

**Titre:** Développement d'une plateforme de simulation et d'un pilote automatique - application aux Cessna Citation X et Hawker 800XP  
Title: [automatique - application aux Cessna Citation X et Hawker 800XP](#)

**Auteur:** Georges Ghazi  
Author: [Georges Ghazi](#)

**Date:** 2014

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Ghazi, G. (2014). Développement d'une plateforme de simulation et d'un pilote automatique - application aux Cessna Citation X et Hawker 800XP [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/1535/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/1535/>  
PolyPublie URL: <https://publications.polymtl.ca/1535/>

**Directeurs de recherche:** Jules O'Shea, Ruxandra Michaela Botez, & Lahcen Saydy  
Advisors: [Jules O'Shea](#), [Ruxandra Michaela Botez](#), [Lahcen Saydy](#)

**Programme:** génie électrique  
Program: [génie électrique](#)

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉVELOPPEMENT D'UNE PLATEFORME DE SIMULATION ET D'UN PILOTE  
AUTOMATIQUE - APPLICATION AUX CESSNA CITATION X ET HAWKER 800XP

GEORGES GHAZI  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)  
AOÛT 2014

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

DÉVELOPPEMENT D'UNE PLATEFORME DE SIMULATION ET D'UN PILOTE AUTOMATIQUE - APPLICATION AUX CESSNA CITATION X ET HAWKER 800XP

présenté par : GHAZI Georges

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SAUSSIÉ David, Ph.D., président

M. O'SHEA Jules, D.Eng., membre et directeur de recherche

Mme BOTEZ Ruxandra M., Ph.D., membre et codirectrice de recherche

M. LAHCEN Saydy, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

Mme AKHRIF Ouassima, Ph.D., membre

## DÉDICACE

*À mes parents,  
À ma soeur et mon frère...*

## REMERCIEMENTS

Les travaux présentés tout au long de ce mémoire ont été effectués dans le cadre d'une collaboration entre l'École Polytechnique de Montréal, l'École Supérieure des Techniques Aéronautiques et de Construction Automobile (ESTACA), de l'École de Technologie Supérieure (ETS) et le Laboratoire de Recherche en Commande Active, Avionique et Aéroservoélasticité (LARCASE).

Mes remerciements les plus sincères vont en premier lieu à mes directeurs de recherche. J'aimerais tout d'abord exprimer ma gratitude envers mon directeur de recherche, M. Jules O'Shea, pour m'avoir permis de réaliser cette maîtrise en collaboration avec le laboratoire LARCASE. Je le remercie tout particulièrement pour son attention, ses précieux conseils et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ce projet. Je remercie ensuite ma codirectrice, Mme Ruxandra Mihaela Botez de m'avoir accepté au sein de son laboratoire de recherche et de m'avoir aidé financièrement durant ces deux ans. Grâce à elle, j'ai eu la chance de pouvoir travailler sur des données d'un simulateur de la compagnie CAE Inc. certifié niveau D. À travers ses encouragements et ses nombreux conseils, elle a su éveiller mon intérêt pour le domaine aéronautique. Enfin, je tiens particulièrement à remercier mon codirecteur M. Saydy Lahcen pour son attention, son aide et ses précieux conseils. Outre ses qualités d'encadreur, il a su en tant que professeur susciter ma passion pour l'automatique.

Mes remerciements vont aussi à l'équipe de CAE et à M. Oscar Carranza Mayo pour avoir mis au point le simulateur de recherche obtenus grâce aux FCI<sup>1</sup> et MDEIE<sup>2</sup> par le professeur Ruxandra Botez.

Je remercie ensuite les membres du jury, M. David Saussié et Mme Ouassima Akhrif pour le temps consacré à la lecture de mon mémoire et pour leur présence à ma soutenance.

J'aimerais par la même occasion, remercier mes collègues du LARCASE, Alejandro Murrieta, Benjamin Gerbe de Thoré, Clément Hamel, David Communier, Dumitru Popescu, Mohamed Guezguez, Oliver Pollender-Moreau, Pierre Contestin, Roberto Félix Patron et Yamina Boughari.

---

1. Fondation Canadienne pour l'Innovation

2. Ministère du Développement Économique, de l'Innovation et de l'Exportation

Enfin, comme disait La Fontaine : “*Un ami. Rien n'est plus commun que le nom, rien n'est plus rare que la chose*”, c'est pourquoi je tiens à remercier mes amis les plus sincères qui n'ont cessé de me supporter et de m'encourager tout au long de ce projet. Cette pensée est tournée particulièrement vers : Ahmed Khalil, Ali Hoballah, Kevin Rezk et Michaël Nasr.

Ces remerciements ne peuvent s'achever, sans une dernière pensée pour ma famille. Malgré la distance, ils n'ont cessé de m'encourager et de me soutenir dans mes projets. Si aujourd'hui je suis arrivé où j'en suis, c'est en grande partie grâce à eux. Qu'ils voient en ce mémoire, le résultat de leur soutien et de tous leurs sacrifices ; je le leur dédie.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente plusieurs méthodologies destinées à la conception d'outils dédiés à l'analyse de la stabilité et au contrôle d'un avion d'affaires. Dans un premier temps, un modèle de vol générique a été élaboré pour prédire le comportement de l'aéronef suite à des entrées sur ses commandes ou suite à une perturbation quelconque. Pour cela, différents types de vents ont été pris en considération dans le module de simulation afin de générer différents scénarios pour l'analyse et la validation du pilote automatique. En plus d'être assez réaliste, la plateforme de simulation prend en compte la variation des paramètres massiques en fonction de la consommation de carburant. Une comparaison avec un simulateur certifié niveau D de la compagnie CAE Inc. a permis de valider cette première étape avec un taux de réussite acceptable.

Une fois la dynamique validée, la prochaine étape permet de conclure sur la stabilité autour d'une condition de vol. Pour cela, une première analyse statique est établie pour trouver les différents points d'équilibre de l'avion. Par la suite, deux algorithmes de linéarisation permettent de générer deux modèles d'états qui approximent les dynamiques découpées (longitudinale et latérale) de l'aéronef. Une comparaison avec la dynamique non linéaire a permis de conclure sur la viabilité des modèles linéaires à partir d'un grand nombre d'essais.

L'étude de stabilité a permis de mettre en évidence le besoin de systèmes de commande pour améliorer les performances de l'avion dans un premier temps, puis pour contrôler ses différents axes dans un deuxième temps. Une méthodologie basée sur un couplage entre une technique de contrôle moderne (LQR) et un algorithme génétique y est présentée. Cette dernière a permis de trouver des correcteurs à la fois optimaux et performants qui garantissent un grand nombre de spécifications imposées par deux cahiers des charges. En plus d'être performants, ces derniers se doivent d'être robustes aux variations massiques de l'avion. Pour cela, une analyse de robustesse grâce à la théorie des applications gardiennes a été appliquée sur des dynamiques incertaines. Cependant, en raison d'une région trop sensible de l'enveloppe de vol, certaines analyses sont biaisées. Néanmoins, une validation sur la dynamique non linéaire a permis de vérifier la robustesse des correcteurs.

Enfin, la dernière étape de ce projet s'intéresse aux lois de commande du pilote automatique. Encore une fois, la méthodologie proposée, se base sur l'association d'équations de la mécanique du vol, de notions d'automatique et d'une méthode d'optimisation

méta-heuristique. Par la suite, quatre scénarios d'essais sont présentés de façon détaillée pour illustrer l'efficacité et la robustesse du pilote automatique au complet.

## ABSTRACT

This report presents several methodologies for the design of tools intended to the analysis of the stability and the control of a business aircraft. At first, a generic flight dynamic model was developed to predict the behavior of the aircraft further to a movement on the control surfaces or further to any disturbance. For that purpose, different categories of winds were considered in the module of simulation to generate various scenarios and conclude about the efficiency of the autopilot. Besides being realistic, the flight model takes into account the variation of the mass parameters according to fuel consumption. A comparison with a simulator of the company CAE Inc. and certified level D allowed to validate this first stage with an acceptable success rate.

Once the dynamics is validated, the next stage deals with the stability around a flight condition. For that purpose, a first static analysis is established to find the trim conditions inside the flight envelop. Then, two algorithms of linearization generate the state space models which approximate the decoupled dynamics (longitudinal and lateral) of the aircraft. Then to test the viability of the linear models, 1,500 comparisons with the nonlinear dynamics have been done with a 100% rate of success.

The study of stability allowed to highlight the need of control systems to improve first the performances of the plane, then to control its different axes. A methodology based on a coupling between a modern control technique (LQR) and a genetic algorithm is presented. This methodology allowed to find optimal and successful controllers which satisfy a large number of specifications. Besides being successful, they have to be robust to uncertainties owed to the variation of mass. Thus, an analysis of robustness using the theory of the guardian maps was applied to uncertain dynamics. However, because of a too sensitive region of the flight envelop, some analyses are biased. Nevertheless, a validation with the nonlinear dynamics allowed to prove the robustness of the controllers over the entire flight envelope.

Finally, the last stage of this project concerned the control laws for the autopilot. Once again, the proposed methodology, bases itself on the association of flight mechanic equations, control theory and a metaheuristic optimization method. Afterward, four detailed test scenarios are presented to illustrate the efficiency and the robustness of the entire autopilot.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xv
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xix
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xx
INTRODUCTION . . . . .	xxiv
CHAPITRE 1 MISE EN CONTEXTE ET ÉTAT DE LA LITTÉRATURE . . . . .	1
1.1 Mise en contexte . . . . .	1
1.2 Objectifs de recherche . . . . .	3
1.3 Revue de littérature . . . . .	4
1.3.1 Modélisation et méthodes d'estimations des coefficients aérodynamiques . . . . .	4
1.3.2 Modélisation de la dynamique du vol et de l'environnement . . . . .	6
1.3.3 Équilibre statique et linéarisation autour d'un point d'équilibre . . . . .	7
1.3.4 Synthèse des compensateurs . . . . .	8
1.3.5 Méthodes d'optimisation numérique . . . . .	10
1.4 Hypothèses considérées . . . . .	11
CHAPITRE 2 DÉVELOPPEMENT D'UNE PLATEFORME DE SIMULATION . . . . .	13
2.1 Introduction aux différents systèmes d'axes et notations . . . . .	13
2.1.1 Systèmes d'axes en aéronautique . . . . .	13
2.1.2 Notations . . . . .	16
2.1.3 Relations de passages entre les différents repères . . . . .	19

2.2	Développement du module de la dynamique du vol . . . . .	24
2.2.1	Modélisation de l'environnement . . . . .	24
2.2.2	Modélisation des moteurs . . . . .	28
2.2.3	Modèle des coefficients aérodynamiques . . . . .	31
2.2.4	Bilan des forces dans le repère avion . . . . .	33
2.2.5	Résolution des équations du mouvement . . . . .	35
2.2.6	Analyse des résultats et première validation . . . . .	37
2.3	Modélisation des actionneurs et des capteurs . . . . .	41
2.3.1	Modèles des actionneurs et du manche . . . . .	41
2.3.2	Modélisation des capteurs (gyromètres et accéléromètres) . . . . .	43
2.3.3	Modélisation des délais . . . . .	44
2.3.4	Modélisation du pilote . . . . .	44
<b>CHAPITRE 3 ALGORITHMES D'ÉQUILIBRAGE ET DE LINÉARISATION . . . . .</b>		<b>45</b>
3.1	Notions générales sur les systèmes non linéaires . . . . .	45
3.2	Stabilité statique et algorithme d'équilibre appliqué à un avion . . . . .	47
3.2.1	Conditions d'équilibre statique d'un aéronef . . . . .	48
3.2.2	Présentation de l'algorithme de Nelder-Mead . . . . .	50
3.2.3	Application à un avion . . . . .	53
3.3	Linéarisation autour d'un point d'équilibre . . . . .	55
3.3.1	Découplage des mouvements longitudinaux et latéraux . . . . .	55
3.3.2	Calcul numérique d'une matrice jacobienne . . . . .	57
3.3.3	Application à un avion . . . . .	58
3.4	Analyse de la stabilité d'un avion . . . . .	61
3.4.1	Analyse des modes d'un avion . . . . .	61
3.4.2	Influence de l'altitude et de la vitesse sur les modes du Cessna Citation X	63
<b>CHAPITRE 4 CONCEPTION DES LOIS DE COMMANDE INTERNES . . . . .</b>		<b>65</b>
4.1	Commandabilité d'un système non linéaire et commande optimale . . . . .	65
4.2	Architecture de commande et introduction aux qualités de vol . . . . .	68
4.2.1	Architecture de contrôle . . . . .	68
4.2.2	Introduction aux qualités de vol : définitions et spécifications militaires	71
4.2.3	Élaboration d'un cahier des charges . . . . .	76
4.3	Algorithme de contrôle appliqué à la commande de vol . . . . .	77
4.3.1	Présentation de la méthodologie utilisée pour les synthèses des correcteurs	77
4.3.2	Algorithme génétique appliqué à la commande de vol . . . . .	79
4.4	Analyse de la robustesse des correcteurs internes . . . . .	85

4.4.1	Applications gardiennes : définition et propriétés . . . . .	85
4.4.2	Applications gardiennes usuelles . . . . .	87
4.4.3	Exemple d'application : robustesse d'un contrôleur . . . . .	88
4.4.4	Application à la commande de vol . . . . .	91
<b>CHAPITRE 5 CONCEPTION DES LOIS DE COMMANDE POUR LE PILOTE AUTOMATIQUE . . . . .</b>		94
5.1	Présentation des différentes boucles externes et du pilote automatique . . . . .	94
5.2	Pilote automatique pour le mouvement longitudinal . . . . .	96
5.2.1	Mode <i>Altitude Hold</i> . . . . .	97
5.2.2	Mode <i>Vertical Speed</i> . . . . .	98
5.2.3	Mode <i>Altitude Capture</i> . . . . .	99
5.2.4	Mode <i>Flight Level Change</i> . . . . .	102
5.2.5	Mode <i>Autothrottle</i> . . . . .	104
5.3	Pilote automatique pour le mouvement latéral . . . . .	105
5.3.1	Mode <i>Heading Capture and hold</i> . . . . .	105
5.3.2	Mode <i>VOR/DME Capture</i> . . . . .	107
5.3.3	Logique d'engagement du mode de capture d'un VOR/DME . . . . .	109
5.4	Pilote automatique pour l'atterrissage . . . . .	111
5.4.1	Mode <i>Glideslope</i> . . . . .	112
5.4.2	Mode <i>Flare</i> et contact du train d'atterrissage avec la piste . . . . .	114
5.4.3	Mode <i>Localizer</i> . . . . .	115
5.5	Calcul des gains du pilote automatique par méthode d'optimisation . . . . .	116
5.5.1	Méthode d'optimisation par essaim particulaire . . . . .	116
5.5.2	Exemple d'application à l'avion . . . . .	121
5.5.3	Comparaison et validation avec le simulateur du Cessna Citation X de CAE . . . . .	123
<b>CHAPITRE 6 RÉSULTATS ET DISCUSSIONS . . . . .</b>		125
6.1	Validation de la stabilité statique . . . . .	125
6.2	Validation de la linéarisation . . . . .	129
6.3	Validation du contrôle interne . . . . .	135
6.3.1	Vérification du respect du cahier des charges pour le SAS . . . . .	135
6.3.2	Vérification du respect du cahier des charges pour le CSAS . . . . .	141
6.3.3	Validation de la robustesse des boucles internes sur le modèle non linéaire	147
6.3.4	Conclusion . . . . .	150
6.4	Validation des boucles externes . . . . .	150

6.4.1	Scénario 1 : maintien d'altitude à vitesse constante . . . . .	150
6.4.2	Scénario 2 : manœuvre d'évitement d'une montagne . . . . .	155
6.4.3	Scénario 3 : suivi de trajectoire et navigation VOR/DME . . . . .	159
6.4.4	Scénario 4 : approche et atterrissage automatique . . . . .	162
CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS . . . . .		166
RÉFÉRENCES . . . . .		169
ANNEXES . . . . .		173

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Données concernant le Cessna Citation X et le Hawker 800XP . . . . .	6
Tableau 2.1	Données sur le modèle WGS84 . . . . .	23
Tableau 2.2	Caractéristiques des différentes gouvernes . . . . .	42
Tableau 2.3	Caractéristiques des différents instruments de mesure . . . . .	43
Tableau 3.1	Découplage des mouvements au voisinage d'un point d'équilibre . . . . .	56
Tableau 3.2	Définition des modes pour un avion . . . . .	61
Tableau 4.1	Classifications des avions, des phases de vol et des qualités de vol . . . . .	71
Tableau 4.2	Spécifications pour l'amortissement du mode phugoïde . . . . .	72
Tableau 4.3	Spécifications pour l'amortissement du mode <i>short period</i> . . . . .	72
Tableau 4.4	Spécifications pour le mode <i>Dutch roll</i> . . . . .	73
Tableau 4.5	Spécifications pour la constante de temps ( $\tau_{ra}$ ) du mode roulis amorti .	73
Tableau 4.6	Spécifications pour le temps de double amplitude pour le mode spiral .	73
Tableau 4.7	Spécifications temporelles pour le pilotage automatique . . . . .	74
Tableau 4.8	Spécifications temporelles pour le pilotage manuel . . . . .	75
Tableau 4.9	Cahier des charges pour le SAS . . . . .	76
Tableau 4.10	Cahier des charges pour le CSAS . . . . .	76
Tableau 4.11	Notations équivalentes pour les boucles internes . . . . .	78
Tableau 5.1	Classifications des catégories d'approche . . . . .	112
Tableau 6.1	Limites pour les conditions de trim du Cessna Citation X . . . . .	125
Tableau 6.2	Résultats de l'algorithme d'équilibrage pour le Cessna Citation X . . .	126
Tableau 6.3	Essais de validation pour le module de linéarisation . . . . .	129
Tableau 6.4	Caractéristiques dynamiques longitudinales avec et sans SAS . . . . .	136
Tableau 6.5	Caractéristiques dynamiques longitudinales après la stabilisation par le SAS pour le Hawker 800XP . . . . .	137
Tableau 6.6	Caractéristiques dynamiques latérales avec et sans SAS . . . . .	139
Tableau 6.7	Caractéristiques dynamiques latérales après la stabilisation par le SAS pour le Hawker 800XP . . . . .	140
Tableau 6.8	Résultat du contrôle interne de l'angle de tangage en automatique pour le Hawker 800XP . . . . .	142
Tableau 6.9	Résultat du contrôle interne de l'angle de roulis en automatique pour le Hawker 800XP . . . . .	143
Tableau 6.10	Résultat du contrôle interne de l'angle de tangage en manuel pour le Hawker 800XP . . . . .	145

Tableau 6.11	Résultat du contrôle interne de l'angle de roulis en manuel pour le Hawker 800XP	146
Tableau 6.12	Liste des VOR/DME pour le scénario 3	159

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Photos des avions Cessna Citation X et Hawker 800XP . . . . .	5
Figure 1.2	Simulateur de recherche du LARCASE . . . . .	5
Figure 1.3	Illustration de l'architecture pour la commande d'un avion . . . . .	8
Figure 2.1	Représentation des repères $R_b$ , $R_s$ et $R_w$ . . . . .	14
Figure 2.2	Représentation des repères ECEF et NED . . . . .	15
Figure 2.3	Notations des variables dans le repère avion . . . . .	16
Figure 2.4	Représentation de l'attitude de l'avion dans le repère NED . . . . .	17
Figure 2.5	Représentation du modèle WGS84 . . . . .	23
Figure 2.6	Architecture de la plateforme de simulation . . . . .	25
Figure 2.7	Illustration des différents types de vent . . . . .	27
Figure 2.8	Diagramme fonctionnel du moteur TFE731-50R . . . . .	29
Figure 2.9	Diagramme fonctionnel du moteur AE3007C . . . . .	30
Figure 2.10	Comparaison et validation avec le simulateur . . . . .	30
Figure 2.11	Schéma du modèle complet pour les moteurs . . . . .	31
Figure 2.12	Détails des coefficients appliquées à l'avion selon les trois axes . . . . .	32
Figure 2.13	Représentation des distances géométriques des moteurs . . . . .	34
Figure 2.14	Résolution des équations du mouvement sous Simulink . . . . .	37
Figure 2.15	Commandes d'entrée du simulateur de vol de CAE . . . . .	38
Figure 2.16	Résultat de comparaison entre le simulateur de CAE et le modèle Simulink . . . . .	39
Figure 2.17	Plateforme de simulation . . . . .	40
Figure 2.18	Modèle non linéaire pour les actionneurs . . . . .	42
Figure 3.1	Exemple de l'algorithme de Nelder-Mead sur une fonction pour $N = 2$ .	51
Figure 3.2	Validation de l'algorithme « multiNelderMead » sur la fonction d'Ackley	53
Figure 3.3	Représentation de la fonction <i>trim cost</i> sous Simulink . . . . .	54
Figure 3.4	Interface utilisateur : panneau de sélection de la condition de vol . . . .	54
Figure 3.5	Représentation de la fonction $\mathbf{f}_{lon}$ sous Simulink . . . . .	59
Figure 3.6	Représentation de la fonction $\mathbf{f}_{lat}$ sous Simulink . . . . .	59
Figure 3.7	Processus pour les calculs de stabilité . . . . .	60
Figure 3.8	Répartition des modes longitudinaux et latéraux dans le plan complexe	62
Figure 3.9	Évolution du mode <i>short period</i> en fonction de l'altitude et de la vitesse	63
Figure 3.10	Évolution du mode <i>Dutch roll</i> en fonction de l'altitude et de la vitesse .	64
Figure 4.1	Structure de commande par retour d'état . . . . .	67

Figure 4.2	Architecture générale pour la commande d'un avion . . . . .	68
Figure 4.3	Architecture de la boucle interne pour le contrôle de l'angle de tangage	69
Figure 4.4	Architecture de la boucle interne pour le contrôle de l'angle de roulis .	70
Figure 4.5	Illustration du modèle du pilote dans la boucle de pilotage . . . . .	70
Figure 4.6	Réponse d'un système à une entrée de type échelon . . . . .	74
Figure 4.7	Réponse d'un système à une entrée de type rampe . . . . .	75
Figure 4.8	Représentation des boucles internes sous la forme équivalente . . . . .	77
Figure 4.9	Représentations d'une population, d'un individu et d'un chromosome .	81
Figure 4.10	Exemple de croisement en deux points pour le cas $n = 4$ et $m = 2$ . .	82
Figure 4.11	Exemple de croisement binaire . . . . .	82
Figure 4.12	Exemples de croisements par sections . . . . .	83
Figure 4.13	Processus de synthèse des boucles internes . . . . .	84
Figure 4.14	Représentation des régions de stabilité . . . . .	87
Figure 4.15	Suspension active d'une voiture . . . . .	88
Figure 4.16	Analyse de robustesse pour une suspension active de voiture . . . . .	90
Figure 5.1	Panneau du pilote automatique . . . . .	96
Figure 5.2	Projection des vitesses dans le plan longitudinal pour un vol symétrique	97
Figure 5.3	Loi de commande pour le mode <i>Altitude Hold</i> . . . . .	98
Figure 5.4	Loi de commande pour le mode <i>Vertical Speed</i> . . . . .	99
Figure 5.5	Transition entre les modes <i>Vertical Speed</i> et <i>Altitude Capture</i> . . . . .	100
Figure 5.6	Loi de commande pour le mode <i>Altitude Capture</i> . . . . .	101
Figure 5.7	Bilan de forces autour d'une condition d'équilibre . . . . .	102
Figure 5.8	Loi de commande pour le mode <i>Flight Level Change</i> . . . . .	104
Figure 5.9	Loi de commande pour le mode <i>Autothrottle</i> . . . . .	104
Figure 5.10	Illustration d'un virage coordonné . . . . .	105
Figure 5.11	Loi de contrôle pour le mode <i>Heading Capture and Hold</i> . . . . .	107
Figure 5.12	Illustration de la trajectoire de l'avion lors d'une capture d'un VOR/DME	107
Figure 5.13	Loi de commande pour le mode <i>VOR/DME Capture</i> . . . . .	109
Figure 5.14	Capture d'un VOR/DME . . . . .	110
Figure 5.15	Capture du radioalignement de descente . . . . .	112
Figure 5.16	Loi de commande pour le mode <i>Glideslope</i> . . . . .	113
Figure 5.17	Arrondi final lors d'un atterrissage automatique . . . . .	114
Figure 5.18	Capture du radiophare d'alignement de piste . . . . .	115
Figure 5.19	Mouvement groupé d'un banc de poissons . . . . .	116
Figure 5.20	Validation de l'algorithme PSO sur la fonction d'Ackley . . . . .	119
Figure 5.21	Représentation de la fonction d'Easom . . . . .	120

Figure 5.22	Validation de l'algorithme PSO sur la fonction d'Easom . . . . .	120
Figure 5.23	Modèle Simulink pour le calcul des gains du mode de montée verticale .	121
Figure 5.24	Résultats de l'algorithme PSO pour le mode <i>Vertical Speed</i> . . . . .	122
Figure 5.25	Résultats de la comparaison entre le pilote automatique du simulateur de CAE et le pilote automatique de la plateforme de simulation sous Simulink . . . . .	124
Figure 6.1	Résultat de l'algorithme d'équilibrage pour le Cessna Citation X sur 1,500 points de vol . . . . .	127
Figure 6.2	Simulation d'une condition d'équilibre pour le Hawker 800XP . . . . .	128
Figure 6.3	Comparaison des modèles non linéaire et linéaire : cas N°1 . . . . .	130
Figure 6.4	Comparaison des modèles non linéaire et linéaire : cas N°1 (suite) . . .	130
Figure 6.5	Comparaison des modèles non linéaire et linéaire : cas N°2 . . . . .	131
Figure 6.6	Comparaison des modèles non linéaire et linéaire : cas N°2 (suite) . . .	131
Figure 6.7	Validation du cas N°1 sur 1,500 points de vol . . . . .	133
Figure 6.8	Validation du cas N°2 sur 1,500 points de vol . . . . .	134
Figure 6.9	Positions des pôles longitudinaux naturels et stabilisés du Cessna Citation X . . . . .	135
Figure 6.10	Positions des pôles latéraux naturels et stabilisés du Cessna Citation X	138
Figure 6.11	Résultats du contrôle automatique de l'angle de tangage et de l'angle de roulis sur 500 points de vol pour le Cessna Citation X . . . . .	141
Figure 6.12	Résultats du contrôle manuel de l'angle de tangage et de l'angle de roulis sur 500 points de vol pour le Cessna Citation X . . . . .	144
Figure 6.13	Positions des pôles longitudinaux stabilisés du Cessna Citation X sous l'influence d'incertitudes . . . . .	147
Figure 6.14	Analyse de robustesse des boucles internes en mode automatique pour le Cessna Citation X . . . . .	148
Figure 6.15	Analyse de robustesse des boucles internes en mode manuel pour le Cessna Citation X . . . . .	149
Figure 6.16	Profile du vent pour le scénario 1 . . . . .	151
Figure 6.17	Résultat de simulation : scénario n° 1 - maintien d'une altitude à vitesse constante . . . . .	153
Figure 6.18	Résultat de simulation : scénario n° 1 - maintien d'une altitude à vitesse constante (suite) . . . . .	154
Figure 6.19	Résultats de simulation : scénario n° 2 - évitement d'une montagne (1) .	156
Figure 6.20	Résultats de simulation : scénario n° 2 - évitement d'une montagne (2) .	157
Figure 6.21	Résultats de simulation : scénario n° 2 - évitement d'une montagne (3) .	158

Figure 6.22	Résultats de simulation : scénario n° 3 - navigation par VOR/DME . . .	160
Figure 6.23	Résultats de simulation : scénario n° 3 - navigation par VOR/DME (suite) . . . . .	161
Figure 6.24	Résultats de simulation : scénario n° 4 - atterrissage automatique (1) . .	163
Figure 6.25	Résultats de simulation : scénario n° 4 - atterrissage automatique (2) . .	163
Figure 6.26	Résultats de simulation : scénario n° 4 - atterrissage automatique (3) . .	164
Figure A.1	Bilan des coefficients dans le plan longitudinal . . . . .	174
Figure A.2	Distances de références dans le plan longitudinal . . . . .	174
Figure A.3	Bilan des coefficients dans le plan latéral . . . . .	177
Figure C.1	Estimation de l'altitude et la vitesse sans filtre de Kalman . . . . .	187
Figure C.2	Estimation de l'altitude et la vitesse avec filtre de Kalman . . . . .	187

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	CALCULS DES COEFFICIENTS DANS LE REPÈRE STABILITÉ . . . . .	173
Annexe B	DÉFINITION DES COEFFICIENTS AÉRODYNAMIQUES DU CESSNA CITATION X ET CEUX DU HAWKER 800XP . . . . .	179
Annexe C	EXEMPLE D'APPLICATION D'UN FILTRE DE KALMAN . . . . .	181

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Acronymes :

CAS	Command Augmentation System ( <i>Système d'Augmentation de Contrôlabilité</i> )
ISA	International Standard Atmosphere ( <i>Atmosphère type Internationale</i> )
LQG	Linéaire Quadratique Gaussienne
LQR	Linear Quadratic Regulator ( <i>Régulateur Linéaire Quadratique</i> )
MAC	Mean Aerodynamic Chord ( <i>Corde Aérodynamique Moyenne</i> )
N/A	Non Applicable
SAS	Stability Augmentation System ( <i>Système d'Augmentation de Stabilité</i> )
TAS	True Air Speed ( <i>Vitesse vraie</i> )
GA	Algorithme Génétique
PSO	Particle Swarm Optimization ( <i>Optimisation par Essaim Particulaire</i> )

### Symboles et unités de mesure :

$g$	Accélération due aux forces de gravité (m/s <sup>2</sup> )
$h$	Altitude (m)
$\alpha$	Angle d'attaque (rad)
$az_m$	Angle d'azimuth des moteurs (m)
$el_m$	Angle d'élévation des moteurs (m)
$\beta$	Angle de dérapage (rad)
$\psi$	Angle de lacet (rad)
$\phi$	Angle de roulis (rad)
$\theta$	Angle de tangage (rad)
$\nu$	Application gardienne
$x_{ref}$	Centre aérodynamique de l'aile (quart de corde de la MAC)
$CY$	Coefficient de force latérale
$CL$	Coefficient de portance
$CD$	Coefficient de trainée
$Cn$	Coefficient du moment de lacet
$Cl$	Coefficient du moment de roulis
$Cm$	Coefficient du moment de tangage
$CX_{wb}$	Coefficient pour la contribution de l'aile et du fuselage

$CX_{ht}$	Coefficient pour la contribution du stabilisateur horizontal
$CX_{vt}$	Coefficient pour la contribution du stabilisateur vertical
$\tau_m$	Constante de temps des moteurs (s)
$\bar{c}_{wb}$	Corde aérodynamique moyenne de l'aile (m)
$\bar{c}_{ht}$	Corde aérodynamique moyenne du stabilisateur horizontal (m)
$\bar{c}_{vt}$	Corde aérodynamique moyenne du stabilisateur vertical (m)
$TC$	Coût de l'équilibre ( <i>Trim Cost</i> )
$\dot{m}$	Débit massique (kg/s)
$\delta_{r_1}$	Déflexion moyenne de la gouverne de direction n°1 (rad)
$\delta_{r_2}$	Déflexion moyenne de la gouverne de direction n°2 (rad)
$\delta_a$	Déflexion moyenne des ailerons (rad)
$\delta_{splout}$	Déflexion moyenne des déporteurs externes (rad)
$\delta_{splin}$	Déflexion moyenne des déporteurs internes (rad)
$\delta_e$	Déflexion moyenne des élévateurs (rad)
$\delta_{it}$	Déflexion du stabilisateur horizontal (rad)
$\delta_{spbk}$	Déflexions moyenne des aérofreins (rad)
$\Delta_{splout}$	Différence des déflexions des déporteurs externes (rad)
$\Delta_{splin}$	Différence des déflexions des déporteurs internes (rad)
$x_{ht}$	Distance selon l'axe $\vec{x}_b$ entre le centre aérodynamique de l'aile et le centre aérodynamique du stabilisateur horizontal (m).
$x_{vt}$	Distance selon l'axe $\vec{x}_b$ entre le centre aérodynamique de l'aile et le centre aérodynamique du stabilisateur vertical (m).
$z_{ht}$	Distance selon l'axe $\vec{z}_b$ entre le centre de aérodynamique de l'aile et le centre aérodynamique du stabilisateur horizontal (m).
$z_{vt}$	Distance selon l'axe $\vec{z}_b$ entre le centre de aérodynamique de l'aile et le centre aérodynamique du stabilisateur vertical (m).
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Ensemble des matrices carrées réelles de taille $n$
$\xi$	Facteur d'amortissement
$f_{TC}$	Fonction représentant le coût de l'équilibre
$\mathbf{f}$	Fonction vectorielle quelconque représentant la dynamique d'un système non linéaire
$\mathbf{f}_{lon}$	Fonction vectorielle représentant la dynamique latérale
$\mathbf{f}_{lon}$	Fonction vectorielle représentant la dynamique longitudinale
$\partial\Omega$	Frontière du sous-ensemble $\Omega$
$J$	Index de performance quadratique
$IQ_k$	Indice de qualité pour les gains des correcteurs

$IQ_s$	Indice de qualité pour les spécifications du cahier des charges
$IQ$	Indice de qualité total
$Id$	Individus
$L_a$	Latitude (rad)
$L_o$	Longitude (rad)
$m$	Masse de l'avion (kg)
$\rho$	Masse volumique de l'air (kg/m <sup>3</sup> )
<b>B</b>	Matrice d'entrée quelconque
<b>A</b>	Matrice d'état quelconque
$Pp$	Matrice d'individus
<b>I</b>	Matrice d'inertie de l'avion (kg m <sup>2</sup> )
<b>C</b>	Matrice de commandabilité
$P$	Matrice de gain de Riccati
$K$	Matrice de gain par retour d'état
<b>R</b>	Matrice de pondération des entrées
<b>Q</b>	Matrice de pondération des états
<b>B</b>	Matrice issue du produit bialterné
$M$	Nombre de Mach
$\Delta$	Perturbation / Écart
$\delta_{TLA_i}$	Position de la manette des gaz n° $i$ (%)
$x_{cg}$	Position du centre de gravité selon l'axe $\mathbf{x}_b$ (m)
$y_{cg}$	Position du centre de gravité selon l'axe $\mathbf{y}_b$ (m)
$z_{cg}$	Position du centre de gravité selon l'axe $\mathbf{z}_b$ (m)
$x_m$	Position du centre de poussée du moteur selon l'axe $\mathbf{x}_b$ (m)
$y_m$	Position du centre de poussée du moteur selon l'axe $\mathbf{y}_b$ (m)
$z_m$	Position du centre de poussée du moteur selon l'axe $\mathbf{z}_b$ (m)
$\delta_{TLA}$	Position moyenne des manettes des gaz n° $i$ (%)
$\delta_g$	Position moyenne des trains d'atterrissement
$\delta_f$	Position moyenne des volets de bord de fuite (rad)
$T_{max}$	Poussée maximale du moteur (N)
$T_{net}$	Poussée nette du moteur (N)
$P$	Pression de l'air ambiante (Pa)
$\omega$	Pulsation propre (rad/s)
$R_{eq}$	Rayon équatorial
$\Omega$	Sous-ensemble ouvert du plan complexe <b>C</b>
$\sigma(\mathbf{A})$	Spectre de la matrice d'état A

$S_{wb}$	Surface de référence des ailes ( $\text{m}^2$ )
$S_{ht}$	Surface de référence du stabilisateur horizontal ( $\text{m}^2$ )
$S_{vt}$	Surface de référence du stabilisateur vertical ( $\text{m}^2$ )
$T$	Température de l'air ambiante (K)
$CX_{\delta x}$	Variation du coefficient $CX$ par rapport à $\delta x$ ( $\partial CX / \partial \delta x$ )
$\mathbf{x}_{lat}$	Vecteur d'état pour le mouvement latéral
$\mathbf{x}_{lon}$	Vecteur d'état pour le mouvement longitudinal
$\mathbf{x}$	Vecteur d'état quelconque
$\boldsymbol{\eta}_{lat}$	Vecteur de commande pour le mouvement latéral
$\boldsymbol{\eta}_{lon}$	Vecteur de commande pour le mouvement longitudinal
$\boldsymbol{\eta}$	Vecteur de commande quelconque
$\sum \mathbf{F}_{ext}$	Vecteur de force résultante (N)
$\mathbf{F}_p$	Vecteur de la force de pesanteur (N)
$\mathbf{H}$	Vecteur de moment angulaire ( $\text{kg m}^2/\text{s}$ )
$\sum \mathbf{M}_{ext}$	Vecteur de moment résultant (Nm)
$\mathbf{F}_a$	Vecteur des forces aérodynamiques (N)
$\mathbf{F}_m$	Vecteur des forces générées par les moteurs (N)
$\mathbf{M}_a$	Vecteur des moments aérodynamiques (Nm)
$\mathbf{M}_m$	Vecteur des moments générés par les moteurs (Nm)
$\boldsymbol{\omega}$	Vecteur instantané de rotation de l'avion (rad/s)
$\mathbf{X}$	Vecteur quelconque
$r$	Vitesse angulaire de lacet (rad/s)
$p$	Vitesse angulaire de roulis (rad/s)
$q$	Vitesse angulaire de tangage (rad/s)
$V_e$	Vitesse de l'avion par rapport au NED (m/s)
$a$	Vitesse du son (m/s)
$v$	Vitesse latérale (m/s)
$u$	Vitesse longitudinale (m/s)
$w$	Vitesse normale (m/s)
$VS$	Vitesse verticale de l'avion par rapport au NED (m/s)
$V_{tas}$	Vitesse vraie de l'avion par rapport à l'air (m/s)

## INTRODUCTION

En 1891, depuis le haut d'une colline à proximité de Berlin, Otto Lilienthal s'élançait à bord de son deltaplane, effectuant ainsi le premier vol plané contrôlé. Depuis, les inventeurs et aviateurs tels que les frères Wilbur et Orville Wright, Louis Bleriot, Alberto Santos-Dumont, Charles Lindbergh ou Howard Hughes n'ont cessé de repousser leurs limites pour faire avancer le domaine de l'aéronautique. Aujourd'hui encore, les ingénieurs relèvent de nouveaux défis afin de rendre les avions plus sécuritaires, plus écologiques et plus économiques. Grâce à l'avancée numérique, les concepts de modélisation et simulation sont devenus les meilleurs outils pour prédire le comportement et les performances d'un avion dans sa phase de conception. Fiables et peu coûteux, ils permettent de développer des nouvelles méthodes et nouveaux algorithmes qui contribuent grandement à l'avancée de l'aéronautique.

Le Laboratoire de Recherche en Commande Active, Avionique et Aéroservoélasticité (LARCASE) développe de nouvelles méthodologies spécialisées dans la modélisation d'aéronefs afin d'améliorer les outils de conception pour la recherche et les entreprises spécialisées dans l'aéronautique. Maître dans le domaine, ses principaux axes de recherches portent sur l'optimisation de trajectoire, l'étude aérodynamique des profils d'ailes, l'estimation des coefficients aérodynamiques et la commande de vol. Au cours de ces dernières années, le LARCASE a développé un outil informatique, FDerivatives, capable d'estimer les coefficients aérodynamiques d'un avion à partir de sa géométrie. Les travaux développés tout au long de ce mémoire et présentés dans ce document en sont la continuité.

L'objectif principal de ce projet concerne le développement d'outils destinés à la simulation, à l'analyse de la stabilité et au contrôle d'un avion d'affaires. Il se penche, dans un premier temps, sur la conception d'une plateforme générique de simulation, sous Matlab/Simulink, qui permet de prédire le comportement de l'aéronef. Par la suite, des outils informatiques sont développés pour étudier la stabilité statique et dynamique de l'avion. Enfin, des méthodes et des algorithmes de commande sont utilisés pour étudier la conception d'un pilote automatique à la fois performant et robuste.

Le chapitre 1 introduit une mise en contexte et une revue de la littérature pour sensibiliser le lecteur quant à l'intérêt et l'importance des objectifs de ce projet. Nous y présentons aussi, une liste d'hypothèses qui permettent de délimiter le domaine d'étude. Le chapitre 2 est entièrement consacré à la plateforme de simulation. Une introduction aux notions

aéronautiques y est présentée pour permettre au lecteur de bien maîtriser les éléments nécessaires à la mise en équation de la dynamique de vol complète, des modèles de moteurs et de l'environnement extérieur. Le chapitre 3 porte sur l'analyse de stabilité et sur la linéarisation de la dynamique du vol. Une brève introduction sur les notions liées aux systèmes non linéaires et sur la méthode d'optimisation de Nelder-Mead<sup>3</sup> y est présentée avant de montrer la méthodologie et l'application sur un modèle d'avion. Les chapitres 4 et 5 traitent de techniques utilisant des algorithmes d'optimisation métaheuristiques pour développer des lois de commande du pilote automatique. Une procédure complète destinée à obtenir des correcteurs à la fois performants, optimaux et robustes y est présentée. Enfin, le chapitre 6 illustre l'ensemble des résultats obtenus tout au long de ce projet.

---

3. La méthode de Nelder-Mead est un algorithme d'optimisation non-linéaire qui a été publiée par Nelder et Mead

## CHAPITRE 1 MISE EN CONTEXTE ET ÉTAT DE LA LITTÉRATURE

Ce présent chapitre donne une idée générale du projet. Un court survol et une revue de la littérature y sont présentés afin de permettre au lecteur d'entrer dans le contexte actuel et d'être ainsi au courant de certains ouvrages et outils existants dans le domaine de la simulation, de l'analyse de stabilité et de l'automatique appliquée aux avions. Nous discuterons des différentes disciplines et outils mathématiques qui ont été nécessaires au déroulement du projet. Pour finir, nous présenterons les hypothèses qui ont été choisies pour mener à bien ce projet.

### 1.1 Mise en contexte

Avec la mondialisation et le besoin de se déplacer, les futurs avions se doivent d'être de plus en plus sécuritaires et fiables pour assurer le confort et la sécurité des passagers tout en étant le plus économique possible pour les compagnies aériennes. De ce fait, durant la phase de conception d'un aéronef, les ingénieurs doivent valider un grand nombre de spécifications ou de normes imposées soit par des agences de certification telles que Transport Canada, FAA<sup>1</sup> ou EASA<sup>2</sup>, soit par le constructeur lui même. Il est donc nécessaire de faire beaucoup d'essais en vol pour valider la stabilité de l'aéronef dans un premier temps, mais aussi sa manœuvrabilité et son efficacité dans les phases de vol critiques telles que l'approche ou l'atterrissement automatique. Cependant, les essais en vol sont très coûteux et peuvent risquer la vie des pilotes et ingénieurs d'essais. C'est à ce niveau que la modélisation numérique prend donc toute son importance. Les ingénieurs font de plus en plus de modèles de simulation afin de valider un grand nombre de critères permettant de conclure quant à la réalisabilité d'un projet avant de reproduire les essais sur le prototype réel.

Sur la base d'un modèle mathématique de l'avion, il est possible de faire des analyses de stabilité statique et dynamique permettant de définir l'enveloppe de vol qui reflète les performances de l'aéronef. Une enveloppe de vol définit les régions en terme d'altitude/vitesse ou masse/centrage dans lesquelles l'avion demeure stable, ou dans le pire des cas, ce dernier peut être instable, mais le pilote est capable de le stabiliser sans trop de difficultés. D'autres facteurs peuvent être pris en considération pour délimiter ces régions comme la configuration des gouvernes (ex. volets de bord de fuite et volet de bord d'attaque) ou des contraintes

---

1. Administration Fédérale de l'Aviation (*Federal Aviation Administration*).

2. Agence Européenne de la Sécurité Aérienne (*European Aviation Safety Agency*).

concernant la réduction des effets aéroélastiques (ex. battement, rafale de vent, etc.). Cependant, en raison de leur complexité, les phénomènes aéroélastiques ne seront pas pris en compte dans ce mémoire.

Une fois la stabilité confirmée, l'étape suivante consiste à développer les lois de commande pour le pilotage automatique et le pilotage manuel. Le rôle d'un pilote automatique est multiple et est généralement divisé en sous-tâches. En effet, même si les avions peuvent être naturellement stables, ils possèdent généralement des caractéristiques de stabilité peu performantes. Les modes qui déterminent la réponse naturelle de l'avion suite à un mouvement des gouvernes ou une perturbation atmosphérique, sont souvent très mal amortis et très lents. Ceci rend donc le pilotage de l'avion difficile, car la moindre perturbation sur le manche peut entraîner de grands mouvements oscillatoires. De plus, les perturbations dues au vent provoquent des oscillations difficiles à contrer par le pilote seul.

Le premier rôle de la commande de vol est donc d'améliorer les performances de l'avion afin d'assurer une convergence rapide et en douceur vers une condition stable lors d'une éventuelle perturbation. Le deuxième rôle est double et permet soit de passer en mode pilotage automatique, c'est-à-dire que le pilote automatique gère les mouvements de l'avion pour effectuer une consigne venant du pilote (ex : un changement d'altitude, un changement de cap ou une approche automatique en cas de visibilité nulle) ou provenant du FMS<sup>3</sup> (ex. trajectoire précise à suivre) ; soit de passer en pilotage manuel, c'est-à-dire que le pilote contrôle le mouvement de l'avion, mais est assisté par l'ordinateur de commande de vol pour assurer que l'aéronef répond bien à ses exigences. Ce dernier mode du pilote automatique est similaire à la direction assistée pour une voiture qui assure au conducteur une bonne manœuvre de son engin. Il va donc de soi que pour le pilotage manuel, il existe certaines qualités de manœuvrabilité que les pilotes aimeraient satisfaire lorsqu'ils sont aux commandes.

Enfin, malgré nos connaissances accrues des lois physiques, les modèles mathématiques utilisés lors de la synthèse des correcteurs sont généralement simplifiés à cause de certaines hypothèses considérées. Il convient dès lors de parler de modèles mathématiques incertains, constitués d'un ensemble de lois mathématiques qui régissent le comportement de l'avion et d'une représentation mathématique des incertitudes. Ces incertitudes peuvent avoir plusieurs origines : évolution du modèle en fonction du temps, incertitude de mesures provenant des capteurs, approximation d'une dynamique interne ou hypothèse de modélisation. Il est donc

---

3. Système de Gestion de Vol (*Flight Management System*).

important de vérifier que le pilote automatique soit capable de fonctionner pour une famille de modèles autour du point nominal pour lequel il a été conçu. À cet effet, une analyse de robustesse peut être envisagée. Cette analyse permet de quantifier la capacité qu'a un système de commande, à conserver ses performances malgré la présence d'incertitudes ou de perturbations qui pourraient affecter le comportement de l'avion.

Le projet présenté dans ce mémoire tente de répondre à l'ensemble des problèmes présentés précédemment dans cette mise en contexte. Il a été réalisé dans le cadre d'un double diplôme entre l'ESTACA et l'École Polytechnique de Montréal et en partenariat avec le laboratoire LARCASE, l'École de Technologie Supérieure, la compagnie CAE Inc. et la compagnie PRESAGIS.

## 1.2 Objectifs de recherche

À la lumière de cette mise en contexte, nous pouvons dégager l'objectif principal de ce mémoire qui peut être résumé de la façon suivante :

*“Développer une plateforme de simulation générique et des méthodologies pour la synthèse d'un pilote automatique à la fois performant et robuste.”*

Pour tenter d'atteindre cet objectif, nous proposons de scinder l'étude en deux parties. Dans un premier temps, nous consacrerons le **chapitre 2** du mémoire à la conception d'une plateforme de simulation générique. Cette dernière constituera la pierre d'angle de ce projet car en plus de prédire le comportement de l'aéronef, celle-ci permettra de confirmer l'efficacité du pilote automatique au moyen de simulations. Outre son degré de réalisme, elle devra en plus être modulaire afin de permettre l'intégration de différents algorithmes de commande.

Dans un second temps, des méthodologies de synthèse basées sur des algorithmes d'optimisation métaheuristiques seront développées. Elles permettront de régler les gains de différentes lois de contrôle tout en satisfaisant un grand nombre de spécifications que nous élaborerons à partir des qualités de manœuvrabilité. En plus de garantir une certaine performance, nous tenterons de démontrer la robustesse des différentes boucles de commande face à des variations paramétriques ou à des perturbations affectant le comportement de l'avion.

L'ensemble des travaux a été effectué avec le logiciel Matlab/Simulink [26, 44] pour le

développement des algorithmes et de la plateforme de simulation. Le logiciel de simulation FlightGear [31] a été utilisé pour obtenir un visuel en trois dimensions dans un environnement virtuel assez réaliste. Enfin, le logiciel FlightSIM [36], développé par PRESAGIS a été utilisé pour le développement du modèle dynamique des avions.

### 1.3 Revue de littérature

Comme présenté dans les objectifs, ce projet englobe plusieurs disciplines différentes, mais toutes aussi importantes dans le domaine de la simulation d'aéronefs. Pour répondre aux problèmes posés, nous avons fait appel aux théories liées à :

1. La modélisation des coefficients aérodynamiques,
2. La modélisation de la dynamique du vol,
3. La linéarisation autour d'un point d'équilibre,
4. La synthèse d'un correcteur pour une condition de vol,
5. L'optimisation numérique.

En somme, cinq domaines qui peuvent être traités séparément, mais qui ont besoin de former un tout. Dans la suite, nous détaillons chacune des cinq étapes à partir de la littérature actuelle.

#### 1.3.1 Modélisation et méthodes d'estimations des coefficients aérodynamiques

La modélisation débute avec le calcul des coefficients aérodynamiques de l'aéronef. Ces derniers sont nécessaires pour déterminer les forces qui s'appliquent sur l'avion (portance, traînée, etc.). Dépendamment de la précision recherchée et des budgets alloués, différentes méthodes peuvent être envisagées pour estimer les caractéristiques aérodynamiques d'un avion. Parmi les plus connues, nous pouvons citer :

- les méthodes d'estimations des paramètres à partir de mesures expérimentales [2, 17],
- les méthodes CFD (*Computational Fluid Dynamics*) basées sur la résolution des équations de Navier et Stokes [15],
- la méthode VLM (*Vortex Lattice Method*) utilisée par le programme TORNADO [27],
- les procédures DATCOM [1, 45, 49].

Bien que nous ne traiterons pas de l'estimation des paramètres aérodynamiques dans ce mémoire, nous mentionnons ces méthodes pour sensibiliser le lecteur au fait que l'expression servant au calcul des coefficients aérodynamiques varie selon les concepteurs d'un avion à un autre. Ce détail est d'une grande importance et doit être pris en compte afin de

garantir que les algorithmes d'équilibrage, de linéarisation et de contrôle développés dans ce mémoire puissent s'adapter quelque soit le modèle aérodynamique considéré. Pour cela, dans le cadre de ce projet, les cas de deux avions d'affaires vont servir à valider les différentes méthodologies présentées tout au long de ce mémoire.

Le premier avion considéré est le Cessna Citation X [9] (voir Figure 1.1(a)). Son modèle aérodynamique sera élaboré à partir de coefficients extraits d'un simulateur de vol certifié catégorie D de la compagnie CAE Inc. (voir Figure 1.2). Le deuxième avion étudié est le Hawker 800XP [7, 10] (voir Figure 1.1(b)). Son modèle aérodynamique sera obtenu à partir du logiciel FDerivative [1, 34]. Ce programme, développé au sein du laboratoire de recherche LARCASE, permet d'estimer les coefficients aérodynamiques en régime subsonique et dans le domaine linéaire (hors décrochage). Il est basé sur les procédures DATCOM auxquelles, des améliorations ont été ajoutées pour augmenter la qualité des résultats.



(a) Photo du Cessna Citation X



(b) Photo du Hawker 800XP

Figure 1.1 Photos des avions Cessna Citation X et Hawker 800XP



Figure 1.2 Simulateur de recherche du LARCASE

Le Tableau 1.1 regroupe les informations générales concernant les deux avions. Ces données proviennent principalement de la compagnie CAE Inc.

Tableau 1.1 Données concernant le Cessna Citation X et le Hawker 800XP

Données	Cessna Citation X	Hawker 800XP
<i>Données géométriques et massiques</i>		
<b>Longueur</b> [m]	22.04	15.60
<b>Envergure</b> [m]	19.48	15.66
<b>Hauteur</b> [m]	05.86	05.51
<b>Surface des ailes</b> [m <sup>2</sup> ]	49.00	34.75
<b>Masse maximale</b> [Kg]	16,511	12,755
<i>Données moteurs</i>		
<b>Type de moteurs</b>	Turbofan : Rolls-Royces/Allison AE 3007C1	Turbofan : Honeywell Aerospace TFE 731-50R
<b>Poussée max.</b> [kN]	30.09	20.73
<i>Performances</i>		
<b>Altitude maximale</b> [pi]	51,000	41,000
<b>Vitesse maximale</b> [nds]	525 à 35,000 pi	448 à 35,000 pi
<b>Mach maximal</b>	0.92	0.80

### 1.3.2 Modélisation de la dynamique du vol et de l'environnement

L'étape suivante consiste à modéliser la dynamique du vol de l'avion en se basant sur l'étude des coefficients aérodynamiques. Ce module permet de prédire et de quantifier le mouvement de l'aéronef suite à une entrée sur les gouvernes de l'avion et sur la manette des gaz, ou suite à une perturbation atmosphérique.

Comme tout corps dans l'espace, un aéronef peut être considéré tel un solide indéformable à six<sup>4</sup> degrés de liberté [11, 30, 41, 46]. Sous cette hypothèse, il est possible alors de modéliser l'avion en considérant la masse concentrée au centre de masse sur lequel sont appliquées les forces qui régissent son mouvement. Selon Yechout [50], les forces et moments peuvent être classés en trois catégories selon leur origine : inertielle, propulsive et aérodynamique. Cette dernière catégorie, inclus les effets dus à la position des gouvernes et les effets dus aux perturbations atmosphériques. Pour cela, un modèle d'atmosphère standard (ISA<sup>5</sup>)[50] ainsi

4. Nous verrons plus tard que nous pouvons considérer jusqu'à neuf degrés de liberté.

5. Atmosphère Standard Internationale (*International Standard Atmosphere*).

que différents types de vents seront considérés et incorporés à la plateforme de simulation.

De même, un modèle de gravité non constant, basé sur la représentation WGS84<sup>6</sup> sera pris en compte dans le but d'augmenter le réalisme du module de simulation. Pour finir, comme proposé dans de nombreux ouvrages [11, 41, 50], les équations du mouvement de l'avion seront obtenues à partir de la seconde loi de Newton.

Les résultats obtenus sur le Cessna Citation X permettront de valider la plateforme de simulation tandis que ceux du Hawker 800XP permettront de valider son aspect générique en démontrant sa capacité à s'adapter à différents modèles.

### 1.3.3 Équilibre statique et linéarisation autour d'un point d'équilibre

Une fois le modèle mathématique de la dynamique du vol établi, l'étape suivante consiste à faire une analyse de la stabilité statique dans un premier temps, puis dynamique dans un deuxième temps.

Un avion est dit stable statiquement s'il est possible de trouver un point d'équilibre pour une condition de vol. C'est-à-dire qu'il faut régler les commandes (ex. stabilisateurs, élévateurs, manette des gaz, etc.) qui assurent le maintien de l'attitude de l'avion en absence de vent lorsque l'altitude, la vitesse et la poussée sont constantes [11, 50]. Sous ces conditions, nous dirons que l'avion est équilibré ou est en condition de *trim*. Le modèle étant purement non linéaire, il peut exister plusieurs points d'équilibre [24].

Plusieurs publications présentent des méthodes pour trouver ces conditions de *trim* à partir de la forme analytique des coefficients aérodynamiques. Par exemple, Roskam dans [40] ou encore Cook dans [11] présentent dans leurs ouvrages une série d'équations qui permettent de trouver une telle condition. Cependant, il est important de mentionner que ces équations ne s'appliquent que si les coefficients sont sous le format proposé par les deux auteurs. Or, d'un avion à un autre ou d'une méthode de calcul aérodynamique à une autre, rien ne peut garantir l'unicité dans la formulation des coefficients. Les deux aéronefs utilisés dans ce projet en sont la preuve même. En effet, le modèle aérodynamique provenant de deux sources et méthodes différentes, il est impossible d'y appliquer les mêmes équations pour trouver les conditions d'équilibre.

Pour pallier à ce problème, nous verrons qu'une méthode d'optimisation numérique, comme proposé par Stevens et Lewis dans [46], peut être utilisée afin de pouvoir obtenir l'aspect générique recherché. Ceci permettra d'adapter nos algorithmes à d'autres modèles

---

6. *World Geodetic System*.

mathématiques selon la formulation des coefficients.

Une fois l'avion capable d'évoluer de façon uniforme lorsqu'il est en condition de *trim* et dans un environnement non perturbé, la question qu'il faut se poser est : que se passe-t-il s'il est perturbé autour de cet état d'équilibre ? La réponse se trouve dans l'étude de la stabilité dynamique [11, 13, 41] ou plus précisément dans l'étude du linéarisé tangent [24]. Pour cela, il est nécessaire de linéariser les équations du mouvement de l'avion autour d'un point d'équilibre afin d'obtenir un modèle linéaire sous forme de matrices d'état qui permet de conclure sur la stabilité dynamique. Encore une fois, des systèmes d'équations symboliques existent dans de nombreux ouvrages [11, 30, 40, 41, 46, 47] et permettent d'obtenir les matrices en question directement à partir des coefficients aérodynamiques et de leurs dérivées, mais ici aussi, ces méthodes restent fidèles aux différents modèles aérodynamiques proposés par les auteurs. Il n'est donc pas possible d'appliquer les mêmes équations aux deux avions considérés dans ce mémoire. Toujours dans le but d'obtenir des algorithmes génériques, une approche purement numérique sera considérée en supposant la dynamique complète de l'avion comme celle d'une boîte noire [46].

Pour finir, les matrices obtenues ne seront pas uniquement destinées à l'analyse de stabilité, mais elles seront aussi utilisées pour la commande.

### 1.3.4 Synthèse des compensateurs

#### Architecture du pilote automatique

La conception d'un pilote automatique complet implique la synthèse de plusieurs contrôleurs. En effet, la structure d'un pilote automatique comporte plusieurs boucles de contrôle [47]. La Figure 1.3 illustre les différentes boucles de commande que l'on peut retrouver dans un avion moderne.

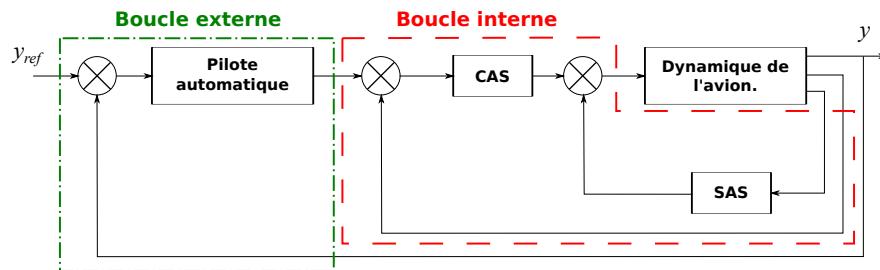


Figure 1.3 Illustration de l'architecture pour la commande d'un avion

Une première boucle de commande, appelée boucle interne, permet d'améliorer les qualités

de vol naturelles de l'avion ainsi que sa manœuvrabilité. Cette boucle de commande est généralement constituée d'un système d'augmentation de stabilité (SAS) et d'un système d'augmentation de contrôlabilité (CAS) [46, 47].

Une deuxième boucle de commande, appelée boucle externe, permet de traduire la commande du pilote ou du système de gestion de vol en terme de commande pour la boucle interne. Elle est aussi divisée en plusieurs sous-boucles dépendamment des modes que le pilote automatique possède. Nous en listons ici quelques-uns :

- ◊ mode de maintien de la vitesse verticale,
- ◊ mode de maintien d'altitude,
- ◊ mode de capture de cap,
- ◊ mode de maintien de la vitesse.

## Méthodes de synthèse

Les théories portant sur la commande étant très diversifiées, il est possible de résoudre le problème du contrôle sous une multitude d'aspects. En effet, nombreux sont les auteurs qui ont développé différentes méthodes de contrôle appliquées aux avions. Parmi elles, on retrouve notamment les méthodes classiques comme proposées par Stevens et Lewis dans [46] ou Nelson dans [30]. Ces méthodes reposent principalement sur la synthèse d'une seule boucle à la fois. Bien qu'elles produisent des correcteurs très simples, elles requièrent une très bonne connaissance du modèle étudié et peuvent être longues à concevoir en raison du nombre de boucles.

Plus rapides et plus performantes [25], les commandes modernes permettent de traiter les systèmes multivariables (MIMO : *Multi-Input, Multi-Output*) et donc de concevoir plusieurs boucles en même temps. C'est le cas notamment de la méthode LQR (*Linear Quadratic Regulator*) [18, 25]. Dans son livre, Tewari [47] propose plusieurs modèles de contrôle en s'appuyant principalement sur cette méthode ou sur des variantes (LQG ou  $H_2$ ). Ce processus se base sur du retour d'état et donc suppose que tous les états de l'avion sont mesurables ou au pire des cas estimables. Or tous les avions de nos jours sont équipés d'une centrale inertielle qui permet d'estimer les paramètres de vol grâce à un filtre de Kalman ce qui facilite grandement l'implémentation de ces méthodes.

Cependant, même si les commandes modernes garantissent de bonnes performances sur le système en boucle fermée, elles n'assurent pas forcément la robustesse du système de commande.

Pour obtenir un contrôleur robuste, il est nécessaire de faire appel à d'autres théories de la commande. Plusieurs approches sont envisageables et peuvent être appliquées à la commande de vol. Saussié dans [42] présente une méthodologie utilisant la synthèse  $H_\infty$  pour obtenir un contrôleur à la fois performant et robuste face à des incertitudes sur la masse et le centrage d'un avion civil. La  $\mu$ -analyse et la  $\mu$ -synthèse aussi peuvent être envisagées pour le contrôle robuste d'un avion comme présenté par Reiner et *al.* dans [38]. Bien que ces méthodes offrent de bon résultats quant à la robustesse et la performance des contrôleurs, elles possèdent néanmoins un inconvénient commun. En effet, les correcteurs obtenus sont généralement d'ordre très élevés, ce qui peut rendre leur implémentation plus complexe.

Enfin, les applications gardiennes, développées par Saydy et *al.* [43], peuvent aussi être considérées pour étudier la robustesse d'un système de commande. Elles permettent de conclure sur la stabilité généralisée en terme de confinement des valeurs propres d'un système à l'intérieur d'un domaine du plan complexe.

Le processus de synthèse du pilote automatique présenté dans ce mémoire, tente de regrouper les différents avantages des méthodes citées dans cette section. Pour cela, une méthodologie basée sur la théorie LQR couplée avec une architecture classique sera utilisée. L'utilisation d'algorithmes d'optimisation numérique permettra de calculer un grand nombre de paramètres nécessaires à la conception de l'autopilote complet. Pour finir, grâce aux applications gardiennes, une analyse de robustesse permettra de valider le contrôleur sur toute l'enveloppe de vol en considérant des incertitudes paramétriques sur la masse et le centrage et des incertitudes des mesures sur des variables telles que l'altitude ou la vitesse.

### 1.3.5 Méthodes d'optimisation numérique

Dans le cadre de ce projet, trois algorithmes d'optimisation seront utilisés pour la minimisation de fonctions appliquée au contrôle de l'avion.

Le premier algorithme, de type déterministe, se base sur la méthode du simplexe [16]. Il sera utilisé pour obtenir les différents points d'équilibre de l'avion. L'avantage de cette méthode est qu'elle est capable d'estimer une direction de descente afin de rechercher un minimum local sans avoir à dériver la fonction à optimiser. Ceci peut s'avérer très pratique, car dans la majorité des cas, il est très difficile de donner une forme analytique de la fonction à optimiser et dans le pire des cas, il est possible que la fonction à optimiser se limite à une relation entrée-sortie.

Les deux autres algorithmes sont (1) l’Algorithme Génétique (GA) et (2) l’Optimisation par Essaim Particulaire (PSO : *Particle Swarm Optimization*). Ils rentrent dans la catégorie des algorithmes stochastiques, car ils se basent sur le comportement d’êtres vivants. Le GA utilise le principe de reproduction et de sélection naturelle élaboré par Darwin [28]. À chaque génération, une population d’individus, tous pouvant être des solutions potentielles, est évaluée et les meilleurs sont sélectionnés pour la génération suivante. Un croisement des individus permet de créer de nouveaux individus qui intègreront la génération suivante et transmettront le patrimoine génétique de leurs parents. Bien que cette méthode ait fait ses preuves dans le calcul des pondérations optimales pour la méthode LQR [3, 4, 12], nous tenterons de l’améliorer en introduisant la notion d’individu cobaye. Cette partie sera traitée plus en détail dans le **chapitre 4**.

Le PSO quant à lui, se rapproche du comportement de mouvement de masse comme le font les insectes ou les oiseaux [23, 32]. L’idée générale est que chaque particule se déplace dans un environnement de solutions possibles tout en restant en groupe. Ce mouvement de masse permet ainsi de sonder l’espace et de trouver des solutions possibles. Son principe et son application seront traités plus en détails dans le **chapitre 5**.

## 1.4 Hypothèses considérées

Pour atteindre l’objectif principal énoncé dans la **section 1.2**, il est nécessaire de considérer un domaine d’étude délimité par certaines hypothèses. Ces dernières sont prises en compte pour des raisons simplificatrices ou pour des raisons liées au manque de données dans la modélisation. Les hypothèses sont listées ci-dessous :

- ◊ L’avion sera considéré comme un corps rigide et les effets d’aéroélasticité seront négligés.
- ◊ Une atmosphère standard internationale (ISA) sans déviation  $\Delta\text{ISA}$  sera considérée.
- ◊ Les gouvernes sont déjà asservies en position.
- ◊ Les gouvernes de l’avion sont modélisées par des fonctions de transfert d’ordre deux avec l’ajout de saturations en position et vitesse.
- ◊ L’efficacité des gouvernes n’est pas affectée par les conditions de vol.
- ◊ Les capteurs (gyromètres, accéléromètres, baromètres, etc.) seront modélisés par des systèmes d’ordre un ou d’ordre deux.
- ◊ Les moments d’inertie de l’avion ne dépendent que de la masse et du centrage de l’avion qui évoluent en fonction du carburant consommé.
- ◊ Le modèle générique utilisé pour les moteurs ne dépend que du nombre de Mach, de

l'altitude et de la position de la manette des gaz.

