps (s)')
19 ylabel('Lacet (deg)')
20 title('{\bf Oscillations autour de l''axe de l''helice principale}')
21 % Analyse de Fourrier pour chaque set de donnees
22 for col = 2:nbr_row
23     x = interest_data(col,:)- mean(interest_data(col,:));
24     m = length(x);          % Window length
25     n = pow2(nextpow2(m));  % Transform length
26     y = fft(x,n);          % DFT
27
28     f = (0:n-1)*(fs/n);    % Frequency range
29     power = y.*conj(y)/n;  % Power of the DFT

```

```
30      [a, index] = max(power);
31      tau(col) = 1/f(index);
32
33  end
34 %% Graphique de l'analyse spectrale
35 figure(2)
36 plot(f,power)
37 xlabel('Fréquence (Hz)')
38 ylabel('Puissance')
39 title('{\bf Analyse spectrale}')
```

Il est basé sur la transformée discrète de Fourier.

ANNEXE B

Linéarisation d'un système non linéaire

La linéarisation est une transformation numérique qui permet de trouver un équivalent linéaire à un système précédemment non linéaire autour d'un point d'équilibre. De façon géométrique, il s'agit de déterminer la droite (symbole de la linéarité) qui approxime une courbe (l'analogie d'un modèle non linéaire) en un point donné. De façon analytique, la linéarisation s'opère par le mécanisme de la dérivation. Considérons le système non linéaire défini de la façon suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t),$$

où $x(t)$ représente le vecteur d'états, $u(t)$ représente le vecteur d'entrées et $y(t)$ représente le vecteur de sorties. Pour décrire un modèle linéarisé autour du point d'équilibre (x_0, u_0, y_0) , considérons le changement de variables suivant :

$$\delta x(t) = x(t) - x_0$$

$$\delta u(t) = u(t) - u_0$$

$$\delta y(t) = y(t) - y_0$$

Le modèle linéarisé peut s'exprimer à l'aide des matrices d'état sous la forme suivante :

$$\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t),$$

$$\delta y(t) = C \delta x(t) + D \delta u(t),$$

où A , B , C et D sont les matrices jacobiniennes du système non linéaires définies comme suit :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{t_0, x_0, u_0} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{t_0, x_0, u_0}$$

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{t_0, x_0, u_0} \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{t_0, x_0, u_0}$$

Cette approximation linéaire est valide dans le voisinage du point d'équilibre. En d'autres termes lorsque les valeurs des entrées et des états se situent autour du point d'équilibre, le

système varie de façon linéaire suivant le système (A, B, C, D) .

Dans la pratique, il n'est pas toujours possible de dériver les systèmes tel que les formules précédentes le suggèrent pour déterminer les matrices jacobienes. Aussi on utilise d'autres alternatives pour déterminer l'approximation linéaire. L'approche utilisée par Simulink sera présentée dans les lignes suivantes. Les petites variations des états, des entrées (utilisées au préalable pour démontrer la forme linéarisée d'un système non linéaire) sont matérialisées sous Simulink par des perturbations sur les entrées et sur les états. L'amplitude des perturbations est de l'ordre de $10^{-5} (1 + |x_0|)$. Alors l'évaluation des matrices A, B, C et D correspondant à un bloc Simulink se résume comme suit :

- Exciter les états et les entrées du systèmes avec des perturbations telles que spécifiées précédemment
- Sauvegarder les sorties correspondantes aux différentes excitations
- Évaluer les matrices par les formules suivantes :

$$A(:, i) = \frac{\dot{x}|_{x_{p,i}} - \dot{x}_0}{x_{p,i} - x_0}, \quad B(:, i) = \frac{\dot{x}|_{u_{p,i}} - \dot{x}_0}{u_{p,i} - u_0},$$

$$C(:, i) = \frac{y|_{x_{p,i}} - y_0}{x_{p,i} - x_0}, \quad D(:, i) = \frac{y|_{u_{p,i}} - y_0}{u_{p,i} - u_0},$$

où

$x_{p,i}$ est le vecteur d'états dont la $i^{\text{ème}}$ composante est perturbée autour du point d'équilibre,

x_0 est le vecteur d'états au point d'équilibre,

$u_{p,i}$ est le vecteur d'entrées dont la $i^{\text{ème}}$ composante est perturbée autour du point d'équilibre,

u_0 est le vecteur d'états au point d'équilibre,

$\dot{x}|_{x_{p,i}}$ est la valeur de \dot{x} pour le couple $(x_{p,i}, u_0)$,

$\dot{x}|_{u_{p,i}}$ est la valeur de \dot{x} pour le couple $(x_0, u_{p,i})$,

\dot{x}_0 est la valeur de \dot{x} au point d'équilibre,

$y|_{x_{p,i}}$ est la valeur de la sortie y pour le couple $(x_{p,i}, u_0)$,

$y|_{u_{p,i}}$ est la valeur de la sortie y pour le couple $(x_0, u_{p,i})$,

y_0 est la valeur de la sortie y au point d'équilibre.

Dans le contexte de Simulink, le modèle du système est représenté de façon graphique. Les différentes équations décrivant le système y sont représentées par des blocs. la linéarisation se fait bloc par bloc. La perturbation est propagée des entrées du bloc à linéariser vers les sorties de ce dernier.