- ◊ Une approximation de la dynamique du moteur par un modèle d'ordre un sera considéré.
- ◊ Toutes les lois de contrôles seront conçues en utilisant un modèle continu et non discret.
- ◊ Les lois de contrôle ne seront calculées que dans le domaine linéaire excluant le décrochage.
- ◊ Le pilote automatique ne conduira jamais l'aéronef en dehors des domaines stables délimités par l'enveloppe de vol.
- ◊ Les retards purs dus à la présence de l'ordinateur de commande de vol seront approximés par des fonctions Padé d'ordre cinq.

## CHAPITRE 2 DÉVELOPPEMENT D'UNE PLATEFORME DE SIMULATION

Dans ce chapitre nous abordons la modélisation générale de la dynamique du vol d'un avion. Dans un premier temps, nous définirons les différents espaces et notations qui sont utilisés pour décrire le mouvement d'un aéronef. Puis dans un second temps, nous présenterons l'architecture de la plateforme de simulation ainsi que les différents modules qui la composent. Pour cela, nous présenterons en premier le module d'environnement qui regroupe les modèles d'atmosphère, de vent et de gravité. Puis, nous élaborerons les équations qui ont été nécessaires à l'obtention d'un modèle générique des moteurs. Ensuite, nous présenterons les coefficients aérodynamiques avant de traiter des équations du mouvement et de leur résolution. Au terme de cette étape, une première validation avec le simulateur de CAE Inc. sera présentée pour conclure sur le module concernant la dynamique du vol. Enfin, nous terminerons en définissant les modèles des actionneurs et des capteurs.

### 2.1 Introduction aux différents systèmes d'axes et notations

Dans cette section nous présentons les différents systèmes d'axes et notations qui permettent de décrire et quantifier le mouvement de l'avion. En mécanique du vol, le choix des repères peut s'avérer être judicieux car ils permettent très souvent de simplifier les équations du mouvement [11, 50]. De plus, les forces qui agissent sur l'avion étant de natures différentes (inertielle, propulsive et aérodynamique), certaines d'entre elles ne s'expriment aisément que dans un repère spécifique. Il est donc nécessaire de définir plusieurs systèmes d'axes et de préciser les différentes relations qui les relient.

#### 2.1.1 Systèmes d'axes en aéronautique

En mécanique du vol, on distingue deux types de repères : les repères tournants (ou relatifs) et les repères inertIELS (ou absOLUS).

##### Repères tournants liés à l'avion

- **Repère avion** -  $R_b$  ( $O, \mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b$ ) : repère fixe à l'avion que l'on suppose indéformable.
  - Origine  $O$  : confondue avec le centre de gravité de l'avion.
  - Axe  $\mathbf{x}_b$  : défini dans le plan longitudinal de l'avion et orienté vers l'avant. Généralement, le nez de l'avion peut être pris comme référence.
  - Axe  $\mathbf{y}_b$  : normal au plan longitudinal et orienté vers la droite de l'avion.

- Axe  $\mathbf{z}_b$  : défini dans le plan longitudinal et orienté vers le bas tout en étant orthogonal aux deux autres.
- **Repère de stabilité** -  $R_s$  ( $O, \mathbf{x}_s, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}_s$ ) : repère lié à la projection sur le plan longitudinal du vecteur vitesse de l'avion par rapport à l'air. Il est défini tel que :
  - Origine O : confondue avec le centre de gravité de l'avion.
  - Axe  $\mathbf{x}_s$  : colinéaire à la projection sur le plan longitudinal du vecteur vitesse de l'avion par rapport à l'air.
  - Axe  $\mathbf{y}_s$  : colinéaire et de même sens que le vecteur  $\mathbf{y}_b$ .
  - Axe  $\mathbf{z}_s$  : orienté vers le bas tout en étant orthogonal aux deux autres.
- **Repère du vent** -  $R_w$  ( $O, \mathbf{x}_w, \mathbf{y}_w, \mathbf{z}_w$ ) : repère lié au vecteur vitesse de l'avion par rapport à l'air. Il est défini tel que :
  - Origine O : confondue avec le centre de gravité de l'avion.
  - Axe  $\mathbf{x}_w$  : colinéaire au vecteur vitesse de l'avion par rapport à l'air.
  - Axe  $\mathbf{y}_w$  : orthogonal au vecteur  $\mathbf{x}_w$  et orienté vers la droite.
  - Axe  $\mathbf{z}_w$  : colinéaire et de même sens que  $\mathbf{z}_s$ .

La Figure 2.1 illustre les trois repères tournants  $R_b$ ,  $R_s$  et  $R_w$ ,

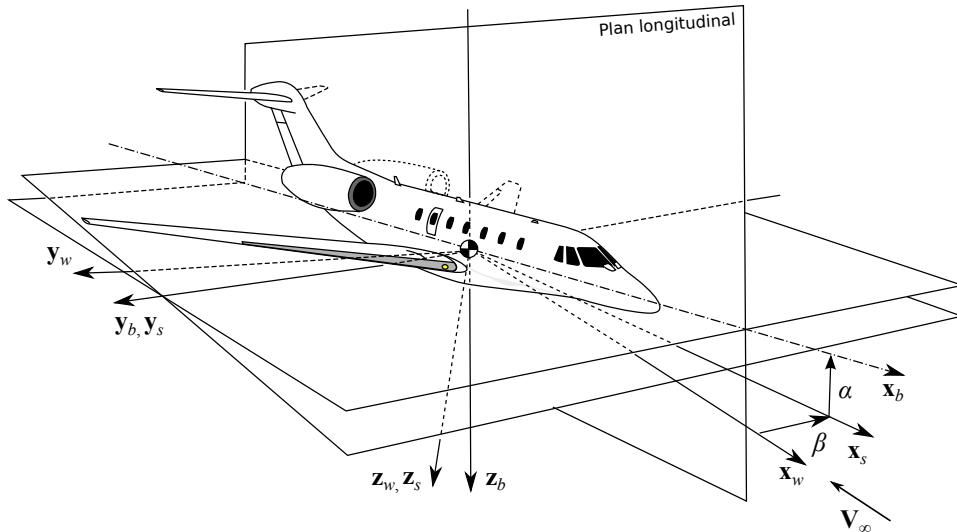


Figure 2.1 Représentation des repères  $R_b$ ,  $R_s$  et  $R_w$

où  $\mathbf{V}_\infty$  représente le vecteur vitesse de l'air par rapport à l'avion.

## Repères inertIELS liés à la Terre

Le but de la mécanique du vol étant de traiter du mouvement de l'avion par rapport à la Terre, il est nécessaire de définir des repères liés à la Terre.

- **Repère terrestre NED** -  $R_{ned}$  ( $N, \mathbf{x}_{ned}, \mathbf{y}_{ned}, \mathbf{z}_{ned}$ ) : repère local lié à la position initiale de l'avion. Son origine est fixe par rapport à la Terre qui est supposée plate et immobile. Il est défini tel que :
  - Origine N : confondue avec la position initiale de l'avion à altitude nulle.
  - Axe  $\mathbf{x}_{ned}$  : orienté vers le Nord géographique.
  - Axe  $\mathbf{y}_{ned}$  : orienté vers l'Est géographique.
  - Axe  $\mathbf{z}_{ned}$  : orienté vers le centre de la Terre.
- **Repère terrestre ECEF** -  $R_{ecef}$  ( $T, \mathbf{x}_{ecef}, \mathbf{y}_{ecef}, \mathbf{z}_{ecef}$ ) : repère fixe lié à la Terre supposée immobile. Il est défini tel que :
  - Origine T : confondu avec le centre de la Terre.
  - Axe  $\mathbf{x}_{ecef}$  : orienté vers l'intersection entre l'équateur et le méridien de Greenwich.
  - Axe  $\mathbf{y}_{ecef}$  : orthogonal au précédent dans le plan équatorial.
  - Axe  $\mathbf{z}_{ecef}$  : orienté vers le Nord géographique.

La Figure 2.2 illustre les repères  $R_{ned}$  et  $R_{ecef}$ ,

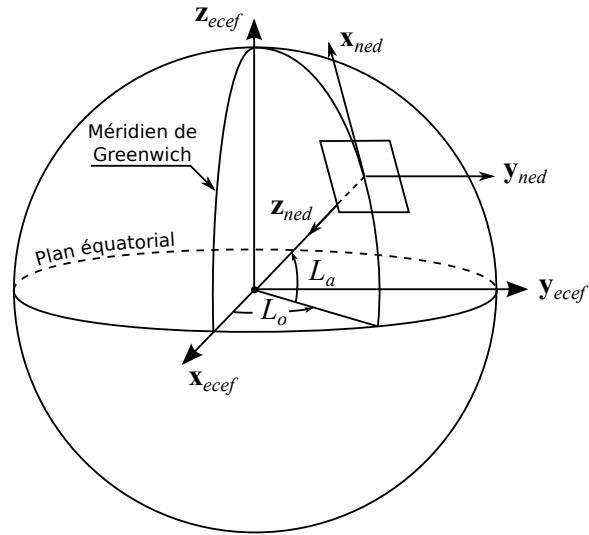


Figure 2.2 Représentation des repères ECEF et NED

où  $L_o$  et  $L_a$  représentent respectivement la longitude et la latitude géocentrique initiale de l'avion.

### 2.1.2 Notations

Les systèmes d'axes étant établis, nous définissons maintenant les notations qui permettent de décrire le comportement relatif à chacun des repères présentés.

#### Notations relatives au repère avion : $R_b$

La Figure 2.3 illustre les différentes variables selon les axes de référence :

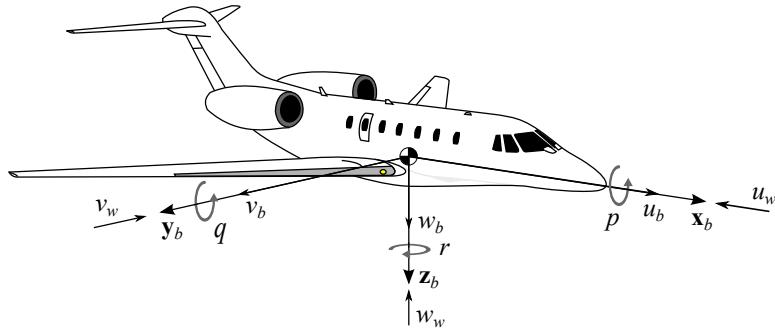


Figure 2.3 Notations des variables dans le repère avion

- **Vitesses en translation :**

- $u_b$  : vitesse de l'avion par rapport au NED selon l'axe ( $O, \mathbf{x}_b$ ).
- $v_b$  : vitesse de l'avion par rapport au NED selon l'axe ( $O, \mathbf{y}_b$ ).
- $w_b$  : vitesse de l'avion par rapport au NED selon l'axe ( $O, \mathbf{z}_b$ ).
- $u_w$  : vitesse du vent par rapport au NED selon l'axe ( $O, \mathbf{x}_b$ ).
- $v_w$  : vitesse du vent par rapport au NED selon l'axe ( $O, \mathbf{y}_b$ ).
- $w_w$  : vitesse du vent par rapport au NED selon l'axe ( $O, \mathbf{z}_b$ ).

- **Vitesses angulaires :**

- $p$  : taux de roulis ou vitesse de rotation autour l'axe ( $O, \mathbf{x}_b$ ).
- $q$  : taux de tangage ou vitesse de rotation autour l'axe ( $O, \mathbf{y}_b$ ).
- $r$  : taux de lacet ou vitesse de rotation autour l'axe ( $O, \mathbf{z}_b$ ).

À partir de l'équation du triangle des vitesses :

$$\mathbf{V}_{ned}^{avion} = \mathbf{V}_{ned}^{avion} + \mathbf{V}_{ned}^{vent} \quad (2.1)$$

nous définissons la vitesse de l'avion par rapport au vent selon les axes du repère avion :

$$\mathbf{V}_{vent}^{avion}|_b = \mathbf{V}_{ned}^{avion}|_b - \mathbf{V}_{ned}^{vent}|_b \equiv u\mathbf{x}_b + v\mathbf{y}_b + w\mathbf{z}_b \quad (2.2)$$

et sa norme  $V_{tas}$  (*True Air Speed*) :

$$V_{tas} = \|\mathbf{V}_{vent}^{avion}\|_b = \sqrt{(u_b - u_w)^2 + (v_b - v_w)^2 + (w_b - w_w)^2} \quad (2.3)$$

### Notations relatives au repère NED : $R_{ned}$

Selon Euler, toute rotation peut être décomposée comme la combinaison de trois rotations successives autour d'un repère. La Figure 2.4 illustre les différents angles qui caractérisent l'attitude de l'avion dans le repère NED.

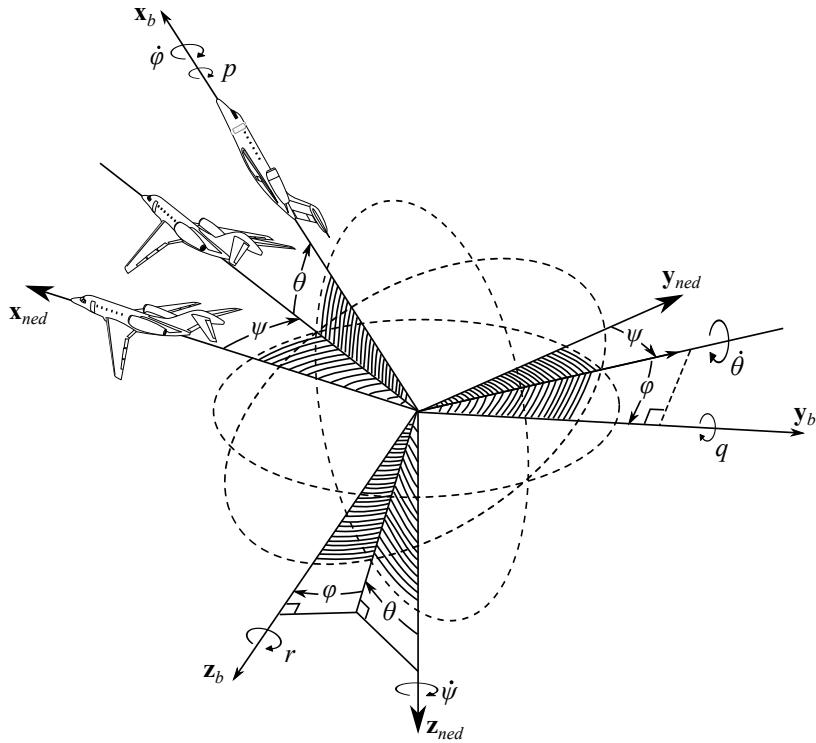


Figure 2.4 Représentation de l'attitude de l'avion dans le repère NED

Les différentes notations relatives au repère NED sont listées ci-dessous :

- **Vitesses en translation :**

- $V_{e_x}$  : vitesse de l'avion par rapport au NED selon l'axe  $(O, \mathbf{x}_{ned})$ .
- $V_{e_y}$  : vitesse de l'avion par rapport au NED selon l'axe  $(O, \mathbf{y}_{ned})$ .
- $V_{e_z}$  : vitesse de l'avion par rapport au NED selon l'axe  $(O, \mathbf{z}_{ned})$ .

- **Vitesses angulaires :**

- $\dot{\phi}$  : taux de roulis ou vitesse de rotation autour l'axe  $(O, \mathbf{x}_b)$ .
- $\dot{\theta}$  : taux de tangage ou vitesse de rotation autour l'axe  $(O, \mathbf{y}_b)$ .
- $\dot{\psi}$  : taux de lacet ou vitesse de rotation autour l'axe  $(O, \mathbf{z}_{ned})$ .

- **Positions en translation :**

- $x_e$  : position de l'avion par rapport au NED selon l'axe  $(O, \mathbf{x}_{ned})$ .
- $y_e$  : position de l'avion par rapport au NED selon l'axe  $(O, \mathbf{y}_{ned})$ .
- $z_e$  : position de l'avion par rapport au NED selon l'axe  $(O, \mathbf{z}_{ned})$ .

- **Positions angulaires :**

- $\phi$  : angle de gîte (ou angle de roulis), rotation autour l'axe  $(O, \mathbf{x}_b)$ .
- $\theta$  : assiette (ou angle de tangage), rotation autour l'axe  $(O, \mathbf{y}_b)$ .
- $\psi$  : cap (angle entre l'axe longitudinal de l'avion et le nord géographique).

Le repère NED faisant l'approximation d'une Terre plate, nous définissons la vitesse de l'avion par rapport au sol :

$$V_e = \sqrt{V_{e_x}^2 + V_{e_y}^2 + V_{e_z}^2} \quad (2.4)$$

la vitesse au sol de l'avion :

$$V_{sol} = \sqrt{V_{e_x}^2 + V_{e_y}^2} \quad (2.5)$$

et la vitesse verticale :

$$VS = -V_{e_z} \quad (2.6)$$

### Notations relatives au repère ECEF : $R_{ECEF}$

Le repère ECEF nous sera utile pour la localisation de l'avion autour de la Terre en terme de longitude, latitude et altitude. Ainsi, seules ces trois informations seront utilisées pour décrire le comportement dynamique de l'avion.

- **Positions angulaires :**

- $L_o$  : longitude de l'avion par rapport au plan équatorial ( $-90^\circ$  /  $+90^\circ$ ).
- $L_a$  : latitude de l'avion par rapport au méridien de Greenwich ( $-180^\circ$  /  $+180^\circ$ ).

- **Position en translation :**

- $h$  : altitude de l'avion par rapport au sol.

Pour finir, il est facile de voir la relation entre le repère NED et le repère ECEF concernant l'altitude :

$$h = -z_e \quad (2.7)$$

$$\dot{h} = -V_{e_z} \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Relations de passages entre les différents repères

#### Matrices de rotation entre $R_b$ , $R_s$ et $R_w$

Considérons ici un vecteur  $\mathbf{X}$  quelconque et  $\mathbf{X}|_i = [x_i, y_i, z_i]^T$  son projeté dans le repère  $R_i$  où  $i = \{b, s, w\}$ . En notant que le passage du repère stabilité au repère avion s'effectue par l'intermédiaire d'une rotation d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $\mathbf{y}_s$  (voir Figure 2.1), il est possible d'exprimer  $\mathbf{X}|_s$  en fonction de  $\mathbf{X}|_b$  à partir des relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} x_s = \cos(\alpha)x_b + \sin(\alpha)z_b \\ y_s = y_b \\ z_s = -\sin(\alpha)x_b + \cos(\alpha)z_b \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

De l'équation (2.9), se déduit la matrice de passage de  $R_b$  vers  $R_s$  tel que :

$$\mathbf{X}|_s = [\mathbf{R}_{b,s}]\mathbf{X}|_b \quad (2.10)$$

où :

$$[\mathbf{R}_{b,s}] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

De façon identique, il est possible d'exprimer  $\mathbf{X}|_b$  en fonction de  $\mathbf{X}|_s$  toujours sur la base de projections. Nous obtenons alors le système d'équations suivant :

$$\left. \begin{array}{l} x_b = \cos(\alpha)x_s - \sin(\alpha)z_s \\ y_b = y_s \\ z_b = \sin(\alpha)x_s + \cos(\alpha)z_s \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Ici aussi, la matrice de passage inverse se déduit directement de cette nouvelle équation comme étant :

$$\mathbf{X}|_b = [\mathbf{R}_{s,b}]\mathbf{X}|_s \quad (2.13)$$

où :

$$[\mathbf{R}_{s,b}] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Nous retrouvons ici un résultat bien connu des matrices de rotation qui nous permet d'écrire que :

$$[\mathbf{R}_{b,s}] = [\mathbf{R}_{s,b}]^{-1} = [\mathbf{R}_{s,b}]^T \quad (2.15)$$

En refaisant la même étude cette fois-ci entre le repère du vent et le repère de stabilité, nous obtenons le système suivant :

$$\left. \begin{array}{l} x_s = \cos(\beta)x_w - \sin(\beta)y_w \\ y_s = \sin(\beta)x_w + \cos(\beta)y_w \\ z_s = z_w \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Encore une fois, la matrice de passage du repère du vent vers le repère de stabilité se déduit directement comme étant :

$$[\mathbf{R}_{w,s}] = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

En combinant les équations (2.14) et (2.17) nous pouvons dès lors exprimer un vecteur de  $R_w$  dans  $R_b$  par l'intermédiaire de  $R_s$  comme illustré par l'équation (2.18) :

$$\mathbf{X}|_w \xrightarrow{[\mathbf{R}_{w,s}]} \mathbf{X}|_s \xrightarrow{[\mathbf{R}_{s,b}]} \mathbf{X}|_b \quad (2.18)$$

Considérons par exemple le vecteur vitesse de l'avion par rapport à l'air dont l'expression dans le repère du vent est la suivante :

$$\mathbf{V}_{vent}^{avion}|_w = \begin{bmatrix} V_{tas} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

En utilisant (2.17), nous pouvons écrire que :

$$\mathbf{V}_{vent}^{avion}|_s = [\mathbf{R}_{w,s}]\mathbf{V}_{vent}^{avion}|_w = \begin{bmatrix} V_{tas} \cos(\beta) \\ V_{tas} \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Puis en utilisant (2.14) nous obtenons l'expression de la vitesse dans le repère avion comme suit :

$$\mathbf{V}_{vent}^{avion} \big|_b = [\mathbf{R}_{s,b}] \mathbf{V}_{vent}^{avion} \big|_s = \begin{bmatrix} V_{tas} \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ V_{tas} \sin(\beta) \\ V_{tas} \sin(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

De ce dernier résultat, se déduisent les relations entre l'angle d'incidence ( $\alpha$ ), l'angle de dérapage ( $\beta$ ) et la vitesse vraie de l'avion :

$$\frac{w}{u} = \tan(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{w}{u}\right) \quad (2.22)$$

$$\frac{v}{V_{tas}} = \sin(\beta) \Leftrightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{v}{V_{tas}}\right) \quad (2.23)$$

### Matrices de rotation entre $R_b$ et $R_{ned}$

En reprenant la démarche précédente, il est possible de passer du repère avion au repère NED en se basant sur les angles d'Euler (voir Figure 2.4). Cependant, la rotation se faisant autour de trois axes et à cause de la non-commutativité du produit matriciel, il est nécessaire de suivre un ordre de rotation. Par convention [8], le passage se fait par l'intermédiaire de :

- (i) une rotation d'un angle  $\psi$  autour de l'axe  $\mathbf{z}_{ned}$ ,
- (ii) une rotation d'un angle  $\theta$  par rapport au plan  $(N, \mathbf{x}_{ned}, \mathbf{y}_{ned})$  autour de l'axe  $\mathbf{y}_b$ ,
- (iii) une rotation d'un angle  $\phi$  autour de l'axe  $\mathbf{x}_b$ .

Soit :

$$[\mathbf{R}_{b,ned}] = [\mathbf{R}_\psi][\mathbf{R}_\theta][\mathbf{R}_\phi] \quad (2.24)$$

ou encore :

$$[\mathbf{R}_{b,ned}] = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Soit en développant (2.25) :

$$[\mathbf{R}_{b,ned}] = \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) & -s(\psi)c(\phi) + c(\psi)s(\theta)s(\phi) & s(\psi)s(\phi) + c(\psi)c(\phi)s(\theta) \\ s(\psi)c(\theta) & c(\phi)c(\phi) + s(\phi)s(\theta)s(\psi) & -c(\psi)s(\phi) + s(\theta)s(\psi)c(\phi) \\ -s(\theta) & c(\theta)s(\phi) & c(\theta)c(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

où  $c(\cdot) = \cos(\cdot)$  et  $s(\cdot) = \sin(\cdot)$ .

Ici aussi, le passage inverse peut se faire en utilisant la transposée de la matrice de rotation obtenue en (2.26). Soit :

$$[\mathbf{R}_{ned,b}] = [\mathbf{R}_{b,ned}]^T \quad (2.27)$$

En navigation et en commande de vol, il est souvent nécessaire de connaître les relations entre les vitesses de rotation  $(p, q, r)$  et  $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ . En se référant à la Figure 2.4 et à la convention définissant l'ordre des rotations des angles d'Euler, et en notant que  $[\mathbf{R}_\theta][0 \ \dot{\theta} \ 0]^T = [0 \ \dot{\theta} \ 0]^T$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [\mathbf{R}_\phi]^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + [\mathbf{R}_\phi]^T [\mathbf{R}_\theta]^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + ([\mathbf{R}_\theta][\mathbf{R}_\phi])^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

En développant le système (2.28) nous obtenons les équations de passage suivantes :

$$p = \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta) \quad (2.29)$$

$$q = \dot{\theta} \cos(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) \quad (2.30)$$

$$r = -\dot{\theta} \sin(\phi) + \dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) \quad (2.31)$$

De même, les relations de passage inverse se déduisent en inversant l'équation (2.28), ce qui nous donne le système (2.32).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \left[ ([\mathbf{R}_\theta][\mathbf{R}_\phi])^T \right]^{-1} \begin{bmatrix} p - \dot{\phi} \\ q \\ r \end{bmatrix} = [\mathbf{R}_\theta][\mathbf{R}_\phi] \begin{bmatrix} p - \dot{\phi} \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Puis, en développant (2.32) et en isolant les vitesses angulaires  $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$  nous obtenons les relations de passages inverses (2.33) à (2.35).

$$\dot{\phi} = p + q \sin(\phi) \tan(\theta) + r \cos(\phi) \tan(\theta) \quad (2.33)$$

$$\dot{\theta} = q \cos(\phi) - r \sin(\phi) \quad (2.34)$$

$$\dot{\psi} = q \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} + r \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \quad (2.35)$$

Comme nous pouvons le voir sur l'équation (2.35), il existe une singularité pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ . Pour cela, nous supposerons que l'angle de tangage de l'avion restera en valeur absolue bien inférieure à  $\frac{\pi}{2}$ . Dans le cas contraire, l'utilisation du quaternion serait plus judicieux pour étudier la propagation des angles d'Euler. Pour plus de détails concernant le quaternion, le lecteur pourra se référer au livre de Stevens et Lewis [46].

### Relations de passage entre $R_{ned}$ et $R_{ecef}$

Pour visualiser l'emplacement de l'avion autour de la Terre, il est nécessaire de connaître sa longitude et sa latitude. Contrairement aux deux études précédentes, les équations qui vont suivre n'aboutiront pas à une matrice de rotation entre deux repères, mais plus à un processus permettant d'interpréter un mouvement dans le repère NED en termes de coordonnées dans le repère ECEF. À cet effet, il nous faut définir une représentation géométrique du globe terrestre. Dans le cadre de ce mémoire, le modèle de Terre considéré est le WGS84 (*World Geodetic System*). Outre la courbure de la Terre, ce modèle permet de prendre en compte son aplatissement au niveau des pôles comme illustré sur la Figure 2.5.

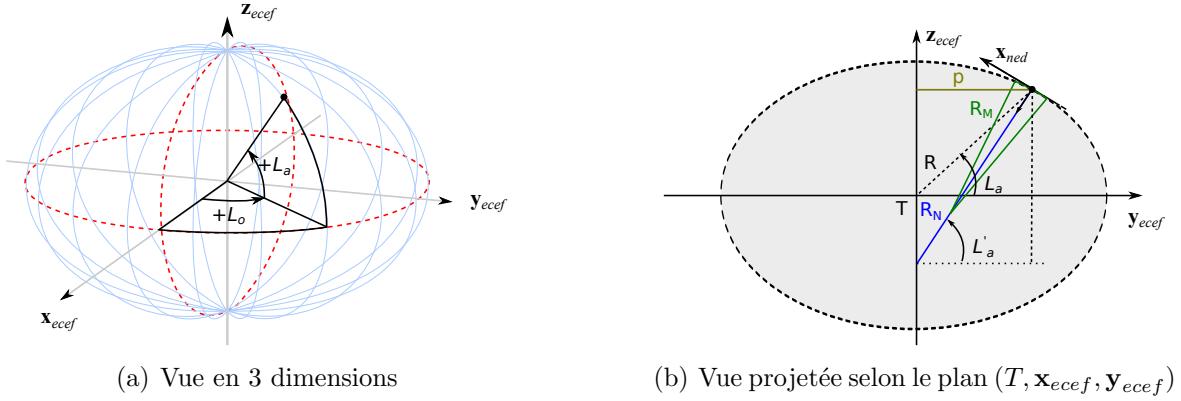


Figure 2.5 Représentation du modèle WGS84

Le tableau ci-dessous renseigne sur les différents paramètres physiques qui définissent le modèle WGS84.

Tableau 2.1 Données sur le modèle WGS84

Données	Valeurs	Descriptions
<b>Demi-grand axe [m]</b>	6,378,137	Distance du centre à l'équateur.
<b>Demi-petit axe [m]</b>	6,356,752.314,245	Distance du centre aux pôles.
<b>Facteur d'aplatissement (<math>f_a</math>)</b>	1/298.267,223,563	Caractérise l'aplatissement des pôles.
$R_{eq}$ [m]	6,378,137	Rayon équatorial

En supposant des déplacements suffisamment petits ( $\Delta x_e, \Delta y_e, \Delta L_a, \Delta L_o$ ) autour d'une position initiale ( $x_{e0}, y_{e0}, L_{a0}, L_{a0}$ ) il est possible de négliger la variation du rayon de courbure et ainsi obtenir les équations aux variations suivantes [14, 46] :

$$\Delta L_a = \arctan \left( \frac{\Delta x_e}{R_M} \right) \quad (2.36)$$

$$\Delta L_o = \arctan \left( \frac{\Delta y_e}{R_N \cos(L_{a_0})} \right) \quad (2.37)$$

où  $R_M$  représente le rayon d'un cercle dont la courbure approxime localement celle de l'ellipsoïde autour de la position initiale de l'avion, soit :

$$R_M = R_N \frac{1 - (2f_a - f_a^2)}{1 - (2f_a - f_a^2) \sin(L_{a_0})^2} \quad (2.38)$$

et  $R_N$  représente la distance entre la position initiale de l'avion et l'intersection entre la normale à l'ellipsoïde et l'axe vertical du repère ECEF, soit :

$$R_N = \frac{R_{eq}}{\sqrt{1 - (2f_a - f_a^2) \sin(L_{a_0})^2}} \quad (2.39)$$

Ainsi, à partir d'une position initiale en latitude et longitude  $(L_{a_0}, L_{o_0})$ , il est possible d'interpréter un déplacement effectué dans le repère NED à partir des formules ci-dessous :

$$L_a = L_{a_0} + \Delta L_a \quad (2.40)$$

$$L_o = L_{o_0} + \Delta L_o \quad (2.41)$$

## 2.2 Développement du module de la dynamique du vol

Les systèmes d'axes, les notations et les relations de passage étant définis, nous abordons dans cette section le développement de la plateforme de simulation. Pour rappel, cette dernière doit être modulaire afin de pouvoir l'adapter le plus facilement possible à d'autres avions que ceux considérés dans ce mémoire. A cet effet, nous proposons de créer une plateforme sous forme de modules qui pourront être facilement modifiés sans affecter les autres. La Figure 2.6 illustre l'architecture proposée. Dans la suite, nous détaillons chacun des modules à l'exception du module du pilote automatique qui fera l'objet des **chapitres 4 et 5**.

### 2.2.1 Modélisation de l'environnement

Les caractéristiques de l'atmosphère influent grandement sur le comportement de l'avion durant le vol. En effet, suivant la position de l'avion autour de la Terre, les facteurs météorologiques et les conditions ambiantes (pression, température, vents, etc.) peuvent être très différentes. Il est donc nécessaire d'établir un modèle qui rend compte de ces variations. Cette sous-section a pour but de présenter le modèle d'atmosphère ainsi que les différents types de vents qui ont été considérés dans ce mémoire.

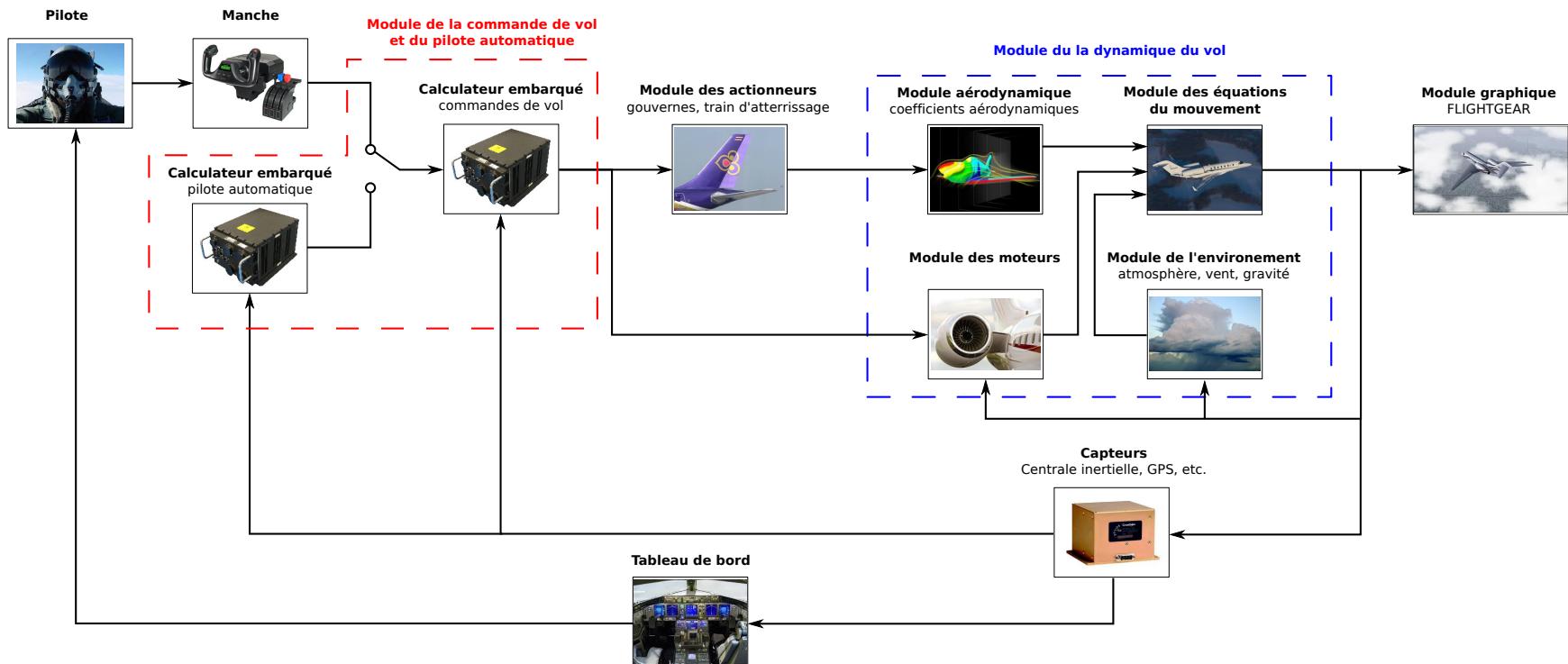


Figure 2.6 Architecture de la plateforme de simulation

## Atmosphère Standard Internationale (ISA)

Comme pour le modèle géométrique de la Terre, il existe différents modèles d'atmosphère standard en fonction de l'étude faite : ISA, COESA, USSA, etc. Cependant, pour des altitudes inférieures à 65,617 pi (limite de la basse stratosphère), tous ces modèles sont équivalents et affirment que la pression ( $P$ ), la température ( $T$ ) et la densité volumique de l'air ( $\rho$ ) sont fonction de l'altitude ( $h$ ) et des conditions ambiantes au niveau de la mer.

Les équations qui régissent l'évolution des propriétés de l'atmosphère sont divisées en deux systèmes d'équations [14, 46] :

- Pour des altitudes ( $h$ ) inférieures ou égales à 36,089 pi :

$$\left. \begin{array}{l} T = (1 - 6.875 \times 10^{-6}h)T_0 \\ P = (1 - 6.875 \times 10^{-6}h)^{5.2561}P_0 \\ \rho = (1 - 6.875 \times 10^{-6}h)^{4.2561}\rho_0 \end{array} \right\} h \leq 36,089 \text{ pi} \quad (2.42)$$

- Pour des altitudes ( $h$ ) supérieures à 36,089 pi :

$$\left. \begin{array}{l} T = 0.75189 T_0 \\ P = 0.2254e^{(4.806 \times 10^{-5}(36,089-h))}P_0 \\ \rho = 0.29977e^{(4.806 \times 10^{-5}(36,089-h))}\rho_0 \end{array} \right\} h > 36,089 \text{ pi} \quad (2.43)$$

où toutes les données indiquées par 0 sont des constantes physiques au niveau de la mer, dont les valeurs sont définies fixes comme étant :  $T_0 = 288.15K$  ( $15^{\circ}\text{C}$ ),  $P_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  et  $\rho_0 = 1.255 \text{ kg/m}^3$ .

Connaissant la température ( $T$ ), nous pouvons en déduire la vitesse du son ( $a$ ) et le nombre de Mach ( $M$ ) comme suit :

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (2.44)$$

$$M = \frac{V_{tas}}{a} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{a} \quad (2.45)$$

où  $R = 287.058 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $\gamma = 1.4$ .

## Modélisation du vent

Pour rendre l'environnement plus réaliste, des vents peuvent être générés de manière aléatoire ou prévus en utilisant les outils de Matlab/Simulink. Trois types de vent peuvent être

simulés séparément, permettant ainsi de valider la stabilité de l'avion ou le pilote automatique une fois conçu. La figure ci-dessus, illustre les trois types de vent selon les axes du repère avion.

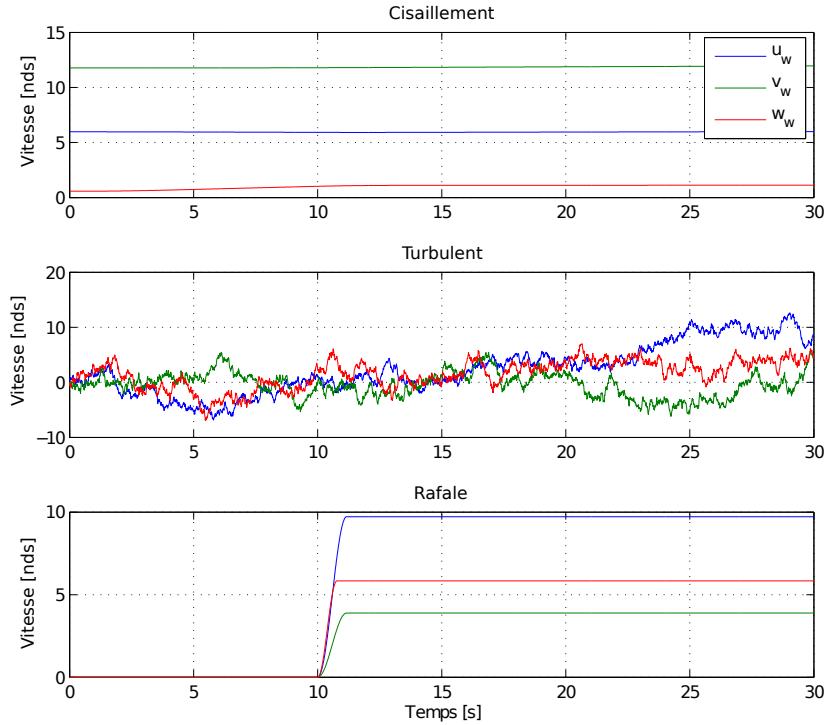


Figure 2.7 Illustration des différents types de vent

On y retrouve dans l'ordre :

- **Le cisaillement de vent** : (ou *Wind Shear*) il s'agit d'un vent dont la vitesse et la direction évoluent en fonction de l'altitude ou en fonction de la position géographique. Ce phénomène peut être décrit par ses composantes horizontales et verticales. Il peut être très dangereux surtout dans les phases d'approche ou de décollage, où le vent peut s'inverser au fur et à mesure que l'avion effectue sa descente (ou sa montée), changeant ainsi un vent favorable de face en un vent défavorable de dos.
- **Le vent turbulent** : (ou *Wind Turbulence*) comme son nom l'indique, il s'agit d'un vent turbulent et aléatoire qui peut varier en fonction de l'altitude et de la vitesse de l'avion. Ce type de vent peut être rencontré dans toutes les phases de vol (montée, croisière ou approche).

- **La rafale :** (ou *Wind Gust*) ce type de vent est le plus simple de tous, car il correspond à un changement soudain de la valeur du vent qui sera considérée nulle au départ.

## Modélisation du champ gravitationnel

Pour finir et toujours pour rendre la simulation plus réaliste, un modèle de gravité qui s'appuie sur le modèle WGS84 énoncé plus haut, sera considéré. Ici encore, les outils de Matlab/Simulink sont utilisés pour définir un champ gravitationnel qui dépend de la position de l'avion en fonction de sa longitude, sa latitude et son altitude. Il sera donc possible de faire des essais à gravité fixe ou gravité variable.

### 2.2.2 Modélisation des moteurs

Pour rendre l'étude de la dynamique du vol plus complète, il faut ajouter le modèle des moteurs à celui de l'avion. Des travaux d'identification effectués au LARCASE par Rodriguez et *al.* [39] ont permis d'obtenir une série de points qui permettent de générer un diagramme de fonctionnement en altitude et nombre de Mach du moteur du Cessna Citation X. Cependant, le nombre de points était trop insuffisant pour pouvoir obtenir un modèle fiable par interpolation/extrapolation. De plus, nous rappelons qu'un des objectifs est d'obtenir des composants génériques capables de s'adapter d'un avion à un autre.

Pour obtenir un modèle mathématique de moteur sous forme générique, nous avons dû utiliser des données provenant des deux avions. Dans un premier temps, une enveloppe partielle du TFE731-50R a été établie en se basant sur les données du constructeur [20] et en utilisant les travaux de Pollender-Moreau [33] qui, dans son mémoire, a développé un modèle de moteur pour le Hawker 800XP dont le diagramme est représenté sur la Figure 2.8. À partir de ces premiers résultats, un modèle de moteur générique a été développé sur la base de formules semi-empiriques.

Selon Stevens et Lewis [46], la poussée d'un moteur dépend principalement de l'altitude, du nombre de Mach et de la position de la manette des gaz. Pour simplifier les calculs, la variation en fonction de la manette des gaz sera considérée comme linéaire. Sous cette hypothèse, la poussée d'un moteur peut être représentée par l'équation suivante :

$$T_{net} = T_{max}(h, M) \times \delta_{TLA} \quad (2.46)$$

où  $T_{net}$  représente la poussée nette par moteur,  $T_{max}$  est la poussée maximale que peut fournir un moteur en fonction de l'altitude ( $h$ ) et du nombre de Mach ( $M$ ) et  $\delta_{TLA}$  est la

position de la manette des gaz.

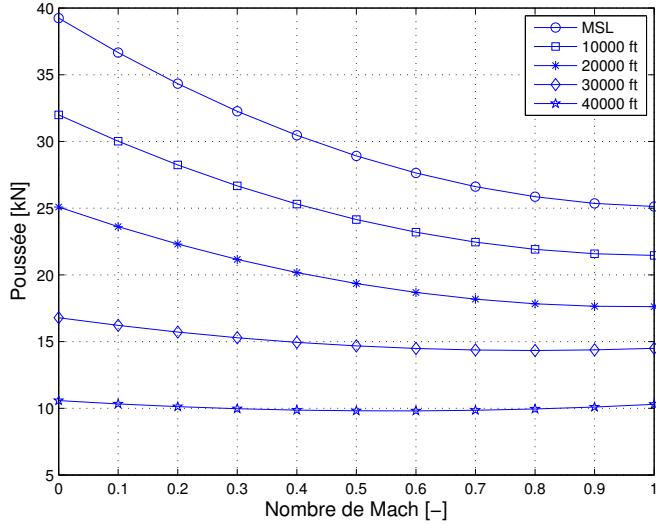


Figure 2.8 Diagramme fonctionnel du moteur TFE731-50R

Selon Hill [19] et Raymer [37], il est possible d'exprimer la poussée maximale ( $T_{max}$ ) en fonction d'un rapport de pressions, d'une poussée adimensionnelle ( $T_{NDT}$  : *Non Dimensional Thrust*) et de la poussée maximale à Mach nul et au niveau moyen de la mer (MSL : *Mean Sea Level*) comme suit :

$$T_{max}(h, M) = \bar{\delta} \times T_{NDT} \times T_{max}(MSL, 0) \quad (2.47)$$

où  $\bar{\delta}$  est défini par :

$$\bar{\delta} = \frac{P}{P_0} \left[ \frac{1}{2} M^2 (\gamma - 1) + 1 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.48)$$

Puis en mettant en évidence  $T_{NDT}$  dans l'équation (2.47) et en y substituant les données du moteur TFE731-50R, il devient possible de calculer le paramètre adimensionnel en fonction de l'altitude et du nombre de Mach.

Sur la base de cette étude, le modèle du AE3007C, équipant le Cessna Citation X, a été élaboré et comparé avec les données du simulateur de vol du laboratoire LARCASE. Les résultats obtenus pour le modèle AE3007C sont présentés sur la Figure 2.9.

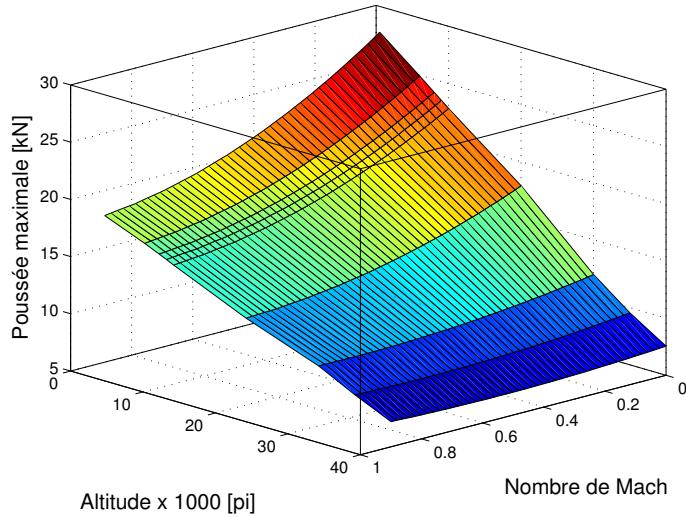


Figure 2.9 Diagramme fonctionnel du moteur AE3007C

Pour valider le modèle obtenu, nous l'avons simulé puis nous avons calculé l'erreur commise par rapport au modèle de moteur du simulateur de vol du Cessna Citation X sur 128 conditions de vol différentes. Les résultats sont représentés sur le diagramme ci-dessous :

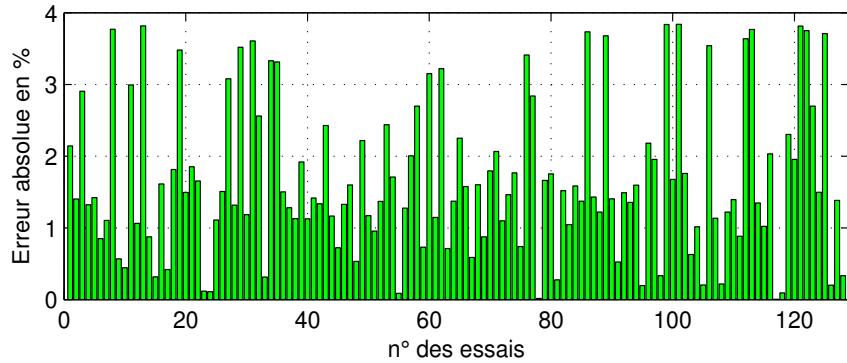


Figure 2.10 Comparaison et validation avec le simulateur

Le modèle obtenu à partir des équations semi-empiriques est très satisfaisant, car il comporte au pire des cas une erreur maximale inférieure à 4%, comparé aux données du simulateur. Le modèle générique ainsi obtenu permet de simuler les deux moteurs considérés dans ce mémoire.

En refaisant la même démarche, les courbes de consommation (débit de carburant) ont été interpolées et rendues génériques en se basant sur les données du constructeur pour le moteur TFE731-50R.

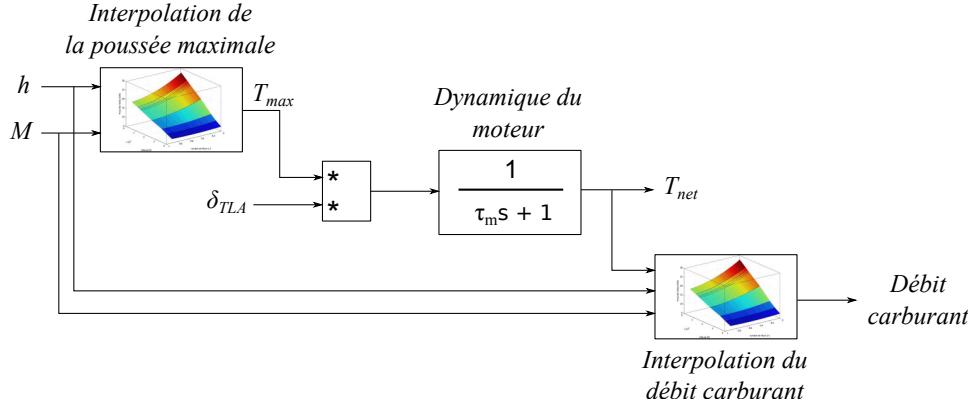


Figure 2.11 Schéma du modèle complet pour les moteurs

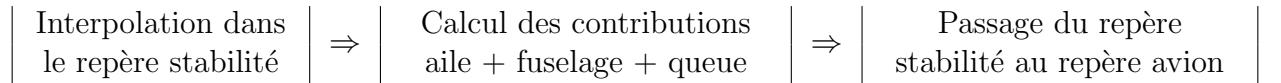
Enfin, la dynamique du moteur est approximée par une fonction de transfert du premier ordre avec une constante de temps ( $\tau_m$ ) fixe, comme proposé dans la littérature [13, 30, 46, 47]. À partir de nombreux essais en vol sur le simulateur, nous avons déduit une valeur moyenne pour la constante de temps de 0.2 seconde.

### 2.2.3 Modèle des coefficients aérodynamiques

Après avoir présenté les différents repères et traité de la modélisation de l'environnement et des moteurs, nous abordons dans cette sous-section l'ensemble des équations permettant de calculer les coefficients aérodynamiques. Ces derniers nous sont donnés sous forme de mesure provenant d'une soufflerie ou d'essais en vol.

Cependant, il est bien de préciser que les aérodynamiciens rapportent naturellement l'expression des coefficients aérodynamiques à un repère lié à la soufflerie, donc au repère stabilité. Or les équations du mouvement étant exprimées dans le repère avion, il est nécessaire de transposer leur expression dans ce même trièdre.

À cet effet, le processus de calcul des paramètres aérodynamiques est divisé en trois étapes comme présenté ci-dessous :



Pour finir, comme précisé dans le **chapitre 1**, d'un avion à un autre, seule la partie concernant l'interpolation sera différente.

Comme illustré sur la figure ci-dessous, chaque partie de l'avion apporte sa contribution dans le calcul des coefficients aérodynamiques. Ces derniers sont présentés plus en détails dans l'**annexe B** pour le Cessna Citation X et le Hawker 800XP.

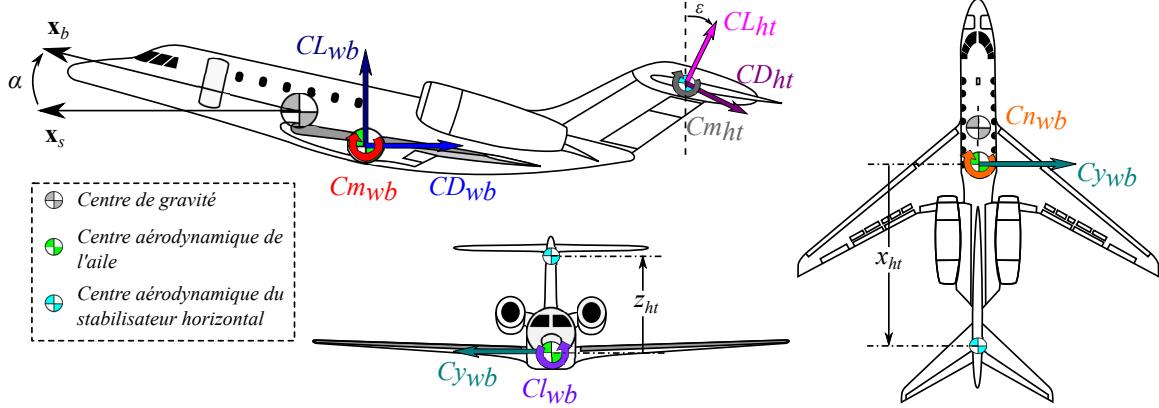


Figure 2.12 Détails des coefficients appliquées à l'avion selon les trois axes

Où les coefficients indicés par «*wb*» représentent les contributions de l'aile et du fuselage, et les coefficients indicés par «*ht*» représentent les contributions de l'empennage horizontal.

En s'appuyant sur les calculs présentés en **annexe A** et sous l'hypothèse que les coefficients de l'aile plus le fuselage prennent en compte l'effet du stabilisateur vertical, nous obtenons les expressions des coefficients aérodynamiques rapportés au centre aérodynamique de l'aile et exprimés dans le repère stabilité de l'aile comme suit :

$$CD_s = CD_{wb} + \frac{S_{ht}}{S_{wb}}(CD_{ht} \cos(\varepsilon) + CL_{ht} \sin(\varepsilon)) \quad (2.49)$$

$$CY_s = CY_{wb} \quad (2.50)$$

$$CL_s = CL_{wb} + \frac{S_{ht}}{S_{wb}}(CL_{ht} \cos(\varepsilon) - CD_{ht} \sin(\varepsilon)) \quad (2.51)$$

$$Cl_s = Cl_{wb} \quad (2.52)$$

$$Cm_s = Cm_{wb} + \frac{S_{ht}\bar{c}_{ht}}{S_{wb}\bar{c}_{wb}}Cm_{wb} - \frac{S_{ht}x_{ht}}{S_{wb}\bar{c}_{wb}}(CL_{ht} \cos(\alpha - \varepsilon) + CD_{ht} \sin(\alpha - \varepsilon)) + \dots \quad (2.53)$$

$$\dots + \frac{S_{ht}z_{ht}}{S_{wb}\bar{c}_{wb}}(CD_{ht} \cos(\alpha - \varepsilon) - CL_{ht} \sin(\alpha - \varepsilon))$$

$$Cn_s = Cn_{wb} \quad (2.54)$$

où  $S_{wb}$  est la surface de référence des ailes,  $S_{ht}$  est la surface de référence du stabilisateur horizontal,  $\bar{c}_{wb}$  est la longueur de la corde aérodynamique moyenne de l'aile,  $\bar{c}_{ht}$  est la longueur de la corde aérodynamique moyenne du stabilisateur horizontal,  $(x_{ht}, z_{ht})$  sont les

distances exprimées dans le plan  $(O, \mathbf{x}_b, \mathbf{z}_b)$  entre les centres aérodynamiques de l'aile et du stabilisateur horizontal et  $\varepsilon$  est l'angle de déflexion des filets d'air vu par la queue (*downwash*).

Puis, en combinant les équations (2.49) à (2.54) et (2.14) nous pouvons transposer les coefficients exprimés au centre aérodynamique dans le repère avion comme suit :

$$\begin{bmatrix} CD_b \\ CY_b \\ CL_b \end{bmatrix} = [\mathbf{R}_{s,b}] \begin{bmatrix} CD_s \\ CY_s \\ CL_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CD_s \\ CY_s \\ CL_s \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\begin{bmatrix} Cl_b \\ Cm_b \\ Cn_b \end{bmatrix} = [\mathbf{R}_{s,b}] \begin{bmatrix} Cl_s \\ Cm_s \\ Cn_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cl_s \\ Cm_s \\ Cn_s \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Soit en développant le tout :

$$CD_b = CD_s \cos(\alpha) - CL_s \sin(\alpha) \quad (2.57)$$

$$CY_b = CY_s \quad (2.58)$$

$$CL_b = CL_s \cos(\alpha) + CD_s \sin(\alpha) \quad (2.59)$$

$$Cl_b = Cl_s \cos(\alpha) - Cn_s \sin(\alpha) \quad (2.60)$$

$$Cm_b = Cm_s \quad (2.61)$$

$$Cn_b = Cn_s \cos(\alpha) + Cl_s \sin(\alpha) \quad (2.62)$$

Ces derniers nous permettront par la suite de calculer les forces aérodynamiques nécessaires aux équations du mouvement.

#### 2.2.4 Bilan des forces dans le repère avion

Avant de présenter l'ensemble des équations du mouvement et leur résolution, nous présentons dans cette section un bilan des forces appliquées à l'avion. Comme énoncé dans la **section 1.3.2**, les forces qui régissent le comportement de l'avion sont divisées en trois catégories : gravitationnelle, propulsive et aérodynamique. Dans le suite nous présentons chacune d'entre elle.

##### Force gravitationnelle - Poids

De par la définition du repère NED (voir **section 2.1.1**), nous savons que la pesanteur est dirigée suivant l'axe  $(N, \mathbf{z}_{ned})$ . Ainsi, en utilisant la relation de passage (2.27), nous pouvons exprimer le poids de l'aéronef ( $\mathbf{F}_p$ ) selon les axes du repère avion comme suit :

$$\mathbf{F}_p|_b = m\mathbf{g}|_b = m[\mathbf{R}_{ned,b}]\mathbf{g}|_{ned} = m[\mathbf{R}_{ned,b}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \sin(\theta) \\ mg \cos(\theta) \sin(\phi) \\ mg \cos(\theta) \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

où  $m$  est la masse de l'avion et  $g$  est la norme de l'accélération de la pesanteur selon le modèle WGS84.

### Forces propulsives

La figure ci-dessous présente l'ensemble des variables qui permettent d'exprimer les contributions des moteurs en termes de forces et de moments.

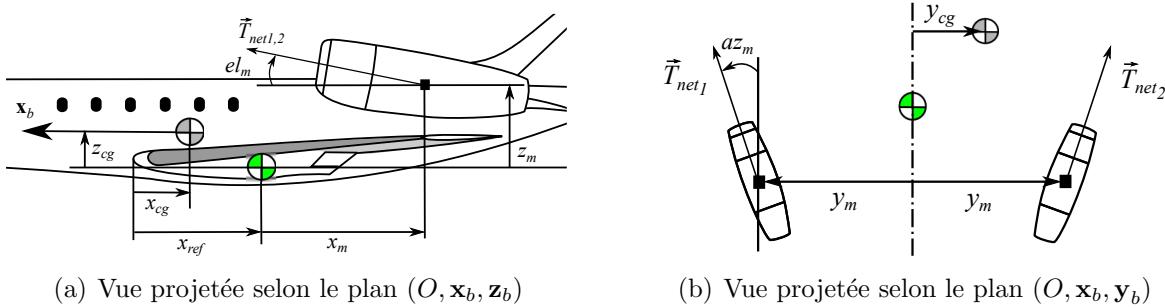


Figure 2.13 Représentation des distances géométriques des moteurs

En supposant que les moteurs sont positionnés de façon symétrique par rapport au plan longitudinal, nous pouvons exprimer les forces propulsives ( $\mathbf{F}_m$ ) selon les axes du repère avion :

$$F_{m_{xb}} = (T_{net1} + T_{net2}) \cos(el_m) \cos(az_m) \quad (2.64)$$

$$F_{m_{yb}} = (T_{net2} - T_{net1}) \sin(az_m) \quad (2.65)$$

$$F_{m_{zb}} = -(T_{net1} + T_{net2}) \sin(el_m) \cos(az_m) \quad (2.66)$$

et les moments générés par les moteurs ( $\mathbf{M}_m$ ) :

$$M_{m_{xb}} = (T_{net2} - T_{net1}) \sin(az_m)(z_m + z_{cg}) + T_{net1} \cos(el_m) \sin(az_m)(y_m + y_{cg}) - \dots \quad (2.67)$$

$$\dots - T_{net2} \cos(el_m) \sin(az_m)(y_m - y_{cg})$$

$$M_{m_{yb}} = -(T_{net1} + T_{net2}) \cos(el_m) \cos(az_m)(z_m + z_{cg}) - \dots \quad (2.68)$$

$$\dots - (T_{net1} + T_{net2}) \sin(el_m) \cos(az_m)[(\bar{x}_{ref} - \bar{x}_{cg})\bar{c}_{wb} + x_m]$$

$$M_{m_{zb}} = (T_{net_1} - T_{net_2}) \sin(az_m)[(\bar{x}_{ref} - \bar{x}_{cg})\bar{c}_{wb} + x_m] + \dots \quad (2.69)$$

$$\dots + T_{net_1} \cos(el_m) \cos(az_m)(y_m + y_{cg}) - T_{net_2} \cos(el_m) \cos(az_m)(y_m - y_{cg})$$

où  $T_{net_i}$  est la poussée nette du moteur n° $i$  (voir Figure 2.11),  $el_m$  est l'angle d'élévation du moteur,  $az_m$  est l'angle d'azimut du moteur,  $(x_{cg}, y_{cg}, z_{cg})$  sont les positions du centre de gravité et  $(x_m, y_m, z_m)$  sont les positions des moteurs.

### Forces aérodynamiques

Pour finir, en considérant le décalage entre le centre aérodynamique de l'aile et le centre de gravité de l'avion, nous pouvons exprimer les forces aérodynamiques ( $\mathbf{F}_a$ ) :

$$F_{a_{xb}} = -\frac{1}{2}\rho V_{tas}^2 S_{wb} C D_b \quad (2.70)$$

$$F_{a_{yb}} = +\frac{1}{2}\rho V_{tas}^2 S_{wb} C Y_b \quad (2.71)$$

$$F_{a_{zb}} = -\frac{1}{2}\rho V_{tas}^2 S_{wb} C L_b \quad (2.72)$$

et les moments aérodynamiques appliqués au centre de gravité ( $\mathbf{M}_a$ ) :

$$M_{a_{xb}} = \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 b C l_b + \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 z_{cg} C Y_b - \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 y_{cg} C L_b \quad (2.73)$$

$$M_{a_{yb}} = \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 \bar{c}_{wb} C m_b - \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 z_{cg} C D_b - \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 (\bar{x}_{ref} - \bar{x}_{cg}) \bar{c}_{wb} C L_b \quad (2.74)$$

$$M_{a_{zb}} = \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 b C n_b - \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 y_{cg} C D_b - \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 (\bar{x}_{ref} - \bar{x}_{cg}) \bar{c}_{wb} C Y_b \quad (2.75)$$

où  $b$  représente l'envergure des ailes (distance entre les deux saumons).

En résumé, à partir d'une condition de vol, les coefficients aérodynamiques seront interpolés dans le repère stabilité, puis projetés dans le repère avion pour en déduire les forces et moments aérodynamiques ( $\mathbf{F}_a, \mathbf{M}_a$ ). Parallèlement, la poussée sera aussi interpolée pour en déduire les contributions des moteurs ( $\mathbf{F}_m, \mathbf{M}_m$ ). Pour finir, le poids ( $\mathbf{F}_p$ ) sera calculé à partir de la gravité selon le modèle WGS84.

### 2.2.5 Résolution des équations du mouvement

Nous abordons ici la dernière étape qui consiste à développer et résoudre les équations du mouvement pour un avion. Selon la deuxième loi de Newton, il est possible d'exprimer la somme des forces ( $\Sigma \mathbf{F}_{ext}$ ) et la somme des moments ( $\Sigma \mathbf{M}_{ext}$ ) agissant sur un aéronef dans un repère inertiel comme suit :

$$\Sigma \mathbf{F}_{ext} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) \quad \Sigma \mathbf{M}_{ext} = \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \quad (2.76)$$

où  $m$  est la masse de l'avion supposé indéformable,  $\mathbf{I}$  est la matrice d'inertie,  $\mathbf{V}$  est la vitesse en translation,  $\mathbf{H}$  est le vecteur de moment angulaire et  $\boldsymbol{\omega}$  est le vecteur instantané de rotation par rapport au repère inertiel.

En considérant le repère NED comme inertiel (ou localement inertiel) et en utilisant le théorème des axes en mouvement :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} \Big|_{ned} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} \Big|_b + \boldsymbol{\omega}_{ned}^b \Big|_b \wedge \mathbf{X} \Big|_b \quad (2.77)$$

où  $\mathbf{X}$  est un vecteur quelconque en mouvement et  $\boldsymbol{\omega}_{ned}^b$  est le vecteur instantané de rotation de  $R_{ned}$  dans  $R_b$ , on peut exprimer les forces et les moments dans le repère avion tels que :

$$\frac{d\{m(t)\mathbf{V}_{ned}^{avion}(t)\}}{dt} \Big|_{ned} = \dot{m}\mathbf{V}_{ned}^{avion} \Big|_b + m \left( \frac{d\mathbf{V}_{ned}^{avion}}{dt} \Big|_b + \boldsymbol{\omega}_{ned}^b \Big|_b \wedge \mathbf{V}_{ned}^{avion} \Big|_b \right) = \Sigma \mathbf{F}_{ext} \Big|_b \quad (2.78)$$

$$\frac{d\{\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega}_{ned}^b(t)\}}{dt} \Big|_{ned} = \dot{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}_{ned}^b \Big|_b + \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ned}^b \Big|_b + \boldsymbol{\omega}_{ned}^b \Big|_b \wedge (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_{ned}^b \Big|_b) = \Sigma \mathbf{M}_{ext} \Big|_b \quad (2.79)$$

où le tenseur d'inertie de l'avion  $\mathbf{I}$  est défini par (en supposant que le plan  $(O, \mathbf{x}_b, \mathbf{z}_b)$  est un plan de symétrie) :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

et :

$$\Sigma \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_a \quad (2.81)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_{ext} = \mathbf{M}_m + \mathbf{M}_a \quad (2.82)$$

Pour finir, à partir de (2.78) et (2.79), nous pouvons isoler les accélérations de l'avion par rapport au repère NED et exprimées dans le repère avion comme suit :

$$\frac{d\mathbf{V}_{ned}^{avion}}{dt} \Big|_b = [\dot{u}_b \quad \dot{v}_b \quad \dot{w}_b]^T = m^{-1} \left( \Sigma \mathbf{F}_{ext} \Big|_b - \dot{m}\mathbf{V}_{ned}^{avion} \Big|_b \right) - \boldsymbol{\omega}_{ned}^b \Big|_b \wedge \mathbf{V}_{ned}^{avion} \Big|_b \quad (2.83)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_{ned}^b}{dt} \Big|_b = [\dot{p} \quad \dot{q} \quad \dot{r}]^T = \mathbf{I}^{-1} \left( \Sigma \mathbf{M}_{ext} \Big|_b - \dot{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}_{ned}^b \Big|_b - \boldsymbol{\omega}_{ned}^b \Big|_b \wedge (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_{ned}^b \Big|_b) \right) \quad (2.84)$$

Ainsi, à partir d'une position, d'une attitude et d'une condition de vol initiale, les forces et les moments sont calculés au moyen des équations (2.63) à (2.75). Puis les vitesses  $V_{ned}^{avion}$  et  $\omega_{ned}^{avion}$  sont obtenues en intégrant les accélérations  $\dot{V}_{ned}^{avion}$  et  $\dot{\omega}_{ned}^{avion}$  qui sont calculées à partir des équations (2.83) et (2.84). Pour finir, de ces derniers résultats, il est possible par intégration, d'obtenir les nouvelles positions et attitudes de l'avion dans le repère avion, puis dans le repère inertiel en utilisant les relations de passage (2.26) et (2.33) à (2.35). La figure ci-dessous illustre le principe au complet sous forme de schéma Simulink.

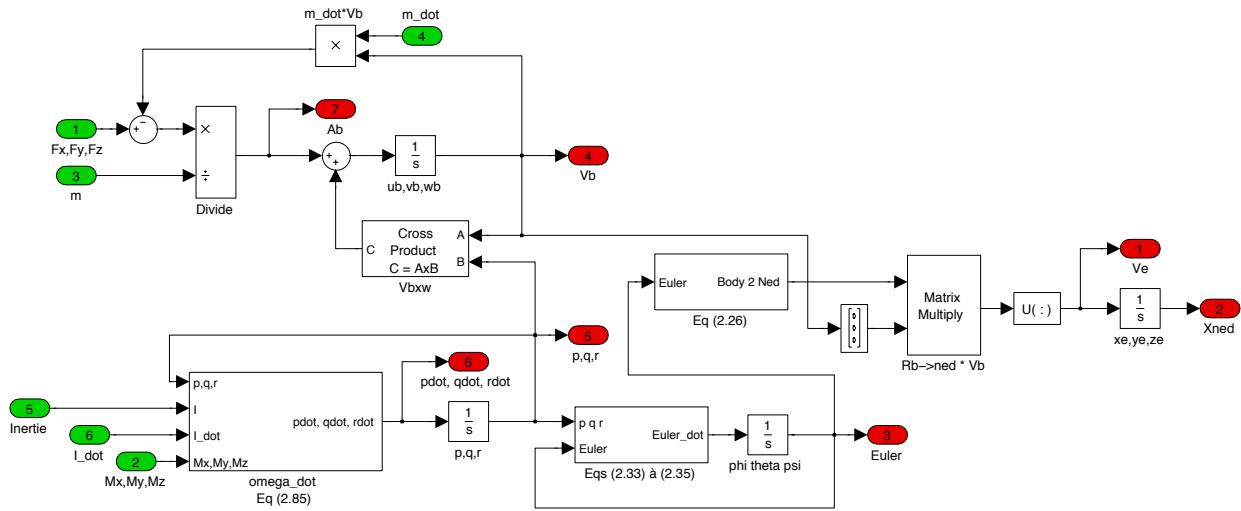


Figure 2.14 Résolution des équations du mouvement sous Simulink

La méthode de résolution numérique utilisée est une méthode discrète de Bogacki-Shampine avec un pas fixe déjà programmée dans Matlab/Simulink. Un pas de temps de 0.01 seconde a été choisi en vue des retards purs qui interviendront plus tard dans la partie commande.

## 2.2.6 Analyse des résultats et première validation

Afin de valider cette première étape de modélisation, nous avons effectué plusieurs comparaisons entre le modèle créé sous Matlab/Simulink (voir Figure 2.17) et la dynamique de vol du simulateur de CAE Inc. Pour cela, des essais sur plusieurs conditions de vol ont été réalisés pour valider le comportement de l'avion suite à des commandes appliquées aux différentes gouvernes. Sur les Figures 2.15 et 2.16, nous y présentons les résultats obtenus sur un essai correspondant à la condition de vol suivante : 20,000 pi, 336 nds, 33,000 lbs et un centrage à 25%. Cet essai consiste à tirer sur le manche pour effectuer un échelon au niveau des gouvernes de profondeur par rapport à leurs conditions initiales. Il a pour but

d'exciter deux modes typiques du mouvement longitudinal : le mode phugoïde et le mode de période courte.

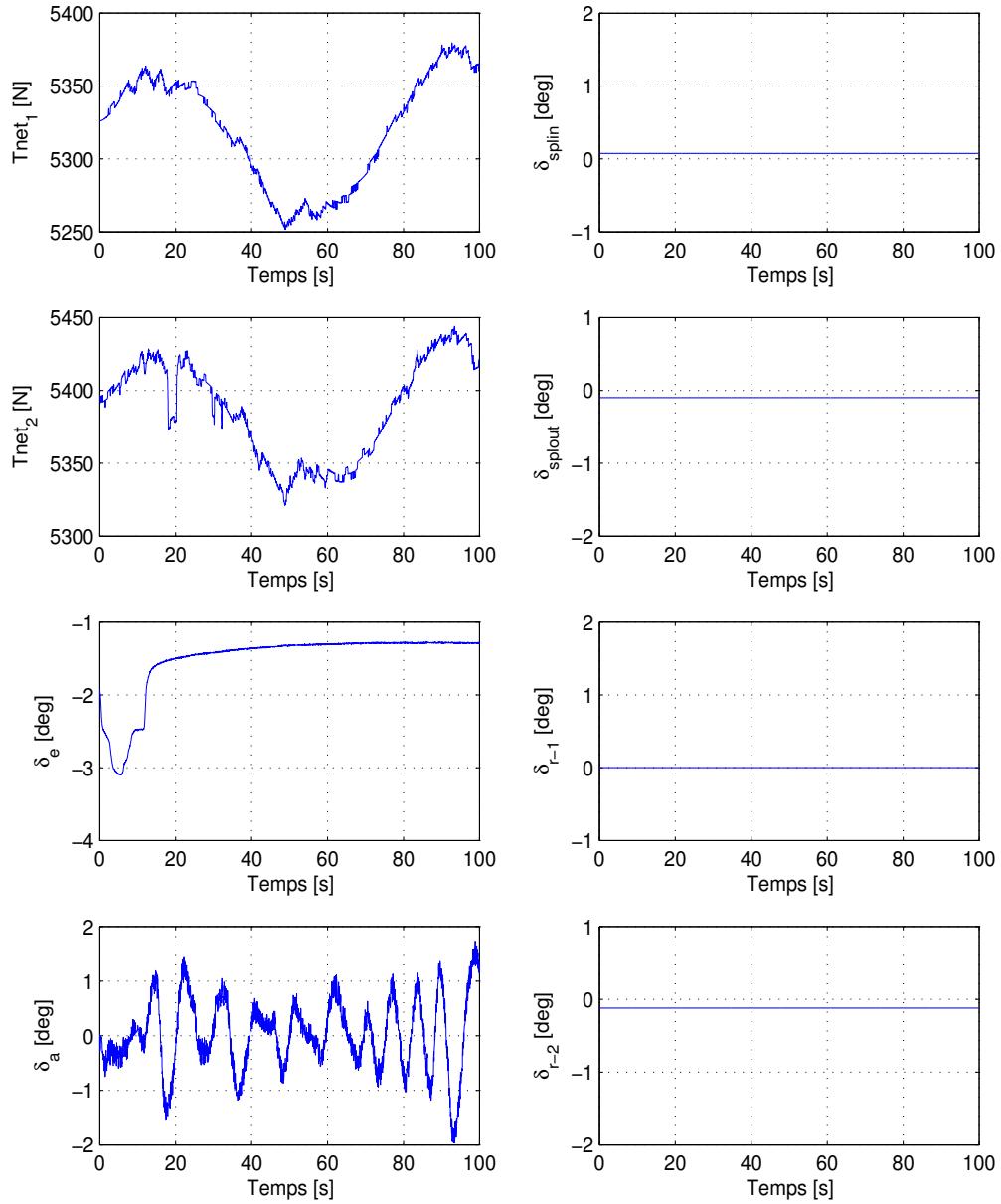


Figure 2.15 Commandes d'entrée du simulateur de vol de CAE

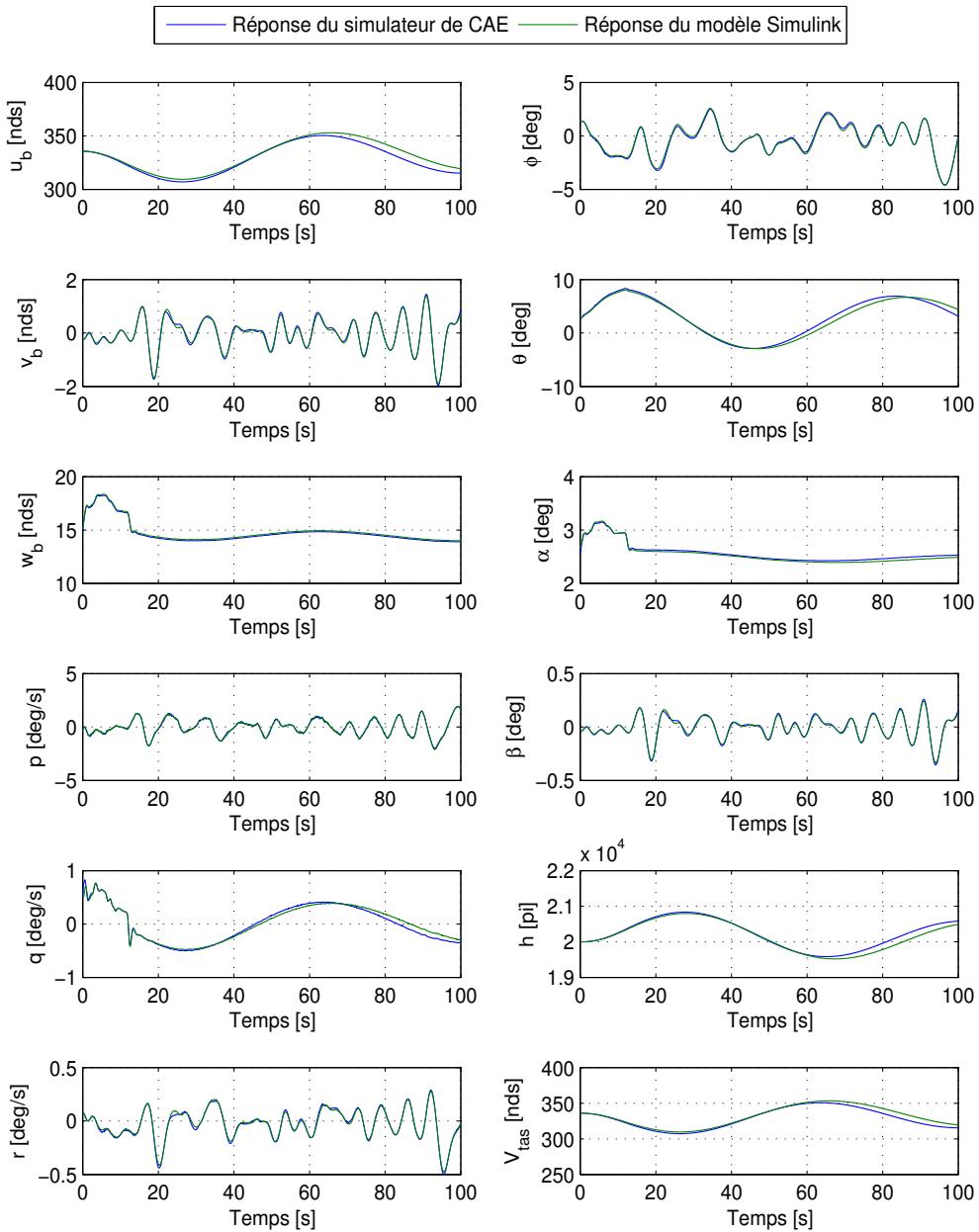


Figure 2.16 Résultat de comparaison entre le simulateur de CAE et le modèle Simulink

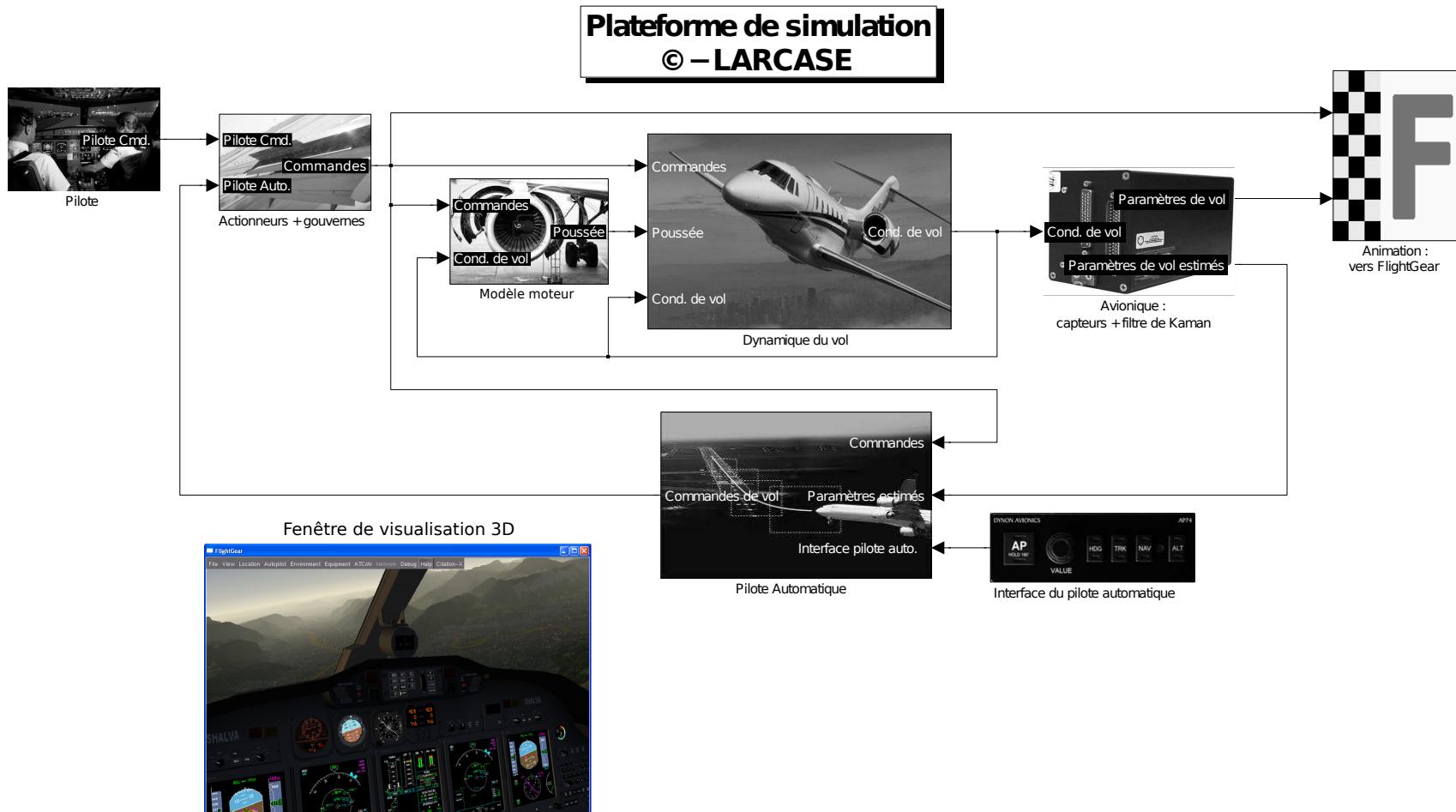


Figure 2.17 Plateforme de simulation

Comme nous pouvons le constater sur la Figure 2.16, les résultats obtenus sont très satisfaisants car les deux dynamiques sont quasiment superposées. On note cependant la présence d'un décalage temporel sur certaines variables à partir de  $t = 60$  s. Après plusieurs réflexions, il a été remarqué que ce déphasage était observé principalement sur les variables du mouvement longitudinal ou sur des variables issues d'intégrations numériques successives. Nous pensons donc que les différences visibles peuvent être dues à :

- Une différence dans la méthode d'intégration numérique,
- Une accumulation des erreurs par intégration numérique,
- Une hypothèse de modélisation différente,
- Une différence dans la méthode d'interpolation des données,
- Une différence dans la modélisation du champ gravitationnel,
- La présence de biais statistiques pour rapprocher la dynamique du vol du simulateur de vol à celle du Cessna Citation X.

Néanmoins, nous considérons que l'erreur de modélisation commise reste relativement faible, ce qui nous permet de considérer comme valide le module de la dynamique de vol.

### 2.3 Modélisation des actionneurs et des capteurs

La dynamique de l'avion étant validée, nous terminons ce chapitre avec la modélisation de l'ensemble des gouvernes et capteurs. Nous rappelons que dans le cadre de ce projet, nous supposons que l'efficacité des gouvernes n'est pas affectée par les conditions de vol. De plus, pour simplifier l'étude, nous supposons aussi que les gouvernes sont déjà asservies en position ce qui permet de les modéliser par des fonctions de transfert d'ordre un ou deux.

Pour finir, nous modéliserons chacun des capteurs (ex. gyromètres, accéléromètres, GPS, etc.) par des fonctions de transfert d'ordre un ou d'ordre deux en s'inspirant de modèles pris de la littérature.

#### 2.3.1 Modèles des actionneurs et du manche

À partir d'essais réalisés sur le simulateur de vol du Cessna Citation X (avion au sol), nous avons conclu qu'un ordre deux peut suffire pour la modélisation de n'importe quelle gouverne munie de son actionneur. Sous cette hypothèse, à chaque ensemble gouverne + actionneur, nous associons le modèle linéaire sous forme de fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{\omega_a^2}{s^2 + 2\xi_a\omega_a s + \omega_a^2} \quad (2.85)$$

où  $\omega_a$  et  $\xi_a$  sont respectivement la pulsation et le taux d'amortissement de la gouverne.

À ce modèle linéaire nous avons aussi associé un modèle non linéaire qui prend en compte les limites physiques des actionneurs (saturations en vitesse et en position). Ce dernier est représenté sur le schéma ci-dessous :

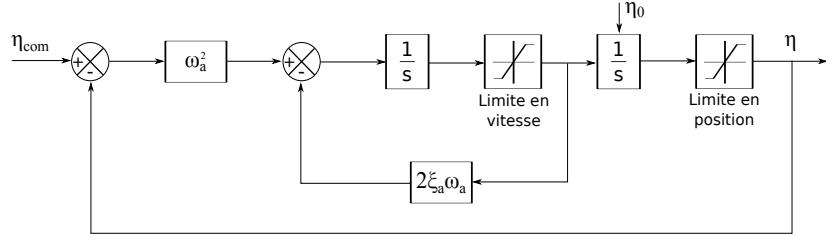


Figure 2.18 Modèle non linéaire pour les actionneurs

où  $\eta_{com}$  est la commande envoyée à la gouverne,  $\eta$  est la réponse du système et  $\eta_0$  est la position initiale de la gouverne.

À partir d'essais sur le simulateur du Cessna Citation X, de la littérature [29, 42, 47] et en s'appuyant sur le logiciel FlightSim, nous avons pu donner un ordre de grandeur moyen pour les différents paramètres des gouvernes. Le Tableau 2.2 regroupe l'ensemble des données retenues :

Tableau 2.2 Caractéristiques des différentes gouvernes

Gouverne	$\omega_a$ [rad/s]	$\xi_a$	Angle [°]	Vitesse [° /s]
Élevateurs	60	0.7	$\pm 20$	$\pm 30$
Ailerons	60	0.7	$\pm 60$	$\pm 30$
Gourverne de direction	60	0.7	$\pm 20$	$\pm 30$
Volets	2	1	0 à 45	$\pm 05$
Becs	2	1	N/A	$\pm 10$
Trim tabs	60	0.7	$\pm 20$	$\pm 30$
Déporteurs et aérofreins	60	0.7	0 à 70	$\pm 30$

Le modèle du manche quant à lui sera approximé par une fonction de transfert du premier ordre avec une constante de temps de 1/15 secondes comme proposé dans d'autre projets [33, 42]. Soit :

$$J(s) = \frac{1}{1 + (1/15)s} \quad (2.86)$$

### 2.3.2 Modélisation des capteurs (gyromètres et accéléromètres)

Comme pour les actionneurs, les capteurs de la centrale inertie sont aussi modélisés par des fonctions de transfert du second ordre en s'inspirant de travaux réalisés sur le contrôle d'avion civil [33, 42].

$$C(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\xi_c\omega_c s + \omega_c^2} \quad (2.87)$$

Où la pulsation  $\omega_c$  est de 40 rad/s et l'amortissement  $\xi_c$  est de 0.7 pour les accéléromètres et gyromètres.

Le reste des capteurs (ex. tube de Pitot, GPS, baromètre, etc.) ont été modélisés par des fonctions de transfert du premiers ordre avec des constantes de temps de l'ordre de 0.1 à 1 seconde comme proposé dans le logiciel FlightSIM [36]. Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des différentes constantes de temps propre à chaque instrument.

Tableau 2.3 Caractéristiques des différents instruments de mesure

Instrument / Mesure	Constante de temps [s]
Mesure de l'accélération normale	0.1
Mesure de la vitesse vraie	0.3
Mesure du cap magnétique	0.3
Mesure de l'altitude radar	0.4
Mesure de l'altitude barométrique	0.4
Mesure de l'angle d'attaque	1.0
Mesure de l'angle de glissade	1.0
Mesure des données GPS	1.0

Pour finir et dans le but d'améliorer la plateforme de simulation, un filtre de Kalman étendu appliqué la navigation aérienne a été développé et implémenté au modèle Simulink. Cependant, cette étude ne sera pas présentée dans ce mémoire afin d'éviter d'alourdir le contenu de ce dernier. Néanmoins, nous supposerons par la suite qu'un grand nombre de variables sont soit mesurables, soit estimables et que la dynamique du filtre peut être approximée (approximation faite sur la base de simulations) par le transfert ci-dessous :

$$K_a(s) = \frac{10}{s^2 + 2 \times 0.7 \times \sqrt{10}s + 10} e^{-0.03s} \quad (2.88)$$

Pour plus de détails concernant le filtre de Kalman, l'**annexe C** explique comment estimer l'altitude d'un aéronef à partir de mesures barométriques et accélérométriques.

### 2.3.3 Modélisation des délais

Bien entendu, les calculs effectués par l'ordinateur de commande de vol (*FCC*) de l'avion prennent un certain temps d'exécution. Pour cela, il est important de prendre en compte les retards qui peuvent être modélisés par des délais. En se basant sur la littérature [30, 42, 47], les retards suivants ont été choisis :

- Délais entre les mesures des capteurs et l'estimation des variables : 30 millisecondes.
- Délais de traitement du pilote automatique (boucle externe) : 15 millisecondes.
- Délais de traitement du pilote automatique (boucle interne) : 15 millisecondes.

### 2.3.4 Modélisation du pilote

Le pilote étant un élément important de la boucle ouverte pour le pilotage manuel, il est nécessaire de considérer un modèle mathématique qui rend compte de son comportement. Bien que très peu présentés dans les travaux concernant la synthèse des correcteurs, plusieurs modèles, plus ou moins complexes, existent. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons opté pour un modèle proposé par Tustin [48] dont la représentation sous forme de fonction de transfert est donnée par :

$$P(s) = K_p \frac{(1 + T_n s)}{s} e^{-\tau_p s} \quad (2.89)$$

où  $K_p$  ( $= 1$ ) est le gain statique du pilote qui caractérise l'erreur commise par ce dernier sur l'amplitude de la sortie,  $T_n$  ( $= 1$  s) est la constante de temps du pilote qui reflète sa capacité à réagir face à la commande requise et  $\tau_p$  ( $= 0.1$  s) représente le retard (temps de réaction) dû à son système neuromusculaire.

## CHAPITRE 3 ALGORITHMES D'ÉQUILIBRAGE ET DE LINÉARISATION

Dans ce chapitre nous présentons une méthodologie et des outils qui permettent de conclure sur la stabilité statique et dynamique d'un avion. Dans un premier temps, quelques rappels portant sur les systèmes non linéaires seront présentés afin d'orienter notre étude. À la lumière de ces rappels, nous verrons ensuite comment formuler l'équilibre d'un avion pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent un état d'équilibre en fonction d'une condition de vol et d'une configuration. Puis, nous montrerons comment utiliser un algorithme d'optimisation numérique pour résoudre un problème de stabilité statique. Enfin, une fois l'avion équilibré, nous traiterons de la linéarisation des équations du mouvement afin d'obtenir les modèles d'état pour le mouvement longitudinal et le mouvement latéral qui approximent localement le comportement de l'avion. Sur la base de ces résultats, nous terminerons ce chapitre par une analyse de la stabilité dynamique du Cessna Citation X.

### 3.1 Notions générales sur les systèmes non linéaires

De façon générale, le modèle mathématique d'un système dynamique non linéaire à paramètres localisés [5] peut être représenté par la relation :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t) \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{x} = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$  est le vecteur d'état du système,  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1(t), \dots, \eta_m(t)]^T$  est le vecteur de commande du système,  $t$  est le temps et  $\mathbf{f}(\cdot) = [f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot)]^T$  représente la dynamique du système. Il est bien connu de la littérature que l'analyse de la stabilité d'un système non linéaire consiste en l'étude de ses points d'équilibre [24, 35]. Il convient donc de définir dans un premier temps la notion d'équilibre.

**Définition 3.1.** *On dit qu'un point  $\mathbf{X}_e = (\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$  est un point d'équilibre du système (3.1) s'il satisfait l'équation suivante :*

$$0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e, t) \quad (3.2)$$

À cause de la non-linéarité de la fonction  $\mathbf{f}$  ou du nombre de points de fonctionnement, il peut exister plusieurs points d'équilibre dépendamment des solutions possibles de l'équation (3.2). Ces derniers sont généralement classés en deux catégories : les points d'équilibre stables et les points d'équilibre instables.

**Définition 3.2.** *Un point d'équilibre  $(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$  du système (3.1) est dit stable, si toute trajectoire  $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$  qui commence au voisinage de  $(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$  reste proche de  $(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$ . Plus précisément, pour tout  $\delta > 0$  il existe  $\epsilon > 0$  tel que si  $\|\mathbf{X}(t=0) - \mathbf{X}_e\| \leq \epsilon$  alors  $\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_e\| \leq \delta$  pour tout  $t > 0$ . Le point est dit asymptotiquement stable si de plus :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_e \quad (3.3)$$

Bien que cette définition permette aisément de comprendre la notion de stabilité, son application sur des systèmes non linéaires reste cependant très difficile à cause de la complexité du modèle mathématique, ou à cause des théories parfois trop généralisées [5]. Pour plus de précisions concernant l'étude des systèmes non linéaires, le lecteur pourra se reporter à Khalil [24]. Les méthodologies portant sur l'analyse et la synthèse des systèmes linéaires étant très nombreuses, on a souvent tendance à ramener l'étude d'un système non linéaire à l'étude de son linéarisé tangent autour d'un point d'équilibre  $(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$ .

En notant par  $\Delta\mathbf{x}$  et  $\Delta\boldsymbol{\eta}$  les variations de  $\mathbf{x}$  et  $\boldsymbol{\eta}$  par rapport à l'équilibre, c'est-à-dire  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$  et  $\Delta\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_e$ ; nous pouvons écrire les premiers termes de la décomposition en série de Taylor de la fonction  $\mathbf{f}$  au voisinage du point d'équilibre comme suit :

$$\dot{\mathbf{x}}_e + \Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e, t) + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}|_{(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e, t)} \Delta\mathbf{x} + \nabla_{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{f}|_{(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e, t)} \Delta\boldsymbol{\eta} + \begin{pmatrix} \text{termes d'ordres} \\ \text{supérieurs} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

En remplaçant l'équation (3.2) dans l'équation (3.4) et en supposant que les termes d'ordres supérieurs sont négligeables, on obtient le modèle linéarisé autour du point d'équilibre défini par :

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}|_{(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e, t)} \Delta\mathbf{x} + \nabla_{\boldsymbol{\eta}}\mathbf{f}|_{(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e, t)} \Delta\boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{A}(t)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\Delta\boldsymbol{\eta} \quad (3.5)$$

où les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ainsi obtenues reflètent la dynamique locale du système en termes de variation. Cependant, à cause de la dépendance des matrices par rapport au temps, il n'est pas possible de conclure sur la stabilité du système directement à partir des propriétés de la matrice  $\mathbf{A}$ . Pour un avion, la dépendance temporelle vient de la variation des données massiques en fonction de la consommation de carburant. En supposant des instants de courte durée, nous pouvons négliger les variations de la masse, du centrage et de la matrice d'inertie afin de rendre le système localement invariant. Sous cette hypothèse, le système (3.1) peut être approximé autour d'un point d'équilibre par le système linéaire invariant ( $S$ ) suivant :

$$(S) \begin{cases} \Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta\boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e + \Delta\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

dont la solution générale est donnée par :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e + \Delta \mathbf{x}(0) e^{\mathbf{A}t} + \int_0^t (e^{\mathbf{A}(t-\sigma)} \mathbf{B} \Delta \boldsymbol{\eta}(\sigma)) d\sigma \quad (3.7)$$

En considérant la réponse libre du système ( $\Delta \boldsymbol{\eta} = 0$ ), il est possible de démontrer que la stabilité d'un système linéaire (au sens de la **définition 3.2**) dépend uniquement des propriétés de la matrice  $\mathbf{A}$ , plus précisément de ses valeurs propres [24, 35].

**Proposition 3.1.** *Un système linéaire  $\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}$  est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  ont une partie réelle strictement négative.*

Sous cette condition nous dirons que le point  $\mathbf{X}_e = (\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$  est un point d'équilibre hyperbolique pour le linéarisé tangent. Dès lors, nous pouvons conclure sur la stabilité locale du système non linéaire à partir des deux propositions suivantes [35] :

**Proposition 3.2.** *Le système dynamique non linéaire représenté par l'équation (3.1) se comporte comme son linéarisé tangent représenté par le système (3.6) en tout point d'équilibre hyperbolique.*

**Proposition 3.3.** *Soit un point d'équilibre hyperbolique  $\mathbf{X}_e = (\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$  du système dynamique non linéaire (3.1). Si,  $\mathbf{X}_e$  est asymptotiquement stable pour le linéarisé tangent, alors il est asymptotiquement stable pour le système non linéaire.*

En résumé, nous dirons qu'un système non linéaire est stable statiquement s'il est possible de trouver un point d'équilibre qui satisfait l'équation (3.2). Nous dirons que le système est de plus stable dynamiquement si son linéarisé tangent au point d'équilibre satisfait la **proposition 3.1**.

## 3.2 Stabilité statique et algorithme d'équilibre appliqué à un avion

Dans cette section, nous abordons l'étude de la stabilité statique de l'avion. Pour rappel, trouver une condition d'équilibre pour un aéronef revient à régler les commandes (ex. stabilisateurs, élévateurs, manettes des gaz, etc.) qui assurent le maintien de l'attitude de l'avion en absence de vent lorsque l'altitude et la vitesse sont fixées. En nous appuyant sur les équations développées dans le **chapitre 2**, nous formulerons dans un premier temps la dynamique du vol sous la forme générale (3.1). Puis dans un second temps, en nous basant sur la **définition 3.1**, nous énoncerons les conditions d'équilibre statique sous la forme d'un problème d'optimisation. Pour finir, nous présenterons l'algorithme utilisé pour résoudre le problème d'optimisation posé.

### 3.2.1 Conditions d'équilibre statique d'un aéronef

En reprenant les équations du mouvement (2.33), (2.34) et les équations auxiliaires inverses (2.83) à (2.85), il est possible de modéliser la dynamique du vol sous la forme générale  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t)$  en considérant le vecteur d'état :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_b & v_b & w_b & p & q & r & \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T \quad (3.8)$$

le vecteur de commande :

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \delta_e & \delta_{et} & \delta_{it} & \delta_a & \delta_{at} & \delta_r & \delta_{TLA} \end{bmatrix}^T \quad (3.9)$$

et la fonction  $\mathbf{f}$  :

$$\mathbf{f} = \begin{cases} \dot{u}_b = m^{-1}(F_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - \dot{m}u_b) - qw_b + rv_b \\ \dot{v}_b = m^{-1}(F_y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - \dot{m}v_b) - ru_b + pw_b \\ \dot{w}_b = m^{-1}(F_z(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - \dot{m}w_b) - pv_b + qu_b \\ \dot{p} = -I_{zz}(I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz})^{-1}(M_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - \dot{I}_{xx}p + \dot{I}_{xz}r + I_{xz}qp - I_{zz}rq + I_{yy}qr) - \dots \\ \dots - I_{xz}(I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz})^{-1}(M_z(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) + \dot{I}_{xz}p - \dot{I}_{zz}r - I_{yy}qp + I_{xx}pq - I_{xz}qr) \\ \dot{q} = I_{yy}^{-1}(M_y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - \dot{I}_{yy}q - I_{xx}pr + I_{xz}(r^2 - p^2) + I_{zz}rp) \\ \dot{r} = -I_{xz}(I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz})^{-1}(M_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - \dot{I}_{xx}p + \dot{I}_{xz}r + I_{xz}qp - I_{zz}rq + I_{yy}qr) - \dots \\ \dots - I_{xx}(I_{xz}^2 - I_{xx}I_{zz})^{-1}(M_z(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) + \dot{I}_{xz}p - \dot{I}_{zz}r - I_{yy}qp + I_{xx}pq - I_{xz}qr) \\ \dot{\theta} = q \cos(\phi) - r \sin(\phi) \\ \dot{\phi} = p + q \sin(\phi) \tan(\theta) + r \cos(\phi) \tan(\theta) \\ \dot{\psi} = q \sin(\phi) \cos(\theta)^{-1} + r \cos(\phi) \cos(\theta)^{-1} \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  sont les composantes selon les axes du repères avion du vecteur  $\Sigma \mathbf{F}_{ext}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_z$  sont les composantes selon les axes du repères avion du vecteur  $\Sigma \mathbf{M}_{ext}$ ,  $\delta_e$  est l'angle moyen des gouvernes de profondeur,  $\delta_{et}$  est l'angle moyen des onglets d'équilibrages longitudinaux,  $\delta_{it}$  est l'angle du stabilisateur horizontal,  $\delta_a$  est la différence d'angle entre les ailerons,  $\delta_{at}$  est la différence d'angle entre les onglets d'équilibrages latéraux,  $\delta_r$  est l'angle de la gouverne de direction et  $\delta_{TLA}$  est la position moyenne des manettes des gaz.

D'après la **définition 3.1**, nous savons maintenant que trouver un point d'équilibre revient à

égaler à zéro les neuf équations du système (3.10). Cependant, la résolution d'un tel système peut s'avérer très difficile à cause du nombre de variables à considérer. Pour cela, on a tendance à simplifier la fonction  $\mathbf{f}$  en notant que l'équilibre statique, pour un avion, correspond à un vol de croisière non perturbé [14, 46]. De ce fait, nous pouvons supposer que l'avion :

- évolue dans un environnement atmosphérique non perturbé :  $\mathbf{V}_{ned}^{avion} = \mathbf{V}_{vent}^{avion}$ ,
- évolue sans dérapage :  $\beta_e = 0 \Rightarrow v_{b_e} = 0$  et  $\dot{v}_{b_e} = 0$ ,
- évolue en palier (taux de montée  $\gamma_e = 0$ ) :  $\theta_e = \alpha_e$ ,
- est parfaitement symétrique<sup>1</sup> par rapport à son plan longitudinal :  $(\delta_{a_e} = 0, \delta_{at_e} = 0, \delta_{r_e} = 0) \Rightarrow (M_{x_e} = 0, M_{z_e} = 0, F_{y_e} = 0)$ ,
- évolue en vol rectiligne :  $\phi_e = 0$ ,

et que les variations de la masse, du centrage, des moments et produits d'inertie sont négligeables :  $\dot{m} = 0$ ,  $\dot{I}_{xx} = 0$ ,  $\dot{I}_{yy} = 0$ ,  $\dot{I}_{zz} = 0$  et  $\dot{I}_{xz} = 0$ .

Ensuite, on peut remarquer d'après les équations (2.29) à (2.31) que :

$$\{\dot{\phi}_e = 0, \dot{\theta}_e = 0, \dot{\psi}_e = 0\} \Rightarrow \{p_e = 0, q_e = 0, r_e = 0\} \quad (3.11)$$

En utilisant ces nouvelles équations, le système initial,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e) = 0$ , de neuf équations et seize inconnues se résume au système équivalent,  $\mathbf{f}_e(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e) = 0$ , de trois équations et cinq inconnues défini par :

$$\mathbf{f}_e = \begin{cases} F_{x_e}(\theta_e, \delta_{e_e}, \delta_{et_e}, \delta_{it_e}, \delta_{TLA_e}) = 0 \\ F_{z_e}(\theta_e, \delta_{e_e}, \delta_{et_e}, \delta_{it_e}, \delta_{TLA_e}) = 0 \\ M_{y_e}(\theta_e, \delta_{e_e}, \delta_{et_e}, \delta_{it_e}, \delta_{TLA_e}) = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} v_{b_e} = 0, u_{b_e} = V_{tase} \cos(\alpha_e) \\ w_{b_e} = V_{tase} \sin(\alpha_e) \\ p_e = q_e = r_e = 0 \\ \phi_e = \psi_e = 0, \theta_e = \alpha_e \\ \delta_{a_e} = \delta_{at_e} = \delta_{r_e} = 0 \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Bien que nous ayons réussi à réduire considérablement l'ordre du système initial, il n'existe aucune méthode analytique qui permet de trouver une solution au problème (3.12). Dans le cadre de ce mémoire, nous avons opté pour une résolution numérique sur la base d'un algorithme d'optimisation. En notant que :

$$\{F_{x_e} = 0, F_{z_e} = 0, M_{y_e} = 0\} \Leftrightarrow F_{x_e}^2 + F_{z_e}^2 + M_{y_e}^2 = 0 \quad (3.13)$$

---

1. En l'absence de vent et de glissade, ceci implique que la distribution du champ de pression autour de l'avion est symétrique. De ce fait, une position neutre des gouvernes latérales implique l'équilibre des forces latérales.

il est possible de transformer le système (3.12) sous la forme du problème d'optimisation :

$$\min_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}} f_{TC} = 0 \quad (3.14)$$

où  $f_{TC} : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction qui représente le « coût de l'équilibre » (*trim cost*) et qui est définie par :

$$\begin{aligned} TC &= f_{TC}(\theta, \delta_e, \delta_{et}, \delta_{it}, \delta_{TLA}) \\ &= \bar{w}_1 F_x^2 + \bar{w}_2 F_z^2 + \bar{w}_3 M_y^2 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} v_b = 0, u_b = V_{tas} \cos(\alpha) \\ w_b = V_{tas} \sin(\alpha) \\ p = q = r = 0 \\ \phi = \psi = 0, \theta = \alpha \\ \delta_a = \delta_{at} = \delta_r = 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

où les  $\bar{w}_i$  sont des pondérations strictement positives qui permettent d'imposer un taux de convergence relatif à chaque composante de la fonction à optimiser.

Finalement, trouver un point d'équilibre pour une condition de vol (altitude, vitesse, masse et centrage fixés) revient à résoudre le problème d'optimisation (3.14). À cet effet, un algorithme basé sur la méthode de Nelder-Mead a été développé. Son principe et son application sont présentés dans les deux sections suivantes.

### 3.2.2 Présentation de l'algorithme de Nelder-Mead

Considérons ici une fonction  $f$  positive définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \mathbf{X} &\rightarrow f(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (3.16)$$

où  $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_N]^T$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^N$ . La méthode de Nelder et Mead [29] est un algorithme qui permet de résoudre le problème d'optimisation non linéaire et sans dérivées :

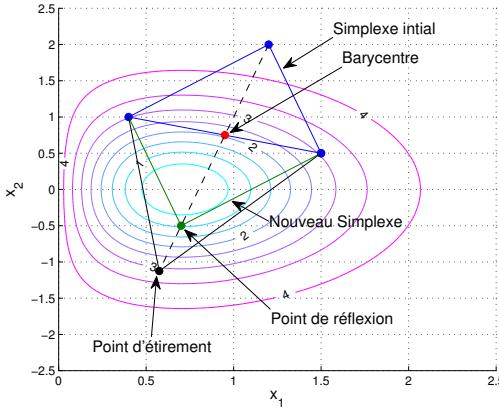
$$\min_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}) \quad (3.17)$$

Son principe se base sur la création d'un polytope de  $N + 1$  sommets, appelé simplexe. En évaluant la fonction en chaque sommet du simplexe, l'algorithme estime la tendance locale de la fonction. Le simplexe subit ensuite des transformations géométriques qui lui permettent de se déformer et de se déplacer jusqu'à converger en un point où la fonction admet un minimum local.

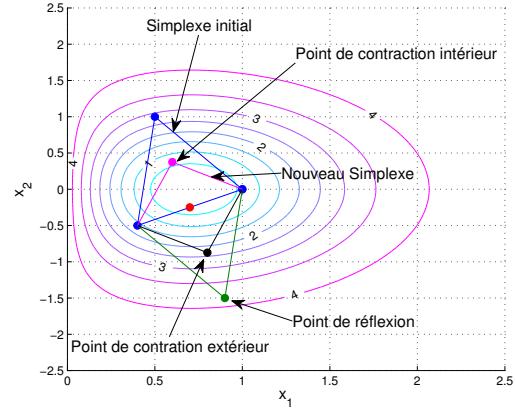
L'algorithme débute avec l'initialisation d'un simplexe. Celui-ci peut être obtenu à partir d'un point initial  $\mathbf{X}_1$  et de la formule de récurrence ci-dessous [22] :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{X}_1 = [x_{11}, \dots, x_{N_1}]^T \\ \mathbf{X}_i = 1.05 \times \mathbf{X}_{i-1}, \quad i = 2, \dots, N + 1 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

À chaque itération, l'algorithme commence par déterminer le sommet du simplexe où la fonction est maximale. Celui-ci est ensuite réfléchi par rapport au barycentre formé par les autres sommets du simplexe. Le point obtenu est appelé point de réflexion. Si la valeur de la fonction en ce point est inférieure à la plus petite des valeurs prises sur tous les sommets du simplexe, alors l'algorithme calcule un point d'étirement qui permet d'augmenter la taille du simplexe selon la direction du barycentre (voir l'exemple sur la Figure 3.1(a)). Dans le cas contraire, l'algorithme calcule deux points de contraction. Celui dont la valeur de la fonction est la plus petite est sélectionné et permet de contracter le simplexe (voir l'exemple sur la Figure 3.1(b)). Pour finir, si aucun des points n'améliore le simplexe, alors ce dernier est réduit au moyen d'une homothétie par rapport au sommet où la fonction est minimale.



(a) Point de réflexion et point d'extension



(b) Point de réflexion et point de contraction

Figure 3.1 Exemple de l'algorithme de Nelder-Mead sur une fonction pour  $N = 2$

L'algorithme de Nelder-Mead est disponible dans Matlab sous le nom de *fminsearch*. Cette fonction prend en arguments d'entrée la fonction à optimiser, un point de départ et les critères de convergence souhaités. Elle renvoie en sortie le point où la fonction est supposée minimale. Pour plus de détails concernant la méthode d'optimisation de Nelder et Mead le lecteur pourra se référer au livre de Pfeffer [22] ou à la documentation de Matlab [26].

Bien que cet algorithme soit efficace, il ne converge pas forcément vers un minimum global. En effet, dépendamment du point de départ ( $\mathbf{X}_1$ ), ce dernier peut s'enfermer dans un minimum local et y rester s'il estime que la décroissance n'est pas suffisante autour du simplexe. Pour contourner ce problème, on peut lancer plusieurs fois l'algorithme en prenant différents points de départ aléatoires et au final garder la meilleure solution parmi l'ensemble des solutions possibles. C'est le principe de l'**algorithme 1**.

---

Algorithme 1 Multi Nelder-Mead

```

1: fonction MULTINELDERMEAD( $\mathbf{X}_{min}, \mathbf{X}_{max}, i_{max}, \epsilon, k_{max}$ )
2:    $i \leftarrow 0$ 
3:    $\mathbf{X}_1 \leftarrow aleatoire([\mathbf{X}_{min}, \mathbf{X}_{max}])$ 
4:    $[\mathbf{X}_1, f_1] \leftarrow fminsearch(f, \mathbf{X}_1, \epsilon, k_{max})$ 
5:   tant que  $f(\mathbf{X}_1) > \epsilon$  et  $i < i_{max}$  faire
6:      $\mathbf{X}_2 \leftarrow aleatoire([\mathbf{X}_{min}, \mathbf{X}_{max}])$ 
7:      $[\mathbf{X}_2, f(\mathbf{X}_2)] \leftarrow fminsearch(f, \mathbf{X}_2, \epsilon, k_{max})$ 
8:     si  $f(\mathbf{X}_2) < f(\mathbf{X}_1)$  alors
9:        $\mathbf{X}_1 \leftarrow \mathbf{X}_2$ 
10:       $\mathbf{X}_1 \leftarrow \mathbf{X}_2$ 
11:       $f(\mathbf{X}_1) \leftarrow f(\mathbf{X}_2)$ 
12:    fin si
13:     $i \leftarrow i + 1$ 
14:  fin tant que
15:  retourner  $\mathbf{X}_1, f(\mathbf{X}_1)$ 
16: fin fonction

```

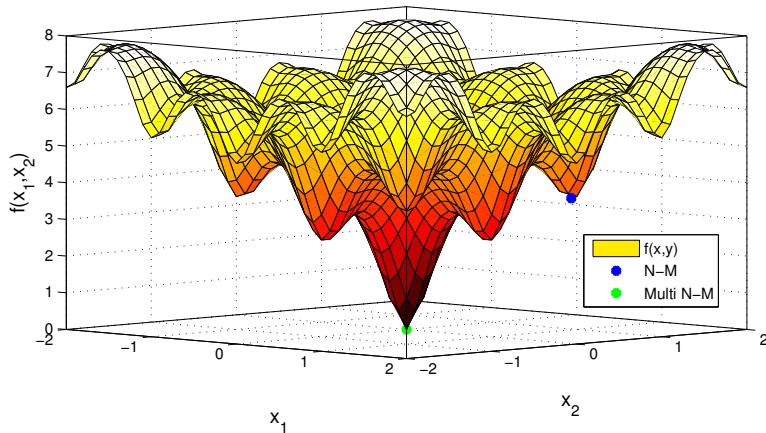
---

Pour vérifier l'efficacité de l'algorithme au complet, nous l'avons appliqué sur la fonction d'Ackley, définie par l'équation ci-dessous :

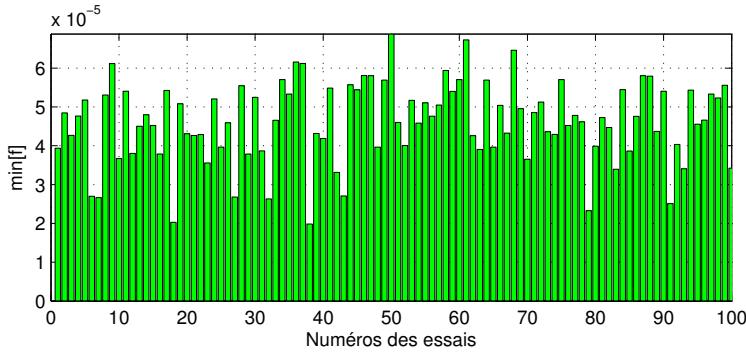
$$f(x_1, x_2) = -20e^{\left(-0.2\sqrt{0.5(x_1^2+x_2^2)}\right)} - e^{\left(0.5(\cos(2\pi x_1)+\cos(2\pi x_2))\right)} + 20 + e \quad (3.19)$$

Cette fonction possède de nombreux minima locaux et un seul minimum global. Nous avons appliqué dans un premier temps la fonction *fminsearch* (N-M) en choisissant le point initial  $\mathbf{X}_1 = [1, 1]^T$ . Comme on peut le voir sur la Figure 3.2(a), l'algorithme converge sur un minimum local (point en bleu) qui est différent du zéro recherché. En réalité, la seule possibilité de converger vers le minimum global est de partir d'un point très proche de ce dernier, ce qui n'est pas évidant à deviner lorsque l'on ignore la tendance de la fonction. Cependant, en appliquant l'**algorithme 1** (Multi N-M), nous convergeons vers le minimum global (point en vert) qui est l'unique zéro de la fonction.

Nous avons reproduit cette étude plusieurs fois de suite pour avoir une idée du pourcentage de réussite de la méthode. Comme on peut le voir sur la Figure 3.2(b), sur 100 essais, l'algorithme converge 100 fois sur le minimum global. Ces résultats sont très satisfaisants car ils nous permettent de valider l'**algorithme 1**.



(a) Représentation de la fonction d'Ackley et validation de l'algorithme 1



(b) Résultats obtenus avec l'algorithme 1 sur 100 essais

Figure 3.2 Validation de l'algorithme « multiNelderMead » sur la fonction d'Ackley

### 3.2.3 Application à un avion

En reprenant le modèle de la plateforme de simulation développée dans le **chapitre 2**, nous avons créé la fonction  $f_{TC}$  sous Simulink (voir Figure 3.3). Cette dernière prend en entrée l'angle de tangage, les différentes commandes du mouvement longitudinal (voir Eq. 3.15) et renvoie en sortie le paramètre *trim cost* ( $TC$ ) qui caractérise l'équilibre. Plus ce dernier tend vers zéro, plus on est proche de l'équilibre. Puis, en appliquant l'**algorithme 1** à cette fonction, il est possible de trouver un point d'équilibre pour une condition de vol donnée.

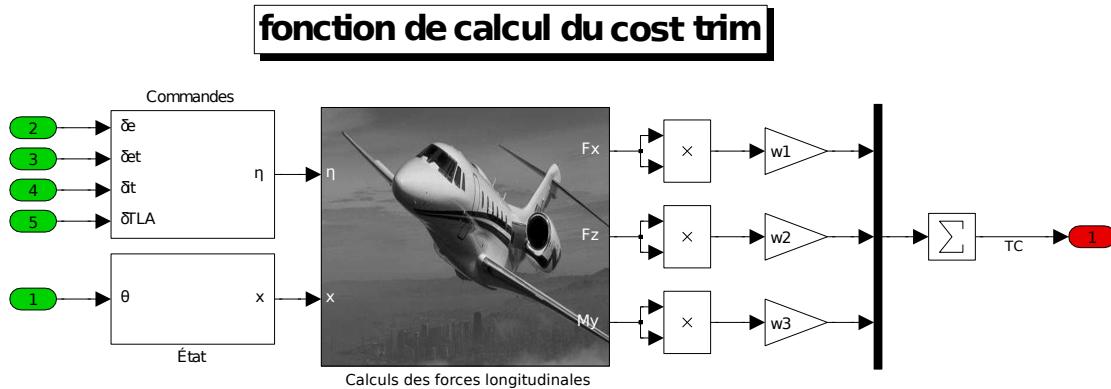


Figure 3.3 Représentation de la fonction *trim cost* sous Simulink

Le modèle Simulink étant généré à partir de la plateforme de simulation, ce dernier s'adapte automatiquement au modèle d'avion considéré. Une compilation en langage *C++* est effectuée, toujours de façon automatique, dans le but de réduire le temps d'exécution de l'algorithme d'équilibrage. Nous avons ainsi réussi à réduire le temps moyen de calcul de 180 secondes à moins d'une seconde. Pour finir, une interface a été développée pour simplifier l'utilisation du programme.

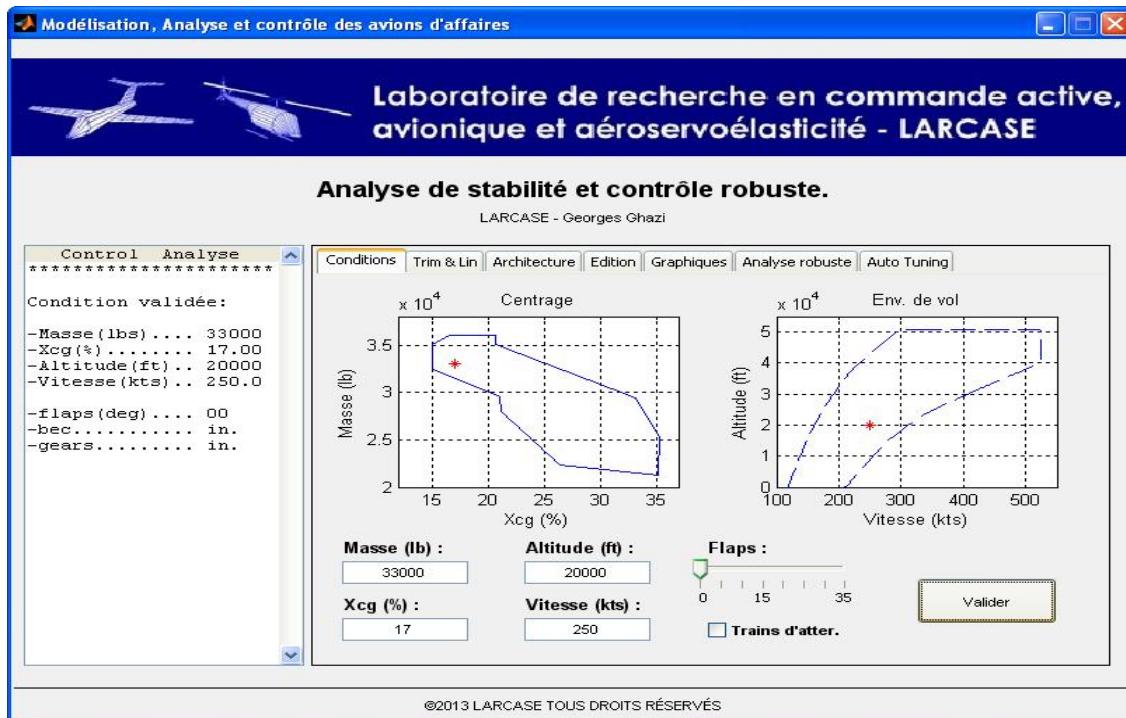


Figure 3.4 Interface utilisateur : panneau de sélection de la condition de vol

### 3.3 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Dans cette section, nous abordons la linéarisation des équations du mouvement autour d'un point d'équilibre. Comme présenté dans la **section 3.1**, le modèle linéaire autour d'un point d'équilibre est obtenu en calculant les matrices jacobienes de  $\mathbf{f}$  par rapport au vecteur d'état  $\mathbf{x}$  et par rapport au vecteur de commande  $\boldsymbol{\eta}$ . Plutôt que de linéariser le modèle complet de la dynamique de vol, nous verrons dans un premier temps qu'il est possible de découpler les mouvements longitudinaux et latéraux afin d'obtenir un modèle linéaire propre à chaque mouvement. Nous verrons ensuite comment obtenir la matrice jacobienne d'une fonction quelconque à partir d'une méthode numérique. Pour finir, nous présenterons l'application à un aéronef.

#### 3.3.1 Découplage des mouvements longitudinaux et latéraux

La fonction  $\mathbf{f}$  (voir Eq. 3.10) montre un couplage entre le mouvement longitudinal et le mouvement latéral à cause de (1) l'expression du produit vectoriel entre les vitesses linéaires et angulaires, (2) l'expression des dérivées des angles d'Euler et (3) l'expression des forces et moments qui dépendent de l'état complet de l'avion. En réalité, chaque mouvement influe que très peu (voire pas du tout) sur l'autre autour d'un point d'équilibre.

En considérant la théorie des petites perturbations, on peut réécrire les variables d'état comme la somme de leur état à l'équilibre et d'une perturbation  $\Delta$  comme suit :

$$\begin{aligned} u_b &= u_{b_e} + \Delta u_b & p &= \overset{0}{p}_e + \Delta p \\ v_b &= \overset{0}{v}_{b_e} + \Delta v_b & q &= \overset{0}{q}_e + \Delta q & \phi &= \overset{0}{\phi}_e + \Delta \phi \\ w_b &= w_{b_e} + \Delta w_b & r &= \overset{0}{r}_e + \Delta r & \theta &= \theta_e + \Delta \theta \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ensuite en supposant que le carré ou le produit de perturbations est négligeable (ex :  $\Delta q^2 = 0$ ,  $\Delta q \Delta w_b = 0$ ) et que l'on travaille avec de petits angles (ex :  $\cos(\Delta \phi) \simeq 1$  et  $\sin(\Delta \phi) \simeq 0$ ), il est possible de réécrire le système (3.10) au voisinage d'un équilibre comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{u}_b = m^{-1} \Delta F_x - w_{b_e} \Delta q \\ \Delta \dot{w}_b = m^{-1} \Delta F_z + u_{b_e} \Delta q \\ \Delta \dot{q} = I_{yy}^{-1} \Delta M_y \\ \Delta \dot{\theta} = \Delta \phi \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{v}_b = m^{-1} \Delta F_y - u_{b_e} \Delta r + w_{b_e} \Delta p \\ \Delta \dot{p} = -(I_{xz}^2 - I_{xx} I_{zz})^{-1} (I_{zz} \Delta M_x + I_{xz} \Delta M_z) \\ \Delta \dot{r} = -(I_{xz}^2 - I_{xx} I_{zz})^{-1} (I_{xz} \Delta M_x + I_{xx} \Delta M_z) \\ \Delta \dot{\phi} = \Delta p + \tan(\theta_e) \Delta r \end{array} \right. \quad (3.21)$$

où  $\Delta F_i = F_i - F_{i_e}$  et  $\Delta M_i = M_i - M_{i_e}$  avec  $i = \{x, y, z\}$ .

Dès lors, on comprend que le couplage entre les deux mouvements autour d'un équilibre vient principalement de l'expression des variations des forces ( $\Delta\mathbf{F}$ ) et des moments ( $\Delta\mathbf{M}$ ). Cependant, l'expérience accumulée au cours des années sur de nombreux types d'avions a montré que l'influence des variables latérales (ou longitudinales) sur les forces longitudinales (ou latérales) sont négligeables autour d'un équilibre [11, 30, 46]. De ce fait, nous pouvons supposer que :

$$\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{l}
 \Delta F_x(\Delta u_b, \Delta w_b, \Delta q, \Delta \theta, \Delta \delta_e, \Delta \delta_{et}, \Delta \delta_{it}, \Delta \delta_{TLA}) \\
 \Delta F_z(\Delta u_b, \Delta w_b, \Delta q, \Delta \theta, \Delta \delta_e, \Delta \delta_{et}, \Delta \delta_{it}, \Delta \delta_{TLA}) \\
 \Delta M_y(\Delta u_b, \Delta w_b, \Delta q, \Delta \theta, \Delta \delta_e, \Delta \delta_{et}, \Delta \delta_{it}, \Delta \delta_{TLA})
 \end{array} & \begin{array}{l}
 \Delta F_y(\Delta v_b, \Delta p, \Delta r, \Delta \phi, \Delta \delta_a, \Delta \delta_{at}, \Delta \delta_r) \\
 \Delta M_x(\Delta v_b, \Delta p, \Delta r, \Delta \phi, \Delta \delta_a, \Delta \delta_{at}, \Delta \delta_r) \\
 \Delta M_z(\Delta v_b, \Delta p, \Delta r, \Delta \phi, \Delta \delta_a, \Delta \delta_{at}, \Delta \delta_r)
 \end{array} \\
 \hline
 \end{array} \quad (3.22)$$

Il devient alors possible de découpler la fonction (3.10) et donc d'étudier séparément le mouvement longitudinal et le mouvement latéral comme résumé dans le tableau ci-dessous :

Tableau 3.1 Découplage des mouvements au voisinage d'un point d'équilibre

	<b>Mouvement longitudinal</b>	<b>Mouvement latéral</b>
État	$\mathbf{x}_{lon} = [u_b \ w_b \ q \ \theta]^T$	$\mathbf{x}_{lat} = [v_b \ p \ r \ \phi]^T$
Commande	$\boldsymbol{\eta}_{lon} = [\delta_e \ \delta_{et} \ \delta_{it} \ \delta_{TLA}]^T$	$\boldsymbol{\eta}_{lat} = [\delta_a \ \delta_{at} \ \delta_r]^T$
Dynamique	$\dot{\mathbf{x}}_{lon} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{lon}, \boldsymbol{\eta}_{lon})$	$\dot{\mathbf{x}}_{lat} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{lat}, \boldsymbol{\eta}_{lat})$
Contraintes	$\mathbf{x}_{lat} = \mathbf{x}_{lat_e}$ , $\boldsymbol{\eta}_{lat} = \boldsymbol{\eta}_{late}$ $\mathbf{x}_{lon}(t_0) = \mathbf{x}_{lon_e}$ , $\boldsymbol{\eta}_{lon}(t_0) = \boldsymbol{\eta}_{lon_e}$ $\dot{m} = 0$ , $\dot{\mathbf{I}} = 0$	$\mathbf{x}_{lon} = \mathbf{x}_{lon_e}$ , $\boldsymbol{\eta}_{lon} = \boldsymbol{\eta}_{lon_e}$ $\mathbf{x}_{lat}(t_0) = \mathbf{x}_{late}$ , $\boldsymbol{\eta}_{lat}(t_0) = \boldsymbol{\eta}_{late}$ $\dot{m} = 0$ , $\dot{\mathbf{I}} = 0$

Comme on peut le remarquer, les deux mouvements sont décrits par la même fonction mais pour des contraintes différentes. Par la suite, pour éviter toute confusion, nous utiliserons la notation  $\mathbf{f}_{lon}$  pour référer au mouvement longitudinal et la notation  $\mathbf{f}_{lat}$  pour référer au mouvement latéral de sorte que :

$$\dot{\mathbf{x}}_{lon} = \mathbf{f}_{lon}(\mathbf{x}_{lon}, \boldsymbol{\eta}_{lon}) \quad (3.23)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{lat} = \mathbf{f}_{lat}(\mathbf{x}_{lat}, \boldsymbol{\eta}_{lat}) \quad (3.24)$$

Ainsi, en appliquant le résultat (3.5) aux équations (3.23) et (3.24), nous pouvons exprimer le modèle linéaire du mouvement longitudinal au voisinage d'un point d'équilibre par :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_{lon} = \underbrace{\nabla_{\mathbf{x}_{lon}} \mathbf{f}_{lon} \Big|_{(\mathbf{x}_{lon_e}, \boldsymbol{\eta}_{lon_e})}}_{\mathbf{A}_{lon}} \Delta \mathbf{x}_{lon} + \underbrace{\nabla_{\boldsymbol{\eta}_{lon}} \mathbf{f}_{lon} \Big|_{(\mathbf{x}_{lon_e}, \boldsymbol{\eta}_{lon_e})}}_{\mathbf{B}_{lon}} \Delta \boldsymbol{\eta}_{lon} \quad (3.25)$$

et le modèle linéaire du mouvement latéral au voisinage d'un point d'équilibre par :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_{lat} = \underbrace{\nabla_{\mathbf{x}_{lat}} \mathbf{f}_{lat} \big|_{(\mathbf{x}_{late}, \boldsymbol{\eta}_{late})}}_{\mathbf{A}_{lat}} \Delta \mathbf{x}_{lat} + \underbrace{\nabla_{\boldsymbol{\eta}_{lat}} \mathbf{f}_{lat} \big|_{(\mathbf{x}_{late}, \boldsymbol{\eta}_{late})}}_{\mathbf{B}_{lat}} \Delta \boldsymbol{\eta}_{lat} \quad (3.26)$$

où  $\nabla \mathbf{f}_{lon}$  et  $\nabla \mathbf{f}_{lat}$  sont les matrices jacobienes de  $\mathbf{f}_{lon}$  et  $\mathbf{f}_{lat}$ .

### 3.3.2 Calcul numérique d'une matrice jacobienne

Considérons ici une fonction  $\mathbf{f}$  quelconque définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{X} &\rightarrow \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.27)$$

où  $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n]^T$  est un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . La matrice jacobienne de  $\mathbf{f}$ , si elle existe, est définie par :

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n} \quad (3.28)$$

En utilisant un développement en série de Taylor d'une fonction  $f_i$  au voisinage d'un point  $x_j$ , nous pouvons écrire :

$$f_i(x_1, \dots, x_j + \epsilon, \dots, x_n) = f_i(\mathbf{X}) + \epsilon \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{X}) + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}(\mathbf{X}) + o(\epsilon^3) \quad (3.29)$$

$$f_i(x_1, \dots, x_j - \epsilon, \dots, x_n) = f_i(\mathbf{X}) - \epsilon \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{X}) + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}(\mathbf{X}) + o(\epsilon^3) \quad (3.30)$$

avec  $\epsilon > 0$  (e.g.  $\epsilon = 10^{-3}$ ). Puis en soustrayant (3.30) à (3.29),

$$f_i(x_1, \dots, x_j + \epsilon, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j - \epsilon, \dots, x_n) = 2\epsilon \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + o(\epsilon^3) \quad (3.31)$$

nous obtenons une approximation à l'ordre 3 de la dérivée partielle de la fonction  $f_i$  par rapport à  $x_j$  comme étant :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{f_i(x_1, \dots, x_j + \epsilon, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j - \epsilon, \dots, x_n)}{2\epsilon} \quad (3.32)$$

En appliquant cette approximation à l'ensemble des dérivées, il devient possible d'approximer

numériquement la matrice jacobienne évaluée au point  $\mathbf{X}$ . La procédure complète est présentée dans l'**algorithme 2**.

---

Algorithme 2 Calcul de la matrice jacobienne par différences finies

```

1: fonction JACOBIEN( $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\epsilon$ )
2:    $n \leftarrow \text{longueur}(\mathbf{X})$ 
3:    $\mathbf{f}_0 \leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{X})$ 
4:    $\delta\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}$ ,  $\delta\mathbf{Xav} \leftarrow \mathbf{X}$ ,  $\delta\mathbf{Xar} \leftarrow \mathbf{X}$ ,
5:   pour  $i = 1$  à  $n$  faire
6:      $\delta\mathbf{Xav}_i \leftarrow \delta\mathbf{X}_i + \epsilon$ 
7:      $\delta\mathbf{Xar}_i \leftarrow \delta\mathbf{X}_i - \epsilon$ 
8:      $\delta\mathbf{f} \leftarrow \mathbf{f}(\delta\mathbf{Xav}) - \mathbf{f}(\delta\mathbf{Xar})$ 
9:     pour  $j = 1$  à  $n$  faire
10:     $\mathbf{J}_{j,i} \leftarrow \delta\mathbf{f}_j / (2\epsilon)$ 
11:    fin pour
12:     $\delta\mathbf{Xav}_i \leftarrow \delta\mathbf{X}_i$ 
13:     $\delta\mathbf{Xar}_i \leftarrow \delta\mathbf{X}_i$ 
14:  fin pour
15:  retourner  $\mathbf{J}$ 
16: fin fonction

```

---

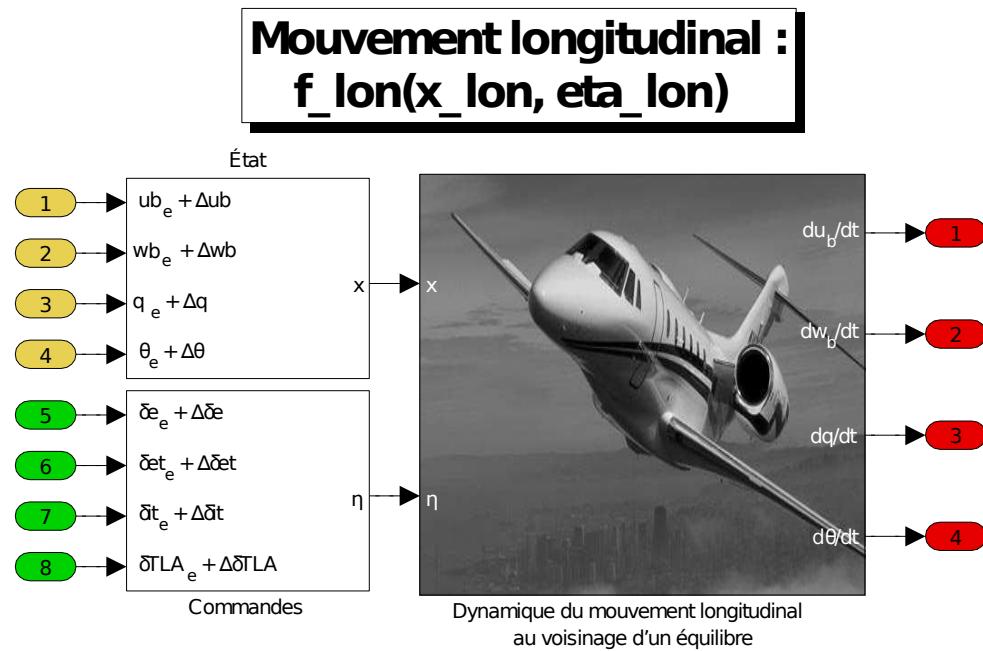
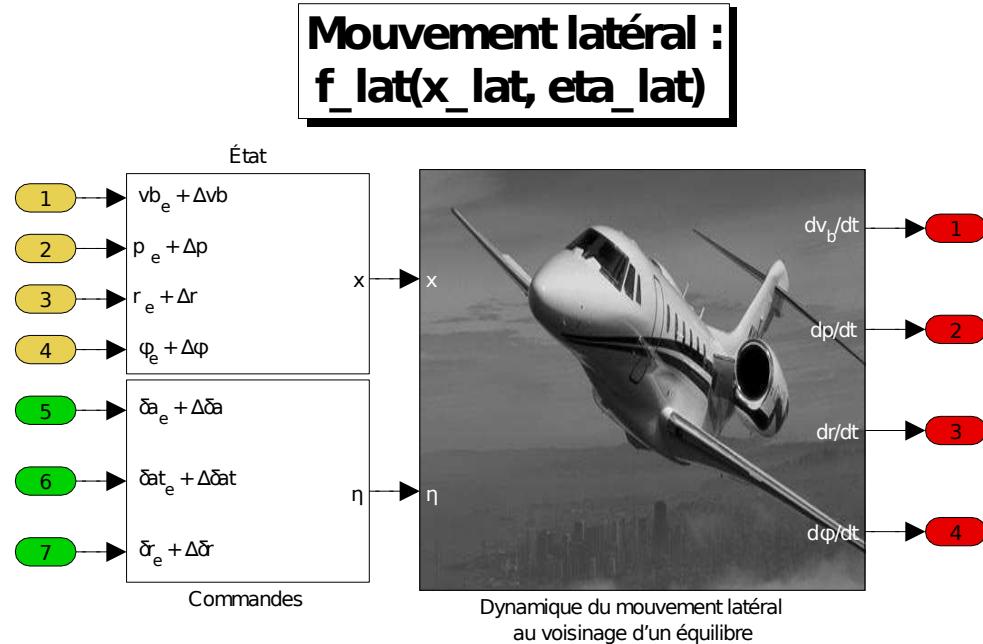
### 3.3.3 Application à un avion

Comme pour l'étude des points d'équilibre, nous avons développé sous Simulink les deux fonctions  $\mathbf{f}_{lon}$  et  $\mathbf{f}_{lat}$  (voir Figures 3.5 et 3.6). Ici aussi, les deux fonctions sont obtenues à partir de la plateforme de simulation développée dans le **chapitre 2** et s'adaptent donc au modèle d'avion considéré. De même, chaque fonction est aussi compilée en  $C_{++}$  toujours dans le but d'améliorer le temps de calcul<sup>2</sup>.

Ainsi, pour une condition de vol (altitude, vitesse, masse et centrage) et une configuration de vol (positions des volets hypersustentateurs et du train d'atterrissage), un point d'équilibre  $\mathbf{X}_e = (\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$  est calculé à partir de l'algorithme d'équilibrage présenté dans la **section 3.2**. De ce dernier, sont déduits les équilibres du mouvement longitudinal ( $\mathbf{X}_{lon_e} = (\mathbf{x}_{lon_e}, \boldsymbol{\eta}_{lon_e})$ ) et du mouvement latéral ( $\mathbf{X}_{lat_e} = (\mathbf{x}_{lat_e}, \boldsymbol{\eta}_{lat_e})$ ). Puis, les modèles Simulink des fonctions  $\mathbf{f}_{lon}$  et  $\mathbf{f}_{lat}$  sont compilées en  $C_{++}$ . Pour finir, l'**algorithme 2** est appliqué aux deux fonctions dans le but d'obtenir les matrices  $\mathbf{A}_{lon}$ ,  $\mathbf{B}_{lon}$ ,  $\mathbf{A}_{lat}$  et  $\mathbf{B}_{lat}$  conformément aux équations (3.25) et (3.26). La procédure complète est résumée sur la Figure 3.7.

---

2. Cette considération nous a permis de réduire le temps de calcul de 5 secondes à moins d'une seconde.

Figure 3.5 Représentation de la fonction  $f_{lon}$  sous SimulinkFigure 3.6 Représentation de la fonction  $f_{lat}$  sous Simulink

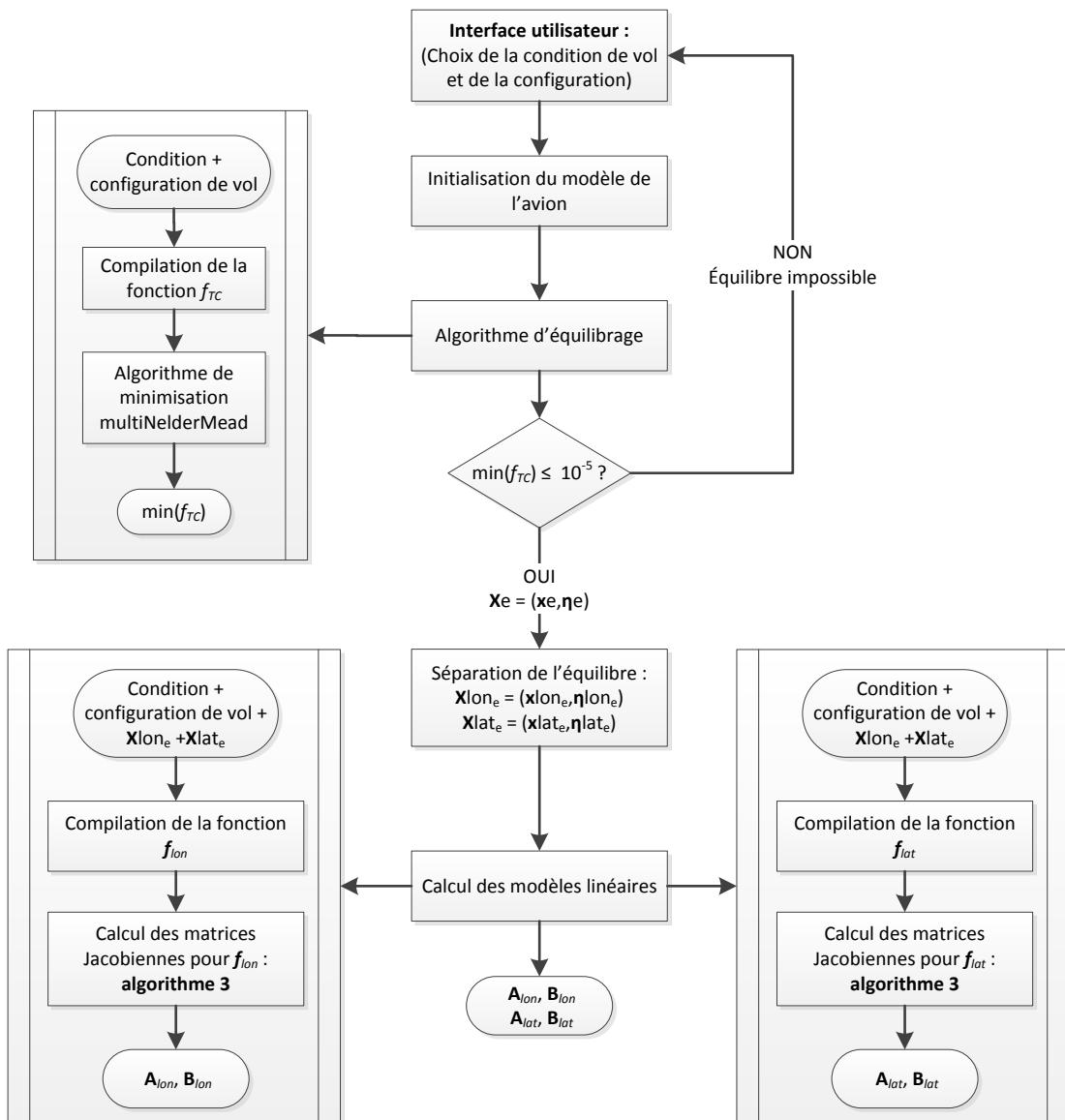


Figure 3.7 Processus pour les calculs de stabilité

### 3.4 Analyse de la stabilité d'un avion

Nous abordons ici la dernière section de ce chapitre qui consiste en l'analyse de la stabilité dynamique. À partir des modèles linéarisés au voisinage d'un point d'équilibre, il est maintenant possible d'analyser le comportement local de l'avion. À cet effet, nous présenterons dans un premier temps les différents modes qui caractérisent la réponse naturelle d'un avion. Puis, dans second temps, nous étudierons l'influence de l'altitude et de la vitesse vraie sur certains modes du Cessna Citation X.

#### 3.4.1 Analyse des modes d'un avion

Comme présentés dans la **section 3.1** et dans de nombreuses publications [11, 13, 30, 41, 46, 47], les modes d'un avion sont directement liés aux valeurs propres des matrices d'état  $\mathbf{A}_{lon}$  et  $\mathbf{A}_{lat}$ . Ces derniers sont résumés dans le Tableau 3.2.

Tableau 3.2 Définition des modes pour un avion

Mouvement	Mode	Nombre de pôles	Type
<b>Longitudinal</b>	Phugoïde	2	Oscillatoire
	Période courte	2	Oscillatoire
<b>Latéral</b>	Roulis amorti	1	Réel
	Spirale	1	Réel
	Roulis Hollandais	2	Oscillatoire

La Figure 3.8 montre la répartition dans le plan complexe des modes longitudinaux et latéraux pour le Cessna Citation X pour une condition de vol donnée<sup>3</sup>. On y retrouve pour le mouvement longitudinal :

- **le mode phugoïde** qui est un mode complexe mal amorti et très lent. Il est caractérisé par un échange d'énergie potentielle et d'énergie cinétique à angle d'attaque constant. Il ne pose pas de réelles difficultés au pilote, car celui-ci a suffisamment de temps pour stabiliser l'avion.
- **le mode de période courte** (ou *short period*) qui est un mode complexe moyennement amorti et plus rapide que le phugoïde. Il correspond à la première réaction de l'avion suite à une commande sur les élévateurs et représente un grand intérêt pour le pilotage car ces caractéristiques influent grandement sur les qualités de vol. Un mauvais contrôle de ce mode risquerait d'aggraver les oscillations et d'introduire des PIOS (*Pilote Induced Oscillation*).

3. Pour des raisons de confidentialité, nous ne préciserons pas la condition de vol.

et pour le mouvement latéral :

- **le mode Roulis Hollandais** (ou *Dutch Roll*) qui est un mode complexe peu amorti et très lent. Il correspond physiquement à un échange entre le mouvement en roulis et le mouvement en lacet. Bien que ce mode soit lent, les amplitudes des oscillations en roulis et lacet peuvent être considérables. Il est donc d'un grand intérêt de concevoir un système de commande pour amortir ce mode.
- **le mode spirale** qui est un mode réel amorti et très lent et qui a tendance à être instable. Il correspond, dans le pire des cas, à une augmentation de l'amplitude du roulis. Généralement, lorsqu'un avion rentre dans une spirale, il peut être très difficile (voire impossible) de le stabiliser.
- **le mode roulis amorti** qui est un mode réel généralement rapide. Comme son nom l'indique, il est suffisamment stable pour ne pas présenter de problème.

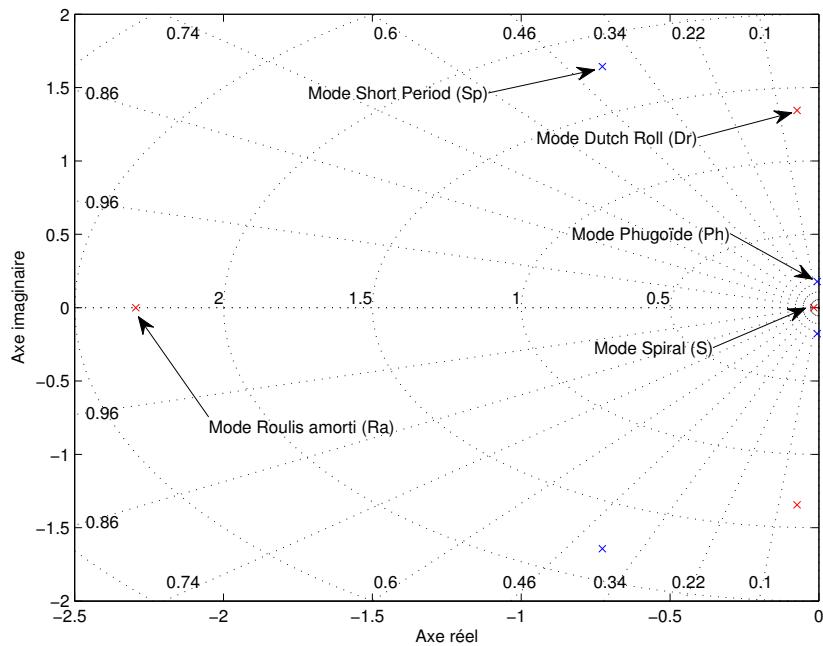


Figure 3.8 Répartition des modes longitudinaux et latéraux dans le plan complexe

De cette étude, nous comprenons que les modes les plus contraignants sont le *short period* et le *Dutch Roll*. Pour cela, nous proposons d'étudier l'influence de l'altitude et de la vitesse vraie sur ces derniers avant d'envisager une stratégie à adopter pour la commande de vol.

### 3.4.2 Influence de l'altitude et de la vitesse sur les modes du Cessna Citation X

La Figure 3.9 montre l'évolution du mode *short period* dans le plan complexe en fonction de l'altitude et de la vitesse vraie pour une masse et un centrage fixés. Le symbole  $\diamond$  représente un pôle pour une condition altitude/vitesse, une ligne de couleur représente soit une iso-altitude, soit un iso-vitesse et les flèches ( $\blacktriangleright$ ) indiquent le sens croissant des vitesses ou des altitudes.

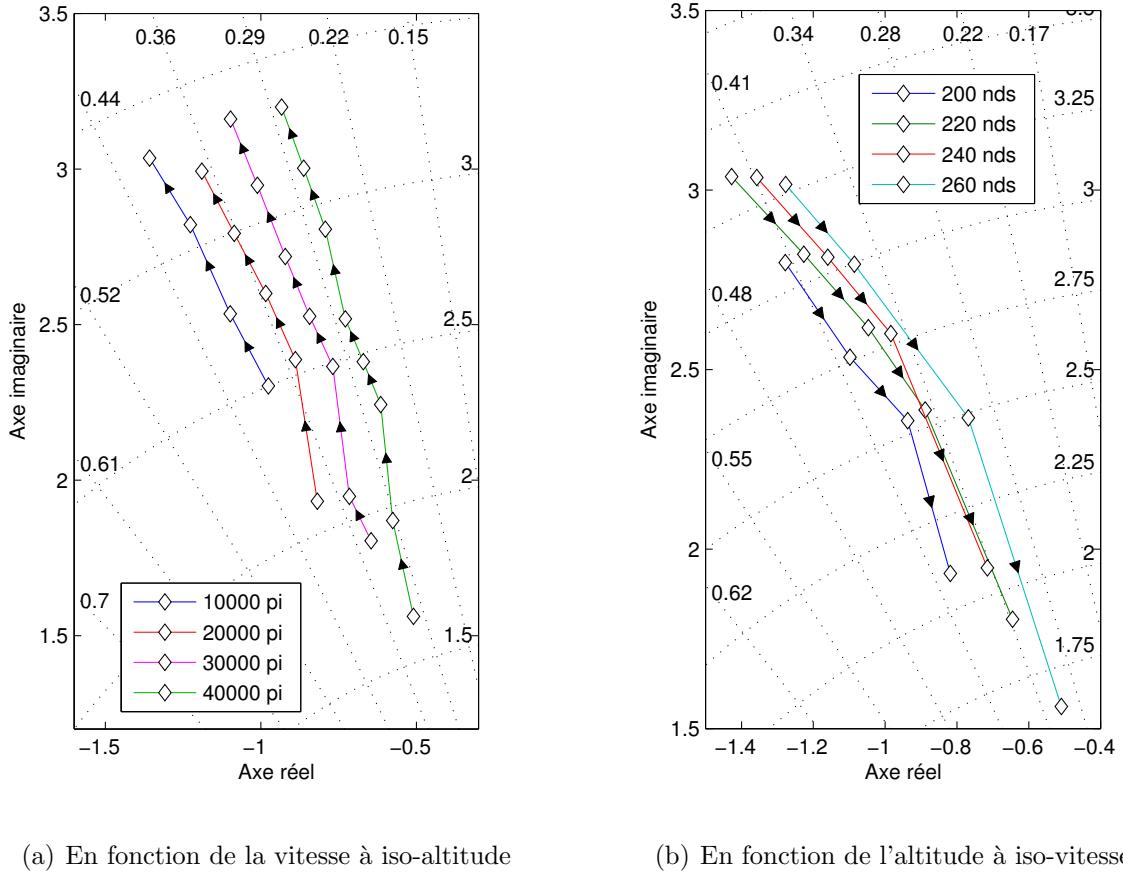


Figure 3.9 Évolution du mode *short period* en fonction de l'altitude et de la vitesse

De façon générale, on peut noter que :

- pour une altitude fixe, la vitesse influe principalement sur la pulsation propre du *short period* ( $\omega_{sp}$ ). Une augmentation de la vitesse (équivalent ici à l'augmentation du nombre de Mach) augmente la pulsation propre tandis que l'amortissement du mode ( $\xi_{sp}$ ) n'est quasiment pas affecté.
- pour une vitesse fixe, une augmentation de l'altitude tend à réduire aussi bien la pulsation propre  $\omega_{sp}$  que l'amortissement  $\xi_{sp}$ .

La Figure 3.10 montre l'évolution du mode *Dutch roll* dans le plan complexe en fonction de l'altitude et de la vitesse vraie pour une masse et un centrage fixés.

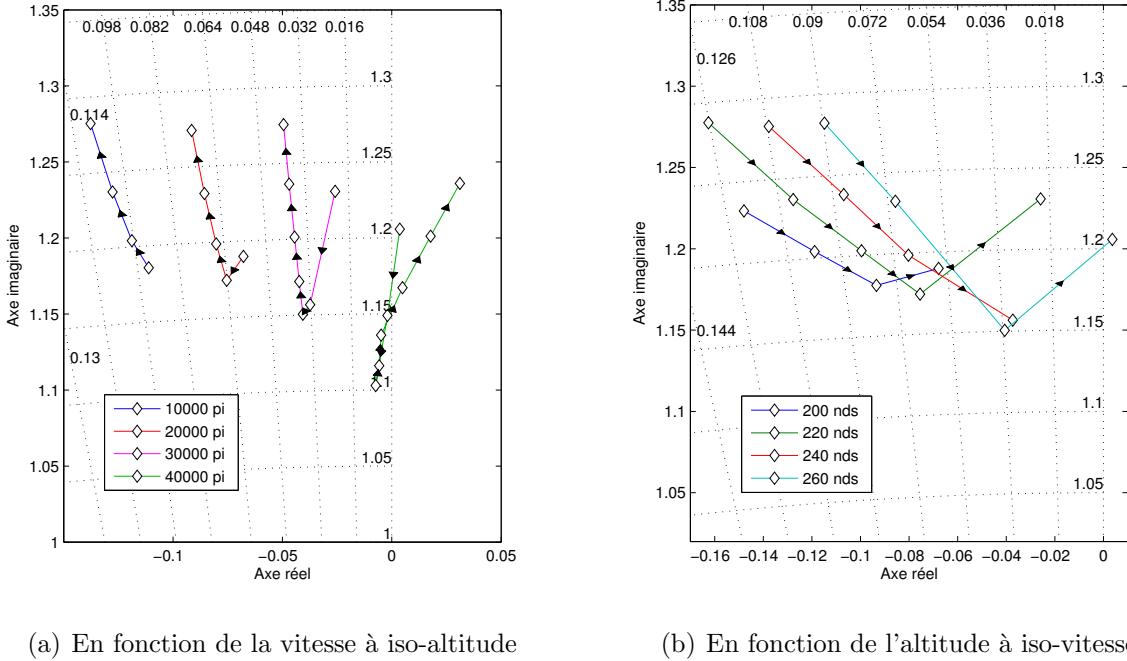


Figure 3.10 Évolution du mode *Dutch roll* en fonction de l'altitude et de la vitesse

De façon générale, on peut noter que :

- pour une basse altitude fixe, l'influence de la vitesse est quasiment nulle sur la pulsation propre  $\omega_{dr}$  et sur l'amortissement  $\xi_{dr}$ . En effet, même si on distingue certaines variations sur la Figure 3.10(a), ces dernières restent négligeables. À haute altitude cependant, une augmentation de la vitesse tend à rendre le mode instable.
- pour une vitesse fixe, une augmentation de l'altitude tend à diminuer l'amortissement  $\xi_{dr}$  tandis que la pulsation propre  $\omega_{dr}$  reste globalement constante.

À la lumière de cette analyse de stabilité, nous comprenons qu'il est nécessaire de concevoir un système qui permet d'améliorer la stabilité et la manœuvrabilité de l'avion. Ceci fait l'objet du prochain chapitre.

## CHAPITRE 4 CONCEPTION DES LOIS DE COMMANDE INTERNES

Dans ce chapitre nous discutons d'une méthodologie pour la synthèse de correcteurs qui permette d'améliorer les qualités de vol naturelles d'un avion. Dans une première partie, nous présenterons quelques rappels portant sur les systèmes linéaires et sur la commande optimale. Ces derniers nous seront utiles pour le développement de l'algorithme de commande. Puis dans une deuxième partie, nous nous intéresserons à la définition des besoins des systèmes de commande. Nous y présenterons dans un premier temps deux architectures de contrôle qui permettront d'améliorer la stabilité et la manœuvrabilité d'un avion. Puis, dans un second temps, nous définirons un ensemble d'exigences de conception accompagnés de critères de performance que les systèmes de commande devront satisfaire. Un cahier des charges sera ensuite élaboré dans le but d'orienter notre étude. Dans une troisième partie, nous développerons la méthodologie utilisée pour la synthèse des correcteurs. Nous y présenterons d'abord les principales étapes de la méthodologie, puis nous montrerons ensuite comment utiliser un algorithme génétique pour automatiser le processus de calcul. Enfin, dans une quatrième et dernière partie, nous discuterons d'analyse de robustesse. Une introduction à la théorie des applications gardiennes y sera présentée avant de montrer l'application à la commande de vol.

### 4.1 Commandabilité d'un système non linéaire et commande optimale

Dans cette section, nous présentons un ensemble de notions qui nous permettra par la suite, de développer les différents systèmes de commande d'un avion. Pour cela, nous reprenons ici les mêmes notations que dans la **section 3.1** ; c'est-à-dire que nous considérons de façon générale le système non linéaire :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) \quad (4.1)$$

et son linéarisé tangent au voisinage du point d'équilibre  $(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$  :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \boldsymbol{\eta} \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e$  et  $\Delta \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_e$ .

La commandabilité est un concept très important dans l'automatique moderne puisqu'elle

établit le fait qu'il est possible de commander un système dans le but de modifier une ou plusieurs de ses propriétés dynamiques. Une définition possible de la commandabilité est :

**Définition 4.1.** *Un état  $x_k$  du système non linéaire (4.1) est dit commandable, s'il est possible de trouver une commande  $\boldsymbol{\eta}(t)$  qui permet d'apporter tout état initial,  $x_k(t_0)$ , vers un état désiré,  $x_{k_d} = x_k(t_1)$ , en un temps fini  $t_1$ . Si cette propriété est vérifiée  $\forall k \in [1, \dots, n]$  et quel que soit l'instant initial  $t_0$ , alors le système est dit complètement commandable.*

Les modèles mathématiques des systèmes non linéaires étant difficiles à étudier et les méthodes de synthèse des systèmes linéaires étant très abondantes, on a tendance à se rapporter à l'étude du linéarisé tangent au voisinage d'un point d'équilibre [5, 21] en notant que :

**Proposition 4.1.** *Si le linéarisé tangent au point d'équilibre  $(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$  est complètement commandable, alors le système non linéaire (4.1) est complètement commandable au voisinage du point d'équilibre  $(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$ .*

Or, il est bien connu de la littérature [5], que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire invariant soit dit complètement commandable dépend uniquement de la paire  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , ou plus précisément de la matrice de commandabilité.

**Proposition 4.2.** *Le système représenté par l'équation d'état (4.2) est dit complètement commandable, si et seulement si le rang de la matrice de commandabilité  $\mathcal{C}$ , définie par :*

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \left[ \mathbf{B} \ : \ \mathbf{AB} \ : \ \dots \ : \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right] \quad (4.3)$$

est de rang  $n$ .

En pratique, la commande optimale suppose que toutes les variables d'état sont accessibles et que la paire  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  est complètement commandable. Sous de telles conditions, elle permet de trouver la matrice de gain  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tel que :

$$\Delta\boldsymbol{\eta} = -\mathbf{K}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{r} \quad (4.4)$$

de manière à minimiser l'indice de performance  $J$  défini par :

$$J = \int_0^\infty (\Delta\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \Delta\mathbf{x} + \Delta\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{R} \Delta\boldsymbol{\eta}) dt \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{Q}$  est une matrice de pondération symétrique semi-définie positive qui caractérise les performances attendues sur l'état du système en boucle fermée,  $\mathbf{R}$  est une matrice de

pondération symétrique définie positive qui caractérise les performances attendues sur la commande et  $\Delta \mathbf{r}$  est la consigne.

La solution de minimisation de l'indice de performance  $J$  est alors donnée par :

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice de gain de Riccati et l'unique solution de l'équation algébrique de Riccati [16, 18, 25, 46] sous la forme :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (4.7)$$

qui peuvent être obtenues grâce aux fonctions *lqr* et *are* de Matlab.

Compte tenu de l'expression de la commande  $\Delta \boldsymbol{\eta}$ , la boucle fermée est donnée par :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{A}_{bf} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{r} \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{A}_{bf}$  reflète les performances locales du système non linéaire sous l'effet de la commande (4.4). Le schéma-bloc correspondant est illustré sur la Figure 4.1.

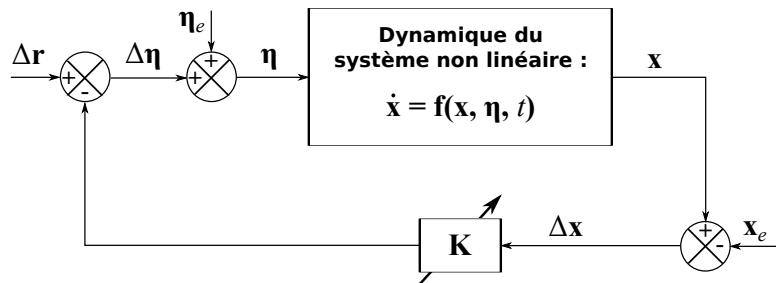


Figure 4.1 Structure de commande par retour d'état

Bien entendu, le modèle non linéaire étant linéarisé en plusieurs points d'équilibre, il va de soi que les matrices de gain calculées aux différents points de fonctionnement devront être interpolées en fonction de l'état du système. Cependant, le concept de *gain scheduling* ne sera pas traité dans ce mémoire.

Cette section nous fait voir que trouver une commande,  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_e + \Delta \boldsymbol{\eta}$ , qui stabilise localement le système non linéaire (4.1), revient à choisir les matrices de pondération  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  qui stabilisent le système linéaire (4.2). Nous verrons plus tard comment choisir ces matrices en fonction des performances souhaitées sur le système en boucle fermée.

## 4.2 Architecture de commande et introduction aux qualités de vol

Cette section a pour but de présenter les différentes architectures de commande proposées dans ce mémoire ainsi que les spécifications qu'elles devront satisfaire. Pour cela, nous montrerons dans un premier temps deux systèmes de commande; un système pour la commande de l'angle de tangage et un système pour la commande de l'angle de roulis. Puis dans un second temps, nous exposerons différentes qualités de vol connues dans la littérature qui permettent de quantifier la facilité de pilotage d'un avion. Enfin, nous terminerons par l'élaboration d'un cahier des charges pour chacun des deux systèmes présentés.

### 4.2.1 Architecture de contrôle

Comme nous l'avons vu dans la **section 3.4**, bien qu'un avion puisse être stable<sup>1</sup> pour certaines conditions de vol, plusieurs modes restent très peu amortis ou très lents. Ceci rend donc le pilotage très difficile car, la moindre perturbation sur le manche peut entraîner de grands mouvements oscillatoires. On comprend alors le stress qu'un pilote peut avoir lorsqu'il s'agit de suivre une trajectoire bien précise, tout en assurant le confort des passagers. Pour éviter cela, les ingénieurs conçoivent des systèmes de commande dans le but d'améliorer les qualités de vol et permettre ainsi un pilotage moins périlleux. La Figure 4.2 illustre les différentes boucles de commande que l'on peut retrouver dans un avion moderne.

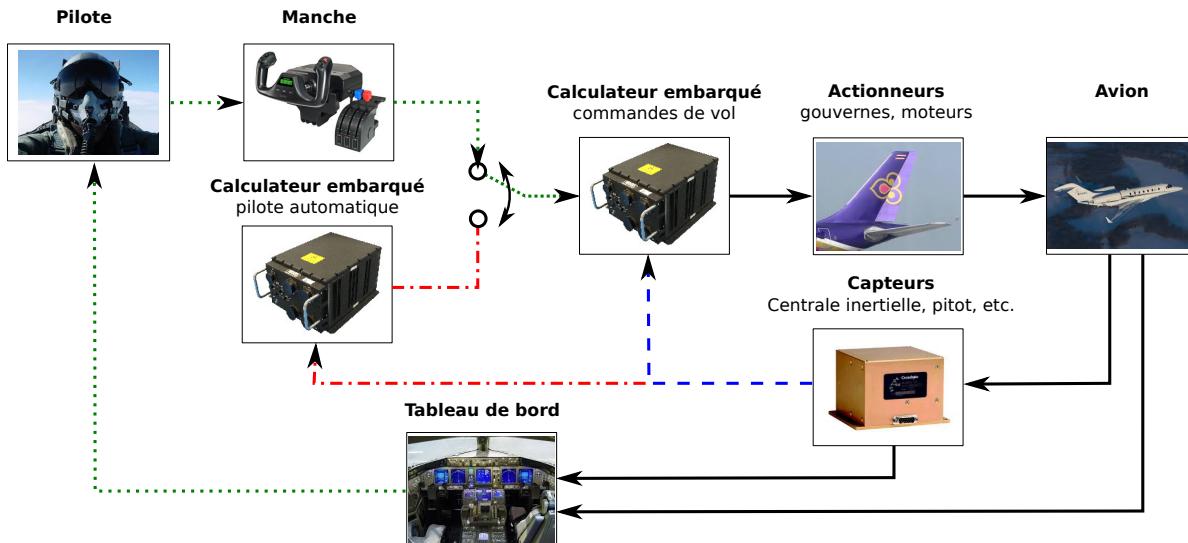


Figure 4.2 Architecture générale pour la commande d'un avion

1. Stable au sens de la **définition 3.2**

On y retrouve principalement quatre boucles :

- **la boucle ouverte** représentée en trait continu. Elle comprend les actionneurs, la dynamique naturelle de l'avion et les capteurs.
- **la boucle interne** représentée en (—). Elle est généralement formée de deux boucles ; une boucle interne appelée SAS (*Stability Augmentation System*) qui permet d'améliorer les qualités de vol de l'avion et une boucle externe appelée CAS (*Control Augmentation System*) qui permet de contrôler un des axes de l'avion.
- **la boucle externe** pour le pilotage automatique représentée en (—·—). Cette dernière sera traitée plus en détail dans le **chapitre 5**.
- **la boucle du pilote** représentée en (···) qui concerne le pilotage manuel.

Dans le cadre de ce mémoire, deux boucles internes ont été développées dans le but d'améliorer le comportement dynamique de l'avion.

La première boucle interne (voir Figure 4.3) permet de contrôler l'angle de tangage ( $\theta$ ) au moyen des élévateurs ( $\delta_e$ ). Elle est divisée en deux boucles : une boucle pour le  $SAS_{(1)}$  et une boucle pour le  $CAS_{(1)}$ . Le  $SAS_{(1)}$  est constitué d'une matrice de gains,  $\mathbf{k}_{\theta\delta_e}$ , qui permet d'effectuer un retour d'état sur la variation ( $\Delta\hat{\mathbf{x}}_{lon}$ ) des variables estimées du mouvement longitudinal ( $\hat{u}_b$ ,  $\hat{w}_b$ ,  $\hat{q}$  et  $\hat{\theta}$ ) par rapport à un équilibre ( $u_{be}$ ,  $w_{be}$ ,  $q_e$  et  $\theta_e$ ). Le  $CAS_{(1)}$  est composée d'un correcteur PI ( $k_{\theta p}$ ,  $k_{\theta i}$ ) et d'un gain d'action directe ( $k_{\theta ff}$ ).

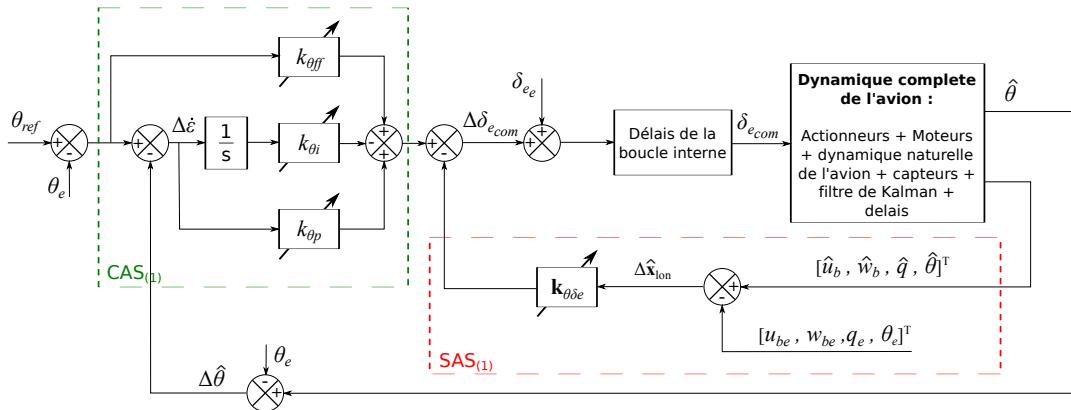


Figure 4.3 Architecture de la boucle interne pour le contrôle de l'angle de tangage

La deuxième boucle interne (voir Figure 4.4) permet de contrôler l'angle de roulis ( $\phi$ ) au moyen des ailerons ( $\delta_a$ ) et de la gouverne de direction ( $\delta_r$ ). Contrairement au contrôle de l'angle de tangage, deux gouvernes sont ici utilisées à cause du couplage entre les mouvements de roulis et de lacet. En effet, un mouvement en lacet induit un mouvement de roulis, et

un mouvement de roulis induit un mouvement de lacet inverse. Il est donc nécessaire de coordonner les deux gouvernes pour obtenir un mouvement latéral synchronisé. À cette fin, la boucle pour le  $SAS_{(2)}$  est composée de deux retours d'état sur la variation ( $\Delta\hat{\mathbf{x}}_{lat}$ ) des variables estimées du mouvement latéral ( $\hat{v}_b$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{r}$  et  $\hat{\phi}$ ) par rapport à un équilibre ( $v_{be}$ ,  $p_e$ ,  $r_e$  et  $\phi_e$ ).

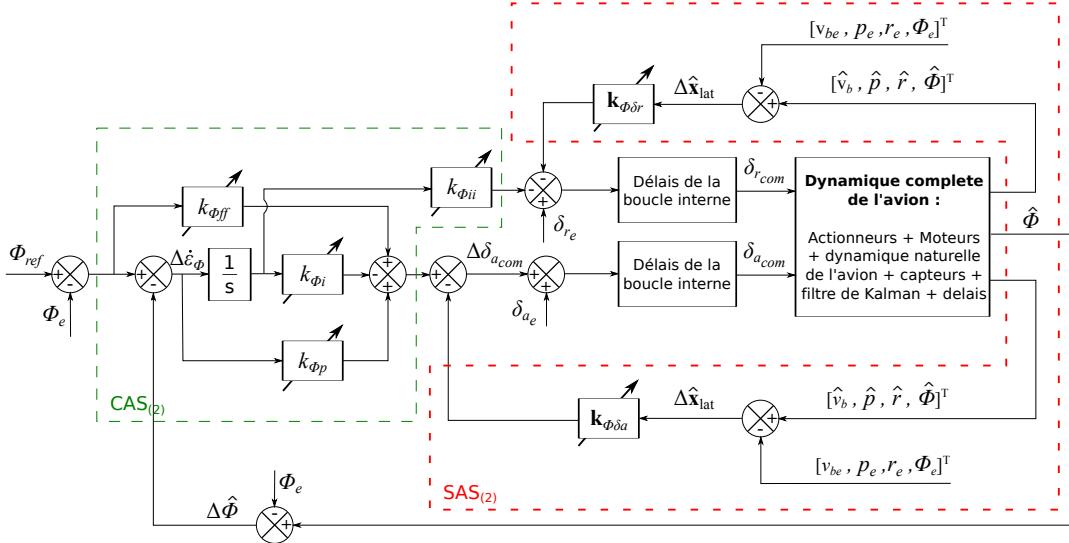


Figure 4.4 Architecture de la boucle interne pour le contrôle de l'angle de roulis

La matrice de gains,  $\mathbf{k}_{\phi\delta a}$ , permet d'effectuer un retour sur les ailerons afin de stabiliser le mouvement de roulis, tandis que la matrice de gains,  $\mathbf{k}_{\phi\delta r}$ , permet d'effectuer un retour sur la gouverne de direction pour stabiliser le mouvement de lacet. La boucle  $CAS_{(2)}$  est composée d'un correcteur PI ( $k_{\phi p}$ ,  $k_{\phi i}$ ), d'un gain d'action directe ( $k_{\phi ff}$ ) et d'un gain d'interconnexion ( $k_{\phi ii}$ ) qui permet de coordonner les deux gouvernes.

Pour finir, nous pouvons remarquer sur la Figure 4.2 que les deux boucles internes sont aussi bien utilisées par le pilote automatique que par le pilote. Pour cela, dans le cas d'un pilotage manuel, nous prendrons en compte le modèle du pilote tel qu'illustré ci-dessous :

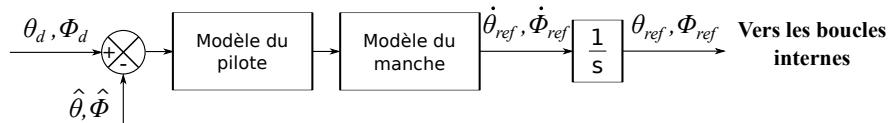


Figure 4.5 Illustration du modèle du pilote dans la boucle de pilotage

Ainsi, les algorithmes développés dans ce mémoire devront être capables de s'adapter en fonction du type de pilotage (manuel ou automatique).

#### 4.2.2 Introduction aux qualités de vol : définitions et spécifications militaires

Les qualités de vol sont des spécifications qui permettent de quantifier l'efficacité d'un avion. Elles sont principalement basées sur l'opinion des pilotes qui, lors d'essais en vol ou sur simulateur, donnent leur avis sur la manœuvrabilité de l'appareil. Les spécifications considérées dans ce mémoire, proviennent principalement de *the U.S "Military Specification for the Flying Qualities of Piloted Airplanes"*. Ces dernières sont d'origines militaires et sont classées selon le type d'avion, la phase de vol et le niveau d'acceptabilité des qualités de vol. Elles sont résumées dans le Tableau 4.1 ; les qualités de vol sont classées selon l'échelle d'opinion de Cooper-Harper.

Tableau 4.1 Classifications des avions, des phases de vol et des qualités de vol

---

##### *Classification des avions*

- Classe I** Avion léger et de petite taille.
- Classe II** Avion de masse moyenne avec manœuvrabilité moyenne.
- Classe III** Avion lourd avec manœuvrabilité moyenne.
- Classe IV** Avion de haute manœuvrabilité.

##### *Classification des phases de vol*

- Catégorie A** Phases de vol non terminales qui exigent des manœuvres rapides : poursuite rapide ou contrôle précis d'une trajectoire (ex. reconnaissance, attaque au sol, vol en formation).
- Catégorie B** Phases de vol non terminales qui exigent des manœuvres graduelles : poursuite ou contrôle d'une trajectoire moins précise (ex. montée, vol en palier, descente).
- Catégorie C** Phases de vol terminales qui exigent des manœuvres graduelles et un contrôle précis d'une trajectoire (ex. décollage, approche, atterrissage).

##### *Classification des qualités de vol*

- Niveau 1** Qualités de vol adéquates pour la phase de vol de la mission considérée.
  - Niveau 2** Qualités de vol nécessaires pour accomplir la phase de vol de la mission considérée, mais une augmentation de la charge de travail du pilote et/ou une dégradation dans l'efficacité de la mission est possible.
  - Niveau 3** Qualités de vol suffisantes pour que l'avion puisse être contrôlé en toute sécurité, mais la charge de travail du pilote est excessive et/ou l'efficacité de la mission est jugée insuffisante.
-

Pour plus de détails concernant les qualités de vol, le lecteur pourra se référer aux livres de Stevens et Lewis [46] et de Cook [11]. Dans la suite, nous résumons l'ensemble des critères relatifs à chacun des modes de l'avion.

**Spécifications pour le mode phugoïde.** Le mode phugoïde est un mode généralement stable mais qui possède un amortissement très faible. Les critères associés à l'amortissement de ce mode sont décrits dans le Tableau 4.2 :

Tableau 4.2 Spécifications pour l'amortissement du mode phugoïde

Niveau 1	$\xi_{ph} \geq 0.04$
Niveau 2	$\xi_{ph} \geq 0$
Niveau 3	Si instable, $T_{2ph} \geq 55$ s

où  $\xi_{ph}$  est l'amortissement du mode phugoïde et  $T_{2ph}$  est le temps de double amplitude ; c'est-à-dire le temps requis pour que l'oscillation de  $\theta(t)$  due au phugoïde double d'amplitude :

$$T_{2ph} = \frac{-\ln(2)}{\xi_{ph}\omega_{ph}} \quad (4.9)$$

où  $\omega_{ph}$  la pulsation propre du mode phugoïde.

**Spécifications pour le mode *short period*.** Le mode *short period* étant un mode très rapide et moyennement amorti, son excitation a tendance à engendrer des mouvements très brusques et indésirables pour les passagers ou pour le pilote. Il est donc important de garantir un minimum d'amortissement vis-à-vis de ce mode. Le Tableau 4.3 se réfère aux valeurs requises en fonction de la phase de vol et du niveau de stress imposé au pilote :

Tableau 4.3 Spécifications pour l'amortissement du mode *short period*

Niveau	Cat. A & C		Cat. B	
	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
1	0.35	1.30	0.30	2.00
3	0.25	2.00	0.20	2.00
3	0.15	Pas de limite	0.15	Pas de limite

**Spécifications pour le mode *Dutch roll*.** Le *Dutch roll*, similaire au phugoïde, est un mode très peu amorti qui peut devenir divergent à haute vitesse et haute altitude. Comme décrits dans le Tableau 4.4, les critères requis pour ce mode ne varient pas grandement d'une phase de vol à l'autre ou d'une classe à une autre (en particulier pour les niveaux 2 et 3).

Tableau 4.4 Spécifications pour le mode *Dutch roll*

Niveau	Catégorie de la phase de vol	Classe d'avion	min $\xi_{dr}$	min $\xi_{dr}\omega_{dr}$	min $\omega_{dr}$
1	A	I, IV	0.19	0.35	1.0
		II, III	0.19	0.35	0.4
	B	Toutes	0.08	0.15	0.4
	C	I, II-C, IV	0.08	0.15	1.0
		I, II-L, III	0.08	0.15	0.4
2	Toutes	Toutes	0.02	0.05	0.4
3	Toutes	Toutes	0.02	Pas de limite	0.04

**Spécifications pour le mode roulis amorti.** Le mode roulis amorti comme évoqué dans la **section 3.4** ne pose généralement aucune difficulté car, il est suffisamment loin de l'axe imaginaire. Le seul critère requis pour ce mode porte sur la constante de temps qui est fonction de la phase de vol et de la classe de l'avion comme présenté dans le Tableau 4.5.

Tableau 4.5 Spécifications pour la constante de temps ( $\tau_{ra}$ ) du mode roulis amorti

Catégorie de la phase de vol	Classe d'avion	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
A	I, IV	1.0 s	1.4 s	Pas de limite
	II, III	1.4 s	3.0 s	Pas de limite
B	Toutes	1.0 s	1.4 s	10 s
C	I, II-C, IV	1.0 s	1.4 s	Pas de limite
	II-L, III	1.4 s	3.0 s	Pas de limite

**Spécifications pour le mode spiral.** Le mode spiral étant un mode très lent, seul le temps de double amplitude  $T_{2s}$  sur l'angle de roulis est important. Les valeurs minimales acceptables en fonction de la phase de vol et des qualités de vol sont résumées dans le Tableau 4.6 :

Tableau 4.6 Spécifications pour le temps de double amplitude pour le mode spiral

Catégorie de la phase de vol	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
A	12 s	8 s	4 s
B	20 s	8 s	4 s
C	12 s	8 s	4 s

À ces spécifications, nous rajoutons certains critères basés sur des notions élémentaires d'asservissement. Ces derniers nous permettront d'apprécier la qualité de la réponse de l'avion en terme de dépassement, de temps de réponse, d'erreur par rapport à une référence à suivre, de marge de gain et de marge de phase.

**Spécifications temporelles.** Dans le cas d'un pilotage automatique, où le but de la commande se résume à atteindre une référence donnée, nous nous intéresserons à des critères portant sur la réponse d'un système à une entrée de type échelon. Les différentes grandeurs considérées sont illustrées sur la Figure 4.6 :

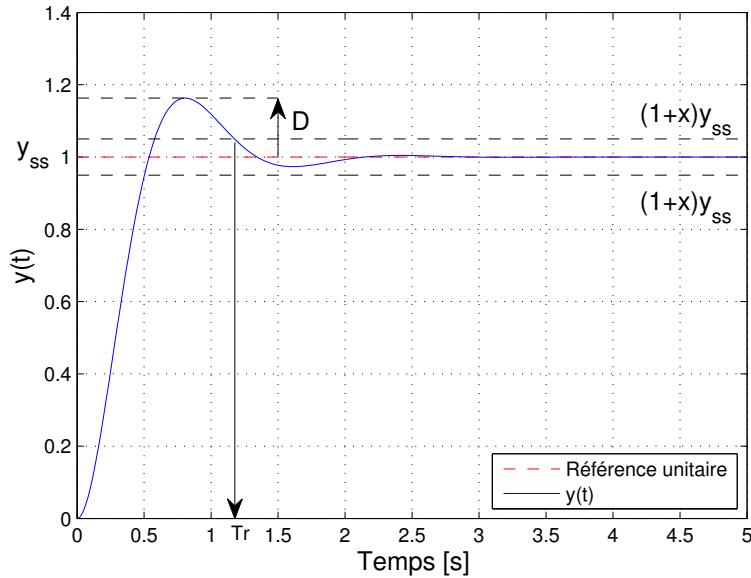


Figure 4.6 Réponse d'un système à une entrée de type échelon

où  $y(t)$  est la réponse du système,  $y_{ss}$  est la valeur en régime permanent,  $D$  est la valeur du dépassement maximal et  $T_r$  est le temps de réponse à  $x\%$ . On définit aussi l'erreur de position :  $e_p = 1 - y_{ss}$ . Nous considérerons qu'une réponse est satisfaisante si elle respecte les limites imposées du Tableau 4.7.

Tableau 4.7 Spécifications temporelles pour le pilotage automatique

Critère	Limite
Dépassement maximal	$D \leq 0.05$
Temps de réponse à 5%	$T_r \leq 2s$
Erreur de position	$e_p \leq 10^{-2}$

Dans le cas d'un pilotage manuel, où le but de la commande se résume à suivre une référence variante dans le temps, nous nous intéresserons à des critères portant sur la réponse d'un système à une entrée de type rampe. Les différentes grandeurs considérées sont illustrées sur la Figure 4.7,

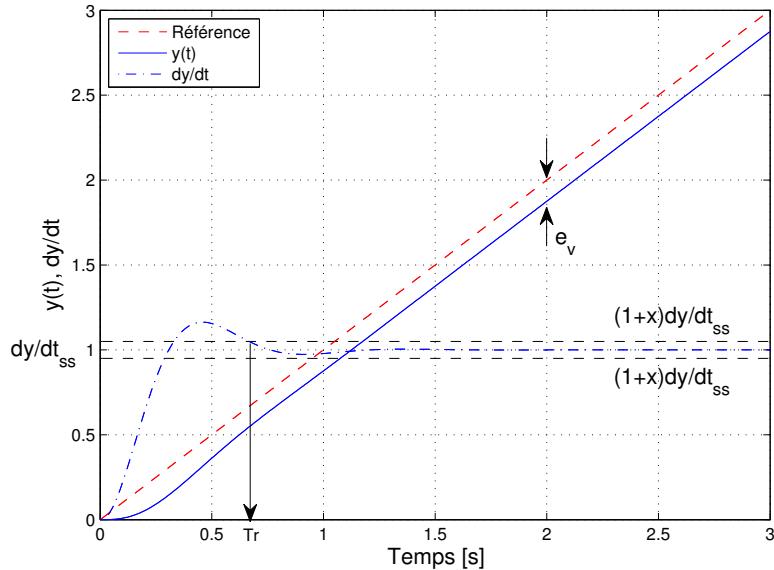


Figure 4.7 Réponse d'un système à une entrée de type rampe

où  $y(t)$  est réponse du système,  $T_r$  est le temps de réponse à  $x\%$  et  $e_v$  est l'erreur de vitesse. Ici aussi, nous considérerons qu'une réponse est satisfaisante si elle respecte les limites imposées du Tableau 4.8.

Tableau 4.8 Spécifications temporelles pour le pilotage manuel

Critère	Limite
Temps de réponse à 5%	$T_r \leq 2s$
Erreur de vitesse	$e_v \leq 10^{-2}$

**Spécifications fréquentielles.** Pour finir, il est commun de vérifier les marges de gain et de phase d'un système qui permettent de garantir une certaine marge de stabilité. Dans le cas de la commande de vol, il est important de s'assurer que le pilote, une fois dans la boucle de commande, ne menace pas la stabilité de l'aéronef [42, 46]. À cette fin, une marge de phase de  $45^\circ$  peut suffire pour prendre en compte le temps de réaction du pilote qui peut détériorer la stabilité de l'avion. De même, une marge de gain de 6 dB permet de tolérer l'ajout du gain dû à la présence d'un pilote.

### 4.2.3 Élaboration d'un cahier des charges

En regroupant l'ensemble des critères et qualités de vol vus dans la section précédente, nous définissons ici un cahier des charges qui traduira les performances de l'avion. Parmi les différentes phases de vol et les différents niveaux, nous avons choisi de respecter tous les requis du niveau 1 en trouvant un compromis entre les phases de vol. Le Tableau 4.9 résume les performances attendues pour le SAS ( $SAS_{(1)} + SAS_{(2)}$ ).

Tableau 4.9 Cahier des charges pour le SAS

SAS	Mode	Spécification	Niveau	Phase de vol
$SAS_{(1)}$	Phugoïde	$\xi_{ph} \geq 0.04$	1	A, B et C
	<i>Short period</i>	$0.35 \leq \xi_{sp} \leq 1.30$	1	A, B et C
$SAS_{(2)}$	<i>Dutch roll</i>	$\xi_{dr} \geq 0.19$	1	A, B et C
		$\omega_{rh} \geq 1.0 \text{ rad/s}$	1	A, B et C
		$\xi_{dr}\omega_{rh} \geq 0.35 \text{ rad/s}$	1	A, B et C
	Spiral	$T_{2_s} \geq 12 \text{ sec}$	1	A, B et C
	Roulis amorti	$\tau_{ra} \leq 1.0 \text{ sec}$	1	A, B et C

Une fois le SAS validé, le CAS sera ajouté dans la loi de contrôle pour commander l'angle de tangage ou l'angle de roulis. Le Tableau 4.10 résume les performances attendues pour le CSAS ( $CAS_{(1,2)} + SAS_{(1,2)}$ ).

Tableau 4.10 Cahier des charges pour le CSAS

CSAS	Spécification	Pilotage automatique	Pilotage manuel
$CSAS_{(1,2)}$	Temps de réponse à 5%	2 s	2 s
	Dépassement maximal	$\leq 5\%$	N/A
	Erreur de position	$e_p \leq 10^{-2}$	N/A
	Erreur de vitesse	N/A	$e_v \leq 10^{-2}$
	Marge de gain	N/A	$M_G \geq 6 \text{ dB}$
	Marge de phase	N/A	$M_P \leq 45^\circ$

Les architectures de contrôle et les spécifications étant définies, nous présentons dans la section qui suit, différentes théories liées au contrôle et leurs applications à la commande de vol.

### 4.3 Algorithme de contrôle appliqué à la commande de vol

Nous discutons ici de la méthodologie utilisée pour la conception des système de commande présentés dans la **section 4.2.1**. À cet effet, nous présenterons dans une première partie les principaux axes de la méthodologie proposée. Puis, dans une seconde partie, nous montrerons comment un algorithme génétique peut être utilisé dans le but d'automatiser la recherche des correcteurs qui satisfont les spécifications imposées par le cahier des charges. Nous y présenterons dans un premier temps le principe général de l'algorithme, puis dans un second temps, nous y détaillerons chacune des étapes de ce dernier.

#### 4.3.1 Présentation de la méthodologie utilisée pour les synthèses des correcteurs

En reprenant les architectures des deux boucles internes présentées dans la **section 4.2.1** (voir Figures 4.3 et 4.4), nous pouvons développer les expressions des lois de commande pour l'angle de tangage et pour l'angle de roulis tel que :

$$\Delta \delta_{e_{com}} = -k_{\theta\delta_e}\Delta \hat{\mathbf{x}}_{lon} - k_{\theta i}\Delta \varepsilon_{\theta} + k_{\theta p}\Delta \dot{\varepsilon}_{\theta} + k_{\theta ff}\Delta \theta_{ref} \quad (4.10)$$

et :

$$\begin{bmatrix} \Delta \delta_{a_{com}} \\ \Delta \delta_{r_{com}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{\phi \delta_a} \\ k_{\phi \delta_r} \end{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{x}}_{lat} - \begin{bmatrix} k_{\phi i} \\ k_{\phi ii} \end{bmatrix} \Delta \varepsilon_\phi + \begin{bmatrix} k_{\phi p} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \dot{\varepsilon}_\phi + \begin{bmatrix} k_{\phi ff} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \phi_{ref} \quad (4.11)$$

Puis, en introduisant les notations équivalentes du Tableau 4.11, il est possible de définir une loi de commande équivalente  $\Delta\eta_{com}$  tel que :

$$\Delta\eta_{com} = -k\Delta\hat{x} - k_i\Delta\varepsilon + k_p\Delta\dot{\varepsilon} + k_{ff}\Delta y_{ref} \quad (4.12)$$

de manière à pouvoir représenter les deux boucles internes sous une forme générale comme illustré sur la figure ci-dessous :

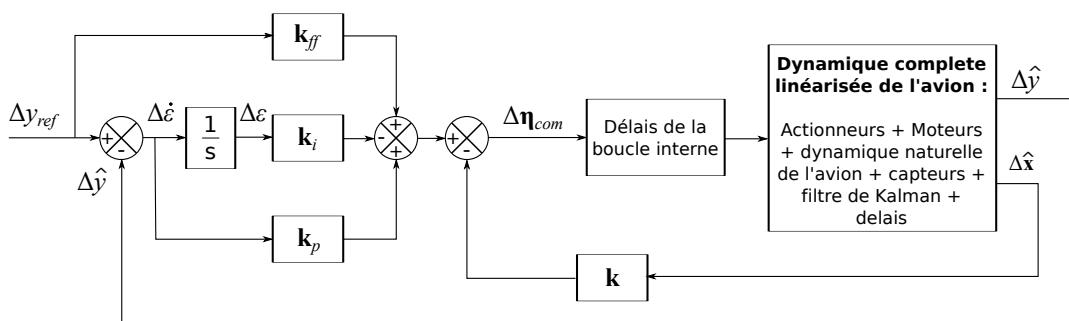


Figure 4.8 Représentation des boucles internes sous la forme équivalente

Tableau 4.11 Notations équivalentes pour les boucles internes

Notation équivalente	Boucle interne pour le contrôle de $\theta$	Boucle interne pour le contrôle de $\phi$
$\Delta\mathbf{x}$	$\Delta\mathbf{x}_{lon}$	$\Delta\mathbf{x}_{lat}$
$\Delta\boldsymbol{\eta}$	$\Delta\delta_e$	$[\Delta\delta_a, \Delta\delta_r]^T$
$\Delta y$	$\Delta\theta$	$\Delta\phi$
$\Delta\varepsilon$	$\Delta\varepsilon_\theta$	$\Delta\varepsilon_\phi$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}_{\theta\delta_e}$	$[\mathbf{k}_{\phi\delta_a}, \mathbf{k}_{\phi\delta_r}]^T$
$\mathbf{k}_i$	$k_{\theta i}$	$[k_{\phi i}, k_{\phi ii}]^T$
$\mathbf{k}_p$	$k_{\theta p}$	$[k_{\phi p}, 0]^T$
$\mathbf{k}_{ff}$	$k_{\theta ff}$	$[k_{\phi ff}, 0]^T$

Grâce à cette considération, on comprend alors que quel que soit la boucle interne ou quel que soit le type de pilotage (manuel/automatique), l'objectif principal de l'algorithme de contrôle est de trouver un ensemble de gains ( $\mathbf{k}, \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_{ff}$ ) tel que le système équivalent en boucle fermée respecte les spécifications imposées par le cahier des charges.

La méthodologie utilisée dans ce mémoire pour résoudre le problème de contrôle, repose sur un couplage entre une méthode de contrôle optimale (LQR) et un algorithme génétique. Elle peut être résumée en six étapes, qui sont :

1. Choisir le type de contrôle :
  - Pour le contrôle de l'angle de tangage, poser  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{lon}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{lon/\Delta\delta_e}$  et choisir  $\mathbf{C}$  tel que  $\Delta\theta = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}_{lon}$ .
  - Pour le contrôle de l'angle de roulis, poser  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{lat}$ ,  $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{lat/\Delta\delta_a}, \mathbf{B}_{lat/\Delta\delta_r}]$  et choisir  $\mathbf{C}$  tel que  $\Delta\phi = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}_{lat}$ .
2. Choisir le type de pilotage : manuel ou automatique.
3. Définir les notations équivalentes du Tableau 4.11.
4. Calculer les gains  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{k}_i$  à partir de la méthode LQR :
  - (i) Augmenter le système initial en prenant en compte l'erreur :  $\Delta\dot{\varepsilon} = \Delta y_{ref} - \Delta y$ .  
On obtient alors le système augmenté en boucle ouverte ci-dessous :

$$\Delta\dot{\mathbf{x}}_{aug} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{\mathbf{x}} \\ \Delta\dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0}_{1 \times 1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{aug}} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\varepsilon \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{1 \times m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{aug}} \Delta\boldsymbol{\eta} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \Delta y_{ref} \quad (4.13)$$

où  $m$  représente le nombre de colonnes de  $\mathbf{B}$  ( $m = 1$  pour le contrôle de  $\theta$  et  $m = 2$  pour le contrôle de  $\phi$ ).

- (ii) Vérifier la commandabilité de la paire  $(\mathbf{A}_{aug}, \mathbf{B}_{aug})$ . Si complètement commandable, continuer, sinon il est impossible de commander le système.
  - (iii) Choisir des matrices de pondérations  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  et  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  à l'aide d'un algorithme génétique, puis appliquer la méthode LQR au système augmenté  $(\mathbf{A}_{aug}, \mathbf{B}_{aug})$ . On obtient alors la matrice de gains  $\mathbf{K} = [\mathbf{k}, \mathbf{k}_i]$ .
5. Choisir les gains  $\mathbf{k}_p$  et  $\mathbf{k}_{ff}$  à l'aide d'un algorithme génétique.
  6. Calculer les performances obtenues sur la boucle fermée :
    - Pour le pilotage automatique, la boucle fermée correspond uniquement à la boucle interne équivalente (voir Figure 4.8).
    - Pour le pilotage manuel, la boucle fermée prend en compte le modèle du pilote + manche (voir Figure 4.5) et la boucle interne équivalente.

Si les spécifications du cahiers des charges pour le SAS et pour le CSAS sont respectées, arrêter la recherche, sinon, retourner à l'étape 4.

Finalement, trouver un correcteur pour une boucle interne et pour un type de pilotage, revient à trouver les matrices de pondérations  $(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$  et les gains  $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_{ff})$  qui garantissent le respect du cahier des charges. Cependant, à cause du nombre de combinaisons possibles, trouver une telle solution n'est pas chose facile. À cet effet, un algorithme génétique peut être utilisé pour automatiser la recherche et trouver une solution dans un temps raisonnable. Son principe et son application sont présentés dans la section qui suit.

### 4.3.2 Algorithme génétique appliqué à la commande de vol

Comme mentionné dans la **section 1.3.5**, l'algorithme génétique reproduit le principe d'évolution des espèces dans le but de trouver une solution à un problème donné. Afin de mieux représenter les différents concepts de l'algorithme, nous empruntons ici certains termes propres aux mondes de la biologie et de la génétique. Dans la suite, nous parlerons de :

- **population** pour désigner un ensemble d'individus.
- **individu** pour désigner une solution possible au problème donné.
- **chromosome** pour désigner une partie d'une solution, donc d'un individu.
- **gène** pour désigner une partie d'un chromosome.
- **adaptation** pour caractériser la viabilité d'une solution.
- **génération** pour désigner une itération de l'algorithme.

Le principe de base d'un algorithme génétique consiste à prendre une population initiale et à laisser les individus se développer conformément à un modèle d'évolution selon des processus aléatoires. L'algorithme peut être découpé en cinq parties :

1. Définition de la structure d'un individu et création d'une population initiale,
2. Évaluation des individus,
3. Création de nouveaux individus à partir de la population actuelle,
4. Insertion des nouveaux individus dans la population,
5. Répétition du processus d'évolution.

Dans la suite, nous détaillons chacune d'elles.

### Définition de la structure d'un individu et création d'une population initiale

Dans notre cas, un individu (i.e. une solution) est donnée par l'ensemble  $\{\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_{ff}\}$ . On définit alors trois chromosomes : le chromosome  $\mathbf{Q}$ , le chromosome  $\mathbf{R}$  et le chromosome  $\mathbf{k}_{pf} = [\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_{ff}]$ . Afin de simplifier l'étude, nous supposons que les matrices de pondérations  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$  sont diagonales ; c'est-à-dire que :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & Q_{n+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & & (\mathbf{0}) \\ & \ddots & \\ (\mathbf{0}) & & R_m \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Sous cette hypothèse, un individu  $j$  peut être représenté sous la forme d'un vecteur  $Id$  constitué des gènes de chacun des chromosomes, tel que :

$$Id_j = \left[ \underbrace{Q_{1,j} \ \cdots \ Q_{n+1,j}}_{\mathbf{Q}} \ \underbrace{R_{1,j} \ \cdots \ R_{m,j}}_{\mathbf{R}} \ \underbrace{\mathbf{k}_{p_j} \ \mathbf{k}_{ff_j}}_{\mathbf{k}_{pf}} \right] \quad (4.15)$$

Une population de  $N$  individus est alors représentée sous la forme d'une matrice, tel que :

$$Pp = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & \cdots & Q_{n+1,1} & R_{1,1} & \cdots & R_{m,1} & \mathbf{k}_{p_1} & \mathbf{k}_{ff_1} \\ Q_{1,2} & \cdots & Q_{n+1,2} & R_{1,2} & \cdots & R_{m,2} & \mathbf{k}_{p_2} & \mathbf{k}_{ff_2} \\ \vdots & \vdots \\ Q_{1,N} & \cdots & Q_{n+1,N} & R_{1,N} & \cdots & R_{m,N} & \mathbf{k}_{p_N} & \mathbf{k}_{ff_N} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Individu } n^{\circ}1 \\ \text{Individu } n^{\circ}2 \\ \vdots \\ \text{Individu } n^{\circ}N \end{array}$$

À titre illustratif, nous donnons sur la Figure 4.9 une représentation plus schématique des concepts de population, d'individu et de chromosome.

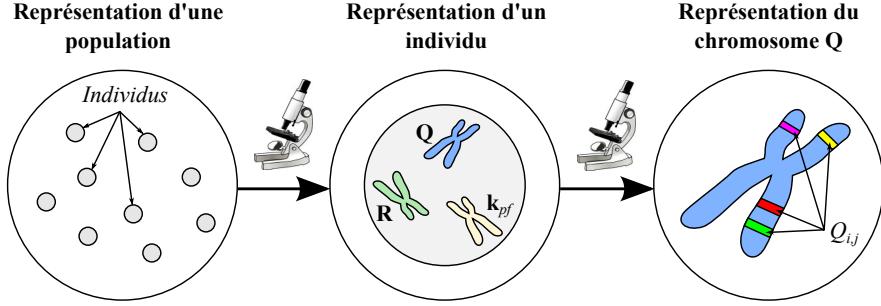


Figure 4.9 Représentations d'une population, d'un individu et d'un chromosome

Pour amorcer le processus d'évolution, il est nécessaire de créer une population initiale. Celle-ci peut être obtenue en générant des gènes de façon aléatoire dans des intervalles donnés. Le choix des intervalles est purement arbitraire et dépend du problème donné. Dans notre cas, nous avons réalisé plusieurs essais pour en déduire les intervalles moyens suivants :

$$\begin{array}{lll} Q_{i,j} \in [10^{-5}, 100] & \mathbf{k}_{p_i} \in [-30, 30] & \left| \begin{array}{l} i = 1, \dots, n+1 \\ j = 1, \dots, N \\ k = 1, \dots, m \end{array} \right. \\ R_{i,k} \in [10^{-5}, 1] & \mathbf{k}_{ff_i} \in [-30, 30] & \end{array} \quad (4.16)$$

### Évaluation des individus

L'évaluation des individus est l'étape la plus essentielle de l'algorithme car elle permet de quantifier le degré d'adaptation de chacun des individus ; c'est-à-dire de savoir si ces derniers sont "bons" ou "mauvais". Dans notre cas, un individu sera dit adapté, si le correcteur qu'il engendre satisfait les spécifications du cahier des charges pour le SAS et pour le CSAS. Un individu se verra attribuer un indice de qualité  $IQ_s$ , tel que :

$$IQ_s = \aleph \times 10 \quad (4.17)$$

où  $\aleph$  représente le nombre de spécifications respectées. De plus, pour distinguer deux individus qui respectent toutes les spécifications, nous rajoutons un indice de qualité ( $IQ_k$ ) qui porte sur les gains du correcteur, tel que :

$$IQ_k = \frac{10}{\sum_{\substack{0 < j < m \\ 0 < l < n}} \mathbf{k}_{j,l}^2 + \sum_{0 < j < m} \mathbf{k}_{i,j}^2 + \sum_{0 < j < m} \mathbf{k}_{p_j}^2 + \sum_{0 < j < m} \mathbf{k}_{ff_j}^2} \quad (4.18)$$

Bien entendu, l'indice  $IQ_k$  n'est calculé que si l'indice  $IQ_s$  est maximal. Ainsi, plus l'indice de qualité total ( $IQ = IQ_s + IQ_k$ ) est élevé, plus un individu a de chance de satisfaire le

cahier des charges.

Par la suite, la population est classée par ordre décroissant de l'indice de qualité total ; c'est-à-dire de l'individu le plus adapté à l'individu le moins adapté.

### Génération de nouveaux individus : croisement, mutation et cobaye

La création de nouveaux individus permet de combiner ou de modifier le patrimoine génétique des individus dans le but de diversifier la population et ainsi, créer des combinaisons génétiques qui n'étaient pas prévues dans la population initiale. Plusieurs méthodes peuvent être considérées en fonction du problème donné ou en fonction du niveau de connaissance en programmation. Dans le cadre de ce mémoire, trois méthodes ont été retenues.

**Méthode par croisement.** Un croisement consiste à prendre deux individus (parents) et à croiser leurs gènes pour créer deux nouveaux individus (enfants). Afin de diversifier au mieux les individus, nous avons opté pour deux types de croisement :

- **le croisement multi-points** : deux individus sont sélectionnés au hasard dans la population et sont divisés en deux ou trois sections (le choix est aléatoire), puis, les gènes de chaque parent sont distribués pour former deux enfant. La Figure 4.10 illustre un croisement en trois sections pour le cas particulier où  $n = 4$  et  $m = 2$ .

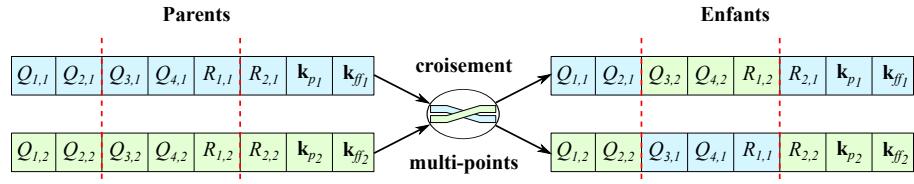


Figure 4.10 Exemple de croisement en deux points pour le cas  $n = 4$  et  $m = 2$

- **le croisement binaire** : deux individus sont sélectionnés au hasard dans la population. Un masque binaire est ensuite généré aléatoirement. Ce dernier est appliqué aux parents et décide si deux gènes peuvent être échangés. La Figure 4.11 illustre un exemple, toujours pour le cas particulier où  $n = 4$  et  $m = 2$ .

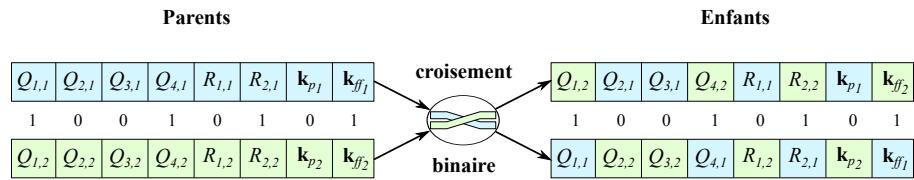


Figure 4.11 Exemple de croisement binaire

**Méthode par mutation.** Une mutation est une modification de l'information génétique d'un chromosome. Son principe consiste à permuter deux gènes sélectionnés au hasard au sein d'un même chromosome. Le nombre de chromosomes à muter est choisi de façon aléatoire. La Figure 4.12 illustre un exemple de mutation sur les trois chromosomes pour le cas particulier où  $n = 4$  et  $m = 2$ .

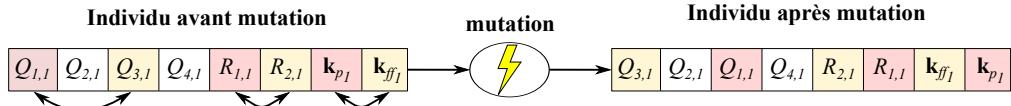


Figure 4.12 Exemples de croisements par sections

Le choix du nombre d'individus qui subiront une mutation est arbitraire. Dans notre cas, nous avons décidé de ne faire muter que 5% de la population.

**Méthode par cobaye.** Un cobaye est un individu sur lequel sont effectués des modifications génétiques dans le but d'améliorer son adaptation au sein d'un environnement. Cette méthode, inspirée par l'algorithme *Differential Evolution* [4], permet de créer des gènes qui n'étaient pas prévus dans le génome de la population initial.

Dans le cadre de ce mémoire, la méthodologie proposée se base sur l'amélioration du chromosome  $\mathbf{k}_{pf}$ . Pour cela, à chaque génération, le meilleur individu est sélectionné et l'algorithme de Nelder-Mead est appliqué afin de trouver les gains  $\mathbf{k}_p$  et  $\mathbf{k}_{ff}$  qui correspondent le mieux aux spécifications du cahier des charges pour le CSAS ; c'est-à-dire, qui minimisent le temps de réponse, le dépassement et l'erreur en position ou l'erreur en vitesse. Si une telle solution existe, alors les gènes de l'individu initial sont remplacés par les gènes du cobaye.

### Insertion des nouveaux individus dans la population

Selon la théorie de Darwin, les individus les plus adaptés ont le plus de chance de survivre et de transmettre leur patrimoine génétique d'une génération à l'autre. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons opté pour la méthode classique de l'élitisme. Cette dernière consiste à classer les individus et à ne garder que les  $N_s$  meilleurs. Par conséquent,  $(N - N_s)/2$  croisements sont nécessaires pour obtenir une nouvelle population de même taille que la précédente. Cette méthode privilégie une convergence assez rapide au détriment d'une diversité très pauvre. Pour contrebalancer ce déficit, nous avons décidé de faire un compromis entre la création des nouveaux individus et la sélection. Pour cela, le croisement est effectué sur la population non classée de sorte que les individus les moins adaptés puissent quand même transmettre leur patrimoine génétique et peut être créer une bonne solution.

## Répétition du processus d'évolution

Une fois la nouvelle génération obtenue, le processus d'évolution peut alors recommencer. La Figure 4.13 résume le processus de synthèse d'une boucle interne.

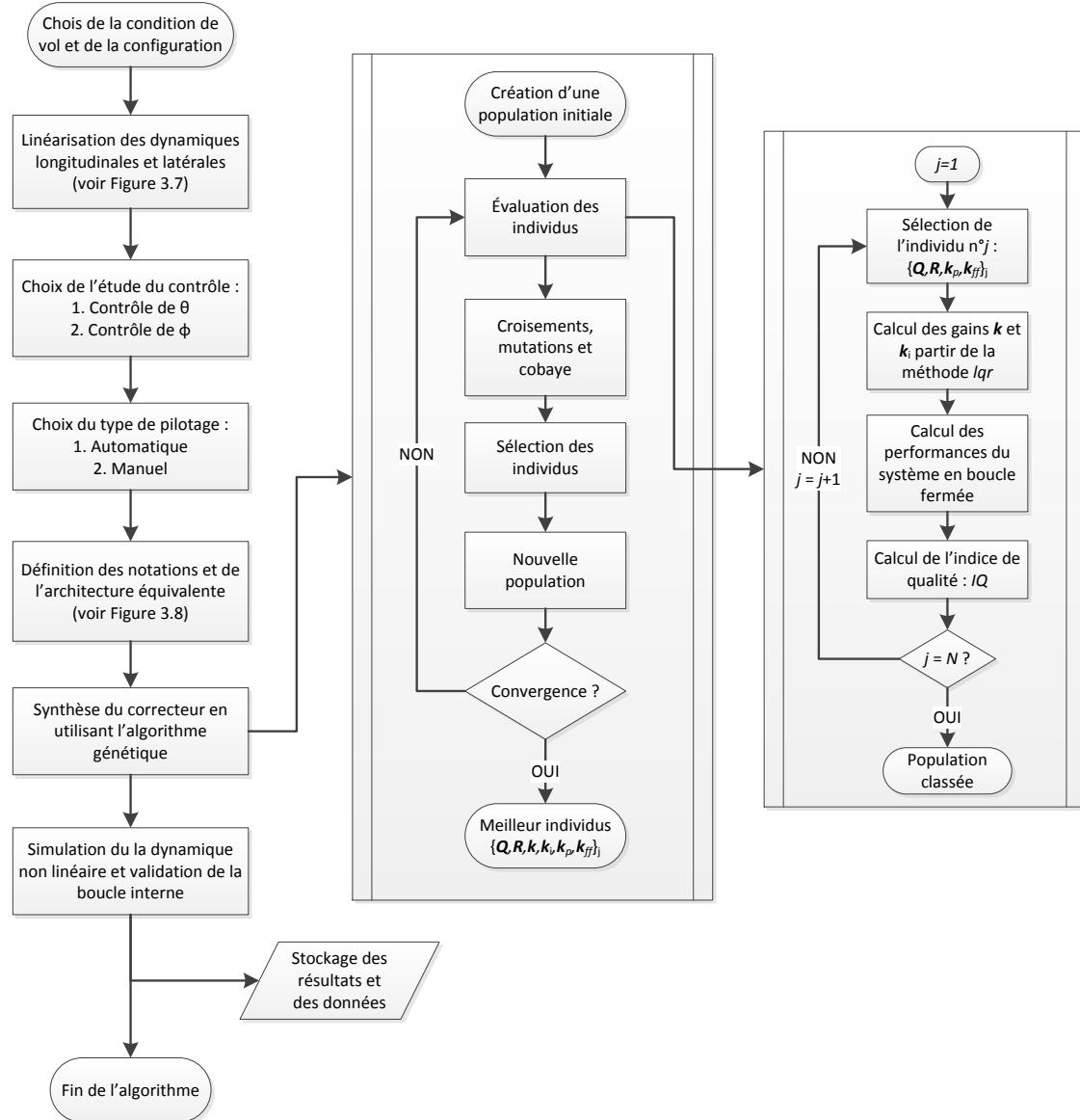


Figure 4.13 Processus de synthèse des boucles internes

Le choix du critère de convergence dépend du problème donné et du temps alloué à l'algorithme. Dans notre cas nous avons choisi de considérer que l'algorithme a convergé si l'un des trois critères suivants est atteint.

1. Le nombre de générations est supérieure à 250.
2. Plus de 50% des individus ont convergé vers le même code génétique.
3. Le meilleur individu respecte toutes les spécifications du cahier des charges.

Les deux premiers critères permettent d'arrêter l'algorithme lorsque celui-ci ne trouve aucune solution. En effet, après 250 générations ou si 50% de la population converge vers le même individu, il est fort probable que les solutions n'évolueront plus. Le dernier critère quant à lui, limite grandement la recherche d'une solution optimale mais permet néanmoins de réduire considérablement le temps d'exécution de l'algorithme. En effet, en fonction de la boucle interne et du type de pilotage, l'algorithme converge en moyenne entre 5 et 10 secondes.

#### 4.4 Analyse de la robustesse des correcteurs internes

Nous terminons ce chapitre en discutant d'analyse de robustesse. Nous savons maintenant que pour un avion, le modèle d'état obtenu par linéarisation n'est qu'une approximation locale de la dynamique réelle de l'aéronef. Ainsi, on peut se demander si les correcteurs seront toujours aussi efficaces lorsque le modèle non linéaire s'éloigne des conditions de vol pour lesquelles ils ont été conçus. Pour y répondre, il nous faut faire une analyse de robustesse pour quantifier le domaine d'efficacité des boucles internes.

##### 4.4.1 Applications gardiennes : définition et propriétés

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous introduisons ici certaines notions qui auront leur importance dans la définition des applications gardiennes. Pour cela, nous reprenons encore une fois les notations de la **section 3.1** ; c'est-à-dire que nous considérons de façon générale le système linéaire au voisinage d'un point d'équilibre  $(\mathbf{x}_e, \boldsymbol{\eta}_e)$  :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \boldsymbol{\eta} \quad (4.19)$$

où  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système et  $\Delta \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_e \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande. Nous nous intéressons ici à la stabilité d'un système par rapport à un domaine du plan complexe. À cet effet, nous introduisons ici la notion d' $\Omega$ -Stabilité.

**Définition 4.2.** Soient  $\Omega$  un sous-ensemble ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$  et  $\partial\Omega$  sa frontière. On dit que le système linéaire (4.19) est  $\Omega$ -Stable si ses pôles sont à l'intérieur du domaine  $\Omega$  ; plus précisément si  $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset \Omega$ , où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ .

On désigne alors par  $\mathcal{S}(\Omega)$  l'ensemble des matrices qui sont  $\Omega$ -Stables, tel que :

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \sigma(\mathbf{A}) \subset \Omega\} \quad (4.20)$$

Les applications gardiennes sont des outils qui permettent de conclure sur la stabilité généralisée d'un système en terme de confinement des valeurs propres dans un domaine du plan complexe [42, 43]. Il s'agit de fonctions scalaires qui ont la propriété de s'annuler à chaque fois que le système étudié se trouve sur la limite du domaine de stabilité. En reprenant les notations précédentes, nous donnons ici la définition même des applications gardiennes telle que proposée dans [43] :

**Définition 4.3.** Soit  $\mathcal{X}$  l'ensemble des matrices carrées réelles de taille  $n$  et soit  $\mathcal{S}$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathcal{X}$ . Soit  $\nu$  une application de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathbb{C}$ . On dit que  $\nu$  garde  $\mathcal{S}$ , si pour tout  $\mathbf{A} \in \bar{\mathcal{S}}$ , on a :

$$\nu(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} \in \partial\mathcal{S} \quad (4.21)$$

On dit aussi que  $\nu$  est une application gardienne pour  $\mathcal{S}$ .

Grâce à cette définition, il nous est maintenant possible de conclure à la stabilité généralisée d'une famille de matrices. En effet, supposons que  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  soit une famille de matrice de  $\mathcal{X}$  qui dépend du vecteur  $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_k]^T \in U$  ( $U$  un sous-ensemble connecté de  $\mathbb{R}^k$ ). On a alors la proposition suivante [42, 43] :

**Proposition 4.3.** Soit l'ensemble  $\mathcal{S}$  gardé par l'application gardienne  $\nu$  et supposons que  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) \in \mathcal{S}$  pour un  $\mathbf{r}_0 \in U$ . Alors :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \in \mathcal{S} \quad \forall \mathbf{r} \in U \quad \Leftrightarrow \quad \nu(\mathbf{A}(\mathbf{r})) \neq 0 \quad \forall \mathbf{r} \in U \quad (4.22)$$

Considérons par exemple le cas particulier d'une famille biparamétrique  $\mathbf{A}(r_1, r_2)$ , tel que :

$$\mathbf{A}(r_1, r_2) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l r_1^i r_2^j \mathbf{A}_{i,j} \quad (4.23)$$

où  $(r_1, r_2) \in [r_1; \bar{r}_1] \times [r_2; \bar{r}_2]$  et les  $\mathbf{A}_{i,j}$  sont des matrices constantes. De même, soient  $\Omega$  un domaine de stabilité qui nous intéresse et  $\nu(r_1, r_2)$  une application gardienne pour  $\Omega$ .

S'il existe  $(r_{10}, r_{20}) \in [r_1; \bar{r}_1] \times [r_2; \bar{r}_2]$  tel que  $\sigma[\mathbf{A}(r_{10}, r_{20})] \subset \Omega$  et que  $\nu(r_1, r_2) \neq 0$  pour tout  $(r_1, r_2) \in [r_1; \bar{r}_1] \times [r_2; \bar{r}_2]$ , alors d'après la **proposition 4.3**, il est possible de conclure que la famille  $\mathbf{A}(r_1, r_2)$  est  $\Omega$ -Stable.

#### 4.4.2 Applications gardiennes usuelles

À partir du produit bialterné de deux matrices  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  défini par :

$$\mathcal{B}_{i,j} = (\mathbf{H} \odot \mathbf{G})_{i,j} = f_{(\mathbf{H}, \mathbf{G})}(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) \quad (4.24)$$

où  $f_{(\mathbf{H}, \mathbf{G})} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction définie par :

$$f_{(\mathbf{H}, \mathbf{G})}([p, q], [r, s]) = \frac{1}{2} \left( \det \begin{bmatrix} H_{p,r} & H_{p,s} \\ G_{q,r} & G_{q,s} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} G_{p,r} & G_{p,s} \\ H_{q,r} & H_{q,s} \end{bmatrix} \right) \quad (4.25)$$

et  $\mathbf{V}_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $\mathbf{V}$ , tel que :

$$\mathbf{V} = \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} \right] \quad (4.26)$$

il est possible de construire des applications gardiennes pour les domaines de stabilité classiques illustrés sur la Figure 4.14.

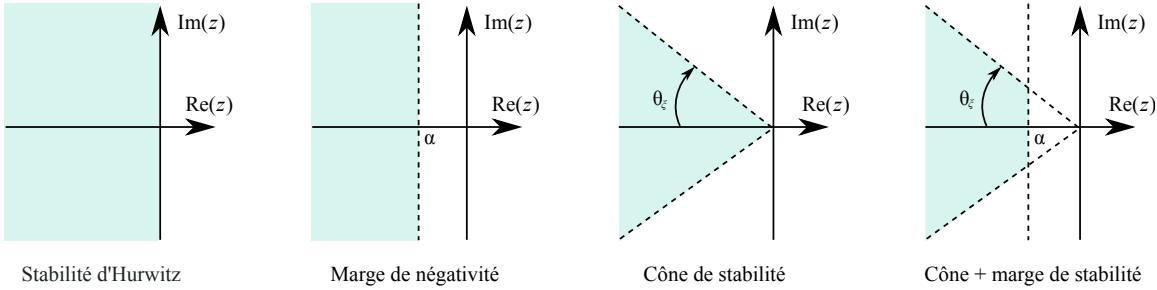


Figure 4.14 Représentation des régions de stabilité

On y retrouve :

- **Stabilité d'Hurwitz** : elle correspond au domaine  $\Omega_H = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) < 0\}$ . Une application gardienne pour ce domaine est donnée par :

$$\nu_H(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} \odot \mathbf{I}) \det(\mathbf{A}) \quad (4.27)$$

- **Marge de négativité** : elle correspond au domaine  $\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) \leq \alpha < 0\}$ . Le domaine concerné est gardé par l'application suivante :

$$\nu_\alpha(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} \odot \mathbf{I} - \alpha \mathbf{I} \odot \mathbf{I}) \det(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}) \quad (4.28)$$

- **Cône de stabilité** : pour le domaine,  $\Omega_\xi$ , formé par un cône dont la limite de l'angle

d'écartement  $\theta_\xi$ , est donnée par l'amortissement limite  $\xi = \cos(\theta_\xi)$ , une application gardienne est donnée par :

$$\nu_\xi(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^2 \odot \mathbf{I} + (1 - 2\xi^2)\mathbf{A} \odot \mathbf{A})\det(\mathbf{A}) \quad (4.29)$$

- **Marge de négativité + cône de stabilité** : pour le domaine composé des domaines  $\Omega_\alpha$  et  $\Omega_\xi$ , une application gardienne est donnée par :

$$\nu_{\alpha,\xi}(\mathbf{A}) = \nu_\alpha(\mathbf{A}) \times \nu_\xi(\mathbf{A}) \quad (4.30)$$

Pour plus de détails concernant les applications gardiennes, le lecteur pourra se référer à [43].

#### 4.4.3 Exemple d'application : robustesse d'un contrôleur

Pour mieux comprendre les notions d'analyse robuste et d'application gardienne, nous prenons ici l'exemple d'une suspension active de voiture :

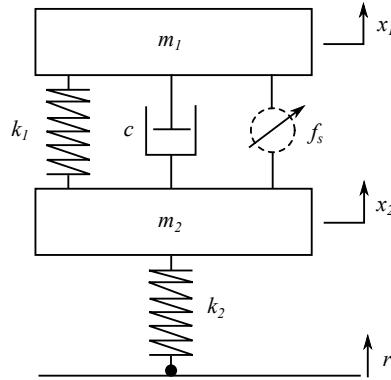


Figure 4.15 Suspension active d'une voiture

dont le modèle d'état est donné par :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{10000}{m_1} \\ 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{10000}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ f_s \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

où  $m_1 = 300$  Kg et  $m_2 = 60$  Kg représentent respectivement le quart de masse du véhicule

(plus passagers) et la masse de la roue,  $k_1 = 1,000 \text{ N/m}$  et  $k_2 = 190,000 \text{ N/m}$  les coefficients de raideur des ressorts,  $c = 1,000 \text{ N/m/s}$  le coefficient d'amortissement,  $f_s$  la force qui contrôle la suspension (commande du système),  $r$  une perturbation représentant le profil de la route,  $x_1$  et  $x_2$  le déplacement respectif des masses  $m_1$  et  $m_2$ . On suppose de plus que les masses  $m_1$  et  $m_2$  peuvent varier autour de leur valeur nominale, tel que :

$$m_1 = 300 + \delta m_1 \quad (4.33)$$

$$m_2 = 60 + \delta m_2 \quad (4.34)$$

où  $\delta m_1 \in [-100, 100]$  et  $\delta m_2 \in [-20, 20]$ .

Dans un premier temps, on souhaite trouver une commande  $f_s$  qui contrôle la position du véhicule,  $x_1$ , tout en garantissant que les pôles du système nominal en boucle fermée soient à l'intérieur du cône d'amortissement  $\xi = 0.7$  et à droite de l'axe imaginaire avec une marge de négativité  $\alpha = -2.5$ .

Pour cela, on pose la commande  $f_s$  suivante :

$$f_s = -\mathbf{k}_x \mathbf{x} - k_i \varepsilon = -\mathbf{k}_x \mathbf{x} - k_i (x_{1ref} - x_1) \quad (4.35)$$

où  $x_{1ref}$  est la position de référence du véhicule. Le système en boucle fermée est alors donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{k}_x & -\mathbf{B}_2 k_i \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{cl}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{cl}} \begin{bmatrix} r \\ x_{1ref} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

où  $\mathbf{C} = [1, 0, 0, 0]$  et  $\mathbf{B}_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $\mathbf{B}$ . En utilisant le modèle nominal, on trouve que les gains  $\mathbf{k}_x = [2.78, 1.11, -35.90, -1.65]$  et  $k_i = -6.30$  satisfont nos attentes.

On souhaite maintenant vérifier si le correcteur obtenu est robuste aux variations des masses  $m_1$  et  $m_2$ . Pour cela, on pose les applications gardiennes suivantes :

$$\nu_\alpha(\mathbf{A}_{cl}) = \det(\mathbf{A}_{cl} \odot I - \alpha I \odot I) \det(\mathbf{A}_{cl} - \alpha I) \quad (4.37)$$

$$\nu_\xi(\mathbf{A}_{cl}) = \det(\mathbf{A}_{cl}^2 \odot I + (1 - 2\xi^2) \mathbf{A}_{cl} \odot \mathbf{A}_{cl}) \det(\mathbf{A}_{cl}) \quad (4.38)$$

avec  $\xi = 0.7$  et  $\alpha = -2.5$ .

Grâce à la fonction *contour* de Matlab, nous avons tracé sur la Figure 4.16 les contours des deux applications gardiennes pour dévoiler les régions où ces dernières s'annulent.

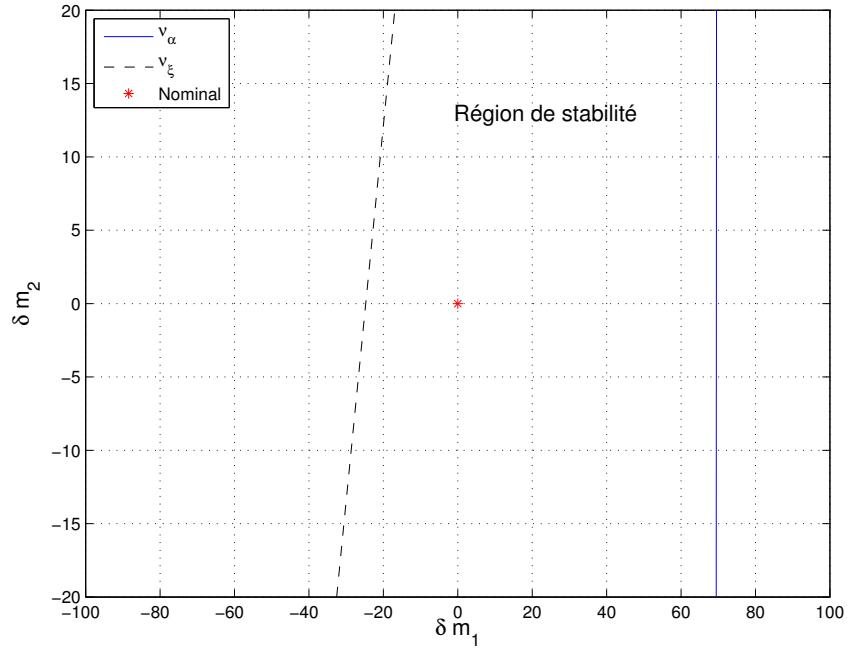


Figure 4.16 Analyse de robustesse pour une suspension active de voiture

De ces résultats, nous en concluons plusieurs choses :

- Pour des variations de masse situées à droite de la courbe en trait plein, au moins un des pôles du système en boucle fermée possède une partie réelle supérieure à  $\alpha$ .
- Pour des variations de masse situées à gauche de la courbe en trait discontinu (- -), au moins deux pôles du système en boucle fermée se trouvent en dehors du cône d'amortissement  $\xi = 0.7$ .
- Pour des variations de masse comprises entre les deux courbes, le système en boucle fermée respecte les spécifications limites  $\xi = 0.7$  et  $\alpha = -2.5$ .
- Le système en boucle fermée est beaucoup plus sensible à des variations de  $\delta m_1$  lorsque  $\delta m_2 = 0$  qu'à des variations de  $\delta m_2$  lorsque  $\delta m_1 = 0$ .

À la lumière de cet exemple, nous comprenons mieux l'utilité des applications gardiennes. En plus de dévoiler les régions d'efficacité (ou de stabilité) des correcteurs, elles permettent d'analyser le comportement d'un système et de comprendre l'influence que certaines variables physiques peuvent avoir sur le système. Elles sont donc un atout majeur dans la conception des systèmes de commande robuste. Dans la section qui suit, nous montrons comment ces dernières ont été utilisées dans le but de valider la robustesse des deux boucles internes.

#### 4.4.4 Application à la commande de vol

Jusqu'à présent, nous avons vu tout au long des parties précédentes comment obtenir un correcteur à la fois optimal et performant. De même, grâce aux applications gardiennes, il nous est maintenant possible de quantifier la robustesse d'un système de commande face à différentes incertitudes. Cependant, comme montré dans la section précédente, pour étudier la robustesse d'un modèle, il nous faut au préalable obtenir une modélisation en fonction des paramètres incertains.

#### Méthode des moindres carrés

Soit une matrice  $\mathbf{A}(x, y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $N$  le nombre de valeurs connues de la matrice  $\mathbf{A}$  en différents points :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}(x_1, y_1) \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}(x_2, y_2) \\ &\vdots \\ \mathbf{A}_N &= \mathbf{A}(x_N, y_N) \end{aligned} \tag{4.39}$$

On suppose que  $\mathbf{A}$  peut être approximée par une forme polynomiale en  $x$  et  $y$  de degré respectif  $k$  et  $l$ . Soit  $\hat{\mathbf{A}}$  l'estimée de  $\mathbf{A}$  telle que :

$$\hat{\mathbf{A}}(x, y) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l x^i y^j \mathbf{A}_{ij} \tag{4.40}$$

En combinant les équations (4.39) et (4.40) on obtient le système ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & x_1 \mathbf{I} & y_1 \mathbf{I} & x_1 y_1 \mathbf{I} & \cdots & x_1^k y_1^l \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & x_2 \mathbf{I} & y_2 \mathbf{I} & x_2 y_2 \mathbf{I} & \cdots & x_2^k y_2^l \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I} & x_N \mathbf{I} & y_N \mathbf{I} & x_N y_N \mathbf{I} & \cdots & x_N^k y_N^l \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00} \\ \mathbf{A}_{10} \\ \mathbf{A}_{01} \\ \mathbf{A}_{11} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{kl} \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

dont la solution au sens des moindres carrés est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{00} \\ \mathbf{A}_{10} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{kl} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^* \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_N \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

où  $\mathbf{M}^*$  est la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose qui peut être calculée par la fonction *pinv* de Matlab.

### Analyse de robustesse d'une boucle interne

Aux **chapitres 2 et 3** nous avons vu que les variables qui influent le plus sur le comportement d'un avion sont : la masse ( $m$ ), la position du centre de gravité ( $x_{cg}$ ), l'altitude ( $h$ ) et la vitesse vraie ( $V_{tas}$ ). À cet effet, nous présentons ici la procédure d'analyse robuste des boucles internes pour des incertitudes de type (masse/centrage) ou (altitude/vitesse). Cette dernière peut être résumée en huit étapes, qui sont :

1. Choisir une condition de vol nominale  $(m_0, x_{cg0}, h_0, V_{tas0})$ .
2. Choisir l'étude de contrôle ( $\theta/\phi$ , automatique/manuel) et calculer les différents gains de la boucle interne (voir **section 4.3**).
3. Choisir le type d'analyse de robustesse :
  - pour une analyse (masse/centrage) ; poser  $x_0 = m_0$ ,  $y_0 = x_{cg0}$ .
  - pour une analyse (altitude/vitesse) ; poser  $x_0 = h_0$  et  $y_0 = V_{tas0}$ .

Définir les incertitudes  $(\delta x, \delta y)$  telles que :  $\delta x \in [\underline{\delta x}; \bar{\delta x}]$  et  $\delta y \in [\underline{\delta y}; \bar{\delta y}]$ .

4. À partir de l'algorithme de linéarisation, calculer les différents modèles d'état pour les quatre conditions de vol :  $(x_0 + \underline{\delta x}, y_0 + \underline{\delta y})$ ,  $(x_0 + \underline{\delta x}, y_0 + \bar{\delta y})$ ,  $(x_0 + \bar{\delta x}, y_0 + \underline{\delta y})$ ,  $(x_0 + \bar{\delta x}, y_0 + \bar{\delta y})$ .
5. À partir de la méthode des moindres carrés et des cinq modèles d'état (nominal + ceux de l'étape 4), trouver les matrices  $\mathbf{A}_{i,j}$  et  $\mathbf{B}_{i,j}$  :

$$\mathbf{A}(\delta x, \delta y) = \mathbf{A}_{00} + \mathbf{A}_{10}\delta x + \mathbf{A}_{01}\delta y + \mathbf{A}_{11}\delta x\delta y \quad (4.43)$$

$$\mathbf{B}(\delta x, \delta y) = \mathbf{B}_{00} + \mathbf{B}_{10}\delta x + \mathbf{B}_{01}\delta y + \mathbf{B}_{11}\delta x\delta y \quad (4.44)$$

6. Avec les gains obtenus à l'étape 2, calculer le modèle d'état de la boucle fermée en utilisant les matrices  $\mathbf{A}(\delta x, \delta y)$  et  $\mathbf{B}(\delta x, \delta y)$ .
7. Choisir les domaines de stabilité : stabilité d'Hurwitz, marge de négativité et ou cône d'amortissement, et calculer les applications gardiennes qui gardent ces domaines en fonction de  $\delta x$  et  $\delta y$ .
8. Conclure sur la robustesse du système de commande.
  - si une des applications gardiennes s'annule une seule fois, alors le système de commande n'est pas robuste aux incertitudes posées. Retourner à l'étape 2.
  - si aucune des applications gardiennes ne s'annule, alors le système de commande est robuste aux incertitudes posées.

Le choix des polynômes d'interpolation (4.43) et (4.44) dépend principalement des régions de l'enveloppe de vol. Il est évident que plus le degré d'interpolation est élevé, plus grandes sont les chances d'avoir de meilleures approximations. Cependant, ceci rend les calculs de robustesse beaucoup plus longs. Après plusieurs essais, les formes d'interpolation (4.43) et (4.44) ont été choisies car elles offrent le meilleur compromis entre qualités d'interpolation et temps de calcul.

En résumé, grâce aux algorithmes et procédures développés dans ce chapitre, nous avons montré comment concevoir deux boucles internes qui sont à la fois performantes et robustes. Dans le chapitre qui suit, nous montrons comment obtenir un pilote automatique en s'appuyant sur les deux boucles internes.

## CHAPITRE 5 CONCEPTION DES LOIS DE COMMANDE POUR LE PILOTE AUTOMATIQUE

Dans ce chapitre nous présentons une méthodologie pour la conception de systèmes de commande pour le pilotage automatique. Dans une première partie, nous présenterons les différentes boucles externes qui constituent les modes du pilote automatique. Puis, dans une deuxième partie, nous développerons les différentes lois de contrôle pour le vol de croisière. Dans le but de simplifier l'étude, nous traiterons tout d'abord le cas du mouvement longitudinal, puis, nous étudierons le cas du mouvement latéral. Ensuite, nous consacrerons une troisième partie à l'étude de l'approche et de l'atterrissage automatique. Nous y présenterons dans un premier temps les différentes catégories d'approche, puis dans un second temps, nous développerons les lois de commande pour l'atterrissage automatique. Enfin, dans une quatrième et dernière partie, nous discuterons de la méthodologie utilisée pour la synthèse des correcteurs. Nous y présenterons tout d'abord les différents axes de la méthodologie, puis, nous montrerons comment utiliser l'algorithme par essaim particulaire (PSO) pour automatiser le processus de calcul.

### 5.1 Présentation des différentes boucles externes et du pilote automatique

Les boucles externes permettent de traduire une commande provenant du panneau de pilotage automatique (ou du FMS) en une commande pour l'une des deux boucles internes présentées dans la **section 4.3**. Par exemple, supposons que le pilote souhaite monter de 10,000 pi avec une vitesse verticale de 1,800 pi/min tout en effectuant un changement de cap de 60°. L'idée est de pouvoir interpréter tous ces mouvements en termes de changement d'angle de tangage et d'angle de roulis que les deux boucles internes devront assurer.

Le but de ce chapitre est donc de trouver les relations de passage entre les différents paramètres physiques de l'avion qui permettent d'asservir un mouvement quelconque. Or, il est bien connu dans la littérature que pour contrôler un système avec de bonnes performances, il faut en général que la commande comprenne :

- Un terme proportionnel pour améliorer la rapidité du système.
- Un terme dérivé pour améliorer l'amortissement du système.
- Un terme intégral pour réduire l'erreur en régime permanent.
- Un terme d'action directe (ou prédictif) pour améliorer la réponse transitoire.
- Des saturateurs pour limiter les sorties et l'énergie sur la commande.
- Des filtres pour adoucir les variations de signaux de références.

Ainsi, à partir des équations de la mécanique du vol, nous élaborerons dans un premier temps les différentes relations qui permettront d'interpréter les mouvements de l'avion en terme de changement d'angle de tangage et d'angle de roulis. Puis, dans un second temps, nous développerons les commandes de vol du pilote automatique en intégrant des termes proportionnel, dérivé, intégral ou prédictif en fonction des modes que le pilote automatique possède. À cet effet, nous donnons, ici, une liste des différents modes qu'il est possible de retrouver dans la plupart des avions d'affaires :

◊ **Modes de l'auto-pilote en vol de croisière pour le mouvement vertical :**

1. **Mode de vitesse verticale** (*Vertical Speed*) : ce mode permet de contrôler la vitesse verticale de l'avion lors d'un changement d'altitude. Il peut être aussi utilisé dans certains cas pour maintenir un niveau de vol constant.
2. **Mode de maintien de l'altitude** (*Altitude Hold*) : ce mode permet de maintenir l'avion à l'altitude désirée en présence de perturbations extérieures qui pourraient le faire dévier de sa trajectoire.
3. **Mode de capture d'altitude** (*Altitude Capture*) : ce mode permet de rejoindre l'altitude de référence sélectionnée par le pilote (ou par le FMS). Il fait la liaison entre le mode *Vertical Speed* et le mode *Altitude Hold*.
4. **Mode de changement de niveau de vol** (*Flight Level Change*) : ce mode permet de maintenir la vitesse en ajustant l'assiette de l'avion au moyen des élévateurs. Il est généralement utilisé lorsque l'avion est dépourvu du mode *Autothrottle*.
5. **Mode de commande automatique des gaz** (*Autothrottle*) : ce mode permet de contrôler la vitesse (ou le nombre de Mach) de l'avion. Dans certains cas, il peut être utilisé pour commander la poussée des moteurs comme dans les phases de montée ou descente lorsque le mode *Flight Level Change* est activé.

◊ **Modes de l'auto-pilote en vol de croisière pour le mouvement latéral :**

1. **Mode de capture et de maintien d'un cap** (*Heading Capture and Hold*) : ce mode permet de contrôler le cap de l'avion. Il est important de préciser que ce dernier ne garantit pas le maintien d'une trajectoire dans le plan horizontal (deux trajectoires parallèles ont le même cap).
2. **Mode de capture de VOR<sup>1</sup>/DME<sup>2</sup>** (*VOR/DME Capture*) : ce mode permet de faire de la navigation par points de passage (*waypoints*) pour suivre une trajectoire bien précise.

---

1. VHF Omnidirectional Range

2. Équipement de Mesure de Distance (*Distance Measuring Equipment*)

◊ **Modes de l'auto-pilote pour l'approche et l'atterrissement :**

1. **Mode de radioalignement de descente et d'arrondi (Glideslope et Flare) :** ce mode permet l'alignement de l'avion sur une trajectoire de descente optimale définie par un angle de descente (*flight path angle*). De plus, si la piste d'atterrissement est certifiée, ce mode peut effectuer la rotation pour que les roues du train d'atterrissement touchent la piste en premier.
2. **Mode de capture du radioalignement de piste (Localizer) :** ce mode permet d'aligner et de maintenir l'avion sur le cap de la piste.

Bien entendu, certaines manœuvres nécessiteront l'activation de plusieurs modes à différents instants. Par exemple, un changement d'altitude peut être effectué de deux façons.

- Dans le cas d'un grand changement d'altitude (ex. 10,000 pi à 1,800 pi/min) le mode *Vertical Speed* s'activera en premier pour assurer le taux de montée de l'avion. Puis, une fois proche de l'altitude de référence, le mode *Altitude Capture* prendra le relais pour raccorder la trajectoire de montée à la trajectoire horizontale de l'altitude cible, où le mode *Altitude Hold* s'enclenchera à son tour pour maintenir le niveau requis.
- Dans le cas d'un faible changement d'altitude (ex. 500 pi à 1,800 pi/min) le mode *Altitude Capture* pourra s'activer directement, car la différence d'altitude est trop faible pour activer le mode *Vertical Speed*. Puis, le mode *Altitude Hold* s'activera pour maintenir le niveau requis.

Nous verrons par la suite comment créer une logique de passage entre les différents modes qui peuvent être activés à partir du panneau de contrôle ci-dessous :



Figure 5.1 Panneau du pilote automatique

Cette interface, développée spécialement pour la plateforme de simulation, permet de communiquer avec le module du pilote automatique afin de pouvoir sélectionner les modes durant la simulation.

## 5.2 Pilote automatique pour le mouvement longitudinal

Dans cette section, nous présentons les différentes boucles externes pour le vol de croisière longitudinal.

Afin de simplifier l'étude, nous supposons que l'avion évolue en vol symétrique (aucun mouvement latéral) et que l'atmosphère est au repos ( $\mathbf{V}_{ned}^{avion}|_{ned} = \mathbf{V}_{vent}^{avion}|_{ned}$ ). De même, nous admettons que tous les paramètres de vol (altitude, vitesse, etc.) sont accessibles.

### 5.2.1 Mode *Altitude Hold*

Le mode *Altitude Hold* permet de maintenir une altitude de référence définie par le pilote ou par le FMS. L'idée est de trouver un moyen d'interpréter une variation d'altitude en une variation d'assiette pour la boucle interne en tangage.

En s'appuyant sur la Figure 5.2,

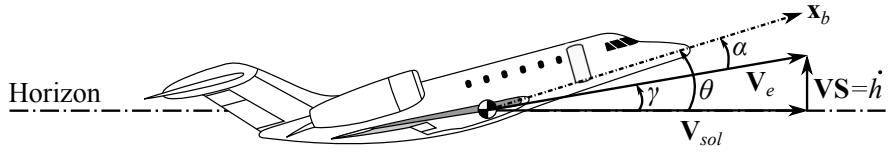


Figure 5.2 Projection des vitesses dans le plan longitudinal pour un vol symétrique

il est possible d'écrire la relation entre l'angle de tangage ( $\theta$ ), l'angle d'incidence ( $\alpha$ ) et la pente ( $\gamma$ ), tel que :

$$\theta = \gamma + \alpha \quad (5.1)$$

En notant que les commandes destinées aux boucles internes sont interprétées en termes de variations par rapport aux conditions d'équilibre, nous pouvons réécrire l'équation (5.1) sous la forme :

$$\Delta\theta = (\theta - \theta_e) = (\gamma - \gamma_e) + (\alpha - \alpha_e) = \Delta\gamma + \Delta\alpha \quad (5.2)$$

Puis en considérant qu'à l'équilibre l'avion évolue en vol horizontal (i.e.  $\gamma_e = 0$ ), l'équation (5.2) devient :

$$\Delta\theta = \gamma + \Delta\alpha \quad (5.3)$$

Ensuite, en utilisant l'approximation des petits angles, tel que :

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\dot{h}}{V_e}\right) \approx \frac{\dot{h}}{V_e} \quad (5.4)$$

et en remplaçant l'expression de  $\gamma$  de l'équation (5.4) dans l'équation (5.3), on obtient la relation suivante :

$$\Delta\theta = \frac{\dot{h}}{V_e} + \Delta\alpha \quad (5.5)$$

Enfin, il nous faut exprimer la vitesse verticale en terme de variation d'altitude. Pour cela, on pose :

$$h = \frac{\Delta h}{\Delta t_{max}} = k_{p,h} \Delta h \quad (5.6)$$

où  $\Delta t_{max}$  représente le temps maximal accordé pour corriger une erreur d'altitude  $\Delta h \in [\Delta h_{min}, \Delta h_{max}]$ . Les choix des bornes de l'intervalle est arbitraire et dépend principalement des spécifications souhaitées. Dans notre cas, nous avons choisi de tolérer une correction de 100 pi en 10 s (soit  $k_{p,h} = 0.1$ ).

Pour finir, on rajoute un terme lié à la vitesse verticale afin d'améliorer l'amortissement de la réponse de l'avion. Compte tenu des équations (5.5) et (5.6), on obtient alors la commande finale ci-dessous :

$$\Delta \theta_{com} = \left( k_{p,h} \Delta h + k_{d,h} \dot{h} \right) \frac{1}{V_e} + \Delta \alpha \quad (5.7)$$

ou encore sous forme de schéma-bloc :

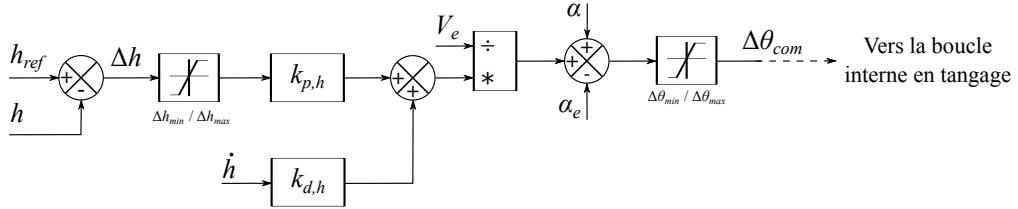


Figure 5.3 Loi de commande pour le mode *Altitude Hold*

### 5.2.2 Mode *Vertical Speed*

Le mode *Vertical Speed* permet de maintenir la vitesse verticale lors d'une montée ou d'une descente. Il peut être activé soit par le pilote si celui-ci désire effectuer une montée contrôlée ou amorcer sa descente, soit de façon automatique lorsque le pilote ou le FMS ordonne un changement d'altitude. Le pilote automatique doit donc ajuster l'assiette de l'avion pour maintenir la vitesse imposée ( $VS = \dot{h}_{ref}$ ) tout au long de la phase de montée ou de descente.

En s'inspirant de l'étude précédente et en notant que l'asservissement ne porte plus sur l'altitude mais sur la vitesse verticale, on pose de façon intuitive la commande suivante :

$$\Delta \theta = \left( k_{p,h} \Delta \dot{h} + k_{d,h} \ddot{h} \right) \frac{1}{V_e} + \Delta \alpha \quad (5.8)$$

où  $\Delta\dot{h} = \dot{h}_{ref} - \dot{h}$  est l'erreur entre la vitesse verticale de référence et la vitesse verticale de l'avion et  $(k_{p,h}, k_{d,h})$  sont des gains à définir.

Après plusieurs essais, nous nous sommes rendu compte que cette loi de commande ne s'avère pas être tout à fait efficace. En effet, lorsque l'on atteint le régime permanent, l'accélération verticale de l'avion devient nulle et la différence entre la vitesse verticale de référence et la vitesse verticale de l'avion le devient aussi (en supposant que la commande fonctionne). Sous cette hypothèse, la loi de commande (5.8) devient :  $\Delta\theta = \Delta\alpha$ , ce qui implique que  $\theta = \alpha$ . Or, une telle condition signifie que l'avion évolue en palier ce qui n'est pas logique, car l'avion est en montée ou en descente. Il faut donc rajouter un terme prédictif qui permet de maintenir l'angle de la trajectoire une fois le régime permanent atteint.

En reprenant la relation (5.4) nous savons maintenant que l'angle de la trajectoire désirée est donné par la relation :

$$\gamma_d = \frac{\dot{h}_{ref}}{V_e} \quad (5.9)$$

On en déduit donc la nouvelle loi de commande complète :

$$\Delta\theta_{com} = \left( k_{p,h}\Delta\dot{h} + k_{d,h}\ddot{h} \right) \frac{1}{V_e} + \frac{\dot{h}_{ref}}{V_e} + \Delta\alpha \quad (5.10)$$

ou encore sous forme de schéma bloc :

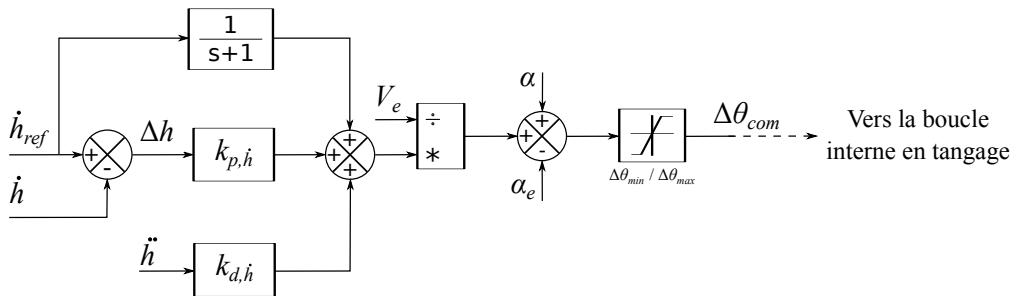


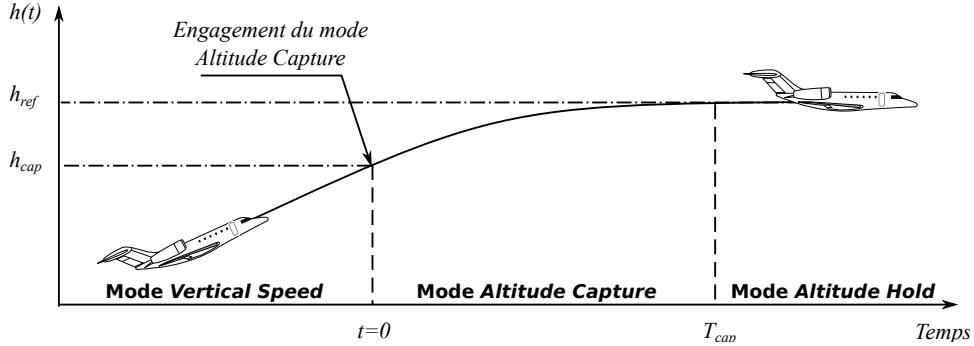
Figure 5.4 Loi de commande pour le mode *Vertical Speed*

Un filtre de premier ordre a été rajouté sur la commande prédictive pour éviter une variation trop brusque de l'angle de tangage à l'enclenchement du mode.

### 5.2.3 Mode *Altitude Capture*

Le mode *Altitude Capture* permet de faire la transition entre les modes *Vertical Speed* et *Altitude Hold* tout en capturant en douceur l'altitude de référence avec une trajectoire

circulaire comme illustré sur la Figure 5.5.



La transition entre les modes *Vertical Speed* et *Altitude Capture* doit se faire à une certaine altitude ( $h_{cap}$ ) qui dépend de la vitesse verticale et de la décélération maximale autorisée durant la phase de capture. Dans un premier temps, il nous faut donc trouver une relation entre l'altitude de commutation ( $h_{cap}$ ) et la vitesse de montée à l'engagement du mode *Vertical Speed* ( $VS_{ref}$ ). On s'intéresse donc à la portion de trajectoire entre les temps  $t = 0$  (temps du début de la capture) et  $T_{cap}$  (temps de la fin de capture). On suppose que dans cet intervalle, la variation de l'altitude peut être approximée par une fonction de transfert du premier ordre, dont la réponse est donnée par la relation suivante :

$$h(t) = (h_{ref} - h_{cap})(1 - e^{-t/\tau}) + h_{cap} = \Delta h(1 - e^{-t/\tau}) + h_{cap} \quad (5.11)$$

où  $\tau$  est la constante de temps tel que  $5\tau \approx T_{cap}$ .

En dérivant l'équation (5.11), on obtient les expressions de la vitesse verticale et de l'accélération verticale, tel que :

$$\dot{h}(t) = \frac{\Delta h}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (5.12)$$

$$\ddot{h}(t) = -\frac{\Delta h}{\tau^2} e^{-t/\tau} \quad (5.13)$$

Puis, en considérant que l'avion a atteint son régime permanent en mode *Vertical Speed* avant l'activation du mode *Altitude Capture*, c'est-à-dire que  $VS = VS_{ref}$  ; on peut exprimer  $\tau$  en fonction du taux de montée comme suit :

$$\dot{h}(0) = VS_{ref} = \frac{\Delta h}{\tau} \Leftrightarrow \tau = \frac{VS_{ref}}{\Delta h} \quad (5.14)$$

Ensuite, en exprimant la valeur moyenne de la décélération verticale sur une période de

$t = [0, \tau]$ , tel que :

$$\ddot{\bar{h}} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \ddot{h} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \dot{h} dt = -\frac{\Delta h}{\tau^2} \frac{(e-1)}{e} \quad (5.15)$$

et en remplaçant l'expression de  $\tau$  de l'équation (5.14) dans l'équation (5.15), on en déduit l'altitude de capture en fonction du taux de montée sélectionné ( $VS_{ref}$ ) et de la valeur moyenne de la décélération acceptable ( $\ddot{\bar{h}}$ ), tel que :

$$\Delta h = -\frac{VS_{ref}^2}{\ddot{\bar{h}}} \frac{(e-1)}{e} \quad (5.16)$$

Pour le confort des passagers, on peut imposer  $\ddot{\bar{h}} < -0.1g$  qui est une valeur acceptable. Dans notre cas, limitons les décélérations à  $-0.05g$ . Cette valeur peut être retrouvée sur certains simulateurs de CAE Inc. ou sur les avions B747 et B777. On obtient ainsi l'équation (5.17) qui nous permet d'exprimer l'altitude de capture en fonction de la vitesse de montée sélectionnée lors d'un changement d'altitude.

$$\Delta h = \frac{VS_{ref}^2}{0.05g} \frac{(e-1)}{e} \Rightarrow h_{cap} = h_{ref} - \frac{VS_{ref}^2}{0.05g} \frac{(e-1)}{e} \quad (5.17)$$

On s'intéresse maintenant à la loi de contrôle du mode *Altitude Capture*. En réalité, ce dernier est très proche du mode *Altitude Hold*. En effet, dans les deux cas, le but de la commande de résume à rejoindre un altitude de référence. Cependant, à cause de la limitation sur la décélération maximale autorisée lors de la capture d'altitude, il est nécessaire d'ajouter un terme prédictif qui prend en compte l'accélération verticale.

Toujours en s'appuyant sur la Figure 5.2, on peut calculer l'angle de la trajectoire ( $\gamma$ ) à partir de l'accélération verticale comme suit :

$$\gamma = \frac{\dot{h}}{V_e} = \frac{\int \ddot{h} dt}{V_e} \quad (5.18)$$

La Figure 5.5 illustre le commande sous forme de schéma-bloc.

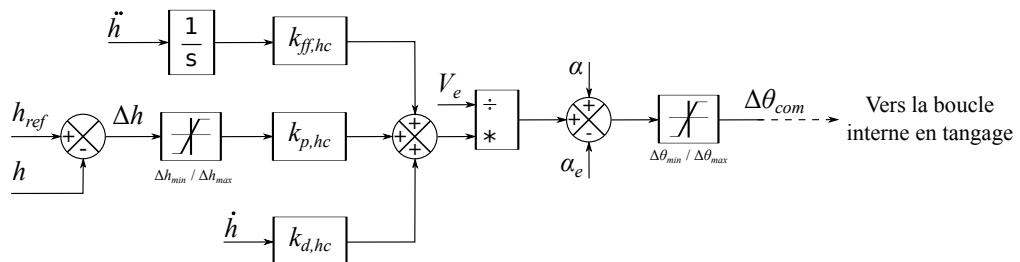


Figure 5.6 Loi de commande pour le mode *Altitude Capture*

Pour finir, nous présentons la logique d'engagement des modes *Vertical Speed*, *Altitude Capture* et *Altitude Hold* lors d'un changement d'altitude.

---

### Logique pour un changement d'altitude

---

Si un changement d'altitude est sélectionnée

- | Si  $|h_{ref} - h_{actuel}| > |h_{ref} - h_{cap}|$
- | | > Activer le mode *Vertical Speed*.
- | Sinon, si  $|h_{ref} - h_{actuel}| \leq |h_{ref} - h_{cap}|$
- | | Si  $h_{ref} - h_{actuel} > 20$  pi
- | | | > Activer le mode *Altitude Capture*.
- | | Sinon,
- | | | > Activer le mode *Altitude Hold*.
- | | Fin.

| Fin

Sinon, si une vitesse verticale est sélectionnée

- | > Activer le mode *Vertical Speed*.

Sinon,

- | > Activer le mode *Altitude Hold*.

Fin.

---

#### 5.2.4 Mode *Flight Level Change*

Le mode *Flight Level Change* permet de contrôler la vitesse vraie en ajustant l'assiette de l'avion. Le but est donc d'interpréter une variation de vitesse en une variation d'angle de tangage.

En s'appuyant sur la Figure 5.7,

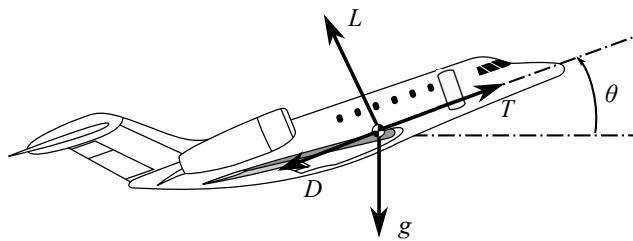


Figure 5.7 Bilan de forces autour d'une condition d'équilibre

et sur l'équation (2.83), il est possible d'exprimer l'accélération longitudinale de l'avion ( $A_{b_x}$ ) en fonction de la force de traînée ( $D$ ), de la poussée nette ( $T$ ) et de la constante de gravité,

tel que :

$$A_{b_x} = \frac{1}{m}(T - D) - g \sin(\theta) - \frac{qw - rv}{m} \quad (5.19)$$

Puis, en linéarisant l'équation (5.19) par rapport à  $\theta$ , tel que :

$$\Delta A_{b_x} = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \Delta \theta - \frac{\partial D}{\partial \theta} \Delta \theta \right) - g \Delta \theta \quad (5.20)$$

et en notant que la poussée des moteurs et la force de trainée ne dépendent pas de l'angle de tangage, on obtient l'équation (5.21) qui permet de relier une variation d'accélération longitudinale à une variation d'angle de tangage.

$$\Delta A_{b_x} = -g \Delta \theta \quad (5.21)$$

L'accélération longitudinale,  $A_{b_x}$ , étant la dérivée de la vitesse longitudinale,  $u_b$ , on peut réutiliser la même astuce que pour le mode *Altitude Hold*, c'est-à-dire poser :

$$\Delta A_{b_x} = \frac{\Delta u_b}{\Delta t_{max}} = k_{p,u} \Delta u_b \quad (5.22)$$

où  $\Delta t_{max}$  représente le temps maximale accordée pour corriger une erreur de vitesse  $\Delta u_b \in [\Delta u_{b_{min}}, \Delta u_{b_{max}}]$ . Le choix des bornes de l'intervalle est arbitraire et dépend encore des performances attendues du pilote automatique. Dans notre cas, nous avons choisi de tolérer une correction de  $\pm 50$  nds en 100 secondes.

En égalant les équations (5.21) et (5.22), on en déduit la relation entre une variation de vitesse longitudinale et variation d'assiette, tel que :

$$\Delta \theta = -\frac{k_{p,u}}{g} \Delta u_b \quad (5.23)$$

Toujours dans le but d'améliorer la réponse, on rajoute un terme dérivé grâce à un retour sur l'accélération longitudinale. On obtient ainsi la commande finale ci-dessous :

$$\Delta \theta = -\frac{k_{p,u} \Delta u_b + k_{d,u} \Delta \dot{u}_b}{g} \quad (5.24)$$

Pour finir, en notant qu'en l'absence de vent,  $u_b = u = V_{tas} \cos(\alpha)$ , il est possible de transformer l'équation (5.24) de manière à faire ressortir la vitesse vraie de l'avion. On obtient alors la loi de contrôle du mode *Flight Level Change* ci-dessous :

$$\Delta \theta_{com} = -\frac{1}{g} \left[ k_{p,u} (V_{tas_{ref}} - V_{tas}) \cos(\alpha) + k_{d,u} \dot{V}_{tas} \cos(\alpha) \right] \quad (5.25)$$

dont le schéma-bloc correspondant est illustré sur la figure ci-dessous :

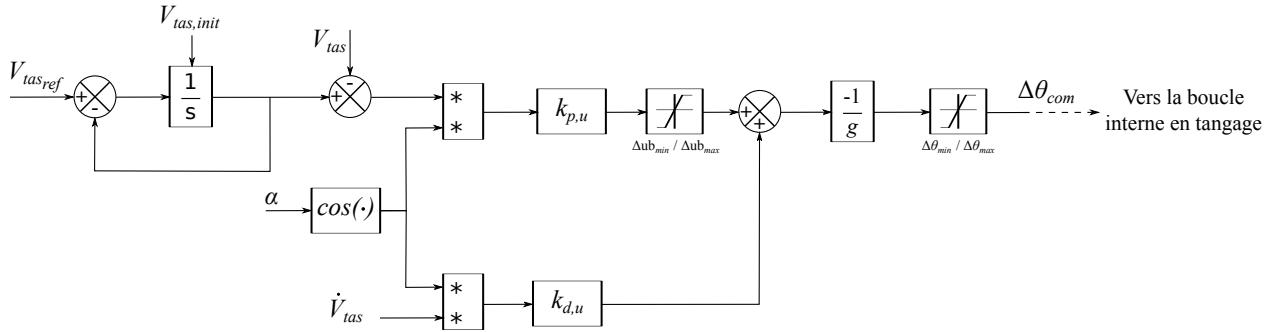


Figure 5.8 Loi de commande pour le mode *Flight Level Change*

### 5.2.5 Mode *Autothrottle*

Le mode *Autothrottle* permet de commander la vitesse de l'avion en ajustant la position des manettes des gaz. Cependant, contrairement aux études précédentes, les équations de la mécanique du vol ne permettent pas de trouver une quelconque relation pour interpréter une variation de vitesse en terme de variation de la position des manettes des gaz. Pour cela, nous avons décidé de reprendre la méthodologie utilisée pour la conception des deux boucles internes. La Figure 5.9 illustre l'architecture de contrôle proposée dans ce mémoire.

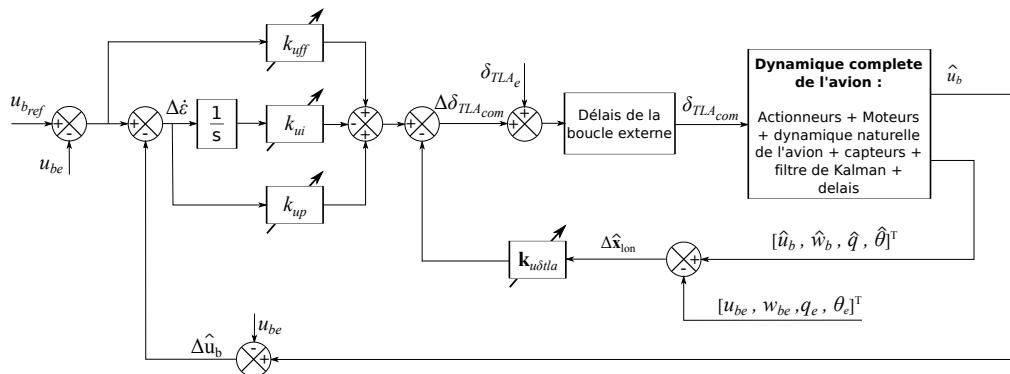


Figure 5.9 Loi de commande pour le mode *Autothrottle*

La procédure reste la même que celle présentée dans la **section 4.3** en considérant les changements suivants :

- Type de pilotage : automatique
  - Modèle d'état :  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{lon}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{lon/\Delta\delta_{TLA}}$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \Delta\delta_{TLA}$ ,  $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x}_{lon}$  et  $\mathbf{C}$  est choisi tel que  $\Delta y = \Delta u_b = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}_{lon}$ .

et les spécifications suivantes :

- Temps de réponse à 5% :  $Tr_{5\%} \leq 5s$ .
- Dépassement maximale autorisée :  $D_{max} \leq 0.05$ .
- Erreur de position en régime permanent :  $e_p \leq 10^{-2}$ .
- Commande maximale autorisée pour une variation de 1 nd :  $\Delta\delta_{TLA_{max}} \leq 5\%$ .

### 5.3 Pilote automatique pour le mouvement latéral

Dans cette section, nous présentons les différentes boucles externes pour le vol de croisière latéral. Afin de simplifier l'étude, nous supposons que la vitesse et l'altitude de l'avion sont constantes (modes *Altitude Hold* et *Autothrottle* engagés) et que l'atmosphère est au repos ( $\mathbf{V}_{ned}^{avion}|_{ned} = \mathbf{V}_{vent}^{avion}|_{ned}$ ). De même, nous admettons que tous les paramètres de vol (altitude, vitesse, etc.) sont accessibles.

#### 5.3.1 Mode *Heading Capture and hold*

Le mode *Heading Capture and hold* permet d'effectuer un virage circulaire pour rejoindre un cap sélectionné par le pilote. Pour ce faire, l'avion doit prendre du roulis pour incliner sa force de portance et ainsi générer une force centripète selon l'axe  $\mathbf{y}_{ned}$  comme illustrée sur la Figure 5.10.

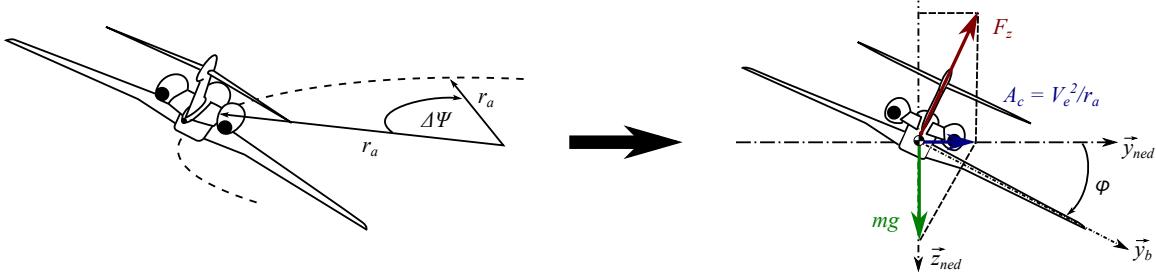


Figure 5.10 Illustration d'un virage coordonné

Le but de la commande est donc d'interpréter une variation de cap ( $\Delta\psi$ ) en une variation d'angle de roulis ( $\Delta\phi$ ). À partir d'un premier bilan des forces selon l'axe  $\mathbf{y}_{ned}$ , on peut montrer que :

$$mA_c = m\frac{V_e^2}{r_a} = F_z \sin(\phi) \quad (5.26)$$

où  $A_c$  est l'accélération centripète et  $r_a$  est le rayon de courbure du virage. Puis, en notant que l'accélération verticale est nulle (altitude constante), nous pouvons exprimer la force de portance en fonction du poids à partir d'un deuxième bilan des forces selon l'axe  $\mathbf{z}_{ned}$  :

$$F_z \cos(\phi) = mg \Leftrightarrow F_z = \frac{mg}{\cos(\phi)} \quad (5.27)$$

Ensuite, en remplaçant l'expression de  $F_z$  dans l'équation (5.26), on obtient :

$$mg \tan(\phi) = m \frac{V_e^2}{r_a} \Leftrightarrow g \tan(\phi) = \frac{V_e^2}{r_a} \quad (5.28)$$

Pour le confort des passagers, l'angle d'inclinaison lors d'un virage est limité en fonction du changement de cap ou de l'urgence du virage. Pour un vol de croisière normal, il est généralement limité à  $15^\circ$  ce qui correspond à un facteur de charge de 1.03 (soit un poids apparent de  $1.03g$ ). Sous cette limitation, on peut considérer que l'on travaille avec des petits angles et ainsi linéariser l'équation (5.28), tel que :

$$g \Delta \phi = \frac{V_e^2}{r_a} \Leftrightarrow \Delta \phi = \frac{V_e^2}{g r_a} \quad (5.29)$$

En remarquant que  $V_e$  est la vitesse tangentielle, on peut écrire que :

$$V_e = r_a \dot{\psi} \Leftrightarrow r_a = \frac{V_e}{\dot{\psi}} \quad (5.30)$$

On obtient ainsi la relation entre l'angle de roulis et le taux de lacet ci-dessous :

$$\Delta \phi = \frac{V_e}{g} \dot{\psi} \quad (5.31)$$

Pour finir, il nous faut interpréter une erreur de vitesse angulaire en une erreur de cap. Pour cela, on réutilise, encore une fois, la même astuce que pour le mode *Altitude Hold* en imposant une correction d'erreur maximale de cap  $\Delta\psi$  en un temps maximal  $\Delta t_{max}$ . On peut alors exprimer la vitesse angulaire en terme d'erreur de cap tel que :

$$\dot{\psi} = \frac{\Delta\psi}{\Delta t} = k_{p,\phi} \Delta\psi \quad (5.32)$$

Finalement, la loi de commande pour le mode *Heading Capture and Hold* est donnée par l'équation (5.33).

$$\Delta\phi_{com} = k_{p,\phi} \frac{V_e}{g} \Delta\psi \quad (5.33)$$

Contrairement aux études précédentes, nous ne rajoutons pas de termes dérivée pour amortir l'amortissement. Cependant, pour adoucir la variation de la commande et limiter le taux de variation de l'angle de lacet, nous conseillons de rajouter un filtre de premier ordre avec une constante de temps ( $T_\psi = 0.2$  s), tel que représenté sur la Figure 5.11.

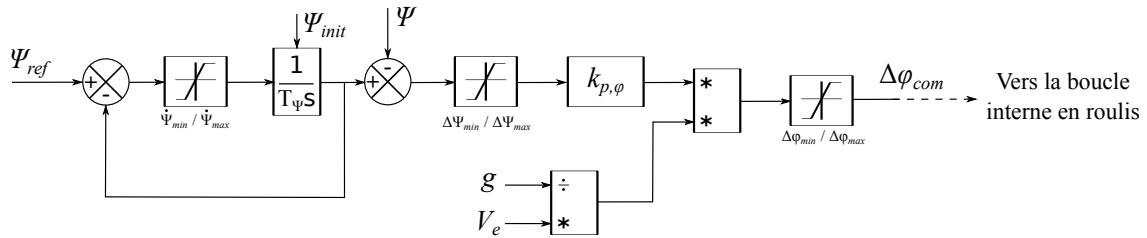


Figure 5.11 Loi de contrôle pour le mode *Heading Capture and Hold*

### 5.3.2 Mode *VOR/DME Capture*

Le mode *VOR/DME Capture* permet de rejoindre une balise VOR/DME avec un certain cap. Le pilote doit dans un premier temps synchroniser la fréquence de son récepteur avec celle de la balise, puis dans un deuxième temps sélectionner la radiale désirée qui correspond au cap de la trajectoire choisie. Par exemple, prenons le cas représenté sur la Figure 5.12.

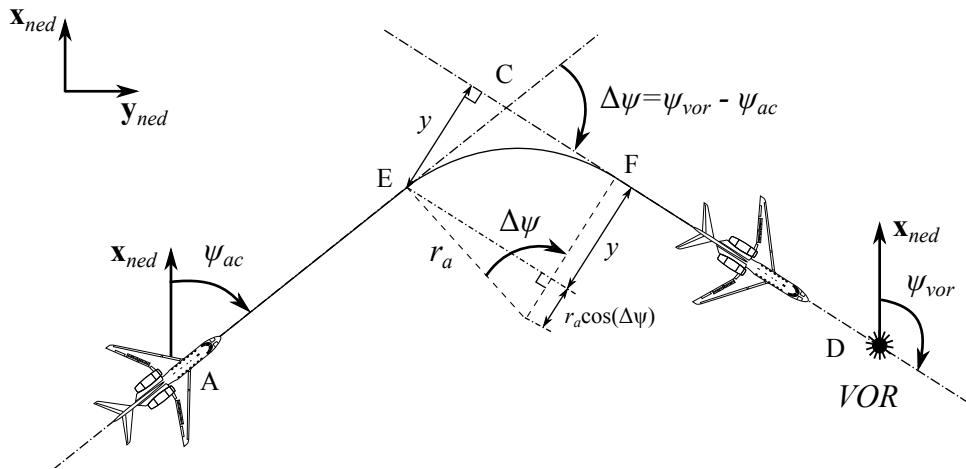


Figure 5.12 Illustration de la trajectoire de l'avion lors d'une capture d'un VOR/DME

Initialement, l'avion se trouve au point A, de coordonnées  $(L_{a_{ac}}, L_{o_{ac}})$ , avec un cap  $\psi_{ac}$  (cap par rapport au nord géographique). Supposons que l'on souhaite rejoindre la balise VOR qui se trouve au point D, de coordonnées  $(L_{a_{vor}}, L_{o_{vor}})$ , avec un cap  $\psi_{vor}$ . Pour cela, l'avion doit dans un premier temps maintenir son cap initial jusqu'au point E. Une fois ce point atteint, il effectue un virage circulaire jusqu'au point F où il capture et maintient le cap final. Ainsi, les tronçons [A,E] et [F,D] seront assurés par le mode *Heading Capture and Hold* tandis que le tronçon [E,F] sera assuré par le mode *VOR/DME Capture*.

Pour garantir que l'avion passe bien au-dessus de la balise avec le bon cap, il faut s'assurer que la déviation ( $y$ ) par rapport à la radiale sélectionnée tende vers zéro ( $y_{ref} = 0$ ) et que le cap de l'avion soit celui de la radiale. À cet effet, on pose de façon intuitive la loi de commande suivante :

$$\Delta\phi_{com} = \tilde{k}_{p,v}(y_{ref} - y) + k_{d,v}\dot{y} = k_{p,v}y + k_{d,v}\dot{y} \quad (5.34)$$

À partir de la Figure 5.12, on peut exprimer la déviation ( $y$ ) en fonction du rayon de courbure ( $r_a$ ) comme suit :

$$y = r_a(1 - \cos(\Delta\psi)) \quad (5.35)$$

Or d'après l'équation (5.28), on peut aussi exprimer le rayon de courbure en fonction de la vitesse et de l'angle de roulis, tel que :

$$r_a = \frac{V_e^2}{g \tan(\phi)} \quad (5.36)$$

De ce dernier résultat, on en déduit que plus l'avion va vite, plus il aura besoin de distance pour effectuer son virage. Inversement, plus l'angle d'inclinaison est grand, plus serré sera le virage. Cependant un virage trop serré nuit au confort des passagers. Pour cela, nous limitons l'angle de roulis à  $15^\circ$  pour une faible correction de cap et à  $30^\circ$  pour des changements de cap importants (ex.  $\geq 100^\circ$ ). Cette décision est laissée libre au pilote qui peut choisir la limite d'angle d'inclinaison ( $\phi_{lim}$ ) à partir d'un bouton rotatif directement sur le panneau du pilote automatique.

Ainsi, à vitesse constante, on peut exprimer le rayon minimal de la trajectoire comme suit :

$$r_a = \frac{V_e^2}{g \tan(\phi_{lim})} \quad (5.37)$$

Puis, en remplaçant l'expression de  $r_a$  de l'équation (5.37) dans l'équation (5.35), on obtient l'expression de la déviation ( $y$ ), tel que :

$$y = \frac{V_e^2}{g \tan(\phi_{lim})}(1 - \cos(\Delta\psi)) \quad (5.38)$$

Ensuite, en dérivant l'équation (5.38), tel que :

$$\dot{y} = \frac{V_e^2}{g \tan(\phi_{lim})} \sin(\Delta\psi) \quad (5.39)$$

et en remplaçant les expressions de  $y$  et  $\dot{y}$  des équations (5.38) et (5.39) dans l'équation (5.34),

on obtient la loi de commande pour le mode *VOR/DME Capture* ci-dessous :

$$\Delta\phi_{com} = \frac{V_e^2}{g \tan(\phi_{lim})} \left[ k_p (1 - \cos(\Delta\psi)) + k_d \sin(\Delta\psi) \right] \quad (5.40)$$

et dont le schéma-bloc est illustré sur la Figure 5.13 :

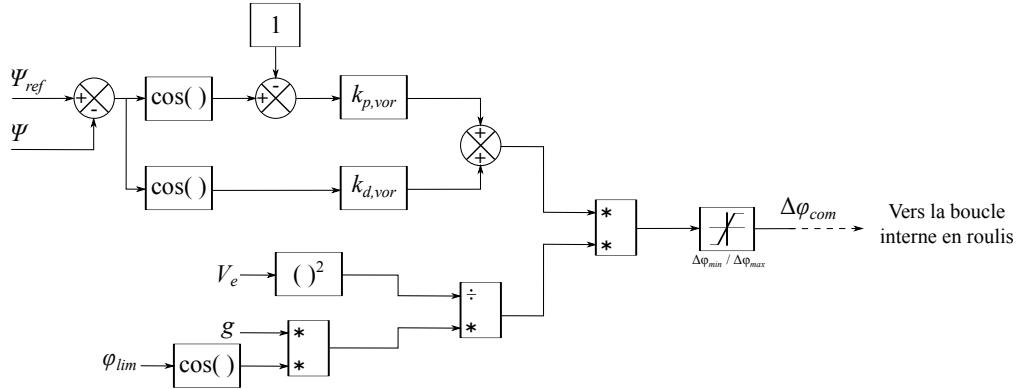


Figure 5.13 Loi de commande pour le mode *VOR/DME Capture*

Bien entendu, cette commande ne fonctionne que si l'avion atteint le point de capture (E). Il faut donc être capable de détecter l'instant auquel l'avion doit commencer à effectuer son virage. Pour cela, il est nécessaire d'avoir une logique pour l'engagement des différents modes lors d'une navigation par *waypoints*.

### 5.3.3 Logique d'engagement du mode de capture d'un VOR/DME

Le pilote automatique doit maintenir le cap initial de l'avion tant que celui-ci est loin du point de capture. Une fois le point E atteint, le mode *Heading Capture and Hold* commute pour laisser le mode *VOR/DME Capture* prendre le relais. Il faut donc trouver une condition en terme de distance qui permet d'activer la transition des deux modes.

Pour cela, nous pouvons comparer les distances *XTK* et *[EB]* telles que représentées sur la Figure 5.14. Tant que *XTK* > *[EB]* le pilote automatique maintient le cap initial. Dès que l'on détecte que *XTK* ≤ *[EC]* alors le mode *VOR/DME Capture* s'active et l'avion peut commencer le virage. Reste à voir comment calculer *XTK* à partir de la connaissance des positions de l'avion et de la balise. En s'appuyant sur la Figure 5.14, nous savons que :

$$XTK = [AC] \sin(\Delta\psi) \quad (5.41)$$

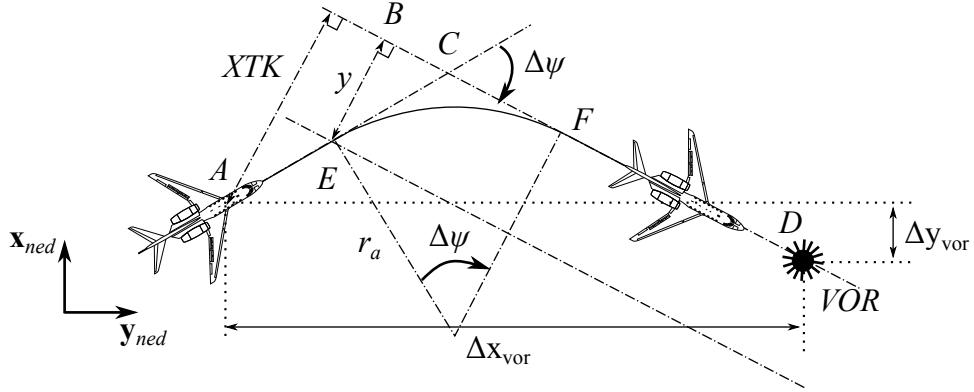


Figure 5.14 Capture d'un VOR/DME

Pour calculer la distance  $[AC]$ , il nous faut au préalable trouver quelques relations géométriques. Pour cela, nous définissons un repère local  $(O, \tilde{x}_{ned}, \tilde{y}_{ned}, \tilde{z}_{ned})$  parallèle au repère NED et dont l'origine est confondue avec le centre de gravité de l'avion. Connaissant les positions longitude/latitude de l'avion ( $L_{a_{ac}}/L_{o_{ac}}$ ) et de la balise ( $L_{o_{vor}}/L_{a_{vor}}$ ), on peut calculer les distances projetées  $\Delta x_{vor}$  et  $\Delta y_{vor}$  à partir des équations de navigations ci-dessous :

$$\Delta x_{vor} = R_M(L_{a_{vor}} - L_{a_{ac}}) \quad (5.42)$$

$$\Delta y_{vor} = R_N(L_{o_{vor}} - L_{o_{ac}}) \cos(L_{a_{ac}}) \quad (5.43)$$

où  $R_M$  et  $R_N$  sont les rayons équivalents au modèle WGS84 définis dans la **section 2.2.1**

Puis, en utilisant les coordonnées polaires, on peut exprimer les équations des droites  $(AC)$  et  $(CD)$  en terme des coordonnées dans le repère local, tel que :

$$\tilde{y}_{AC} = \tilde{x}_{ned} \tan(\pi/2 - \psi_{ac}) \quad (5.44)$$

$$\tilde{y}_{CD} = (\tilde{x}_{ned} - \Delta x_{vor}) \tan(\pi/2 - \psi_{vor}) + \Delta y_{vor} \quad (5.45)$$

Ensuite, en notant que le point C est le point d'intersection des deux droites  $(AC)$  et  $(CD)$ , on peut en déduire ses coordonnées  $(\tilde{x}_{ned_c}, \tilde{y}_{ned_c})$  en égalant (5.44) et (5.45). On obtient ainsi les relations suivantes :

$$\tilde{x}_{ned_c} = -\frac{\Delta x \tan(\pi/2 - \psi_{vor}) + \Delta y}{\tan(\pi/2 - \psi_{ac}) - \tan(\pi/2 - \psi_{vor})} \quad (5.46)$$

$$\tilde{y}_{ned_c} = \tilde{x}_{ned_c} \tan(\pi/2 - \psi_{ac}) \quad (5.47)$$

Enfin, des équations (5.46) et (5.47), on en déduit la distance  $[AC]$ , tel que :

$$[AC] = \sqrt{\tilde{x}_{nedC}^2 + \tilde{y}_{nedC}^2} \quad (5.48)$$

Dès lors, il est possible d'implémenter ces calculs dans la logique suivante :

---

### Logique pour la capture d'un VOR/DME

---

Si VOR/DME et radiale sélectionnés,

```

| Si  $XTK > [EB]$ 
|   | > Activer le mode de maintien de cap.
| Sinon, si  $XTK \leq [EB]$ 
|   | Si  $|\Delta\psi| > 0.1^\circ$ 
|   |   | > Activer le mode capture de VOR/DME.
|   | Sinon, si  $XTK \leq [EB]$  ET  $|\Delta\psi| \leq 0.1^\circ$ 
|   |   | > Activer le mode de maintien de cap avec le nouveau cap.
|   | Fin
| Fin

```

Fin.

---

## 5.4 Pilote automatique pour l'atterrissement

Dans cette section nous abordons la dernière partie de la commande externe qui consiste à contrôler un atterrissage automatique. Plusieurs manœuvres sont nécessaires pour poser un avion tout en douceur sur une piste d'atterrissement. Dans un premier temps, il faut s'assurer que l'avion soit aligné avec le cap de la piste et empêcher toute déviation. Puis dans un deuxième temps, l'aéronef doit amorcer sa descente en suivant une trajectoire bien précise définie par un angle de descente. Enfin, une fois assez proche du sol, l'avion effectue une rotation pour que le train d'atterrissement vienne toucher la piste en douceur. Toutes ces manœuvres doivent être réalisées avec une grande précision, car les phases d'approches sont les plus délicates à cause de la proximité du sol et des faibles vitesses d'opération.

De nos jours, quasiment toutes les pistes d'atterrissement sont équipées de systèmes d'atterrissement aux instruments (ILS : *Instrument landing system*) qui permettent d'effectuer toutes ces manœuvres de façon automatique. En fonction de la catégorie de la piste, le pilote automatique peut gérer partiellement ou complètement un atterrissage. Les différentes catégories d'approche permises selon la certification du ILS de la piste sont listées dans le Tableau 5.1.

Tableau 5.1 Classifications des catégories d'approche

<b>Catégorie I</b>	Atterrissage et approche aux instruments possible jusqu'à hauteur de 200 pi et avec une visibilité sur la piste d'au moins 800 mètres.
<b>Catégorie II</b>	Atterrissage et approche aux instruments possible jusqu'à hauteur de 100 pi et avec une visibilité sur la piste d'au moins 400 mètres.
<b>Catégorie III-A</b>	Atterrissage et approche aux instruments possible jusqu'à hauteur de la piste d'atterrissage et avec une visibilité sur la piste d'au moins 200 mètres.
<b>Catégorie III-B</b>	Atterrissage et approche aux instruments possible jusqu'à hauteur de la piste d'atterrissage et avec une visibilité sur la piste d'au moins 50 mètres.
<b>Catégorie III-C</b>	Atterrissage et approche aux instruments possible jusqu'à hauteur de la piste d'atterrissage et avec une visibilité nulle.

La dernière catégorie permet de faire un atterrissage complètement automatique ; c'est-à-dire un alignement sur la piste, une descente contrôlée, un arrondi pour le toucher des roues et un roulage jusqu'en bout de piste. Dans le cadre de mémoire, nous nous intéressons uniquement aux phases d'alignement, de descente et d'arrondi. De plus, afin de simplifier l'étude, nous supposerons encore une fois que l'avion évolue dans une atmosphère au repos (vent nul).

#### 5.4.1 Mode *Glideslope*

Le mode *Glideslope* permet d'entamer la phase de descente. L'idée est de contrôler la pente du vecteur vitesse pour annuler la déviation ( $d$ ) entre la trajectoire de l'avion et la trajectoire de descente idéale (*glide path*).

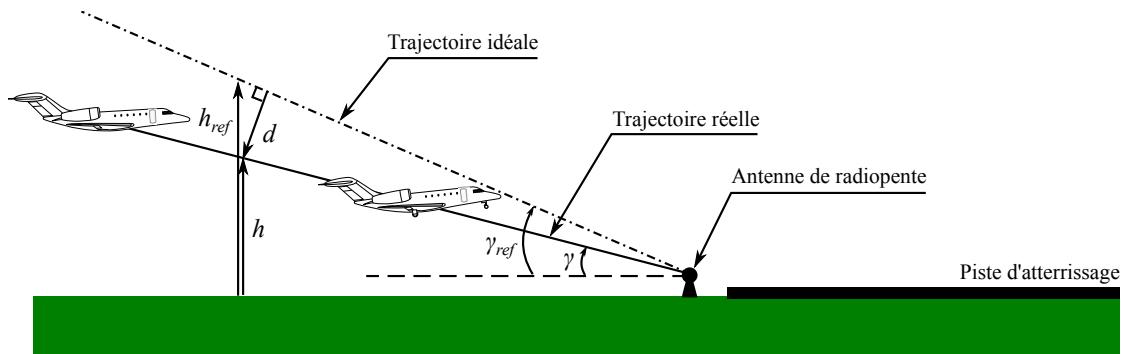


Figure 5.15 Capture du radioalignement de descente

En s'appuyant sur la Figure 5.15, on peut exprimer la déviation ( $d$ ) en fonction de l'altitude actuelle ( $h$ ) et l'altitude de référence ( $h_{ref}$ ) qui correspond à la position idéale de l'avion.

$$d = (h_{ref} - h) \cos(\gamma_{ref}) \quad (5.49)$$

Pour éviter de descendre avec une vitesse verticale trop grande, généralement l'angle de descente varie entre  $3^\circ$  et  $7^\circ$ . Sous cette condition et en utilisant l'approximation des petits angles, on peut alors supposer que :

$$d = (h_{ref} - h) \cos(\gamma_{ref}) \approx (h_{ref} - h) \quad (5.50)$$

Ainsi faire tendre  $d$  vers 0 revient à faire tendre  $h$  vers  $h_{ref}$ . On peut donc considérer que ce problème est assimilable à un maintien d'altitude en remplaçant  $\Delta h$  par  $d$ . On en déduit alors la commande suivante :

$$\Delta\theta_{com} = \left( k_{p,gs}d + k_{d,gs}\dot{d} \right) \frac{1}{Ve} + \Delta\alpha \quad (5.51)$$

Pour garantir un suivi de trajectoire précis durant la descente, nous avons décidé d'ajouter un terme intégral pour annuler l'erreur une fois le régime permanent atteint. Finalement, la loi de commande pour le mode *Glideslope* est la suivante :

$$\Delta\theta_{com} = \left( k_{p,gs}d + k_{d,gs}\dot{d} + k_{i,gs}\int d \, dt \right) \frac{1}{Ve} + \Delta\alpha \quad (5.52)$$

Le schéma-bloc correspondant est représenté sur la Figure 5.16.

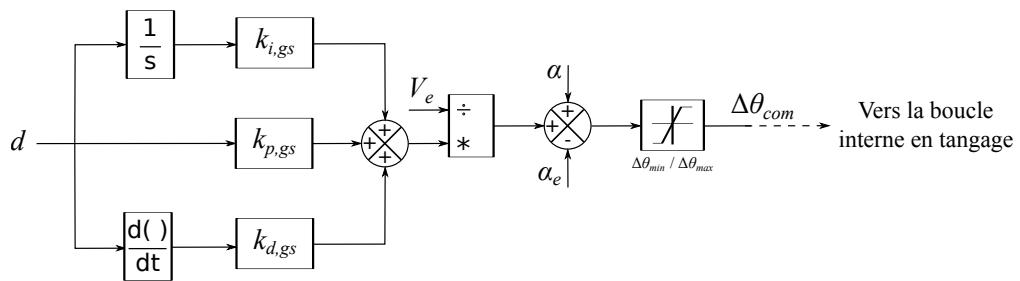


Figure 5.16 Loi de commande pour le mode *Glideslope*

Pour finir, il nous faut un moyen de connaître la déviation  $d$  qui est généralement fournie au pilote automatique lors de la communication avec le système ILS. Dans notre cas, nous modéliserons cette communication en utilisant les équations de navigations (5.53) à (5.56) :

$$\Delta x = R_M(L_{a_{gs}} - L_{a_{ac}}) \quad (5.53)$$

$$\Delta y = R_N(L_{o_{gs}} - L_{o_{ac}}) \cos(L_{a_{ac}}) \quad (5.54)$$

$$\Delta z = h \quad (5.55)$$

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \sin(\gamma_{ref} - \gamma) \quad (5.56)$$

où  $(L_{a_{gs}}, L_{o_{gs}})$  représente la latitude et longitude de l'antenne de radiopente.

#### 5.4.2 Mode *Flare* et contact du train d'atterrissage avec la piste

Une fois l'avion très proche de la piste d'atterrissage, le pilote automatique doit lever le nez de l'avion pour ralentir sa vitesse verticale et effectuer un contact en douceur comme illustré sur la figure ci-dessous :

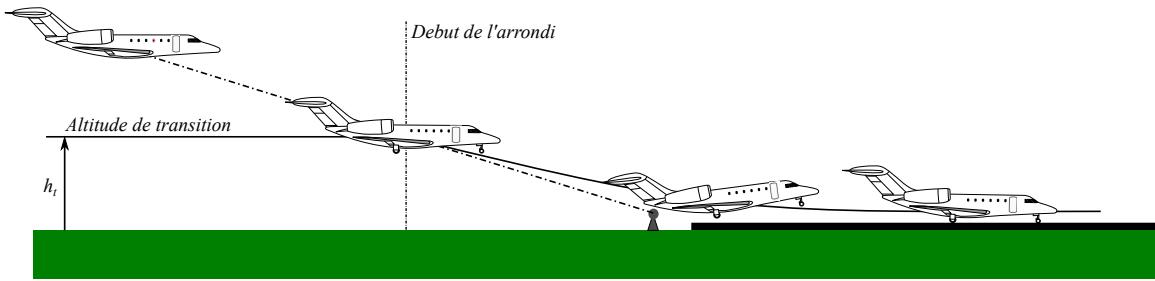


Figure 5.17 Arrondi final lors d'un atterrissage automatique

À l'altitude de transition  $h_t$ , le pilote automatique active le mode de contrôle de l'arrondi. À cet instant, le but est d'asservir l'altitude pour la faire tendre vers l'altitude de la piste ( $h_{sol}$ ). Nous pouvons donc reprendre l'architecture du mode *Altitude Capture* et modifier les gains pour garantir un meilleur suivi de la trajectoire de référence, définie par :

$$h_{ref}(t) = (h_t - h_{sol})e^{-t/\tau} \quad (5.57)$$

où  $\tau$  est la constante de temps du système. Ce paramètre est aussi représentatif de la distance de l'arrondi. Plus  $\tau$  est grand, plus la distance parcourue par l'avion le sera. Généralement, un avion met entre 7 et 10 secondes entre le moment où le pilote automatique commence à relever le nez et le moment où le train d'atterrissage touche le sol. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons choisi de prendre  $\tau = 3$  secondes ce qui correspond à un temps de réponse à 5% de 9 secondes. Il nous reste maintenant à calculer l'altitude de transition en fonction de la vitesse d'approche qui est supposée constante grâce au mode de commande des

gaz automatique. En dérivant l'équation (5.57) on obtient l'expression de la vitesse verticale telle que :

$$\dot{h}_{ref}(t) = -\frac{(h_t - h_{sol})}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (5.58)$$

Or au moment de la transition, on suppose que l'avion a atteint son régime permanent et qu'il se trouve sur la trajectoire de descente idéale ; c'est-à-dire que son angle de trajectoire est  $\gamma_{ref}$ . De ce fait, on peut exprimer la vitesse verticale en fonction de la vitesse totale de l'avion comme suit :

$$\dot{h}_{ref}(0) = -V_e \sin(\gamma_{ref}) = -\frac{(h_t - h_{sol})}{\tau} \quad (5.59)$$

De cette dernière équation, on peut en déduire l'altitude de transition telle que :

$$h_t = \tau V_e \sin(\gamma_{ref}) - h_{sol} \quad (5.60)$$

Par exemple, supposons que l'avion effectue un atterrissage avec une vitesse d'approche de 140 nds et un angle de descente de  $3^\circ$ . En appliquant l'équation (5.60) avec un  $\tau$  de 3 secondes, on trouve que l'altitude de transition est de l'ordre de 37 pi ce qui nous semble raisonnable pour effectuer un arrondi.

### 5.4.3 Mode *Localizer*

Le système d'atterrissement aux instruments possède une antenne en bout de piste qui permet de calculer la déviation latérale ( $d$ ) de l'avion par rapport au cap de la piste.

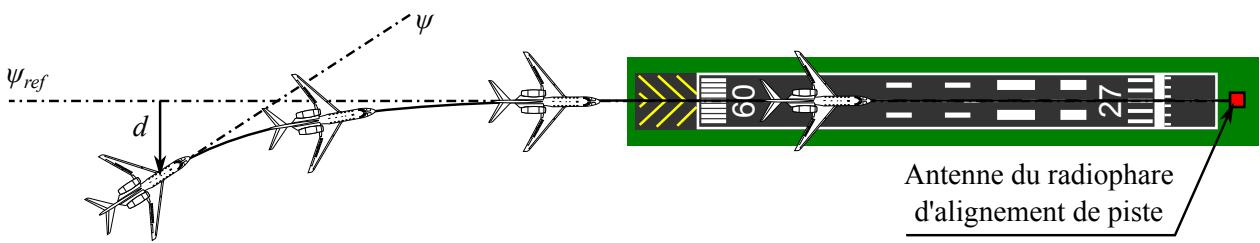


Figure 5.18 Capture du radiophare d'alignement de piste

Le principe de capture du cap de la piste est similaire à la capture d'un VOR/DME. Dans les deux cas, le but est d'aligner la trajectoire de l'avion sur une balise (ou antenne) avec un cap bien précis. Ainsi, nous reprendrons la même boucle de contrôle et la même logique que pour la capture d'un VOR/DME (voir **section 5.3.2**).

## 5.5 Calcul des gains du pilote automatique par méthode d'optimisation

Dans la section précédente, nous avons développé différentes lois de contrôle pour la conception du pilote automatique. Grâce à nos connaissances en automatique, plusieurs d'entre elles possèdent des gains qui devraient nous permettre d'améliorer la rapidité ou l'amortissement du système par exemple. Dans cette section, nous nous intéressons donc à trouver une méthode capable de calculer les différents gains en fonction des performances attendues. Un moyen d'y arriver est d'utiliser un algorithme d'optimisation qui permet de minimiser l'erreur entre la réponse réelle de l'avion et une réponse idéale basée sur des performances attendues. À cet effet, dans toute cette section, nous considérons une fonction scalaire  $f$ , tel que :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{X} &\rightarrow f(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \tag{5.61}$$

qui quantifie les performances de l'avion sous l'influence de l'une des lois de commande présentées précédemment.

### 5.5.1 Méthode d'optimisation par essaim particulaire

L'optimisation par essaim particulaire, comme l'algorithme génétique, est un algorithme évolutionnaire qui s'inspire de la nature, plus précisément du comportement d'animaux évoluant en essaim comme les bancs de poissons, les insectes ou les oiseaux. Ces êtres vivants ne sont pas dotés d'une grande intelligence, mais possèdent une capacité de collaboration extraordinaire qui leur permet de se développer et survivre dans des environnements inconnus. Pour cela, ils utilisent des règles de vie et de déplacement très simples comme par exemple rester le plus près du groupe ou avoir la même vitesse que le groupe.



Figure 5.19 Mouvement groupé d'un banc de poissons

Le comportement d'une particule au sein d'un groupe dépend de plusieurs facteurs. En plus d'être fonction de sa position  $\mathbf{x}$  et sa vitesse  $\mathbf{v}$ , son déplacement dépend aussi de son réseau social et de son mimétisme. En effet, chaque particule est dotée d'une mémoire qui lui permet de se souvenir de la meilleure position (meilleure solution) qu'elle a visitée et d'une capacité de communication qui lui permet d'échanger avec les autres. Ainsi, une particule peut connaître la meilleure position qu'aura occupée le groupe.

De ces observations, Reynolds, Heppener et Grenander [6] ont développé le modèle suivant qui permet de décrire le comportement d'essaim de particules :

$$\mathbf{v}_{i+1} = c_1 \mathbf{v}_i + c_2 (\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) + c_3 (\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_i) \quad (5.62)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_{i+1} \Delta t \quad (5.63)$$

où  $\Delta t = 1$  s,  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$  sont la position et la vitesse d'une particule à l'itération  $i$ ,  $\mathbf{x}_p$  est la meilleure position personnelle de la particule,  $\mathbf{x}_g$  est la meilleure position connue du groupe,  $c_1$  est le coefficient d'inertie et  $(c_2, c_3)$  sont les coefficients sociaux.

Le coefficient d'inertie ( $c_1$ ) permet de quantifier le caractère aventureux de la particule, c'est-à-dire sa tendance à suivre une trajectoire indépendamment du groupe. Plus sa valeur est grande, plus la particule aura tendance à s'éloigner du groupe pour augmenter sa zone de recherche. Inversement, plus l'inertie est petite, plus la particule aura tendance à rester autour du groupe. Selon [6], une façon de trouver un compromis est de faire diminuer l'inertie au cours du temps de façon linéaire entre 0.9 et 0.4. Ceci permet d'avoir une meilleure connaissance de l'espace des paramètres et donc de d'augmenter les chances de converger vers un optimum.

Les coefficients  $(c_2, c_3)$  représentent le caractère social de la particule au sein du groupe. Plus  $c_2$  est grand, plus la particule aura tendance à être conservatrice, c'est-à-dire à rester autour de sa meilleure position et donc de suivre son propre instinct. Inversement, plus  $c_3$  est grand, plus elle aura tendance à suivre la meilleure particule et donc le groupe. Il est commun de poser :

$$c_2 = r_2 \rho_2 \quad (5.64)$$

$$c_3 = r_3 \rho_3 \quad (5.65)$$

où  $r_2$  et  $r_3$  sont des paramètres aléatoires qui suivent une loi uniforme sur  $[0,1]$  et  $(\rho_2, \rho_3)$  sont des constantes positives telles que  $\rho_2 + \rho_3 \leq 4$  [6, 23, 32]. Par la suite, nous posons

arbitrairement  $\rho_2 = \rho_3 = 2$ .

La procédure complète de l'algorithme d'optimisation par essaim particulaire est représenté sur l'**algorithme 3**.

Algorithme 3 Optimisation par essaim particulaire (PSO)

```

1: fonction PSO( $N, x_{min}, x_{max}, \varepsilon, k_{max}$ ) % $N$  = nombre de particules
2:    $k \leftarrow 0$ 
3:    $(x, v, f_p, f_g) \leftarrow particulesIntiales(f, N, x_{min}, x_{max})$  %(voir algorithme 4)
4:   tant que  $k < k_{max}$  ou  $f(x_g) \geq \varepsilon$  faire
5:     pour  $i = 1$  à  $N$  faire
6:       si  $f(x_i) < f_g$  alors
7:          $f_g \leftarrow f(x_i)$ 
8:          $x_g \leftarrow x_i$ 
9:       fin si
10:      fin pour
11:      pour  $i = 1$  à  $N$  faire
12:        si  $f(x_i) < f_{p_i}$  alors
13:           $f_{p_i} \leftarrow f(x_i)$ 
14:           $x_{p_i} \leftarrow x_i$ 
15:        fin si
16:      fin pour
17:      pour  $i = 1$  à  $N$  faire
18:         $c_1 \leftarrow -0.5k/k_{max} + 0.9$ 
19:         $\rho_2 \leftarrow aleatoire([0, 1])$ 
20:         $\rho_3 \leftarrow aleatoire([0, 1])$ 
21:         $c_2 \leftarrow 2\rho_2$ 
22:         $c_3 \leftarrow 2\rho_3$ 
23:         $v_i \leftarrow c_1v_i + c_2(x_{p_i} - x_i) + c_3(x_g - x_i)$ 
24:         $x_i \leftarrow x_i + v_i$ 
25:      fin pour
26:       $k \leftarrow k + 1$ 
27:    fin tant que
28:    retourner  $x_g, f_g, k$ 
29: fin fonction

```

---

Pour commencer l'algorithme, il nous faut au préalable une population initiale de particules. Pour cela, il est possible de choisir  $N$  particules dont les positions sont choisies aléatoirement dans l'espace des solutions possibles, comme illustré dans l'**algorithme 4**.

---

Algorithme 4 Initialisation de la position des particules

```

1: fonction PARTICULESINTIALES( $f, N, x_{min}, x_{max}$ )
2:    $f_g \leftarrow 1000$ 
3:   pour  $i \leftarrow 1, N$  faire
4:      $x_i \leftarrow aleatoire([x_{min}, x_{max}])$ 
5:      $x_{p_i} \leftarrow x_i$ 
6:      $f_{p_i} \leftarrow f(x_i)$ 
7:     si  $f(x_i) < f_g$  alors
8:        $f_g \leftarrow f(x_i)$ 
9:        $x_g \leftarrow x_i$ 
10:      fin si
11:       $v_i \leftarrow 0$ 
12:    fin pour
13:    retourner  $x, v, f_p, f_g$ 
14: fin fonction

```

---

Pour vérifier l'efficacité de l'algorithme au complet, comme dans le **chapitre 3**, nous l'avons appliqué sur la fonction d'Ackley. Nous rappelons que la fonction en question est donnée par l'équation ci-dessous :

$$f(x, y) = -20e^{\left(-0.2\sqrt{0.5(x^2+y^2)}\right)} - e^{\left(0.5(\cos(2\pi x)+\cos(2\pi y))\right)} + 20 + e \quad (5.66)$$

Nous avons lancé l'algorithme plusieurs fois de suite pour avoir une idée du pourcentage de réussite. La Figure 5.20, montre les résultats obtenus sur 100 essais, avec 50 particules et une zone de recherche de  $[-100, 100]$  pour  $x$  et  $y$ . Comme nous pouvons le voir, sur les 100 essais, l'algorithme converge 100 fois sur le minimum global.

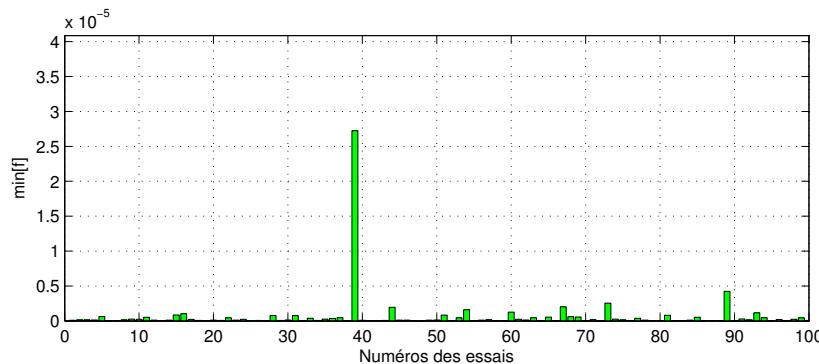


Figure 5.20 Validation de l'algorithme PSO sur la fonction d'Ackley

Ces résultats sont très satisfaisants, mais pas suffisants. En effet, lorsque nous appliquerons

la méthode au contrôle externe, certain des critères que l'on imposera auront tendance à créer des zones où la fonction à minimiser est plate. Pour s'assurer que l'algorithme soit capable de chercher un minimum même en présence de zones où la décroissance est nulle, nous l'avons essayé sur la fonction d'Easom définie par :

$$f(x, y) = -\cos(x) \cos(y) \exp(-(x - \pi)^2 - (y - \pi)^2) + 1 \quad (5.67)$$

et dont la représentation autour de son unique minimum est illustré sur la figure ci-dessous :

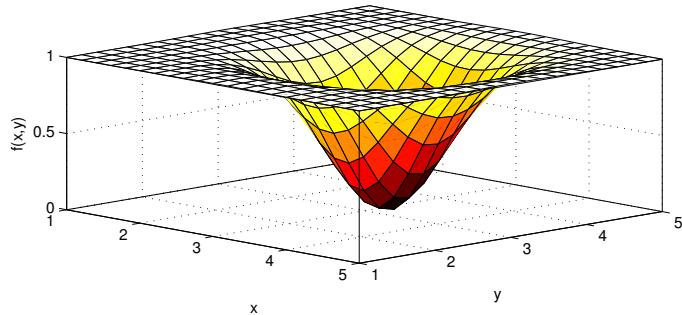


Figure 5.21 Représentation de la fonction d'Easom

En prenant 50 particules sur une zone de recherche de  $[-100, 100] \times [-100, 100]$ , sur 100 essais, nous obtenons 100% de réussite comme le montre le diagramme ci-dessous :

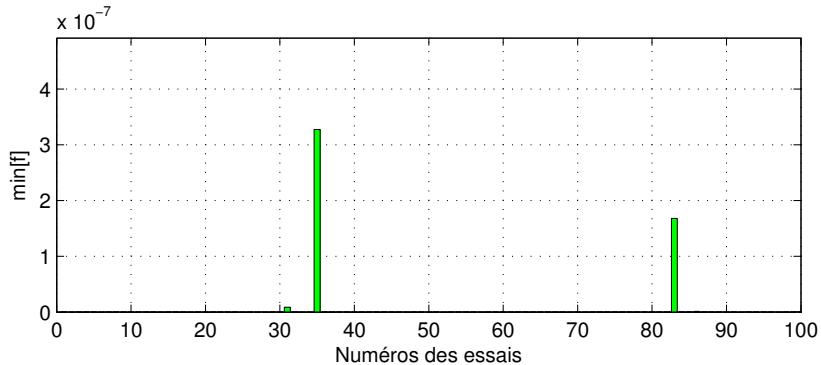


Figure 5.22 Validation de l'algorithme PSO sur la fonction d'Easom

Ces deux exemples illustrent bien l'efficacité de l'algorithme d'optimisation par essaim particulaire, en démontrant sa capacité à aller rechercher un minimum global là où des algorithmes classiques (méthodes Quasi-Newton, méthode du gradient, etc.) resteraient bloqués soit dans un minimum local soit sur une région plate.

### 5.5.2 Exemple d'application à l'avion

Pour mieux comprendre comment appliquer l'algorithme d'optimisation par essaim particulaire au contrôle externe de l'avion, nous proposons de traiter l'exemple du mode *Vertical Speed* (voir **section 5.2.2**). Sous l'hypothèse que la boucle interne pour l'angle de tangage est fonctionnelle, nous souhaitons trouver les gains  $k_{p,h}$  et  $k_{d,h}$  qui assurent :

1. Vitesse verticale de référence : 1,800 pi/min.
2. Erreur en régime permanent nulle.
3. Temps de réponse à 5% inférieur à 15 secondes.
4. Dépassement inférieur à 5%.
5. Un angle d'incidence ( $\alpha$ ) maximal inférieur à  $10^\circ$ .
6. Une variation d'accélération verticale ( $\Delta a_z$ ) maximale de  $0.14g$  en montée.

Ces critères sont des valeurs moyennes choisis à partir d'essais en vol sur le simulateur du Cessna Citation X pour différentes altitudes et vitesses à l'exception de l'angle d'incidence. Nous avons choisi  $10^\circ$  pour garantir une certaine distance par rapport à l'angle de décrochage qui se trouve généralement entre  $10^\circ$  et  $15^\circ$ .

L'évaluation de la performance d'une particule se fait à partir du modèle Simulink de la Figure 5.23 qui prend en compte la dynamique non linéaire de l'avion ainsi que les actionneurs, les capteurs et les différents retards présentés dans le **chapitre 2**,

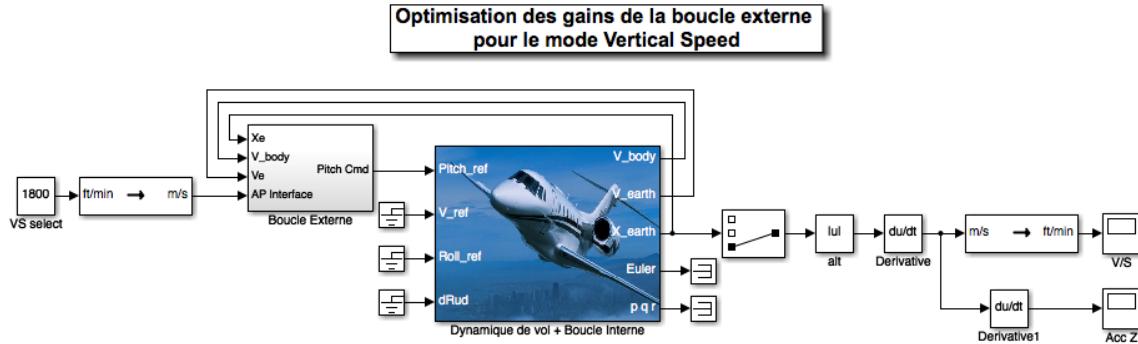


Figure 5.23 Modèle Simulink pour le calcul des gains du mode de montée verticale

et de la fonction à minimiser définie par :

$$f(k_{p,h}, k_{d,h}) = \int_{t_{5\%}}^{t_f} (\dot{h}(t) - 1800)^2 \cdot dt + (t_{5\%} - 15)^2 + f_m(\dot{h}, 1800) + f_m(\alpha, 10) + f_m(\ddot{h}, 0.14g) \quad (5.68)$$

où  $f_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction définie de telle sorte que :

$$f_m(x, y) = \begin{cases} 100 & Si \max(x) \leq y \\ 0 & Sinon \end{cases} \quad (5.69)$$

Nous avons lancé l'algorithme avec 100 particules sur une zone de recherche de  $[-10, 10]$  pour les deux gains. Après 50 itérations, nous avons obtenu  $k_p = 0.4588$  et  $k_d = 1.5345$ . Comme nous pouvons le voir sur la Figure 5.24, l'ensemble des critères 1 à 5 sont bien respectés. À  $t = 5$  secondes l'avion lève le nez vers le haut pour orienter son vecteur vitesse en fonction de la vitesse verticale de référence. Durant la phase de montée, la variation d'accélération verticale par rapport à l'équilibre ( $1g$ ) reste inférieure à la limite imposée de  $0.14g$ . De même, on peut constater que l'angle d'incidence reste bien en dessous de la limite de  $10^\circ$ , ce qui permet d'avoir une bonne marge de sécurité par rapport à l'angle de décrochage. Enfin, l'erreur par rapport à la consigne de vitesse verticale en régime permanent est de l'ordre de  $0.1$  pi/min, soit une erreur d'environ  $0.005\%$ .

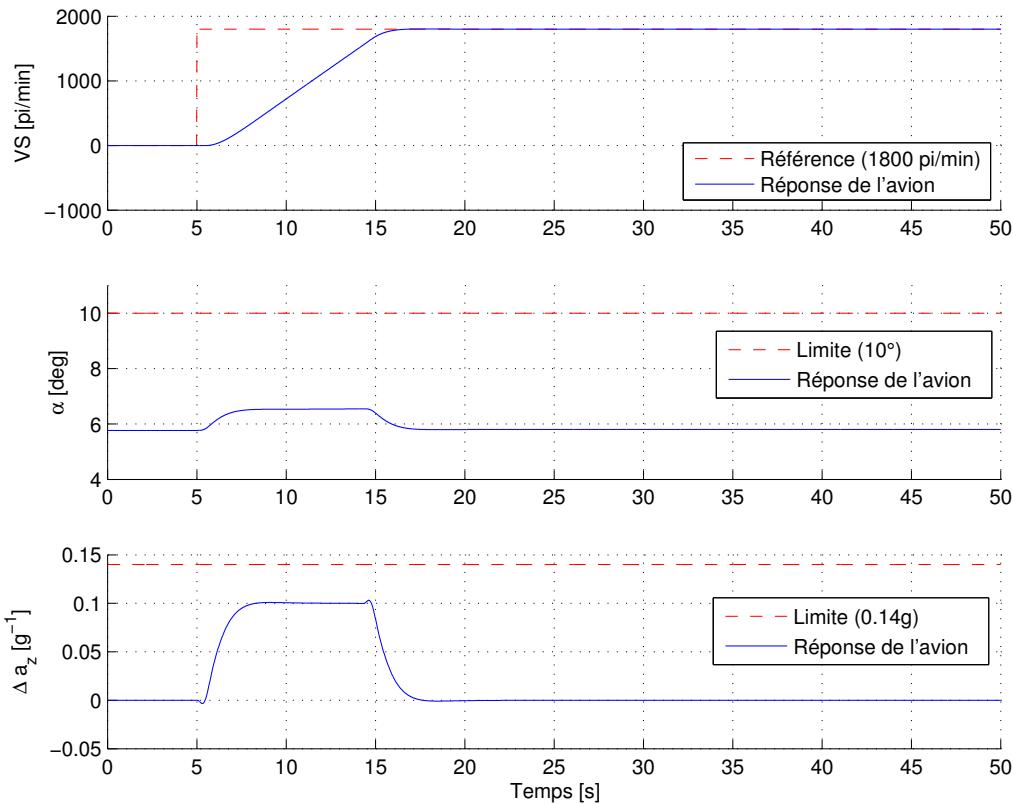


Figure 5.24 Résultats de l'algorithme PSO pour le mode *Vertical Speed*

### 5.5.3 Comparaison et validation avec le simulateur du Cessna Citation X de CAE

Nous présentons ici une comparaison entre le pilote automatique du simulateur du Cessna Citation X de la compagnie CAE et le pilote automatique développé dans ce mémoire. En reprenant la procédure de l'exemple précédent et sur la base d'essais en vol du simulateur du Cessna Citation X, nous avons calculé les gains des différents correcteurs pour les modes *Altitude Capture* et *Altitude Hold*.

Nous avons ensuite réalisé un changement d'altitude de 20,000 pi à 25,000 pi en imposant une vitesse de montée de 1,800 pi/min. Il est important de préciser que le pilote automatique du simulateur de recherche de CAE ne possède pas de mode *Autothrottle*. Ainsi, il est nécessaire de contrôler manuellement la position des manettes des gaz pour essayer de maintenir au mieux la vitesse vraie de l'avion durant la phase de montée. Pour cette raison, le mode *Autothrottle* a été désactivé afin de mettre les deux avions dans les mêmes conditions.

La Figure 5.25 montre les réponses des deux modèles de simulation (modèle du simulateur de recherche de CAE et le modèle développé dans ce mémoire sous Simulink). Comme nous pouvons le constater, les résultats sont très satisfaisants. En effet, les deux altitudes sont très proches l'une de l'autre et les deux modèles semblent répondre à l'identique. On note même de petites améliorations de notre pilote automatique. Nous pouvons voir sur la courbe qui représente l'altitude en fonction du temps que notre modèle réagit légèrement plus vite que celui du simulateur de recherche. De même, les courbes de vitesse verticale et d'accélération verticale sont plus lisses avec notre pilote automatique qu'avec celui du simulateur de recherche.

Ces derniers résultats viennent conclure ce chapitre en démontrant la fiabilité de l'algorithme d'optimisation par essaim particulaire. Il est important de mentionner que contrairement aux boucles internes, les gains des boucles externes n'évoluent pas en fonction de la condition de vol. Il n'est donc pas nécessaire de lancer la recherche des gains optimaux pour toutes les conditions de vol, mais uniquement pour une seule et de vérifier si les boucles internes fonctionnent bien sur toute une plage de l'enveloppe de vol. Cette vérification fera l'objet d'une section du chapitre suivant, dont le but est de présenter l'ensemble des résultats obtenus tout au long de ce mémoire.

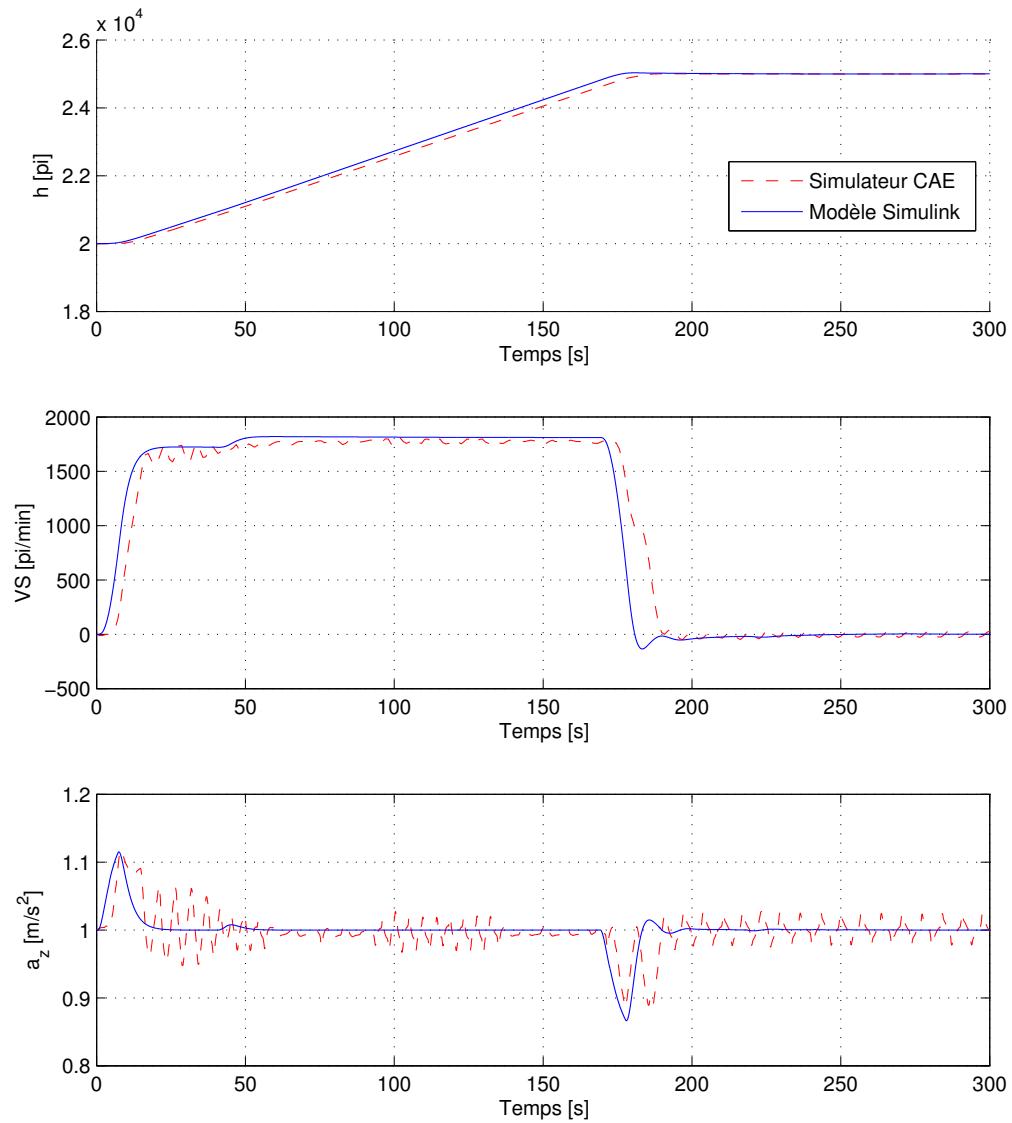


Figure 5.25 Résultats de la comparaison entre le pilote automatique du simulateur de CAE et le pilote automatique de la plateforme de simulation sous Simulink

## CHAPITRE 6 RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Ce chapitre présente l'ensemble des résultats obtenus au moyen des théories et méthodologies vues dans les chapitres précédents. Dans une première partie, nous présenterons les résultats obtenus pour l'algorithme d'équilibrage. Nous y montrerons tout d'abord les résultats sur vingt conditions de vol, puis nous présenterons les résultats sur un grand nombre de points qui couvrent au mieux l'enveloppe de vol du Cessna Citation X. Puis, dans une deuxième partie, nous discuterons des résultats obtenus pour l'algorithme de linéarisation. Une comparaison entre les modèles linéaire et non linéaire sera effectuée pour valider le module de linéarisation et confirmer les hypothèses qui ont été nécessaires pour les calculs. Ensuite, dans une troisième partie, nous montrerons les résultats obtenus pour les deux boucles internes. Nous vérifierons si ces dernières respectent les spécifications du cahier des charges et nous tenterons de démontrer leur niveau de robustesse à partir de simulations effectuées sur le modèle non linéaire des deux avions considérés dans ce mémoire. Enfin, dans une quatrième et dernière partie, nous présenterons les résultats obtenus pour le pilote automatique. Pour cela, nous étudierons différents scénarios qui permettront de valider les différents modes du pilote automatique. De même, nous tenterons de démontrer la robustesse du pilote automatique à partir de simulations. Pour finir, tous les résultats seront présentés en utilisant soit le modèle du Cessna Citation X soit le modèle du Hawker 800XP.

### 6.1 Validation de la stabilité statique

Le Tableau 6.2 montre les résultats de l'algorithme d'équilibrage (voir **section 3.2**) appliqué sur 20 conditions de vol sélectionnées aléatoirement dans l'enveloppe de vol du Cessna Citation X. En réalité nous avons validé l'algorithme sur plus de 1,500 points de vols avec un taux de réussite de 100%. Cependant, pour des raisons d'affichage, seuls 20 cas sont présentés de façon détaillée dans cette section. Les cas N°21 à N°23 ont été rajoutés pour pouvoir faire différentes comparaisons.

Le Tableau 6.1 renseigne sur les limites imposées pour les différentes variables de l'algorithme d'équilibrage.

Tableau 6.1 Limites pour les conditions de trim du Cessna Citation X

min/max	$\theta$ [deg]	$\delta_e$ [deg]	$\delta_{it}$ [deg]	$\delta_{TLA}$ [%]
min	00.00	-10.00	-8.00	0
max	10.00	+10.00	+3.00	100

Tableau 6.2 Résultats de l'algorithme d'équilibrage pour le Cessna Citation X

Cas N°	$M$ [lbs]	$X_{cg}$ [%]	$H$ [pi]	$V_{tas}$ [nds]	$\delta_f$ [deg]	$\theta$ [deg]	$\delta_e$ [deg]	$\delta_{it}$ [deg]	$\delta_{TLA}$ [%]	$f_{TC}$ [-]
01	36000	20	25000	280	00	+05.77	-05.99	-02.84	32.98	5.124*1e-17
02	30000	20	05000	220	15	+00.42	+04.36	-04.29	16.67	5.170*1e-18
03	30000	26	15000	160	00	+11.99	-05.89	-05.49	18.51	8.858*1e-18
04	26000	28	25000	280	00	+03.59	-05.88	-00.48	23.72	9.023*1e-18
05	26000	30	01000	140	35	+01.47	-03.47	-02.76	16.58	5.047*1e-17
06	28000	30	25000	260	00	+04.88	-04.41	-01.67	24.33	2.232*1e-20
07	28000	32	25000	300	00	+03.22	-03.97	-00.65	27.04	3.033*1e-17
08	36000	20	25000	300	00	+04.79	-04.06	-02.71	34.03	2.134*1e-18
09	28000	22	15000	200	00	+06.48	-02.64	-04.14	14.55	2.472*1e-18
10	24000	24	25000	380	00	+01.07	-08.94	+02.49	32.97	4.375*1e-15
11	30000	28	25000	240	00	+06.63	-00.44	-04.44	26.07	8.238*1e-19
12	22000	34	25000	240	00	+04.30	-00.12	-02.41	18.31	1.418*1e-18
13	34000	20	01000	140	35	+04.93	-01.30	-08.00	19.42	1.836*1e-17
14	32000	26	05000	200	15	+01.91	+02.54	-04.25	15.47	7.330*1e-17
15	28000	30	01000	120	35	+06.21	-07.73	-03.95	15.03	1.851*1e-18
16	28000	26	25000	280	00	+04.03	-05.71	-01.01	25.15	7.283*1e-18
17	30000	24	10000	200	00	+05.73	-05.30	-02.30	12.39	1.878*1e-18
18	24000	35	25000	320	00	+02.02	-02.37	-00.29	25.63	1.323*1e-16
19	34000	18	25000	300	00	+04.48	-05.02	-02.29	32.24	2.511*1e-19
20	28000	30	25000	300	00	+03.25	-00.83	-01.85	27.03	2.674*1e-18
21	30000	26	15000	260	00	+03.38	-03.58	-01.20	17.27	1.908*1e-21
22	22000	32	15000	250	00	+02.19	-00.62	-01.45	13.26	5.590*1e-18
23	28000	32	15000	250	00	+03.34	-05.67	-0.034	15.76	2.152*1e-18

Le premier aspect que l'on peut noter concerne le respect des conditions limites imposées. Ce détail a toute son importance car, il garantit la possibilité d'équilibrer l'avion sans atteindre les butés des gouvernes (ex. angle maximal des élévateurs) ou les conditions limites (ex. angle de décrochage). En analysant les résultats, nous pouvons voir que ces derniers ont du sens physique. En effet, en l'absence de volets (les volets étant rentrés), un moyen de générer de la portance est d'augmenter l'angle d'incidence qui, rappelons-le, est confondu avec l'angle de tangage en condition d'équilibre. Ainsi à basse vitesse l'angle de tangage sera relativement grand comme on peut le voir sur le cas N°3. Inversement, à très haute vitesse, l'avion a tendance à abaisser le nez, car sa vitesse suffit pour le porter. De ce fait, à haute vitesse, l'angle de tangage sera relativement faible comme le montre le cas N°21. De même, plus un avion est lourd, plus il requiert de la portance pour maintenir son altitude. Ainsi, pour une même condition en altitude et vitesse, plus l'avion sera lourd, plus il aura besoin de prendre de l'incidence comme nous pouvons le voir sur les cas N°22 et N°23.

À titre indicatif et afin de convaincre le lecteur sur la fiabilité des résultats, nous avons représenté sur le diagramme de la Figure 6.1, la valeur de l'exposant de la fonction  $f_{TC}$  sur 1,500 points de vol. Par exemple, une valeur de 20 signifie que le minimum trouvé est de l'ordre de  $10^{-20}$ . Comme on peut le voir, toutes les conditions garantissent une convergence d'au moins  $10^{-15}$  avec une valeur moyenne de  $10^{-17}$  ce qui nous satisfait amplement.

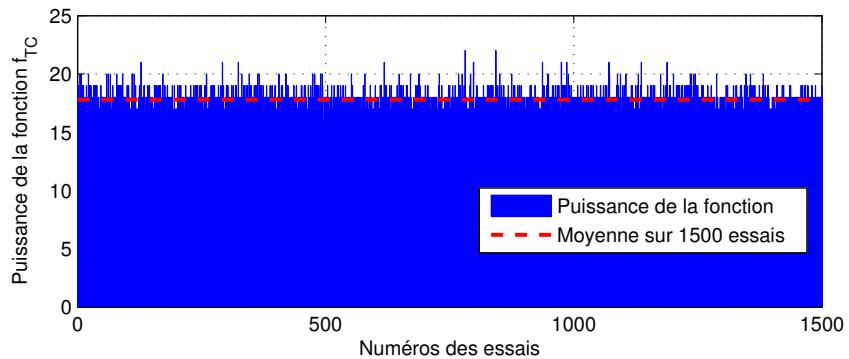


Figure 6.1 Résultat de l'algorithme d'équilibrage pour le Cessna Citation X sur 1,500 points de vol

Pour finir, la Figure 6.2 montre une simulation sur 100 secondes avec le modèle non linéaire du Hawker 800XP qui prend en compte la variation de masse, de centrage et d'inertie en fonction de la consommation des moteurs. La condition de vol correspondante est :  $m = 33,000 \text{ lb}$ ,  $x_{cg} = 17\%$ ,  $h = 20,000 \text{ pi}$  et  $V_{tas} = 250 \text{ nds}$ .

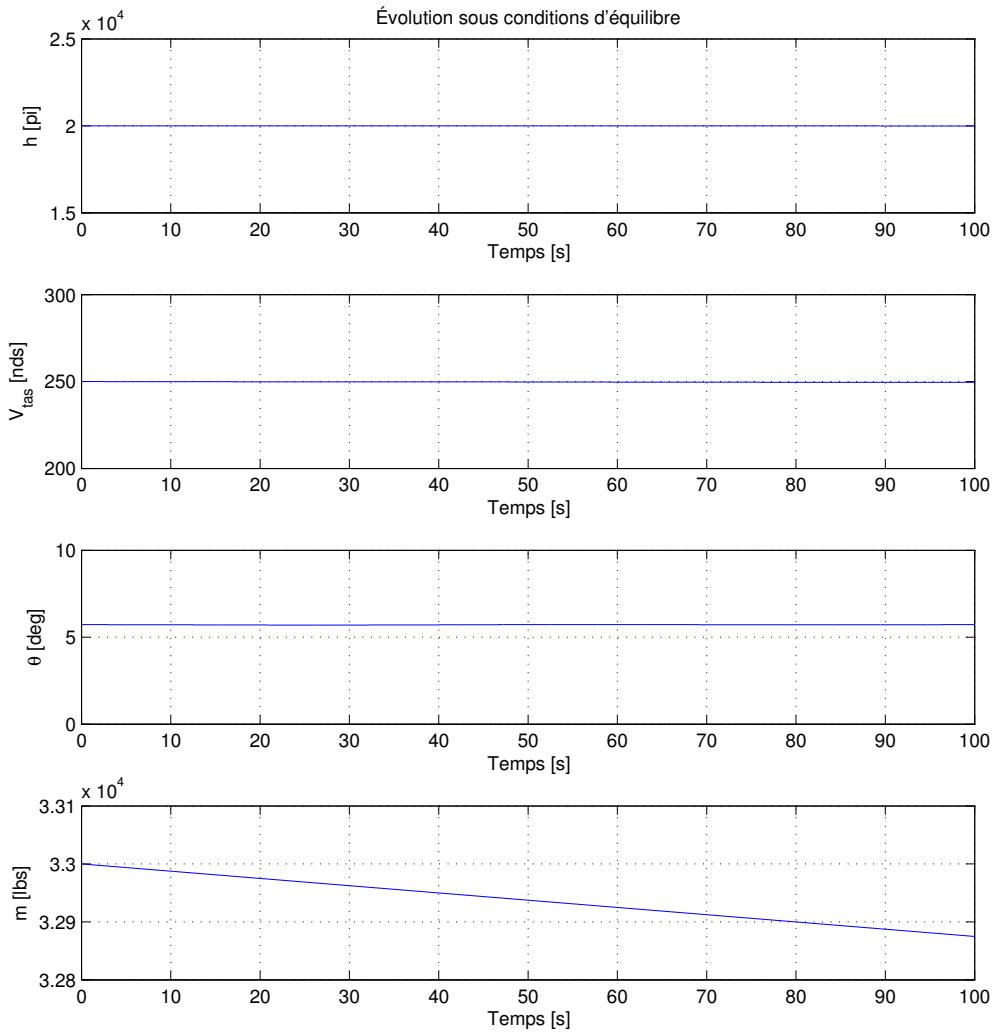


Figure 6.2 Simulation d'une condition d'équilibre pour le Hawker 800XP

Comme nous pouvons le voir, malgré la variation de masse, l'altitude, la vitesse vraie et l'attitude de l'avion restent constantes sur toute la durée de la simulation.

À la lumière de ces derniers résultats, nous pouvons conclure à la validation de l'algorithme d'équilibrage. Dans la section qui suit, nous présentons les résultats obtenus avec l'algorithme de linéarisation.

## 6.2 Validation de la linéarisation

L'équilibre statique confirmé, la prochaine étape consiste à valider l'algorithme de linéarisation. Pour apprécier la qualité de la linéarisation, nous proposons de réaliser différentes simulations pour comparer la dynamique non linéaire (qui prend en compte le couplage des équations et la variation de masse) aux différents modèles d'état linéaires. Pour cela, nous avons injecté une perturbation sinusoïdale sur les gouvernes principales (élévateurs, ailerons, gouverne de direction) ou la manette des gaz autour de leurs conditions d'équilibre. Ceci a pour but d'exciter les différents modes longitudinaux et latéraux présentés dans le **chapitre 3**. Par exemple, si l'on souhaite étudier le comportement dynamique en fonction des élévateurs, nous injecterons la perturbation suivante :

$$\delta_e(t) = \begin{cases} \delta_{e0} + \bar{\delta}_e \sin(2\pi t/T) & Si \ t \leq T \\ \delta_{e0} & Sinon \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $\bar{\delta}_e$  est l'amplitude de la perturbation et  $T$  est la durée de la perturbation ( $T = 4s$ ).

En comparant ainsi les réponses des deux modèles dynamiques (linéaire et non linéaire), nous pourrons conclure sur la qualité du modèle d'état. Nous avons considéré les deux cas du Tableau 6.3 :

Tableau 6.3 Essais de validation pour le module de linéarisation

Cas N°	Avion	Altitude	Vitesse	Entrées	Amplitudes	Volets	Train
1	H800XP	20000	250	$\delta_e$ et $\delta_{TLA}$	2° et 5%	0	non
2	CCX	01000	140	$\delta_a$ et $\delta_{r1}$	4° et 3°	35°	oui

où le premier cas correspond à un mouvement longitudinal et le deuxième cas correspond à un mouvement latéral. Bien entendu, les deux conditions de vol (altitude/vitesse) sont à titre d'exemple. Nous verrons par la suite comment valider la linéarisation sur un plus grand nombre de condition de vol.

### Résultats du cas N°1

La Figure 6.3 montre les réponses des modèles non linéaire et linéaire pour le mouvement longitudinal. Comme nous pouvons le remarquer, les résultats sont très convaincants car, le modèle d'état approxime bien le comportement local de l'avion autour de son point d'équilibre. En effet, même si les courbes ne sont pas superposées, les quelques différences perceptibles restent négligeables.

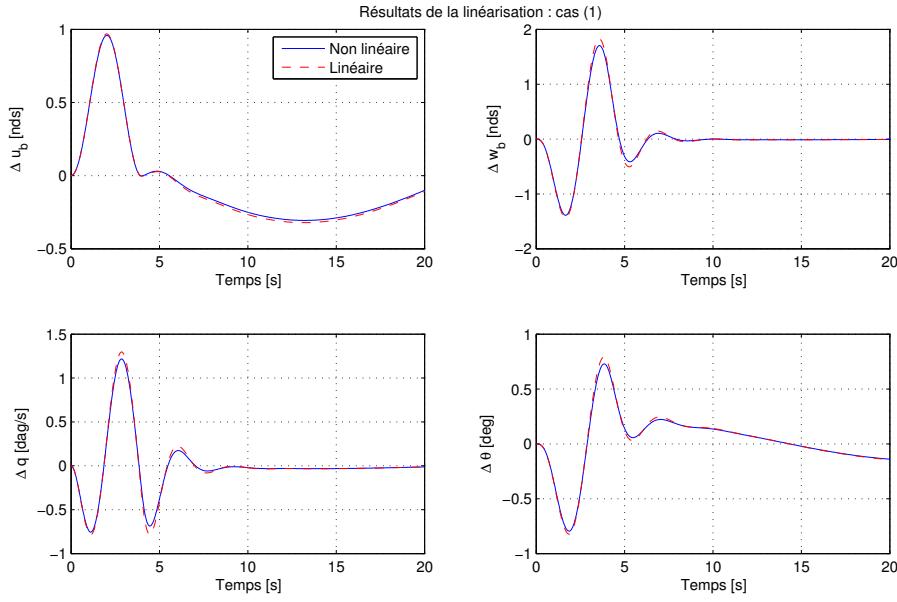


Figure 6.3 Comparaison des modèles non linéaire et linéaire : cas N°1

Dans le **chapitre 3**, nous avons supposé qu'un mouvement longitudinal n'influe en aucun cas sur le mouvement latéral de l'avion. Pour vérifier cette hypothèse, nous avons tracé sur la Figure 6.4 les variations de la vitesse latérale et de l'angle de roulis en fonction du temps. Comme nous pouvons le constater, celles-ci sont nulles, ce qui vient confirmer l'hypothèse de départ.

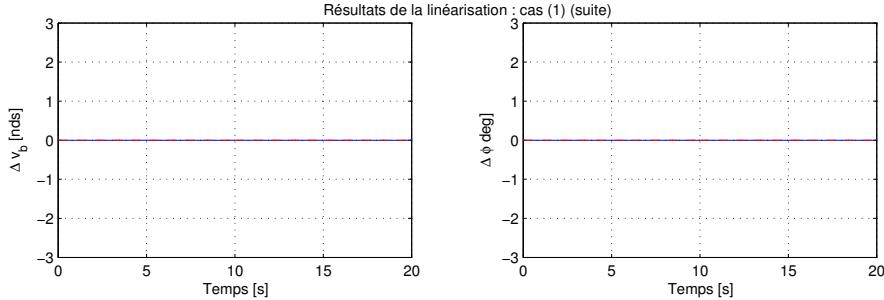


Figure 6.4 Comparaison des modèles non linéaire et linéaire : cas N°1 (suite)

## Résultats du cas N°2

La Figure 6.5 montrent les réponses des modèles linéaire et non linéaire pour le mouvement latéral.

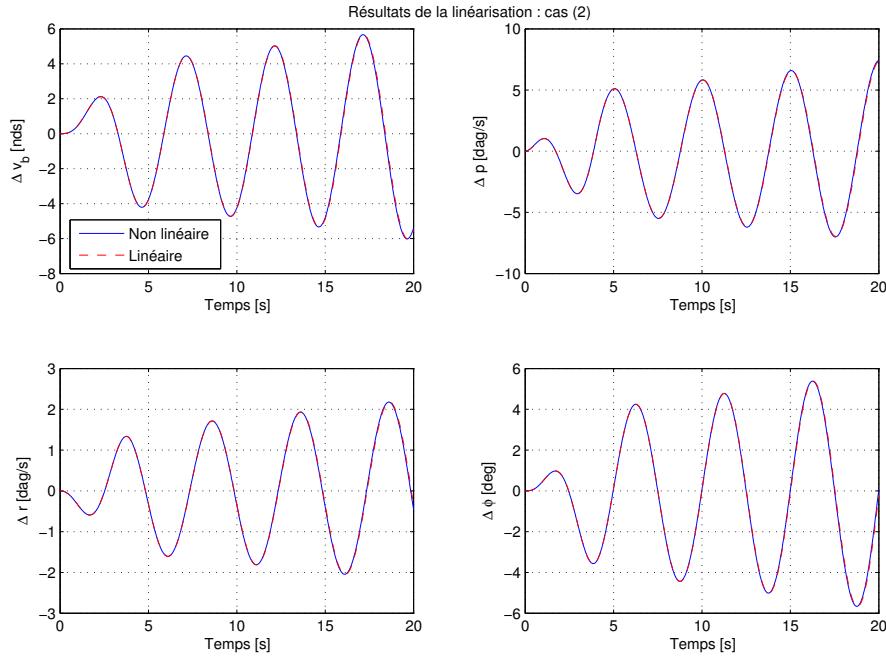


Figure 6.5 Comparaison des modèles non linéaire et linéaire : cas N°2

Ici encore, nous obtenons de très bons résultats, voir mieux que les précédents. En effet, les réponses des deux modèles sont superposées. De même, pour vérifier l'hypothèse de découplage, nous avons tracé sur la Figure 6.6 les variations de la vitesse longitudinale et de l'angle de tangage en fonction du temps. Comme nous pouvons le constater, celles-ci ne sont pas nulles, mais restent suffisamment petites pour être négligées.

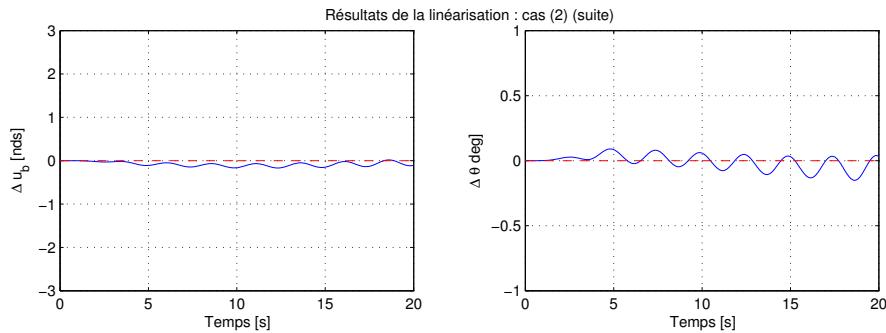


Figure 6.6 Comparaison des modèles non linéaire et linéaire : cas N°2 (suite)

Nous avons reproduit ces deux essais (cas N°1 et cas N°2) sur une centaine de points de vol différents afin de nous assurer du bon fonctionnement de l'algorithme de linéarisation. Dans

l'ensemble, nous avons obtenu des résultats similaires à ceux présentés plus haut. Cependant, pour vérifier au mieux toute l'enveloppe de vol, nous avons automatisé l'analyse des résultats. Il nous a donc fallu trouver un moyen de quantifier si deux signaux sont proches ou non l'un de l'autre. Pour cela, nous avons utilisé le facteur de corrélation de Pearson défini par :

$$Corr(e_1, e_2) = \frac{\sum_{i=1}^n (e_{1i} - \bar{e}_1)(e_{2i} - \bar{e}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (e_{1i} - \bar{e}_1)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (e_{2i} - \bar{e}_2)^2}} \quad (6.2)$$

où  $e_1$  et  $e_2$  sont deux signaux quelconques de valeur moyenne respective  $\bar{e}_1$  et  $\bar{e}_2$  et  $n$  est le nombre de valeurs connues des signaux. Plus les deux signaux sont identiques, plus le facteur de corrélation se rapproche de 1. Inversement, plus il est petit, plus les signaux sont différents.

En réalité, ce facteur est plus un indice sur la tendance des courbes. En effet, il nous indiquera si les deux signaux ont la même allure fréquentielle. Par exemple, si l'on considère deux signaux de fréquence identique, mais dont l'amplitude de l'un est la double de l'autre, on obtiendra un facteur de corrélation égale à 1 alors que les deux signaux ne sont pas superposés. Pour éviter de tomber dans un cas pareil, nous avons décidé de calculer en même temps la moyenne des erreurs quadratique  $MSE$  (*Mean Square Error*) définie par :

$$MSE(e_1, e_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_{1i} - e_{2i})^2 \quad (6.3)$$

Ainsi, en combinant ces deux indices, nous pourrons juger si deux signaux sont assez proches ou non. L'indice de corrélation nous indiquera la concordance fréquentielle tandis que le  $MSE$  quantifiera la concordance des amplitudes.

La Figure 6.7 montre les résultats pour le cas N°1 sur 1,500 points de vol sélectionnés de façon aléatoire. Comme nous pouvons le constater, nous obtenons des résultats plus que satisfaisants. En effet, sur l'ensemble des essais, le coefficient de corrélation est dans le pire des cas égale à 0.99 tandis que le  $MSE$  est lui de l'ordre de  $10^{-2}$ .

La Figure 6.8 montre les résultats pour le cas N°2 sur 1,500 points de vol sélectionnés de façon aléatoire. Ici aussi nous obtenons de très bons résultats, voir meilleurs que ceux du cas N°1. En effet, le coefficient de corrélation est toujours égal à 1 tandis que le  $MSE$  est dans le pire des cas de l'ordre de  $10^{-3}$ .

Ces résultats comblent largement nos attentes et permettent de valider l'efficacité l'algorithme de linéarisation.

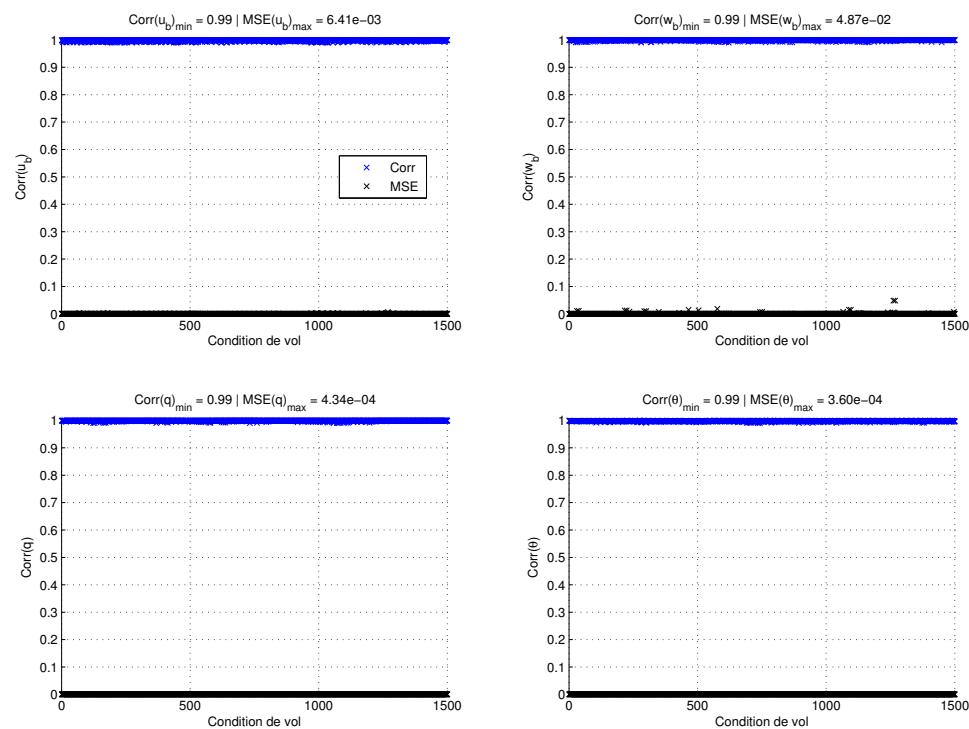


Figure 6.7 Validation du cas N°1 sur 1,500 points de vol

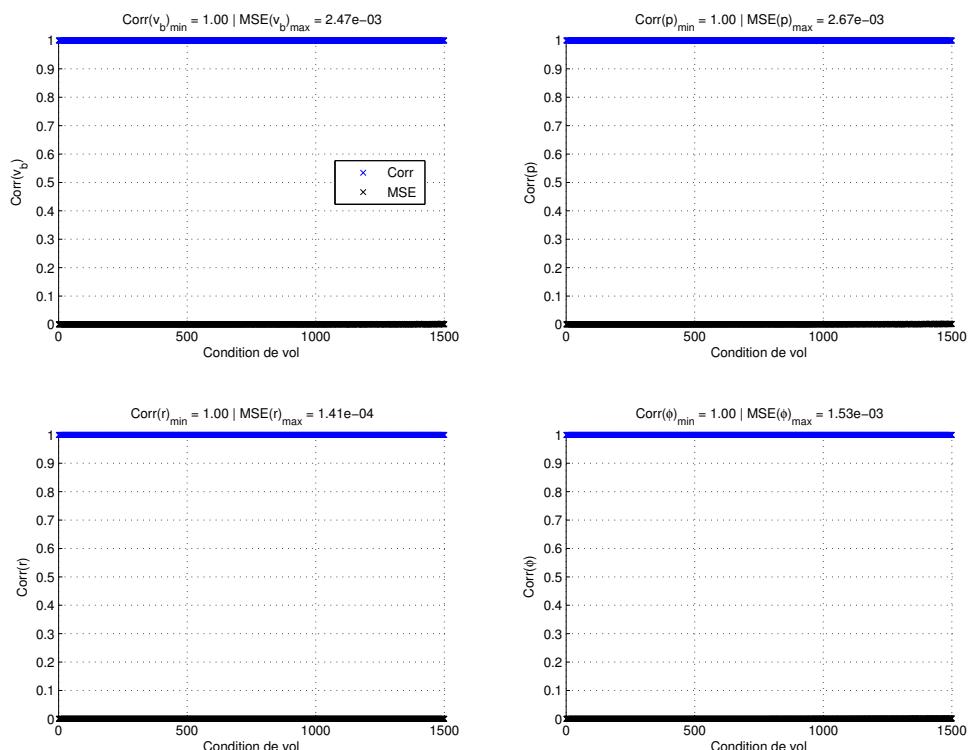


Figure 6.8 Validation du cas N°2 sur 1,500 points de vol

### 6.3 Validation du contrôle interne

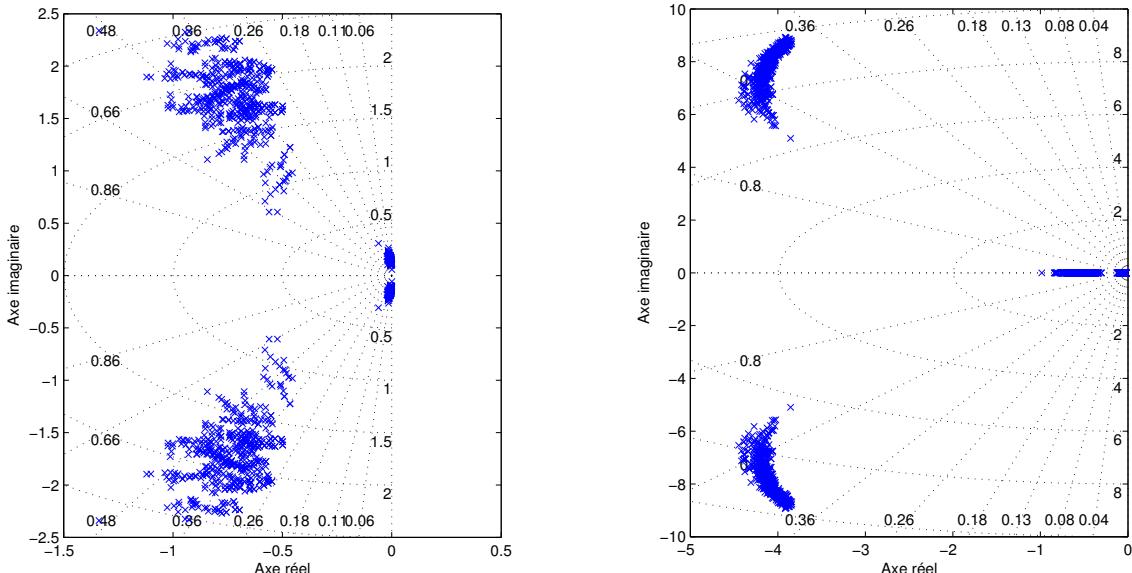
Dans cette section, nous discutons des résultats du contrôle interne. Tout d'abord, nous validerons les critères du cahier des charges en considérant le SAS ( $SAS_{(1)}$  et  $SAS_{(2)}$ ) uniquement. Puis nous vérifierons si chacune des boucles internes respecte les spécifications du cahier des charges pour le CSAS ( $CSAS_{(1)}$  et  $CSAS_{(2)}$ ) en mode automatique et manuel. Enfin, nous présenterons plusieurs simulations sur le modèle non linéaire du Cessna Citation X dans le but de valider la robustesse des boucles internes.

#### 6.3.1 Vérification du respect du cahier des charges pour le SAS

Étant donné le découplage entre les mouvements longitudinal et latéral, nous présenterons les résultats obtenus pour le mouvement longitudinal dans un premier temps, puis pour le mouvement latéral dans un deuxième temps.

##### Validation du SAS pour le mouvement longitudinal

La Figure 6.9 illustre la position des pôles dans le plan complexe du mouvement longitudinal avant et après stabilisation par le SAS (calculé pour chaque condition de vol) pour le Cessna Citation X sur 500 points de vol.



(a) Positions des pôles longitudinaux naturels (sans SAS) du Cessna Citation X

(b) Positions des pôles longitudinaux stabilisés (avec SAS) du Cessna Citation X

Figure 6.9 Positions des pôles longitudinaux naturels et stabilisés du Cessna Citation X

Le Tableau 6.4 montre une comparaison entre les pires caractéristiques dynamiques affectant un des pôles (parmi tous les pôles de la Figure 6.9(a)) avant l'utilisation d'un SAS et les pires caractéristiques dynamiques affectant un des pôles (parmi tous les pôles de la Figure 6.9(b)) après l'utilisation d'un SAS.

Tableau 6.4 Caractéristiques dynamiques longitudinales avec et sans SAS

Mode	Sans SAS	Spécification du	
		cahier des charges	Avec SAS
<i>Short Period</i>	$\xi_{sp_{min}} = 0.2683$	$\xi \geq 0.35$	$\xi_{sp_{min}} = 0.4001$
	$\xi_{sp_{max}} = 0.7056$	$\xi \leq 1.30$	$\xi_{sp_{max}} = 0.5916$
Phugoïde	$\xi_{ph_{min}} = -0.0117$	$\xi \geq 0.04$	$\xi_{ph_{min}} = 1.00$

Comme nous pouvons le remarquer sur la Figure 6.9(a) et sur le Tableau 6.4, la dynamique naturelle de l'avion ne respecte pas toujours les performances requises. En effet, pour certaines conditions de vol, les pôles du mode *short period* ont un facteur d'amortissement inférieur à 0.3 qui, rappelons-le, est le minimum requis. De plus, il est possible de voir que pour certaines conditions de vol, les pôles du mode phugoïde se trouvent légèrement à droite de l'axe imaginaire, ce qui rend la dynamique de l'avion instable. Dès lors, on comprend mieux la nécessité d'avoir un système de stabilisation pour améliorer les performances de l'avion.

En ce qui concerne les caractéristiques dynamiques longitudinales après la stabilisation par le SAS, on peut voir sur la Figure 6.9(b) et sur le Tableau 6.4 que l'aéronef satisfait toutes les contraintes imposées par le cahier des charges. En effet, nous remarquons que tous les pôles du mode phugoïde sont stables et sont complètement amortis. De même, les pôles du mode *short period* respectent les critères d'amortissements minimal et maximal imposés par le cahier des charges.

Pour finir, le Tableau 6.5 détaille les caractéristiques dynamiques longitudinales après la stabilisation par le SAS pour le Hawker 800XP pour vingt conditions de vol. Comme nous pouvons le remarquer, ici aussi les résultats obtenus sont satisfaisants car l'aéronef sous l'effet du SAS respecte toutes les spécifications imposées par la cahier des charges.

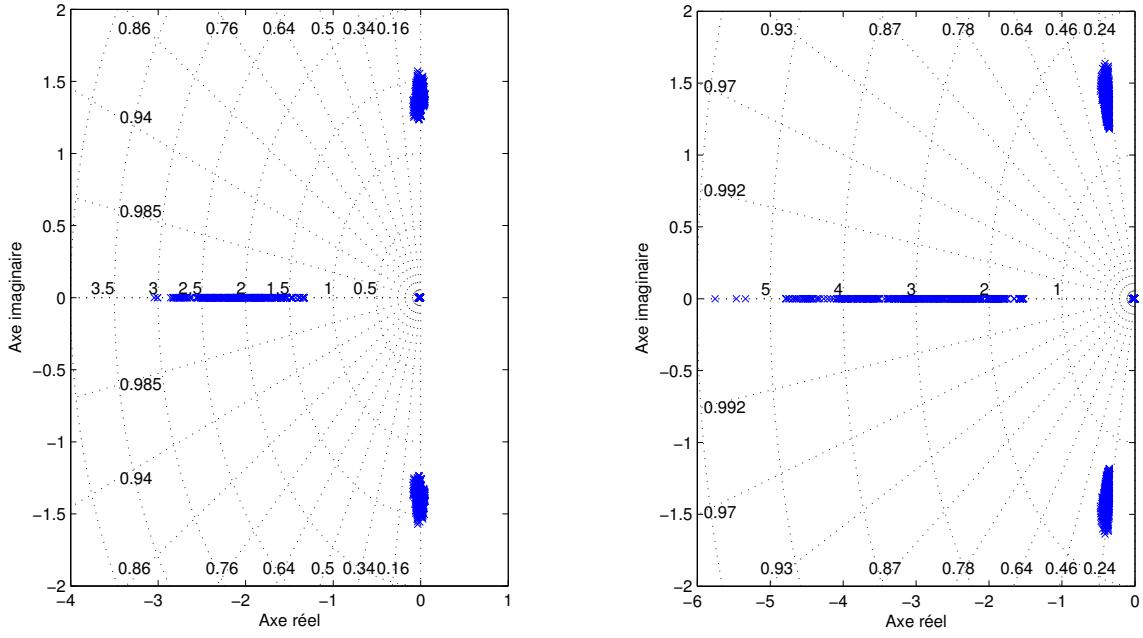
À la lumière de ces résultats, on en conclut que notre système de stabilisation respecte bien l'ensemble des critères imposés du niveau 1 et cela pour toutes les phases de vol.

Tableau 6.5 Caractéristiques dynamiques longitudinales après la stabilisation par le SAS pour le Hawker 800XP

N°	$M$ [lbs]	$x_{cg}$ [%]	$H$ [pi]	$V_{tas}$ [nds]	$\delta_f$ [deg]	$\xi_{sp}$ [-]	$\omega_{sp}$ [rad/s]	$\xi_{ph_1}$ [-]	$\omega_{ph_1}$ [rad/s]	$\xi_{ph_2}$ [-]	$\omega_{ph_2}$ [rad/s]
01	22000	30	25000	200	00	0.43	9.35	1.00	0.03	1.00	0.64
02	24000	24	25000	240	00	0.42	9.23	1.00	0.02	1.00	0.65
03	24000	28	15000	160	00	0.51	8.42	1.00	0.04	1.00	0.61
04	24000	35	05000	140	15	0.41	9.66	1.00	0.06	1.00	0.74
05	30000	20	15000	200	00	0.43	9.24	1.00	0.03	1.00	0.63
06	32000	24	01000	120	35	0.56	7.34	1.00	0.12	1.00	0.38
07	34000	16	25000	260	00	0.42	9.31	1.00	0.02	1.00	0.55
08	24000	28	25000	220	00	0.45	9.05	1.00	0.02	1.00	0.66
09	26000	24	10000	180	00	0.40	9.62	1.00	0.03	1.00	0.77
10	30000	28	25000	200	00	0.49	8.60	1.00	0.04	1.00	0.41
11	36000	16	25000	240	00	0.43	9.28	1.00	0.03	1.00	0.45
12	32000	16	25000	240	00	0.47	8.64	1.00	0.03	1.00	0.52
13	24000	32	01000	120	35	0.52	8.21	1.00	0.09	1.00	0.69
14	36000	20	20000	200	00	0.44	9.06	1.00	0.04	1.00	0.39
15	24000	30	10000	160	00	0.44	9.30	1.00	0.04	1.00	0.74
16	24000	35	25000	200	00	0.45	9.22	1.00	0.03	1.00	0.60
17	30000	24	01000	140	35	0.48	8.67	1.00	0.08	1.00	0.63
18	32000	20	25000	260	00	0.41	9.42	1.00	0.02	1.00	0.59
19	28000	24	15000	160	00	0.52	8.07	1.00	0.05	1.00	0.46
20	36000	16	10000	180	00	0.42	9.31	1.00	0.04	1.00	0.46

## Validation du SAS pour le mouvement latéral

La Figure 6.10 illustre la position des pôles dans le plan complexe du mouvement latéral avant et après stabilisation par le SAS (calculé pour chaque condition de vol) pour Cessna Citation X sur 500 points de vol.



(a) Positions des pôles latéraux naturels (sans SAS) du Cessna Citation X

(b) Positions des pôles latéraux stabilisés (avec SAS) du Cessna Citation X

Figure 6.10 Positions des pôles latéraux naturels et stabilisés du Cessna Citation X

Le Tableau 6.6 montre une comparaison entre les pires caractéristiques dynamiques affectant un des pôles (parmi tous les pôles de la Figure 6.10(a)) avant l'utilisation d'un SAS et les pires caractéristiques dynamiques affectant un des pôles (parmi tous les pôles de la Figure 6.10(b)) après l'utilisation d'un SAS.

Nous rappelons que la seule spécification requise de niveau 1, pour le mode spiral, porte sur le terme de double amplitude ( $T_{2s}$ ). Il est important de noter que celui-ci n'est à vérifier que si le mode est instable. Ainsi, lorsque nous précisons N/A dans nos résultats, cela signifie que le pôle est stable et complètement amorti. Sous cette condition, le critère est bien entendu validé.

Tableau 6.6 Caractéristiques dynamiques latérales avec et sans SAS

Mode	Sans SAS	Spécification du cahier des charges	Avec SAS
<i>Dutch Roll</i>	$\xi_{dr_{min}} = -0.0367$ $\omega_{dr_{min}} = 1.2428 \text{ rad/s}$ $(\xi\omega)_{dr_{min}} = -0.0519 \text{ rad/s}$	$\xi \geq 0.19$ $\omega \geq 1.00 \text{ rad/s}$ $\xi\omega \geq 0.35 \text{ rad/s}$	$\xi_{dr_{min}} = 0.2206$ $\omega_{dr_{min}} = 1.2415 \text{ rad/s}$ $(\xi\omega)_{dr_{min}} = 0.3501 \text{ rad/s}$
Spiral	$T_{2s,min} = 25.2603 \text{ s}$	$T_{2s,min} \geq 12 \text{ s}$	N/A
Roulis amorti	$\tau_{ra_{max}} = 0.7255 \text{ s}$	$\tau \leq 1.0 \text{ s}$	$\tau_{ra_{max}} = 0.6558 \text{ s}$

Comme nous pouvons le remarquer sur la Figure 6.10(a) et sur le Tableau 6.6, même si tous les pôles du mode roulis amorti et du mode spiral semblent respecter les spécifications du cahier des charges, un grand nombre de pôles du mode *Dutch Roll* sont soit instables, soit mal amortis (facteur d'amortissement en dessous de celui imposé par le cahier des charges). Ici aussi, on comprend mieux la nécessité d'avoir un système de stabilisation pour améliorer les performances de l'avion.

En ce qui concerne les caractéristiques dynamiques latérales après la stabilisation par le SAS, on peut voir sur la Figure 6.10(b) et sur le Tableau 6.6 que l'aéronef satisfait toutes les contraintes imposées par le cahier des charges. En effet, nous remarquons que tous les pôles du mode *Dutch Roll* sont stables et possèdent dans le pire des cas un facteur d'amortissement supérieure à 0.19 qui correspond à la limite inférieure imposée par le cahier des charges. De même, la constante de temps du mode roulis amorti est dans le pire des cas inférieure à 1.0 seconde et le mode spiral est toujours stable. Ces derniers résultats permettent donc de valider les qualités de vol correspondant au niveau 1.

Pour finir, le Tableau 6.7 détaille les caractéristiques dynamiques latérales après la stabilisation par le SAS pour le Hawker 800XP pour vingt conditions de vol. Comme nous pouvons le remarquer, ici aussi les résultats obtenus sont satisfaisants car l'aéronef sous l'effet du SAS respecte toutes les spécifications imposées par la cahier des charges.

À la lumière de ces résultats, on en conclut que notre système de stabilisation respecte bien l'ensemble des critères imposés du niveau 1 et cela pour toutes les phases de vol.

Tableau 6.7 Caractéristiques dynamiques latérales après la stabilisation par le SAS pour le Hawker 800XP

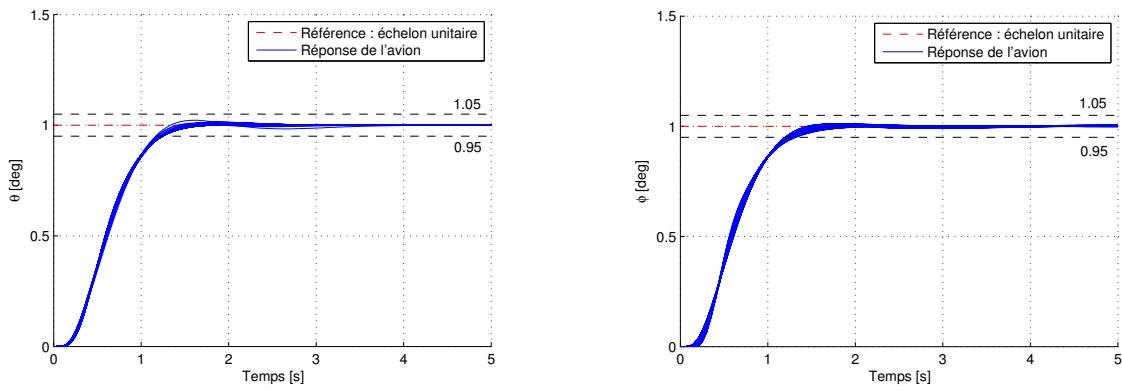
N°	$M$ [lbs]	$x_{cg}$ [%]	$H$ [pi]	$V_{tas}$ [nds]	$\delta_f$ [deg]	$\xi_{dr}$ [-]	$\omega_{dr}$ [rad/s]	$\xi_{dr}\omega_{rh}$ [rad/s]	$T_{2_s}$ [s]	$\tau_{ra}$ [s]
01	26000	34	15000	200	00	0.29	01.36	00.39	N/A	0.23
02	26000	28	25000	180	00	0.30	01.55	00.47	N/A	0.46
03	30000	26	25000	200	00	0.27	01.52	00.42	N/A	0.50
04	30000	24	10000	180	00	0.27	01.45	00.39	N/A	0.35
05	34000	22	10000	180	00	0.23	01.54	00.36	N/A	0.47
06	24000	26	25000	220	00	0.28	01.25	00.35	N/A	0.25
07	28000	30	25000	180	00	0.26	01.63	00.43	N/A	0.51
08	32000	24	25000	200	00	0.25	01.47	00.36	N/A	0.64
09	30000	32	25000	240	00	0.26	01.38	00.36	N/A	0.33
10	34000	18	15000	180	00	0.23	01.53	00.36	N/A	0.56
11	30000	26	15000	160	00	0.23	01.61	00.37	N/A	0.56
12	30000	24	20000	200	00	0.27	01.46	00.39	N/A	0.41
13	34000	16	25000	220	00	0.26	01.44	00.38	N/A	0.52
14	30000	22	20000	200	00	0.27	01.45	00.39	N/A	0.40
15	26000	26	25000	200	00	0.30	01.43	00.43	N/A	0.34
16	24000	30	15000	200	00	0.28	01.26	00.35	N/A	0.21
17	28000	22	25000	220	00	0.28	01.38	00.39	N/A	0.31
18	24000	35	10000	160	00	0.29	01.44	00.42	N/A	0.31
19	30000	32	15000	180	00	0.25	01.58	00.40	N/A	0.44
20	28000	28	25000	220	00	0.28	01.42	00.39	N/A	0.32

### 6.3.2 Vérification du respect du cahier des charges pour le CSAS

Dans cette sous-section, nous nous intéressons au contrôle interne au complet (contrôle de l'angle de tangage et contrôle de l'angle de roulis). Dans un premier temps, nous présenterons les résultats obtenus pour le pilotage automatique. Puis, dans un second temps, nous referons la même analyse en considérant le pilotage manuel. Enfin, nous terminerons avec une analyse de robustesse des boucles internes en manuel et en automatique.

#### Validation du contrôle automatique de l'angle de tangage et de l'angle de roulis

Dans le but de valider les boucles internes pour le contrôle automatique de l'angle de tangage et de l'angle de roulis, nous avons effectué 500 simulations sur la dynamique non linéaire du Cessna Citation X. La Figure 6.11 illustre les réponses en tangage et en roulis de l'avion suite à une référence de type échelon unitaire.



(a) Résultats pour le contrôle automatique de l'angle de tangage

(b) Résultats pour le contrôle automatique de l'angle de roulis

Figure 6.11 Résultats du contrôle automatique de l'angle de tangage et de l'angle de roulis sur 500 points de vol pour le Cessna Citation X

Comme nous pouvons le constater, les résultats sont très satisfaisants. En effet, quelle que soit la condition de vol, le temps de réponse à 5% pour les deux boucles internes reste inférieur aux 2 secondes imposées par le cahier des charges. De même, on peut voir que pour les deux boucles internes, le dépassement maximal reste inférieur à 5% et que l'erreur de position en régime permanent est quasiment nulle (inférieure à  $10^{-2}$ ).

Nous avons réalisé les mêmes essais avec la dynamique non linéaire du Hawker 800XP. Les Tableaux 6.8 et 6.9 montrent les résultats détaillés sur 20 points de vol. Dans l'ensemble, les résultats restent identiques à ceux du Cessna Citation X.

Tableau 6.8 Résultat du contrôle interne de l'angle de tangage en automatique pour le Hawker 800XP

N°	$M$ [lbs]	$x_{cg}$ [%]	$H$ [pi]	$V_{tas}$ [nds]	$\delta_f$ [deg]	$t_{r5\%}$ [s]	$D$ [%]	$e_p$ [deg]
01	34000	24	15000	200	00	01.21	1.01	3e-08
02	26000	30	20000	200	00	01.24	1.01	3e-08
03	26000	32	25000	200	00	01.23	1.01	2e-08
04	24000	35	15000	180	00	01.20	1.01	2e-08
05	22000	34	20000	200	00	01.20	1.00	3e-08
06	24000	34	05000	160	15	01.23	1.00	2e-08
07	32000	22	01000	120	35	01.25	1.01	3e-08
08	32000	26	25000	260	00	01.20	1.00	3e-08
09	22000	32	20000	180	00	01.22	1.01	2e-08
10	24000	24	25000	260	00	01.28	1.00	2e-08
11	28000	24	15000	180	00	01.24	1.01	3e-08
12	34000	24	25000	220	00	01.25	1.01	2e-08
13	34000	18	05000	180	15	01.22	1.00	3e-08
14	28000	22	10000	200	00	01.23	1.00	3e-08
15	30000	22	01000	120	35	01.23	1.01	2e-08
16	32000	24	25000	200	00	01.20	1.01	3e-08
17	26000	24	25000	260	00	01.20	1.00	3e-08
18	28000	30	25000	180	00	01.27	1.01	6e-09
19	30000	20	15000	160	00	01.23	1.01	2e-08
20	30000	26	01000	160	35	01.28	1.00	2e-08

Tableau 6.9 Résultat du contrôle interne de l'angle de roulis en automatique pour le Hawker 800XP

N°	$M$ [lbs]	$x_{cg}$ [%]	$H$ [pi]	$V_{tas}$ [nds]	$\delta_f$ [deg]	$t_{r_{5\%}}$ [s]	$D$ [%]	$e_p$ [deg]
001	22000	35	15000	260	00	01.25	1.00	2e-07
002	36000	16	05000	220	15	01.23	1.01	9e-07
003	28000	24	15000	180	00	01.27	1.01	6e-06
004	26000	32	20000	280	00	01.25	1.00	2e-07
005	36000	16	05000	160	15	01.21	1.01	6e-06
006	36000	16	05000	180	15	01.20	1.01	7e-10
007	32000	26	25000	280	00	01.27	1.01	8e-08
008	24000	26	15000	260	00	01.25	1.00	2e-07
009	26000	26	25000	340	00	01.25	1.00	4e-07
010	28000	28	10000	160	00	01.23	1.01	2e-05
011	30000	30	01000	140	35	01.25	1.01	9e-08
012	32000	22	05000	160	15	01.27	1.01	5e-07
013	30000	32	10000	180	00	01.22	1.01	3e-06
014	28000	30	10000	160	00	01.28	1.01	2e-05
015	32000	16	05000	160	15	01.20	1.01	6e-07
016	24000	35	20000	260	00	01.25	1.00	8e-08
017	32000	16	05000	220	15	01.23	1.01	7e-07
018	34000	20	25000	240	00	01.20	1.01	7e-07
019	28000	30	25000	280	00	01.27	1.00	9e-08
020	22000	34	20000	280	00	01.25	1.00	2e-07

## Validation du contrôle manuel de l'angle de tangage et de l'angle de roulis

Le contrôle manuel est légèrement différent du contrôle automatique, car le but est de suivre une référence variante dans le temps. Comme pour le mode automatique, afin de valider les boucles internes en mode manuel, nous avons effectué 500 simulations sur la dynamique non linéaire du Cessna Citation X en prenant en compte les modèles du pilote et du manche présentés dans le **chapitre 2**. La Figure 6.12 illustre les réponses en tangage et en roulis de l'avion suite à une référence de type échelon unitaire.

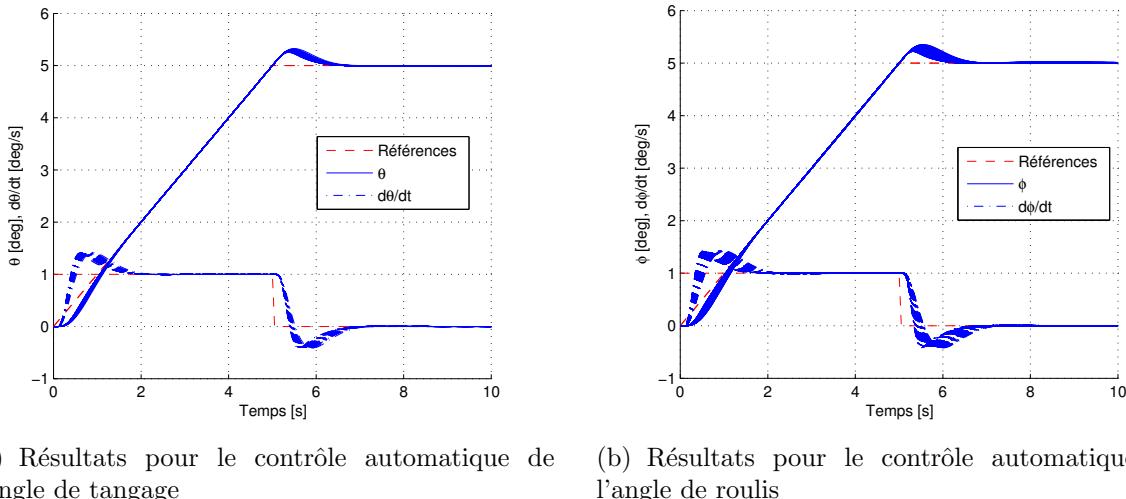


Figure 6.12 Résultats du contrôle manuel de l'angle de tangage et de l'angle de roulis sur 500 points de vol pour le Cessna Citation X

Comme nous pouvons le constater, les résultats sont encore une fois très satisfaisants. En effet, quelle que soit la condition de vol et la boucle interne, le temps de réponse à 5% reste inférieur aux 2 secondes imposées par le cahier des charges. En ce qui concerne le dépassement maximal, il n'a plus de raison d'être, car un fort dépassement sur la réponse en vitesse est nécessaire pour rejoindre la trajectoire de référence comme on peut le voir sur les réponses en tangage et en roulis. Enfin, l'erreur en vitesse durant la phase transitoire (entre 3 et 5 secondes) est quasiment nulle (inférieure à  $10^{-2}$ ).

Les Tableaux 6.10 et 6.11 détaillent les performances en terme de marge de gain, marge de phase et erreur de vitesse obtenues sur 20 conditions de vol pour le Hawker 800XP. Comme nous pouvons le remarquer, ici aussi, les spécifications du cahier des charges sont bien respectées.

Tableau 6.10 Résultat du contrôle interne de l'angle de tangage en manuel pour le Hawker 800XP

N°	$M$ [lbs]	$x_{cg}$ [%]	$H$ [pi]	$V_{tas}$ [nds]	$\delta_f$ [deg]	$M_g$ [dB]	$M_p$ [deg]	$e_v$ [deg]
01	22000	35	20000	180	00	10.39	80.36	3e-08
02	32000	24	05000	140	15	09.67	78.75	5e-08
03	30000	28	15000	160	00	09.80	78.76	6e-08
04	24000	26	10000	180	00	10.58	81.61	2e-08
05	32000	20	20000	200	00	09.43	78.40	4e-08
06	36000	20	01000	160	35	10.81	82.41	2e-08
07	28000	24	25000	240	00	10.57	81.34	3e-08
08	30000	20	20000	260	00	11.23	83.14	1e-08
09	34000	24	25000	220	00	09.86	79.66	3e-08
10	26000	24	05000	160	15	10.61	81.46	2e-08
11	24000	28	15000	200	00	10.75	81.98	2e-08
12	26000	24	10000	200	00	11.16	82.92	1e-08
13	32000	18	25000	240	00	09.87	79.70	3e-08
14	32000	20	25000	200	00	08.84	75.65	1e-07
15	34000	24	15000	180	00	10.00	79.70	4e-08
16	26000	28	20000	180	00	09.67	78.77	5e-08
17	30000	22	20000	220	00	10.47	81.12	3e-08
18	24000	24	10000	200	00	11.13	82.89	1e-08
19	26000	26	01000	120	35	09.15	77.21	5e-08
20	30000	22	20000	260	00	11.41	83.39	1e-08

Tableau 6.11 Résultat du contrôle interne de l'angle de roulis en manuel pour le Hawker 800XP

N°	$M$ [lbs]	$x_{cg}$ [%]	$H$ [pi]	$V_{tas}$ [nds]	$\delta_f$ [deg]	$M_g$ [dB]	$M_p$ [deg]	$e_v$ [deg]
01	32000	22	25000	320	00	11.11	81.96	2e-07
02	30000	24	15000	240	00	10.97	82.02	1e-07
03	26000	26	25000	280	00	11.87	83.80	2e-07
04	28000	22	25000	400	00	12.80	85.32	6e-07
05	26000	28	25000	200	00	09.58	79.29	2e-05
06	26000	26	25000	360	00	12.78	85.21	4e-07
07	28000	28	25000	200	00	09.17	78.16	4e-05
08	26000	24	05000	180	15	11.19	82.60	3e-07
09	24000	24	10000	240	00	12.31	84.66	3e-07
10	24000	35	25000	400	00	12.89	85.51	4e-07
11	34000	16	25000	280	00	10.50	80.55	9e-08
12	26000	30	20000	200	00	10.07	80.42	4e-06
13	32000	20	25000	360	00	11.60	82.92	3e-07
14	24000	32	25000	220	00	10.47	81.13	6e-07
15	26000	30	25000	260	00	11.43	83.07	9e-08
16	26000	28	20000	220	00	10.81	81.97	6e-08
17	24000	28	15000	180	00	09.94	80.00	4e-06
18	30000	24	05000	180	15	10.24	80.10	1e-07
19	30000	30	25000	200	00	08.52	75.55	7e-05
20	22000	35	20000	260	00	11.89	83.95	2e-07

### 6.3.3 Validation de la robustesse des boucles internes sur le modèle non linéaire

Nous nous intéressons ici à la robustesse des correcteurs internes (SAS+CAS). Grâce aux études présentées dans la **section 4.4**, nous avons utilisé les applications gardiennes sur 100 points de vol afin d'avoir une idée générale sur la robustesse de nos correcteurs.

La première analyse que nous avons effectuée concernait la stabilité au sens d'Hurwitz. Si celle-ci n'est pas obtenue, il est inutile d'aller plus loin. Lorsque celle-ci était confirmée, nous testions alors si un facteur d'amortissement minimal de 0.7 pouvait être garanti en utilisant l'application gardienne qui garde le cône d'amortissement. Dans l'ensemble nous avons obtenu de bons résultats. Sur les 100 cas traités (voir Figure 6.13), 86% des boucles internes étaient robustes.

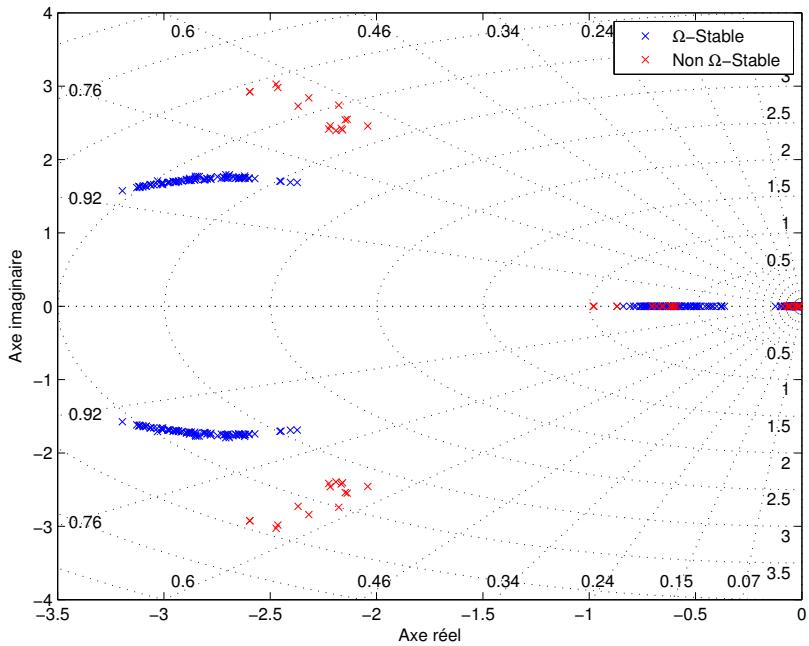
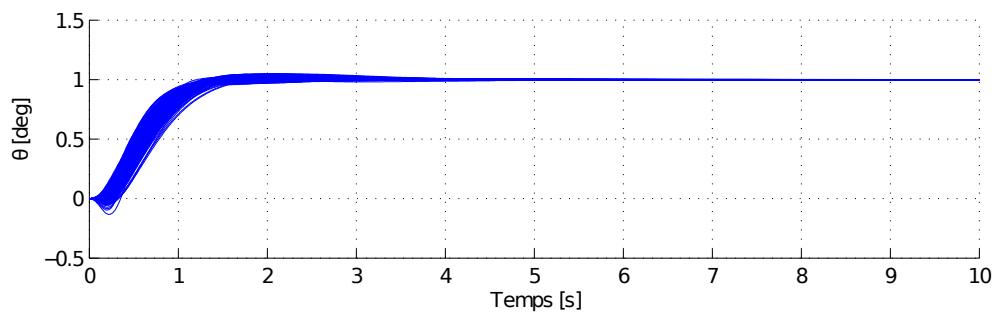


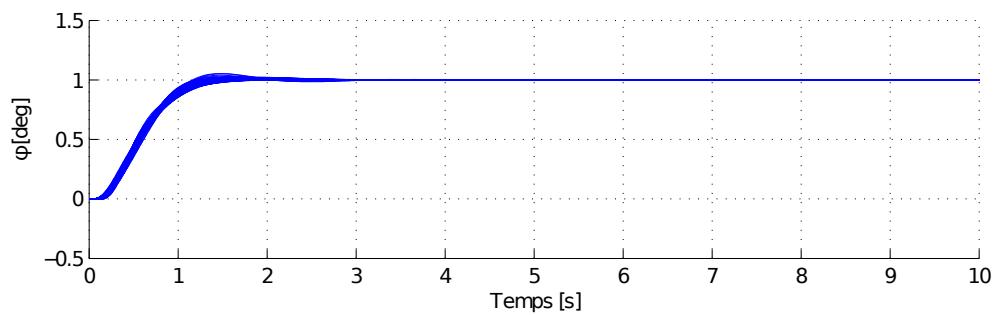
Figure 6.13 Positions des pôles longitudinaux stabilisés du Cessna Citation X sous l'influence d'incertitudes

À la lumière de cette étude, nous avons effectué des simulations sur le modèle non linéaire du Cessna Citation X. Pour chacune des 100 conditions de vol, nous avons réalisé 5 simulations en injectant des incertitudes (choisies aléatoirement) de  $\pm 10\%$  sur la masse,  $\pm 10\%$  sur la vitesse vraie,  $\pm 10\%$  sur l'altitude et de  $\pm 5\%$  sur le centrage.

La Figure 6.14 illustre les réponses de l'avion en tangage et en roulis pour le pilotage automatique.



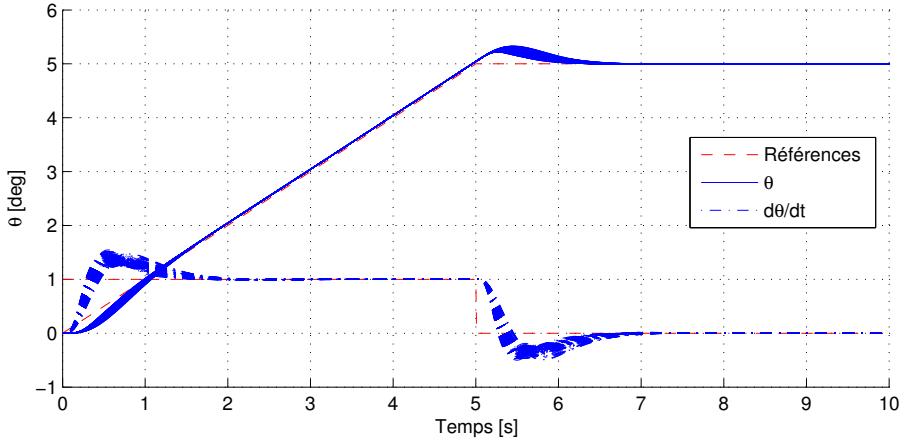
(a) Résultats pour le contrôle automatique de l'angle de tangage



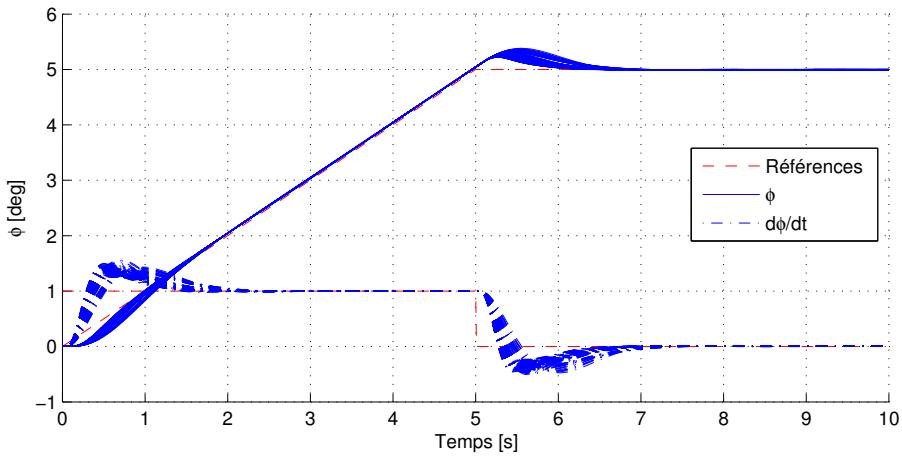
(b) Résultats pour le contrôle automatique de l'angle de roulis

Figure 6.14 Analyse de robustesse des boucles internes en mode automatique pour le Cessna Citation X

La Figure 6.15 illustre les réponses cumulatives suite à 500 essais de l'avion en tangage et en roulis pour le pilotage manuel.



(a) Résultats pour le contrôle manuel de l'angle de tangage



(b) Résultats pour le contrôle manuel de l'angle de roulis

Figure 6.15 Analyse de robustesse des boucles internes en mode manuel pour le Cessna Citation X

La première remarque que nous pouvons faire concerne la stabilité (au sens d'Hurwitz) de l'aéronef. En effet, même si les spécifications ne sont pas tout le temps respectées, on peut noter que l'avion reste bien stable malgré le nombre d'incertitudes. Il est important de préciser que contrairement aux modèles linéaires, nous avons généré ici des incertitudes sur quatre paramètres en même temps, alors que l'interpolation et les applications gardiennes ne nous permettaient de conclure que sur la robustesse en fonction de deux paramètres (masse/centrage ou altitude/vitesse). Il est donc normale de ne plus avoir le même taux de réussite concernant la robustesse vis-à-vis des spécifications. Cependant, dans l'ensemble, les

réponses restent acceptables même si pour certaines conditions de vol le temps de réponse cumulatives et le dépassement maximal sont plus grands que ceux espérés.

### 6.3.4 Conclusion

En conclusion, les résultats présentés dans cette section nous confirment que la méthodologie proposée dans ce mémoire semble porter ses fruits. En validant les spécifications des cahiers des charges sur 500 points de vol, nous avons montré l'efficacité de l'algorithme génétique couplé à la méthode LQR. En plus d'offrir des correcteurs simples et performants, ces derniers sont aussi robustes malgré un grand nombre d'incertitudes comme nous l'avons démontré à la lumière des derniers résultats.

Pour finir, en réalisant des simulations sur le Cessna Citation X et sur le Hawker 800XP, nous avons démontré l'aspect générique des algorithmes de commande. Ces résultats comblent toutes nos attentes et nous permettent d'entamer la prochaine étape qui consiste à valider les correcteurs externes.

## 6.4 Validation des boucles externes

Dans cette section nous abordons la validation de la dernière étape de ce projet qui concerne la conception des boucles externes. Pour étudier l'efficacité du pilote automatique complet et afin d'alléger le contenu de cette section, nous proposons de simuler plusieurs scénarios de vol et de vérifier si ces derniers ont du sens ou non. De même, la dynamique du Cessna Citation X étant plus complexe que celle du Hawker 800XP (modèle aérodynamique plus précis), nous présenterons les résultats obtenus avec la dynamique de vol de ce dernier. Enfin, pour garantir l'efficacité de nos correcteurs, toutes les simulations se feront en considérant la variation de la quantité de carburant. Ainsi, la masse et le centrage évolueront en conséquence. D'autres facteurs de perturbations (variation du centre de gravité selon l'axe transversal, présence de vent, incertitude sur certains paramètres, etc.) seront pris en compte dans les simulations.

### 6.4.1 Scénario 1 : maintien d'altitude à vitesse constante

Le premier scénario que nous proposons concerne le maintien d'un niveau de vol à vitesse constante sous l'influence d'une zone de turbulence. Nous supposons qu'initialement l'avion évolue sous la condition d'équilibre à 20,000 pi / 250 nds / 28,000 lb /  $x_{cg}$  à 17% et dans un environnement idéal (atmosphère au repos). De même, nous supposons que les modes *Altitude Hold* et *Autothrottle* sont enclenchés et réglés sur 20,000 pi et 250 nds. À  $t = 50$  secondes,

nous simulerons une zone de turbulence grâce aux différents modèles de vent présentés dans la **section 2.2.1**. Pour cela, nous démarrerons un vent turbulent pour une durée de 150 secondes que nous renforcerons avec une rafale à  $t = 100$  secondes. Puis, à 200 secondes, nous annulerons toutes les perturbations pour remettre l'avion dans une atmosphère au repos et voir si celui-ci peut ou non revenir à sa condition initiale. La Figure 6.16 illustre le profil de vent généré lors de la simulation :

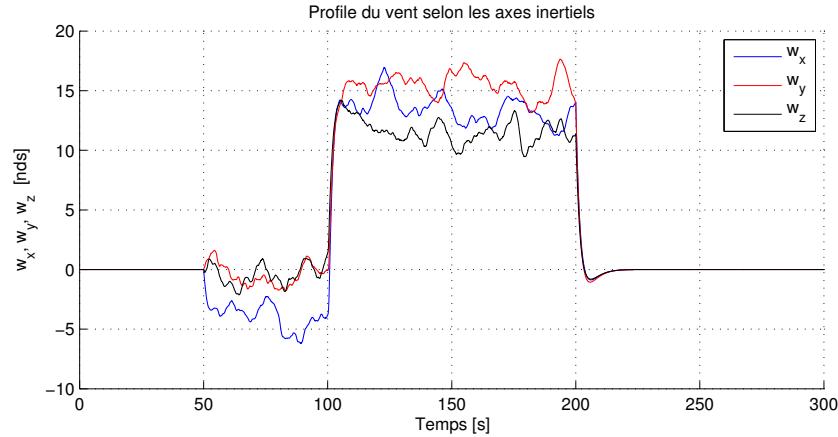


Figure 6.16 Profile du vent pour le scénario 1

Les Figures 6.17 et 6.18 illustrent les résultats obtenus après 300 secondes de simulation. Comme nous pouvons le voir, sur les 50 premières secondes, l'aéronef reste bien stable et évolue en palier sans aucun problème. Entre 50 et 100 secondes, nous commençons à voir les premières réactions de l'avion et du pilote automatique qui tente de maintenir l'altitude et la vitesse constante en présence de faibles turbulences. Sous l'influence de cette première perturbation, on peut voir que les élévateurs et les manettes des gaz bougent légèrement autour de leurs positions d'équilibre pour maintenir la position et l'attitude de l'aéronef. Par exemple, l'altitude varie légèrement de  $\pm 5$  pi par rapport à la référence de 20,000 pi. La vitesse aussi varie très peu, elle fluctue entre 250 nds et 253 nds, soit une variation maximale de 1.2%, ce qui peut être considéré comme négligeable. Ces observations sont assez encourageantes car elles prouvent une première efficacité des modes de l'autopilote quant au maintien d'altitude et de vitesse.

À  $t = 100$  secondes, la rafale se soulève soudainement en moins de 2 secondes. À cet instant, on constate que le pilote automatique excite plus les élévateurs et les commandes des gaz afin d'amortir le mouvement de l'avion. En effet, même si l'on peut avoir l'impression que l'avion chute brusquement à  $t = 100$  secondes, en réalité, ce dernier ne perd que 150 pi en 10 secondes, soit une vitesse de descente de 900 pi/min. Ce taux reste bien inférieur

au taux habituel de 1,800 pi/min lors de descentes contrôlées. De même, nous pouvons voir qu'en réalité l'accélération ressentie dans l'avion varie localement entre  $0.8g$  et  $1.13g$ . À titre de comparaison, nous rappelons que le facteur de charge pour un virage à  $30^\circ$  d'inclinaison est de  $1.15g$ . On en conclut donc qu'une accélération  $1.13g$  est supportable pour une telle perturbation. Par la suite, on peut voir que l'aéronef revient en douceur vers son altitude de croisière malgré le vent constant et les turbulences.

La vitesse vraie quant à elle, chute d'environ 10 nds en 2.4 secondes. Nous pensons que cette chute est tout à fait normale, car la rafale est trop rapide pour que le pilote automatique puisse anticiper le mouvement de l'avion. De plus, la valeur positive indique que le vent vient de dos. Une telle perturbation augmente la vitesse au sol et diminue la vitesse vraie de l'avion. Il est donc important de pousser sur les moteurs pour augmenter la vitesse vraie et éviter le décrochage. Ainsi, durant toute la phase perturbée, le pilote automatique pousse sur les manettes des gaz pour maintenir la vitesse de l'avion à 250 nds comme nous pouvons le constater sur la Figure 6.17.

Lorsque l'avion sort de la zone de turbulence (arrêt soudain du vent), on remarque qu'ici aussi on a de grandes variations d'altitude et vitesse. Ceci est due à l'inertie de l'avion et au temps de réponse du pilote automatique. Cependant, après quelques secondes, on peut voir que le pilote automatique stabilise à nouveau l'aéronef pour le ramener à sa condition d'équilibre.

Au terme de cette analyse, nous avons montré l'efficacité du mode *Altitude Hold* et de l'*Autothrottle*. Que l'avion soit soumis à une perturbation instantanée ou prolongée, ces deux boucles externes nous ont démontré leur capacité à stabiliser l'avion et à maintenir une référence imposée.

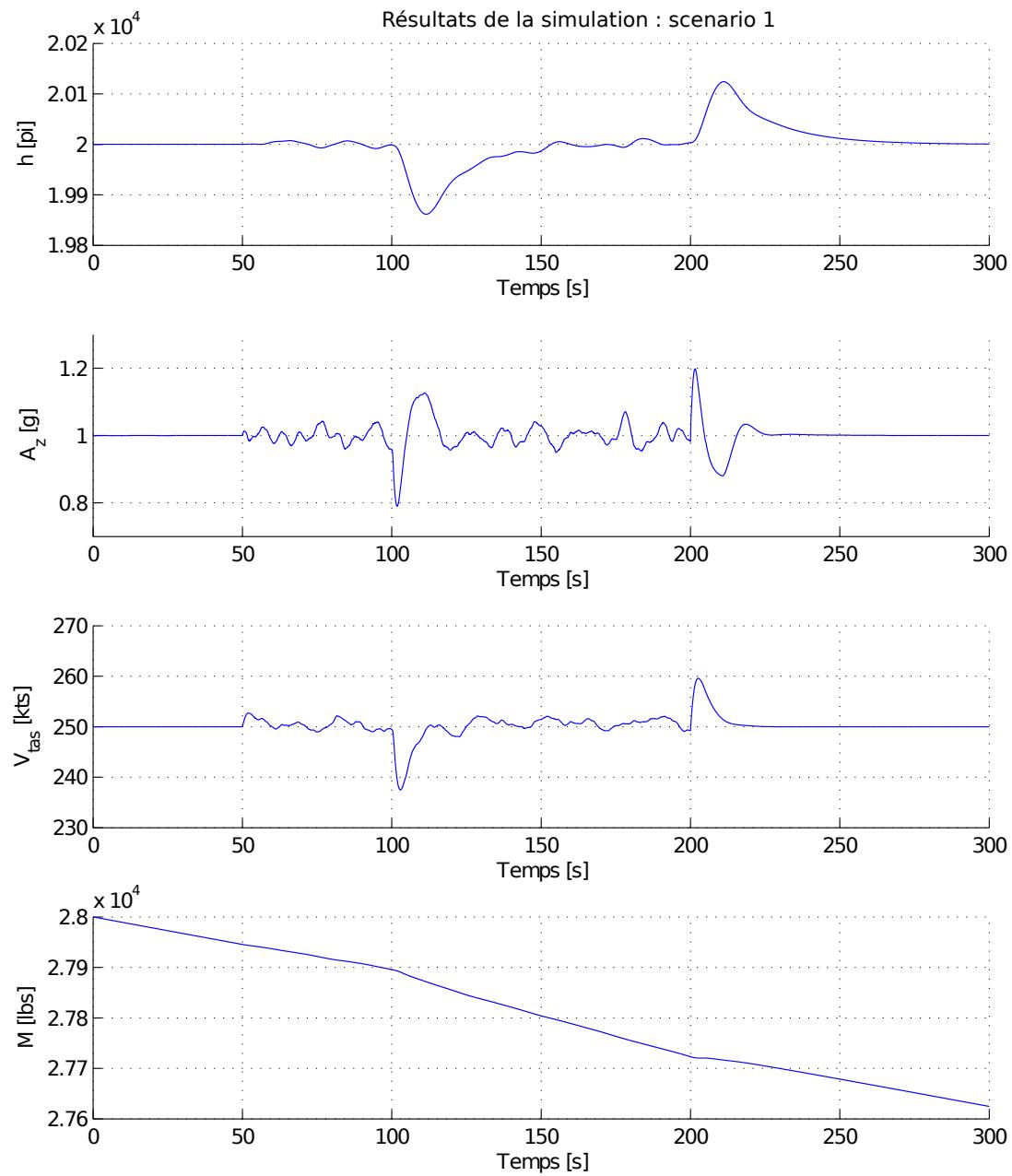


Figure 6.17 Résultat de simulation : scénario n° 1 - maintien d'une altitude à vitesse constante

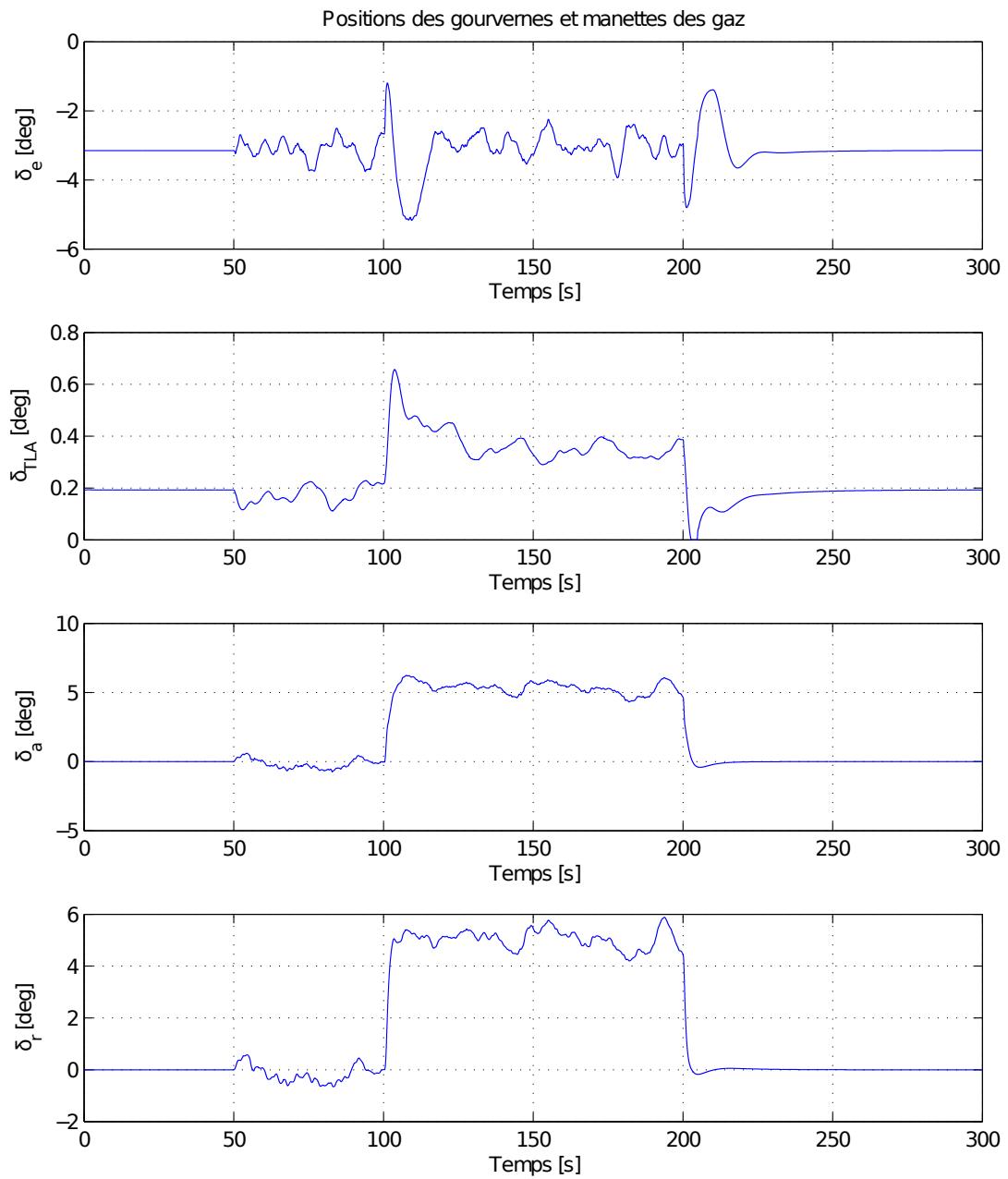


Figure 6.18 Résultat de simulation : scénario n° 1 - maintien d'une altitude à vitesse constante (suite)

#### 6.4.2 Scénario 2 : manœuvre d'évitement d'une montagne

Le deuxième scénario que nous proposons concerne une manœuvre d'évitement. Supposons que l'avion se trouve initialement à 10,000 pi / 200 nds avec un cap de  $0^\circ$  (en direction du Nord géographique) et que le pilote voit une montagne droit devant lui. Après plusieurs réflexions et discussions avec la tour de contrôle, celle-ci lui ordonne de monter à 15,000 pi à 1,800 pi/min et d'aller au cap  $45^\circ$ , puis une fois hors de danger de revenir sur son cap initial de  $0^\circ$ . Enfin, pour rattraper le léger retard causé par la déviation, le pilote décide d'augmenter sa vitesse à 250 nds.

Les Figures 6.19 à 6.21 montrent les résultats de la simulation. La première consigne envoyée au pilote automatique concerne le changement d'altitude et de cap. À cette, instant, le pilote automatique prend les commandes pour suivre les références qu'on lui impose. Au début de la simulation, l'altitude cible étant assez loin, le pilote automatique enclenche le mode de montée verticale qui lui permet d'ajuster son taux de montée. Ce dernier augmente l'assiette de l'avion pour orienter son vecteur vitesse vers le haut et maintenir les 1,800 pi/min, tel qu'illustré sur la Figure 6.20. De même, pour vaincre la gravité et la force de traînée, il pousse sur les manettes des gaz pour augmenter la poussée des moteurs et ainsi maintenir la vitesse constante. Une fois proche de l'altitude de référence, le mode de capture d'altitude prend le relais et commence à ralentir la vitesse verticale pour déposer l'avion en douceur sur son altitude finale, où le mode de maintien d'altitude s'active à son tour. La Figure 6.20, montre bien que la transition entre ces trois modes se fait tout en douceur et à vitesse constante.

Parallèlement, l'avion effectue un virage pour changer son cap. Pour cela, le pilote automatique doit générer un roulis positif pour effectuer un virage à droite. Comme on peut le voir sur la Figure 6.21, le pilote automatique ordonne une déflexion négative des ailerons. Ce résultat est tout à fait logique, car une déflexion négative entraîne un mouvement positif. De même, pour maintenir l'avion dans un virage coordonné, le pilote automatique utilise la gouverne de direction pour annuler le dérapage qui varie de  $\pm 0.5^\circ$ . Encore une fois, la logique du correcteur est tout à fait justifiée. En effet, il est bien connu qu'il faut braquer la gouverne de direction dans le sens du virage pour contrer le lacet inverse.

Enfin, une fois en dehors de la zone de danger, le pilote automatique pousse sur les manettes des gaz pour augmenter la vitesse et maintenir la vitesse de l'avion à 250 nds. De même, en suivant la logique précédente, il effectue un virage à gauche pour revenir sur son cap initial, le tout à altitude constante.

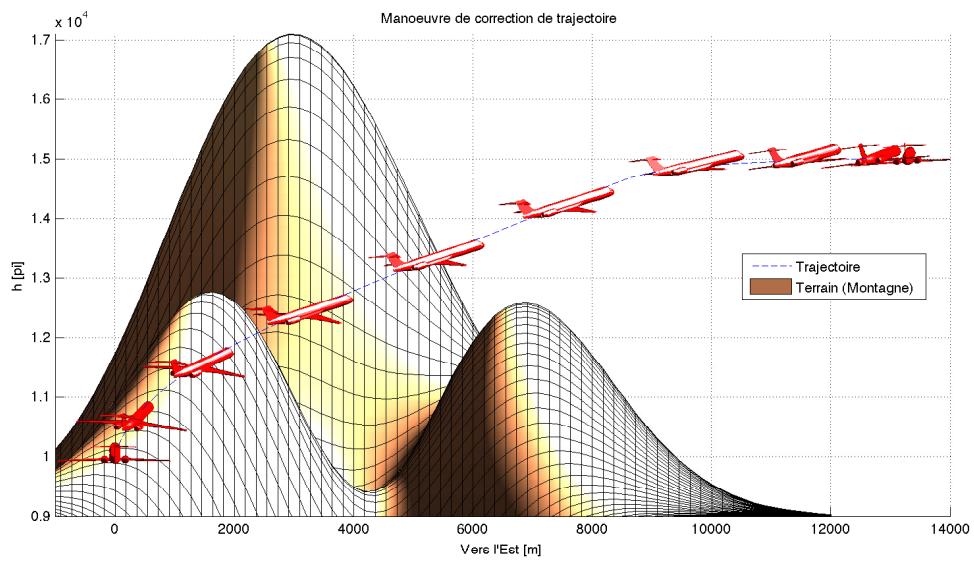


Figure 6.19 Résultats de simulation : scénario n° 2 - évitement d'une montagne (1)

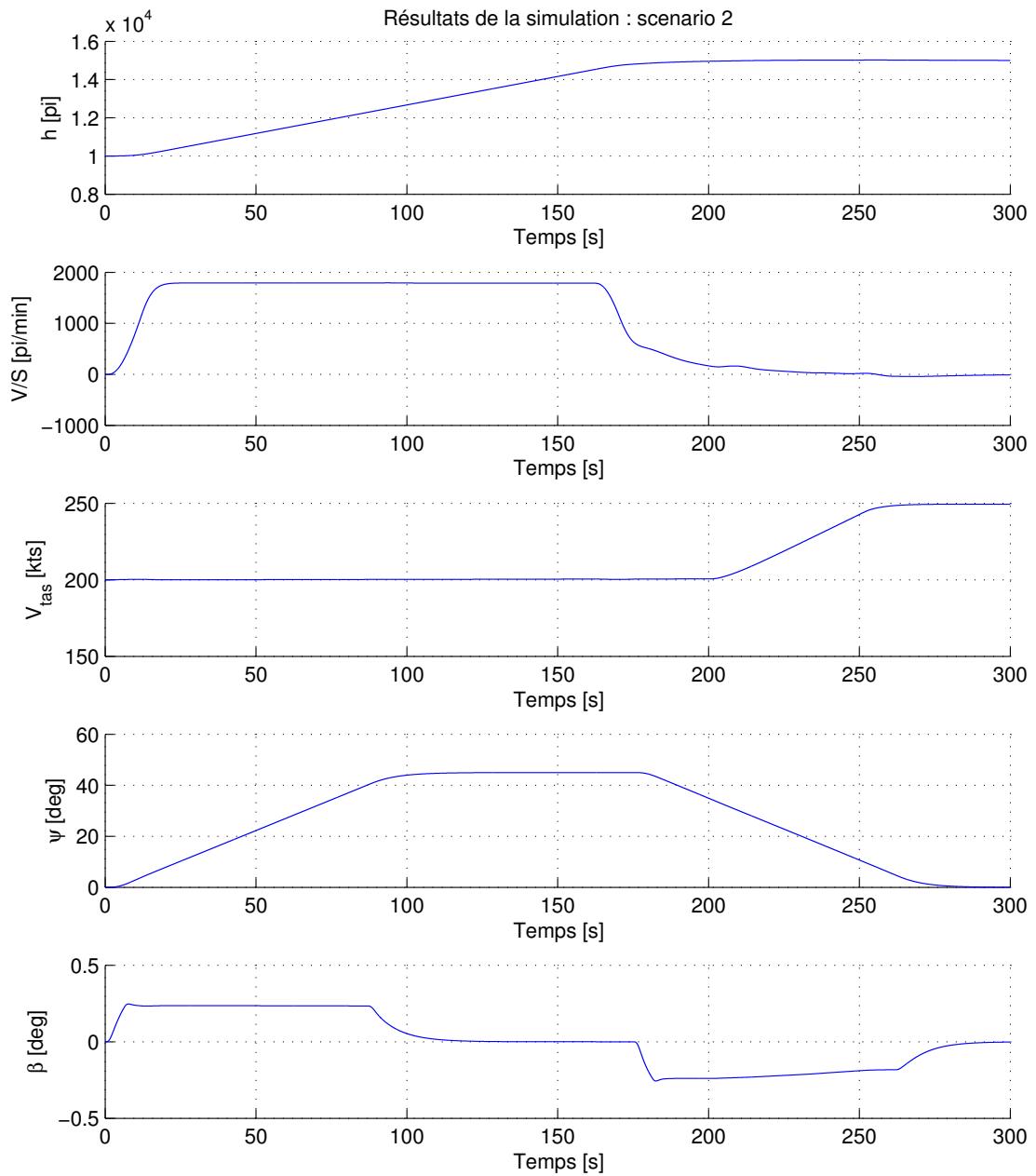


Figure 6.20 Résultats de simulation : scénario n° 2 - évitement d'une montagne (2)

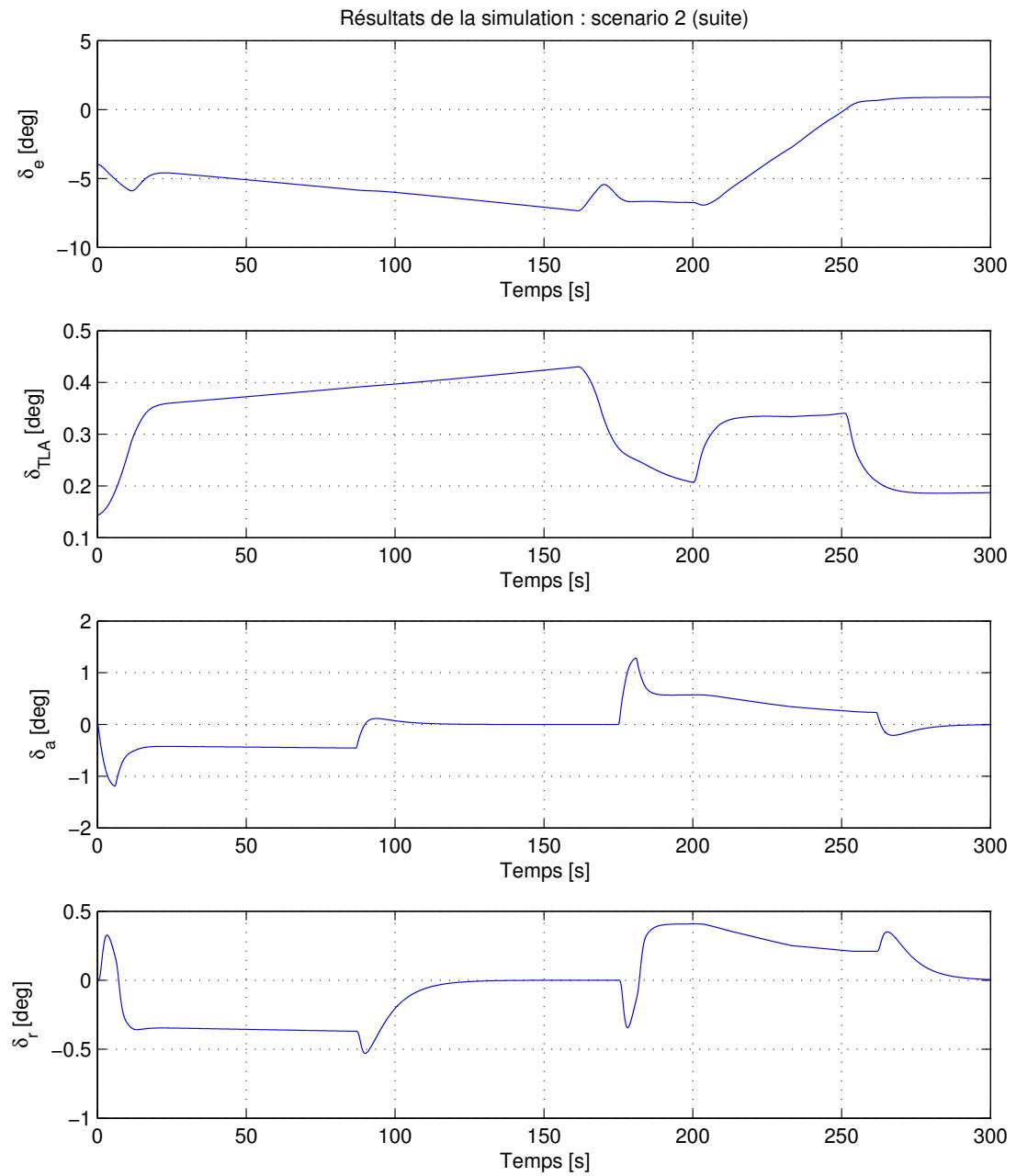


Figure 6.21 Résultats de simulation : scénario n° 2 - évitement d'une montagne (3)

### 6.4.3 Scénario 3 : suivi de trajectoire et navigation VOR/DME

Le troisième scénario que nous proposons permet de valider le mode *VOR/DME Capture*. Pour cela, nous supposons que l'avion se trouve initialement à la position  $122.4^{\circ}W/36.4^{\circ}N$  avec cap à  $28^{\circ}$  par rapport au Nord géographique. En vérifiant la météo, le pilote voit qu'avec sa trajectoire initiale, il se dirige tout droit vers une zone de turbulence assez dangereuse. Pour le confort et la sécurité des passagers, il reprogramme son FMS pour contourner cette région. Pour cela, il rentre les différentes balises listées dans le Tableau 6.12 et engage le mode de navigation latérale. De plus, il décide de prendre de l'altitude et de monter à 25,000 pi pour être au-dessus de la zone perturbée.

Tableau 6.12 Liste des VOR/DME pour le scénario 3

Balise n°	Longitude [deg]	Latitude [deg]	Cap
1	$122.2^{\circ}W$	$36.7^{\circ}N$	$313^{\circ}$
2	$122.6^{\circ}W$	$37.0^{\circ}N$	$007^{\circ}$
3	$122.5^{\circ}W$	$37.6^{\circ}N$	$108^{\circ}$
4	$122.1^{\circ}W$	$37.5^{\circ}N$	$073^{\circ}$
5	$122.7^{\circ}W$	$37.6^{\circ}N$	$073^{\circ}$

Les Figures 6.22 et 6.23 illustrent en détails les résultats de la simulation sur 2000 secondes. Comme nous pouvons le voir, l'avion rejoint sans aucune difficulté toutes les balises et maintient les différentes radiales sélectionnées. De plus, nous pouvons remarquer que tous les virages sont circulaires. Ce dernier détails démontre : (1) l'efficacité de la loi de contrôle du mode *VOR/DME Capture* et (2) le bon enchainement des modes *Heading Capture and Hold* et *VOR/DME Capture*.

Un autre aspect qu'il est important de mentionner concerne la variation de la masse. En effet, l'avion perd près de 9,000 lb en moins d'une heure. Nous avons volontairement augmenté la consommation des moteurs pour cette simulation, car nous voulions voir les limites de la robustesse des boucles internes et externes. Comme nous pouvons le constater, malgré cette grande variation, le pilote automatique n'est pas déstabilisé et fonctionne très bien. En plus, de suivre la trajectoire imposée, on peut voir qu'il rejoint bien l'altitude de 25,000 pi et qu'il maintient au mieux la vitesse vraie qui varie légèrement de 250 nds à 250.5 nds. Ce résultat est très satisfaisant, car en plus de confirmer l'efficacité des boucles externes, ils montrent que ces dernières sont robustes à la variation de masse, de centrage et d'altitude.

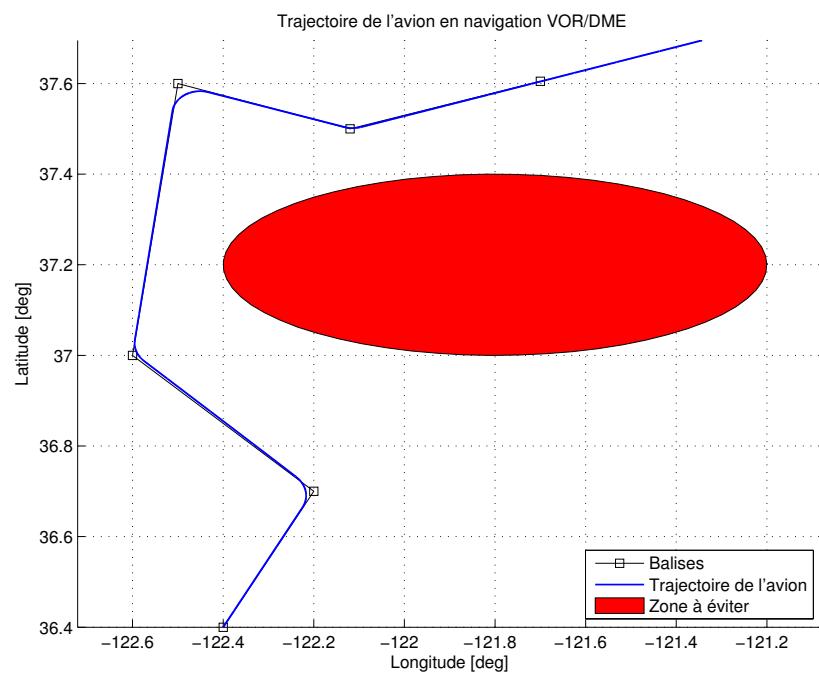


Figure 6.22 Résultats de simulation : scénario n° 3 - navigation par VOR/DME

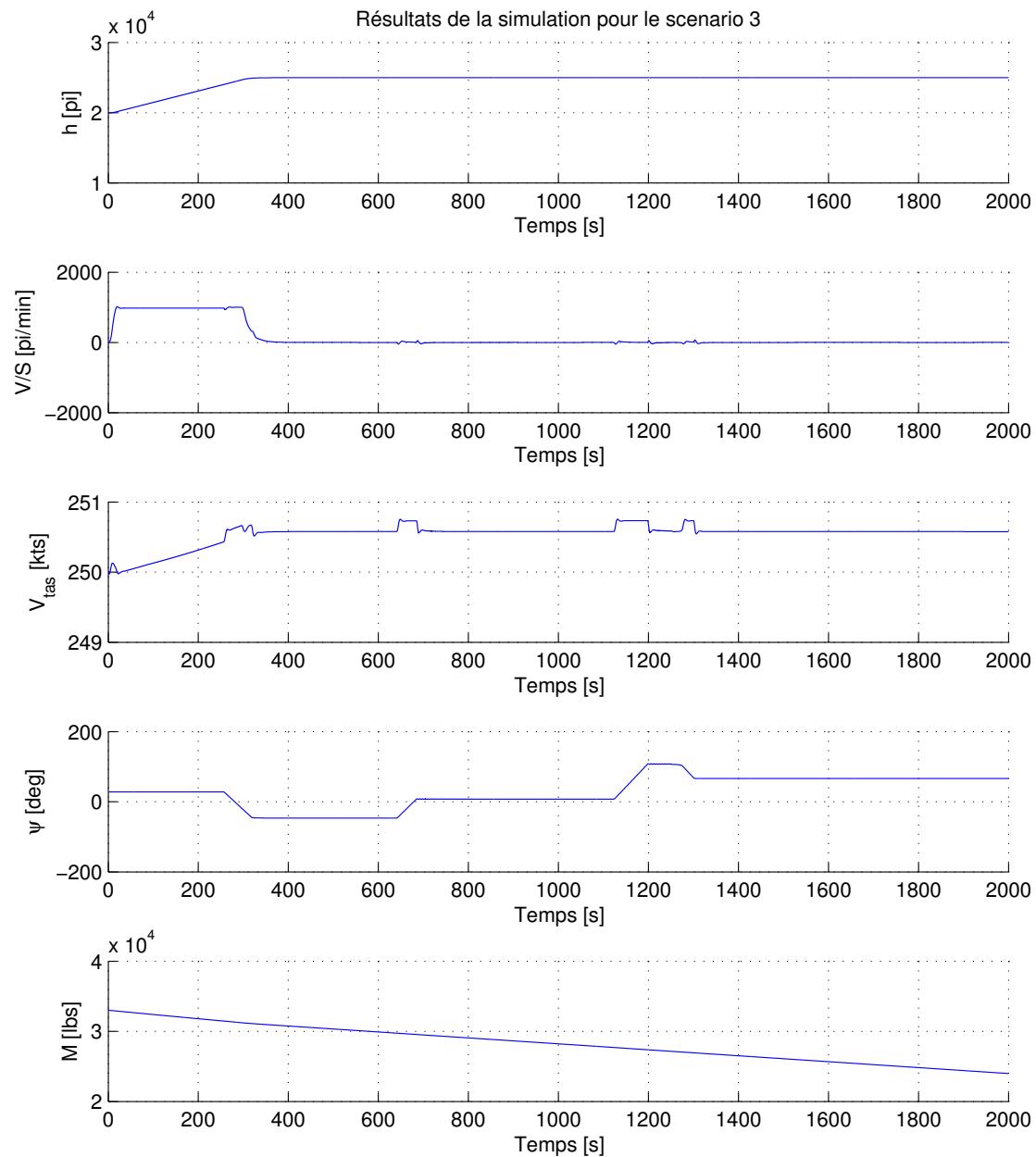


Figure 6.23 Résultats de simulation : scénario n°3 - navigation par VOR/DME (suite)

#### 6.4.4 Scénario 4 : approche et atterrissage automatique

Le quatrième et dernier scénario que nous proposons concerne une approche complète. Pour cela, nous supposons que l'avion se trouve initialement à 3,000 pi / 140 nds et qu'il se trouve à la position  $122.62^{\circ}W/37.60^{\circ}N$  en direction du Nord-Est (cap à  $45^{\circ}$ ). On suppose aussi qu'initialement, l'avion se trouve dans la configuration volets + becs sortis et train d'atterrissage rentré. Le pilote souhaite atterrir sur une piste qui se trouve à  $122.39^{\circ}W/37.62^{\circ}N$  orienté à  $118^{\circ}$  par rapport au Nord géographique. Pour cela, il se synchronise sur l'antenne du *localizer* et active le mode d'approche. Pour amorcer la descente, le pilote décide de descendre à 1,500 pi même s'il n'a pas encore croisé le *glideslope*. Pour cela, à 20 secondes, il règle l'altitude de référence sur 1,500 pi. Pour finir, dans le but de rendre la simulation plus réaliste, nous proposons de sortir le train d'atterrissage à 100 pi au-dessus du sol.

Les Figures 6.24 et 6.26 montrent la trajectoire l'avion sous différents angles. Comme nous pouvons le constater, dans l'ensemble, les résultats sont cohérents. Après 20 secondes, le pilote automatique amorce une première descente pour aller rejoindre le faisceau du *glideslope*. Étant encore loin de l'axe de la piste, celui-ci maintient le cap initial de  $45^{\circ}$ . Une fois assez proche pour capturer la radiale de l'antenne du radioalignement de piste, le pilote automatique ordonne un virage à droite pour aligner l'avion sur la piste d'atterrissage. Peu de temps après, l'avion croise le faisceau du *glideslope* et amorce sa descente finale. Pour cela, le pilote automatique aligne son angle de trajectoire sur l'angle de descente et maintient la déviation nulle comme on peut le voir sur la Figure 6.26.

À 100 pi au-dessus de la piste, le pilote sort les trains d'atterrissage. Comme on peut le voir, l'avion continue sa trajectoire sans trop être perturbé. On note une légère perturbation au niveau de vitesse, dû au fait que les trains génèrent de la trainée et donc ralentissent l'avion. Cependant, ces fluctuations sont de l'ordre de 0.1 nds ce qui est tout à fait négligeable.

Enfin, à 70 pi au-dessus de la piste, le pilote automatique commute en mode *flare* pour venir poser l'avion en douceur comme illustré sur la courbe de l'altitude en fonction du temps (voir Figure 6.26). Pour vérifier si l'avion est réellement axé sur la piste, nous avons représenté, sur Figure 6.25, son passage au-dessus de la piste d'atterrissage.

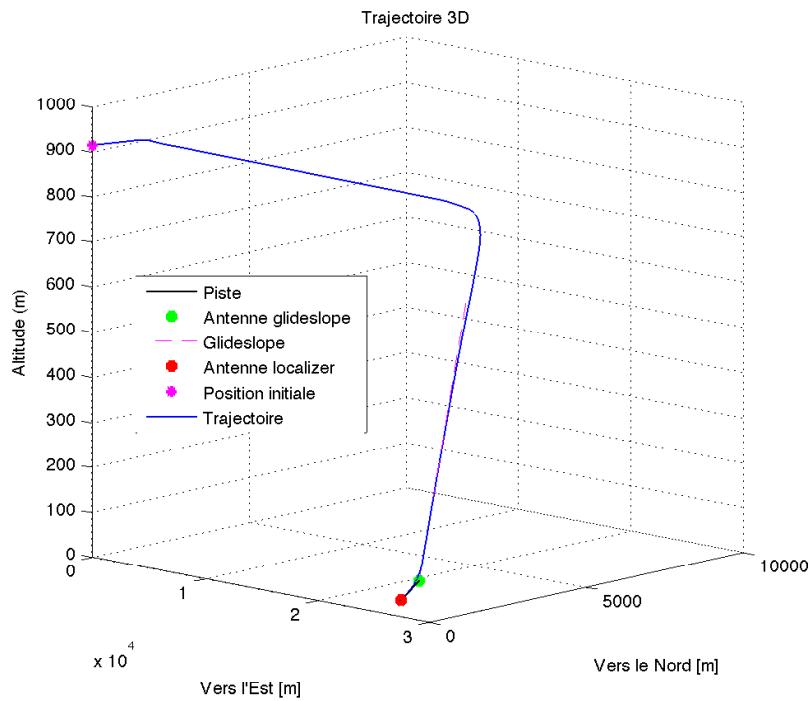


Figure 6.24 Résultats de simulation : scénario n° 4 - atterrissage automatique (1)

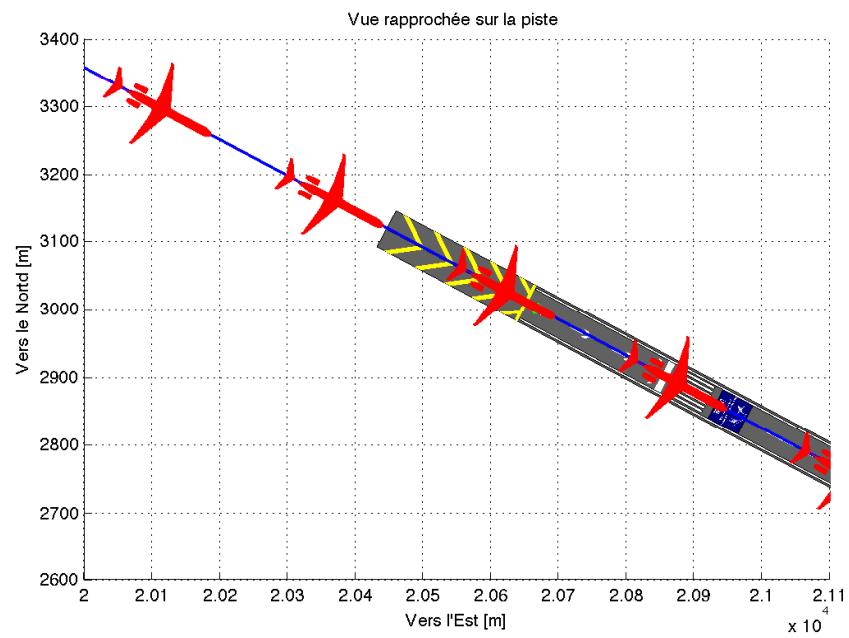
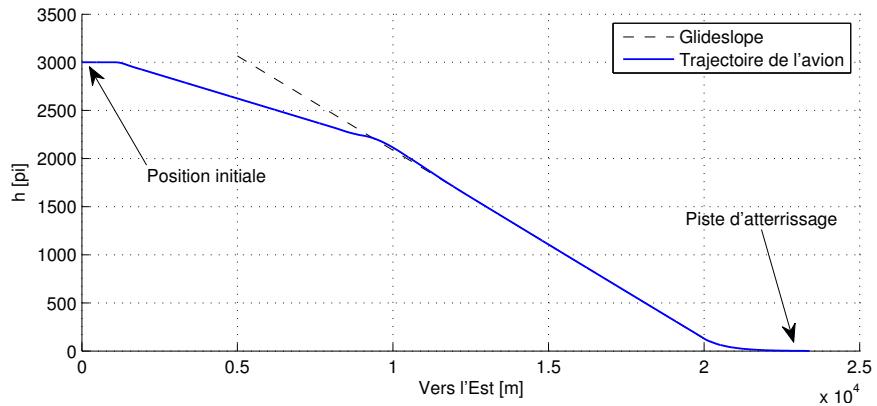
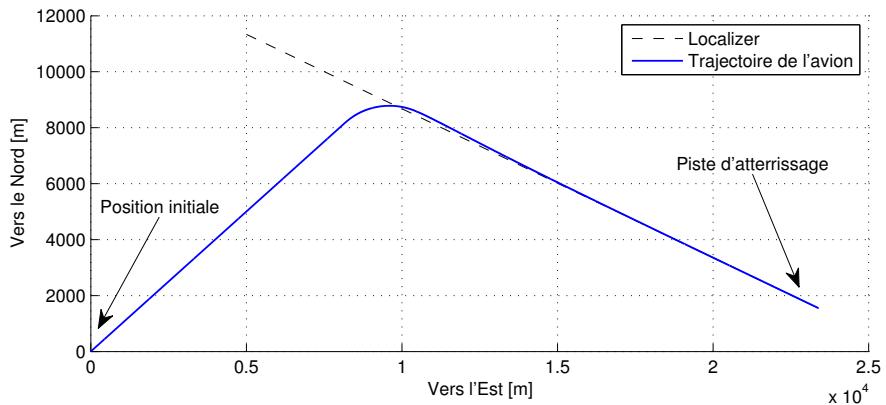


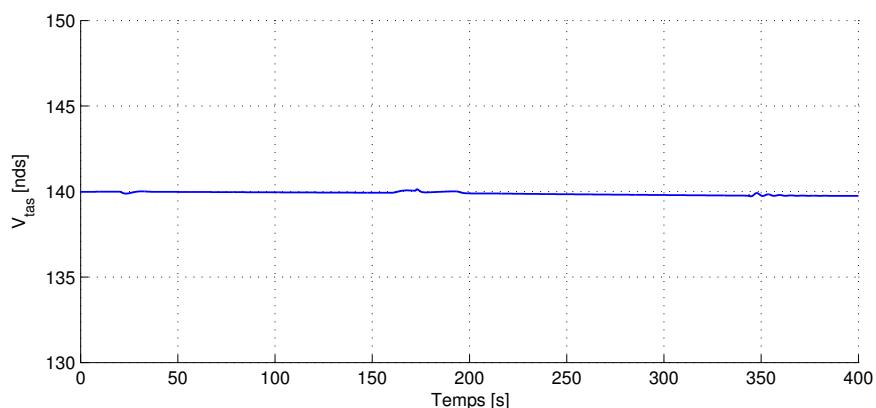
Figure 6.25 Résultats de simulation : scénario n° 4 - atterrissage automatique (2)



(a) Trajectoire verticale de l'avion : représentation de la capture du *glideslope*



(b) Trajectoire latérale de l'avion : représentation de la capture du *localizer*



(c) Vitesse vraie de l'avion en fonction du temps lors de la phase d'atterrissage

Figure 6.26 Résultats de simulation : scénario n° 4 - atterrissage automatique (3)

À la lumière des résultats présentés sur les 4 scénarios, nous pouvons conclure que toutes nos boucles externes fonctionnent bien dans l'ensemble. Il est important de mentionner que tous les essais effectués ont été faits sans interpolation des gains des correcteurs (*gains scheduling*). C'est-à-dire que pour chaque simulation, les correcteurs internes et externes utilisés étaient ceux conçus pour condition initiale. Ainsi, en plus de prouver leur efficacité, nous avons aussi montré leur robustesse. Ce détail offre une plus-value à ce projet, car nous nous sommes rendu compte que les gains trouvés pour les différentes boucles externes fonctionnent pour une centaine de points de vol différents.

## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

L'objectif global de ce projet était la réalisation de divers outils destinés à la simulation, l'analyse de la stabilité et au commande d'un avion d'affaires. Les méthodologies présentées tout au long de ce mémoire reposent principalement sur des algorithmes d'optimisation et sur des notions de mécanique du vol. En présentant l'ensemble des résultats sur deux avions dont les expressions des coefficients aérodynamiques et les configurations sont totalement différents, nous avons pu ainsi démontrer l'efficacité des différents algorithmes et méthodologies proposés. Nous pouvons donc considérer que dans l'ensemble, l'objectif principal a été atteint, même si certains aspects peuvent être encore améliorés.

La première étape de ce projet concernait le développement d'une plateforme de simulation et d'un modèle de moteur. Les résultats obtenus dans le **chapitre 1** comblent largement nos attentes. En effet, ces derniers montrent une grande concordance avec le simulateur de vol de CAE qui, rappelons-le est certifié niveau D. Les différences notables entre la modélisation sous Matlab/Simulink et ce simulateur proviennent probablement d'erreurs dues aux intégrations numériques, à des hypothèses de modélisation différentes ou à des dynamiques négligées. Afin de vérifier ces suppositions, le modèle aérodynamique du Cessna Citation X a été exporté sur le logiciel FLSIM de PRESAGIS et des erreurs quasi identiques ont été remarquées. Il semblerait que la méthode de calculs numérique utilisée dans Simulink diffère de celles du simulateur ou de FLSIM. Néanmoins, dans l'ensemble les résultats restent satisfaisants. En ce qui concerne le modèle des moteurs, même s'il a été développé à partir d'extrapolation de données expérimentales et d'équations empiriques, ce dernier offre des résultats suffisants. Cependant, il serait intéressant de pousser un peu plus loin le modèle en considérant par exemple la variation de la constante de temps en fonction de la condition de vol. De même, introduire la position de la manette de gaz comme paramètre non linéaire permettrait d'avoir, selon nous, un modèle plus réaliste.

En ce qui concerne les algorithmes d'équilibrage et de linéarisation, le **chapitre 6** montre clairement que l'algorithme d'équilibrage offre des résultats bien au-dessus de nos prévisions avec un taux de réussite de 100% sur 1,500 conditions de vol. Cependant, il serait intéressant de pousser l'étude plus loin en considérant des configurations de vol différentes d'un vol en croisière. Ceci permettrait de pouvoir étudier les cas de pannes et donc de prédire s'il est possible d'équilibrer l'avion sous l'effet d'une perte moteur ou sous l'effet du blocage d'une des gouvernes. Une amélioration de l'algorithme d'équilibrage pourrait être

apportée en combinant l'algorithme d'optimisation par essaim particulaire et l'algorithme de Nelder-Mead. Une telle combinaison permettrait d'augmenter les chances de trouver un optimum qui garantit une convergence d'au moins  $10^{-10}$ .

Pour ce qui est de l'algorithme de linéarisation, que ce soit pour le mouvement latéral ou pour le mouvement longitudinal, il a été démontré sur 1,500 points de vol que les modèles linéaires générés coïncident bel et bien avec le modèle de vol. Avec dans le pire des cas un coefficient de corrélation de 0.99 et un *MSE* de l'ordre de  $10^{-2}$ , les résultats obtenus dépassent ceux escomptés.

En ce qui concerne la méthodologie proposée pour le contrôle des boucles internes, nous pouvons sans hésitation conclure sur l'efficacité du couplage entre l'algorithme génétique et la méthode LQR. En plus de fournir des correcteurs simples et optimaux, nous avons clairement démontré que ces derniers satisfont parfaitement l'ensemble des spécifications imposées par les différents cahiers des charges. Même si nous avons éprouvé certaines difficultés avec l'interpolation des modèles d'état incertains, les nombreux essais réalisés sur la dynamique non linéaire témoignent de la robustesse des boucles internes face aux incertitudes sur la masse, le centrage, l'altitude, la vitesse et les retards du pilote automatique. Cependant, nous pensons qu'il est possible d'améliorer l'étude de robustesse. En effet, il serait peut-être plus judicieux d'utiliser plusieurs différentes formes polynomiales pour l'interpolation en fonction des régions de l'enveloppe de vol. Ceci permettrait d'améliorer les modèles incertains et les résultats de l'analyse de robustesse. Néanmoins, dans l'ensemble, nous pouvons apprécier la qualité des réponses de l'avion lorsque ce dernier est sous le contrôle des correcteurs internes.

Enfin, la dernière étape de ce projet s'intéressait à la conception des différentes boucles externes. Les différentes lois du pilote automatique ont été développées à partir des équations de la mécanique du vol et de notions d'automatique. L'algorithme d'optimisation par essaim particulaire a permis par la suite de trouver les différents gains qui assurent un contrôle précis et en douceur de l'avion. À travers les 4 scénarios présentés dans le **chapitre 6**, nous avons pu démontré plusieurs aspects positifs de la méthodologie proposée. Premièrement, il est évident que l'avion effectue bien toutes les manœuvres que lui ordonne le pilote automatique et cela même en présence de vent (sauf pour le mouvement latéral). Deuxièmement, en testant les correcteurs sous la condition de masse variable, nous avons constaté leur robustesse par rapport à différents types d'incertitude. En effet, nous rappelons, que pour l'ensemble des scénarios présentés dans le **chapitre 6**, l'avion était initialement placé en condition *trim* et les gains des différents correcteurs ont été calculé en fonction de cette même condition. Par la suite, une simulation était faite en conservant les gains fixes.

Ce détail est très important, car il démontre l'efficacité du pilote automatique même en présence de variation de masse, de centrage ou d'altitude. Cette robustesse n'était pas un objectif attendu dans le projet mais elle ajoute une plus-value non négligeable à ce mémoire.

Pour conclure, ce projet multidisciplinaire offre de nombreuses possibilités d'extensions et d'applications. En effet, il a fortement contribué à : (1) l'obtention d'un prix de la compagnie PRESAGIS (“Presagis Award 2012”) dans la catégorie “Best Simulation Application”, (2) la rédaction de 4 articles de conférence, (3) la validation de correcteurs utilisant la théorie  $H_\infty$  et (4) l'enseignement des laboratoires de mécanique du vol. Tout cela pour dire que même s'il n'est pas parfait, ce projet offre de grandes perspectives dans la conception des futurs aéronefs.

## RÉFÉRENCES

- [1] ANTON, N., BOTEZ, R. M. et POPESCU, D. (2010). New methodology and code for hawker 800xp aircraft stability derivatives calculations from geometrical data. *The Aeronautical Journal*, 114.
- [2] BOËLY, N. et BOTEZ, R. M. (2010). New approach for the identification and validation of a nonlinear f/a-18 model by use of neural networks. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 21, 1759–1765.
- [3] BOTTURA, C. P. et DA FONSECA NETO, J. (1999). Parallel eigenstructure assignment via lqr design and genetic algorithms. *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999. IEEE*, vol. 4, 2295–2299.
- [4] BOUGHARI, Y., BOTEZ, R. M., THEEL, F. et GHAZI, G. (2014). Optimal flight control on cessna x using differential evolution. *Modelling, Identification and Control*. IASTED.
- [5] BOUKAS, E.-K. (1995). *Systèmes asservis*. Presses inter Polytechnique.
- [6] CALAS, G. (2008). Optimisation par essaim de particules. *Notes de cours, École EPITA*.
- [7] CHRYSLER, J. (2003). Hawker 800xp : Aerodynamic forces and moments. Rapport technique, CAE Inc.
- [8] COLLINSON, R. P. (2011). *Introduction to avionics systems*. Springer.
- [9] COMPANY, C. A. (2011). Specification and description - cessna citation x. Rapport technique, Cessna Aircraft Company.
- [10] COMPANY, R. A. (2004). Specification and description - hawker 800xp. Rapport technique, Raytheon Aircraft Company.
- [11] COOK, M. V. (2012). *Flight dynamics principles : a linear systems approach to aircraft stability and control*. Butterworth-Heinemann.
- [12] DIMEO, R. et LEE, K. Y. (1995). Boiler-turbine control system design using a genetic algorithm. *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, 10, 752–759.
- [13] DONALD, M. (1990). *Automatic flight control systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [14] EKTIN, B. (1972). *Dynamics of Atmospheric Flight*. John Wiley and Sons, New York.
- [15] FERZIGER, J. H. et PERIT, M. (1996). *Computational methods for fluid dynamics*, vol. 3. Springer Berlin.

- [16] GAJIC, Z. (2001). *Optimal control of singularly perturbed linear systems and applications*. CRC Press.
- [17] HAMEL, C., SASSI, A., BOTEZ, R. et DARTIGUES, C. (2013). Cessna citation x aircraft global model identification from flight tests. *SAE International Journal of Aerospace*, 6, 106–114.
- [18] HESSPANHA, J. P. (2007). Lqg/lqr controller design. *Notes de cours, school of California, Santa Barbara, California, USA*.
- [19] HILL, P. G., C. R. P. (1970). *Mechanics and Thermodynamics of Propulsion*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- [20] HONEYWELL (2007). Tfe731-50r turbofan engine. Rapport technique, Honeywell Internation Inc.
- [21] JEAN-MICHEL, C. (2014). Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires. *Notes de cours, École Polytechnique, Université PARIS-SACLAY*.
- [22] KAO, J.-J., BRILL JR, E. D. et PFEFFER, J. T. (1990). Generation of alternative optima for nonlinear programming problems. *Engineering Optimization+ A35*, 15, 233–251.
- [23] KENNEDY, J. (2010). *Particle swarm optimization*. Springer.
- [24] KHALIL, H. K. (2002). *Nonlinear systems*, vol. 3. Prentice hall Upper Saddle River.
- [25] KWAKERNAAK, H. et SIVAN, R. (1972). *Linear optimal control systems*, vol. 172. Wiley-Interscience New York.
- [26] MATHWORKS (1994-2013). Matlab/simulink, version 7.8.0.347.
- [27] MELIN, T. (2000). A vortex lattice matlab implementation for linear aerodynamic wing applications. *Master's Thesis, Department of Aeronautics, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden*.
- [28] MIETTINEN, K. et PREFACE BY-NEITTAANMAKI, P. (1999). *Evolutionary algorithms in engineering and computer science : recent advances in genetic algorithms, evolution strategies, evolutionary programming*, GE. John Wiley and Sons.
- [29] NELDER, J. A. et MEAD, R. (1965). A simplex method for function minimization. *The computer journal*, 7, 308–313.
- [30] NELSON, R. C. (1998). *Flight stability and automatic control*, vol. 2. WCB/McGraw Hill.
- [31] OLSON, C. (2001). The flightgear project. *Website : <http://www.flightgear.org>*.

- [32] POLI, R., KENNEDY, J. et BLACKWELL, T. (2007). Particle swarm optimization. *Swarm intelligence*, 1, 33–57.
- [33] POLLENDER-MOREAU, O. (2012). *Application d'une technique de modélisation aérodynamique conceptuelle sur la simulation d'un pilote automatique à commande optimale pour un avion d'affaires*. Mémoire de maîtrise, École de technologie supérieure.
- [34] POPESCU, D. (2009). *Nouvelle implémentation de la procédure DATCOM pour le calcul des coefficients aérodynamiques et des dérivées de stabilité dans le domaine subsonique de vol*. Mémoire de maîtrise, École de technologie supérieure.
- [35] PRADIN, B. et GARCIA, G. (2009). *Modélisation, analyse et commande des systèmes linéaires*. Presses Univ. du Mirail.
- [36] PRESAGIS (2007-2013). Flightsim version 11.0.
- [37] RAYMER, D. (1989). *Aircraft Design : A Conceptual Approach*. AIAA Education Series, Washington, DC.
- [38] REINER, J., BALAS, G. et GARRARD, W. (1993). Design of a flight control system for a highly maneuverable aircraft using mu synthesis. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Monterey, CA*. 710–719.
- [39] RODRIGUEZ, L. F. et BOTEZ, R. M. (2012). Civil turbofan engines thrust generic model. *IECON 2012-38th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*. IEEE, 5444–5450.
- [40] ROSKAM, J. (1985). *Airplane design*. DARcorporation.
- [41] ROSKAM, J. (1995). *Airplane flight dynamics and automatic flight controls*. DARcorporation.
- [42] SAUSSIE, D. (2010). *Contrôle du vol longitudinal d'un avion civil avec satisfaction de qualités de manœuvrabilité*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.
- [43] SAYDY, L., TITS, A. L. et ABED, E. H. (1990). Guardian maps and the generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 3, 345–371.
- [44] SIMULINK, M. et DESIGN, M.-B. (1995). The mathworks inc. *Ver*, 7, R14.
- [45] SOOY, T. J. et SCHMIDT, R. Z. (2005). Aerodynamic predictions, comparisons, and validations using missile datcom (97) and aeroprediction 98 (ap98). *Journal of spacecraft and rockets*, 42, 257–265.
- [46] STEVENS, B. L. et LEWIS, F. L. (2003). *Aircraft control and simulation*. John Wiley and Sons.

- [47] TEWARI, A. (2011). *Advanced control of aircraft, spacecraft and rockets*, vol. 36. John Wiley and Sons.
- [48] TUSTIN, A. (1947). The nature of the operator's response in manual control, and its implications for controller design. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part IIA : Automatic Regulators and Servo Mechanisms*, 94, 190–206.
- [49] VINCENT, J. B., BOTEZ, R. M., POPESCU, D. et GHAZI, G. (2012). New methodology for a business aircraft model hawker 800 xp stability analysis using presagis flsim. *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*. AIAA.
- [50] YECHOUT, T. R. et MORRIS, S. L. (2003). *Introduction to aircraft flight mechanics : performance, static stability, dynamic stability, and classical feedback control*. AIAA.

## ANNEXE A

### CALCULS DES COEFFICIENTS DANS LE REPÈRE STABILITÉ

Cette annexe présente l'ensemble des calculs qui permettent d'exprimer les coefficients aérodynamiques rapportés au centre de gravité de l'avion et exprimés dans le repère stabilité.

#### Calcul des forces et moments aérodynamiques

Chaque surface d'un avion apporte sa contribution sur le calcul des forces et moments aérodynamiques. Par exemple, l'aile possède son propre coefficient de portance qui est différent de celui du stabilisateur horizontal. Il est commun de diviser l'avion en deux sections. L'aile, le fuselage et le stabilisateur vertical sont considérés comme une section que nous annoterons par «*wb*». La deuxième section est constituée uniquement du stabilisateur horizontal que nous indiquerons par «*ht*». Ainsi, la force et le moment selon un axe pour chaque division de l'avion peuvent s'écrire sous la forme :

$$F_i = \frac{1}{2} \rho S_{ref} V_{tas}^2 C_{F_i} \quad (A.1)$$

$$M_i = \frac{1}{2} \rho S_{ref} l_{ref} V_{tas}^2 C_{M_i} \quad (A.2)$$

où  $S_{ref}$  est une surface de référence (surface des ailes, surface du stabilisateur horizontal),  $l_{ref}$  est une longueur de référence (longueur de la MAC<sup>1</sup> pour le longitudinal ou l'envergure pour le latéral), et  $C_F$  et  $C_M$  sont les coefficients aérodynamiques pour la force et le moment considéré.

Il est important de mentionner que l'aile et le stabilisateur n'ont pas le même repère de stabilité. Comme nous pouvons le voir sur la Figure A.1, l'aile et le stabilisateur horizontal ne voient pas la même incidence. En effet, à cause de la forme géométrique de l'aile et des tourbillons marginaux formés en bout d'aile, l'écoulement en sortie du bord de fuite est dévié vers le bas formant un angle  $\varepsilon$  appelé *downwash*. Pour différencier les deux repères, nous dénoterons par des majuscules les variables exprimées dans le repère stabilité de l'aile et par des minuscules les variables exprimées dans le repère stabilité du stabilisateur horizontal.

---

1. Corde Aérodynamique Moyenne (*Mean Aerodynamic Chord*)

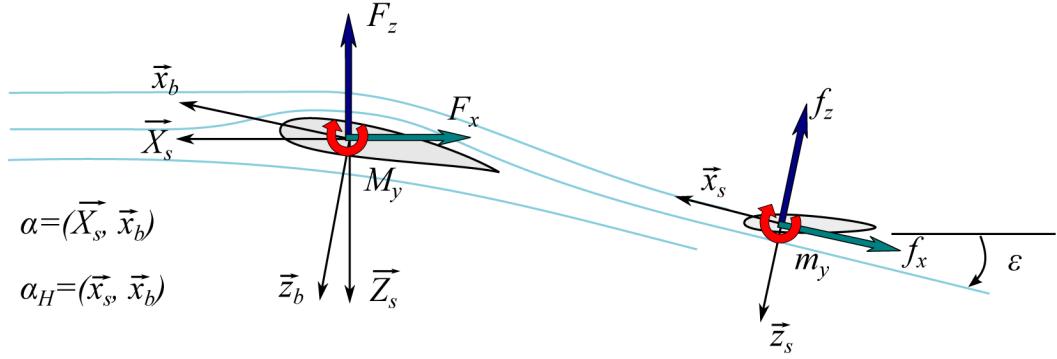


Figure A.1 Bilan des coefficients dans le plan longitudinal

Dans la suite nous utiliserons les notations de la figure ci-dessous :

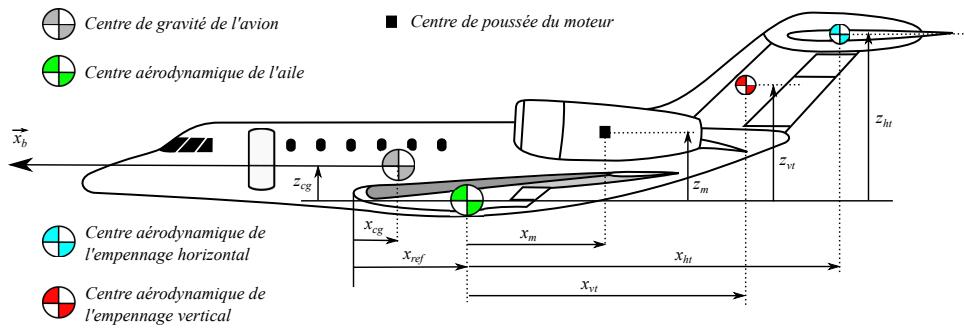


Figure A.2 Distances de références dans le plan longitudinal

### Expression dans le plan longitudinal

Selon l'axe  $(O, \vec{Z}_s)$  :

En reprenant les notations de la Figure A.1, faisons un bilan des forces selon l'axe vertical :

$$F_{tot_z} = -F_z - f_z \cos(\varepsilon) + f_x \sin(\varepsilon) \quad (A.3)$$

$$F_{tot_z} = -\frac{1}{2} \rho S_{wb} V_{tas}^2 CL_{wb} - \frac{1}{2} \rho S_{ht} V_{tas}^2 CL_{ht} \cos(\varepsilon) + \frac{1}{2} \rho S_{ht} V_{tas}^2 CD_{ht} \sin(\varepsilon) \quad (A.4)$$

$$F_{tot_z} = -\frac{1}{2} \rho S_{wb} V_{tas}^2 \left( CL_{wb} + \frac{S_{ht}}{S_{wb}} CL_{ht} \cos(\varepsilon) - \frac{S_{ht}}{S_{wb}} CD_{ht} \sin(\varepsilon) \right) \quad (A.5)$$

Soit l'expression du coefficient de portance total dans le repère stabilité :

$$CL_s = CL_{wb} + \frac{S_{ht}}{S_{wb}} CL_{ht} \cos(\varepsilon) - \frac{S_{ht}}{S_{wb}} CD_{ht} \sin(\varepsilon) \quad (A.6)$$

**Selon l'axe**  $(O, \vec{X}_s)$  :

De même, un bilan selon l'axe horizontal nous donne :

$$F_{tot_x} = -F_x - f_x \cos(\varepsilon) - f_z \sin(\varepsilon) \quad (\text{A.7})$$

$$F_{tot_x} = -\frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 CD_{wb} - \frac{1}{2}\rho S_{ht} V_{tas}^2 CD_{ht} \cos(\varepsilon) - \frac{1}{2}\rho S_{ht} V_{tas}^2 CL_{ht} \sin(\varepsilon) \quad (\text{A.8})$$

$$F_{tot_x} = -\frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 \left( CD_{wb} + \frac{S_{ht}}{S_{wb}} CD_{ht} \cos(\varepsilon) - \frac{S_{ht}}{S_{wb}} CL_{ht} \sin(\varepsilon) \right) \quad (\text{A.9})$$

Soit l'expression du coefficient de portance total dans le repère stabilité :

$$CD_s = CD_{wb} + \frac{S_{ht}}{S_{wb}} CD_{ht} \cos(\varepsilon) + \frac{S_{ht}}{S_{wb}} CL_{ht} \sin(\varepsilon) \quad (\text{A.10})$$

**Selon l'axe**  $(O, \vec{Y}_s)$  :

$$\begin{aligned} M_{tot_y} = M_y + m_y - & (f_z \cos(\varepsilon) - f_x \sin(\varepsilon)) (x_{ht} \cos(\alpha) + z_{ht} \sin(\alpha)) + \dots \\ & \dots + (f_x \cos(\varepsilon) + f_z \sin(\varepsilon)) (z_{ht} \cos(\alpha) - x_{ht} \sin(\alpha)) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

où  $x_{ht}$  et  $z_{ht}$  sont les distances entre le centre de référence de l'aile et celui du stabilisateur projetées sur le plan  $(O, \vec{x}_b, \vec{z}_b)$ . Soit en développant (A.11) :

$$M_{tot_y} = M_y + m_y - \dots \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} & \dots - x_{ht} \left[ f_z \left( \cos(\varepsilon) \cos(\alpha) + \sin(\varepsilon) \cos(\alpha) \right) - f_x \left( \sin(\varepsilon) \cos(\alpha) - \cos(\varepsilon) \sin(\alpha) \right) \right] + \dots \\ & \dots + z_{ht} \left[ f_x \left( \sin(\varepsilon) \sin(\alpha) + \cos(\varepsilon) \cos(\alpha) \right) + f_z \left( \cos(\varepsilon) \cos(\alpha) - \sin(\varepsilon) \sin(\alpha) \right) \right] \end{aligned}$$

En utilisant les relations trigonométriques pour  $\cos(a-b)$  et pour  $\sin(a-b)$ , l'équation (A.12) devient :

$$\begin{aligned} M_{tot_y} = M_y + m_y - & x_{ht} \left( f_z \cos(\alpha - \varepsilon) + f_x \sin(\alpha - \varepsilon) \right) + \dots \\ & \dots + z_{ht} \left( f_x \cos(\alpha - \varepsilon) - f_z \sin(\alpha - \varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} M_{tot_y} = & \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 \bar{c}_{wb} Cm_{wb} + \frac{1}{2}\rho S_{ht} V_{tas}^2 \bar{c}_{ht} Cm_{wb} + \dots \\ & \dots + x_{ht} \left( \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 CL_{ht} \cos(\alpha - \varepsilon) + \frac{1}{2}\rho S_{wb} V_{tas}^2 CD_{ht} \sin(\alpha - \varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned}
M_{toty} = & \frac{1}{2} \rho S_{wb} V_{tas}^2 \left[ Cm_{wb} + \frac{S_{ht} \bar{C}_{ht}}{S_{wb} \bar{C}_{wb}} Cm_{ht} - \dots \right. \\
& \dots - \frac{S_{ht} x_{ht}}{S_{wb} \bar{C}_{wb}} (CL_{ht} \cos(\alpha - \varepsilon) + CD_{ht} \sin(\alpha - \varepsilon)) + \dots \\
& \dots + \left. \frac{S_{ht} z_{ht}}{S_{wb} \bar{C}_{wb}} (CD_{ht} \cos(\alpha - \varepsilon) - CL_{ht} \sin(\alpha - \varepsilon)) \right]
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Soit l'expression du coefficient de moment de tangage total dans le repère stabilité de l'aile :

$$\begin{aligned}
Cm_s = & Cm_{wb} + \frac{S_{ht} \bar{C}_{ht}}{S_{wb} \bar{C}_{wb}} Cm_{ht} - \frac{S_{ht} x_{ht}}{S_{wb} \bar{C}_{wb}} (CL_{ht} \cos(\alpha - \varepsilon) + CD_{ht} \sin(\alpha - \varepsilon)) + \dots \\
& \dots + \frac{S_{ht} z_{ht}}{S_{wb} \bar{C}_{wb}} (CD_{ht} \cos(\alpha - \varepsilon) - CL_{ht} \sin(\alpha - \varepsilon))
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Il est important de noter que sous cette forme, nous ne voyons pas l'effet du stabilisateur vertical «*vt*». Ceci peut s'expliquer par le fait que les contributions de cette surface sont déjà prises en compte dans les coefficients «*wb*». Par exemple, les coefficients  $CD_{wb}$  et  $Cm_{wb}$  peuvent être fonction du dérapage  $\beta$  car la trainée créée par la dérive verticale est principalement fonction de cette variable. Dans le cas contraire, il faudrait rajouter les contributions du latéral comme suit :

$$CD_{vt} = \frac{S_{vt}}{S_{wb}} CD_{vt} \cos(\beta) + \frac{S_{vt}}{S_{wb}} CY_{vt} \sin(\beta) \tag{A.17}$$

$$Cm_{vt} = \frac{S_{vt} (z_{vt} \cos(\alpha) - x_{vt} \sin(\alpha))}{S_{wb} \bar{C}_{wb}} (CY_{vt} \cos(\beta) - CD_{vt} \sin(\beta)) \tag{A.18}$$

Pour finir, en présence de dérapage, l'aile voit un écoulement incliné ce qui influe sur les coefficients longitudinaux. Ainsi, tous les coefficients seront fonction de  $\beta$ , même si les contributions du stabilisateur vertical sont calculées séparément.

### Expression dans le plan latéral

Sous l'hypothèse que les coefficients «*wb*» sont fonction du dérapage, nous pouvons refaire la même étude que pour le longitudinal en s'appuyant sur la figure suivante :

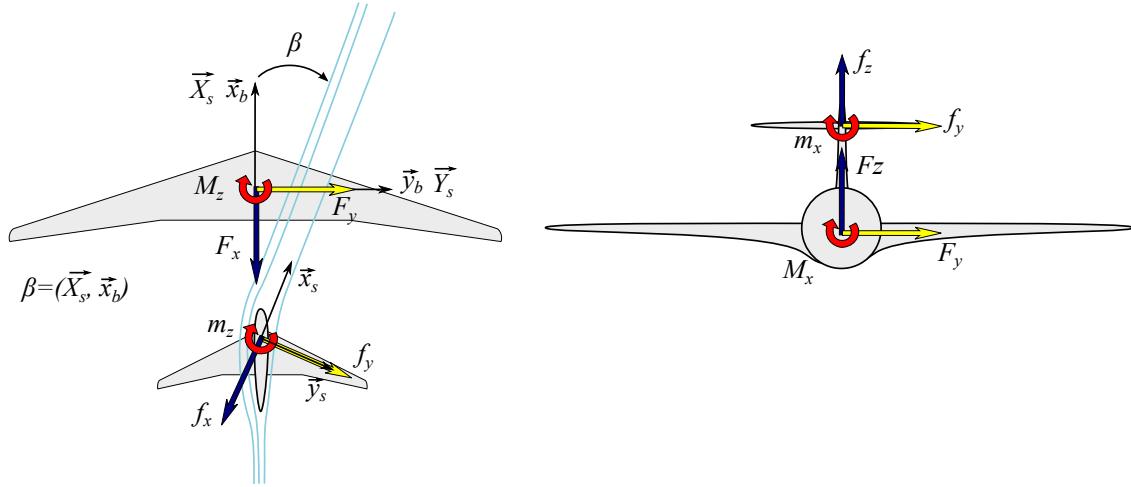


Figure A.3 Bilan des coefficients dans le plan latéral

Dans la suite des calculs, on suppose que tous les centres aérodynamiques sont alignés sur l'axe longitudinal de l'avion. C'est-à-dire que l'on néglige tout décalage possible selon l'axe transversal de l'avion.

**Selon l'axe  $(O, \vec{Y}_s)$  :**

En faisant un bilan des forces selon l'axe transversale on obtient :

$$F_{tot_y} = F_y + f_y \cos(\beta) - f_x \sin(\beta) \quad (A.19)$$

$$F_{tot_y} = \frac{1}{2} \rho S_{wb} V_{tas}^2 C Y_{wb} + \frac{1}{2} \rho S_{vt} V_{tas}^2 C Y_{vt} \cos(\beta) - \frac{1}{2} \rho S_{vt} V_{tas}^2 C D_{vt} \cos(\beta) \quad (A.20)$$

$$F_{tot_y} = \frac{1}{2} \rho S_{wb} V_{tas}^2 \left( C Y_{wb} + \frac{S_{vt}}{S_{wb}} C Y_{vt} \cos(\beta) - \frac{S_{vt}}{S_{wb}} C D_{vt} \sin(\beta) \right) \quad (A.21)$$

De l'équation (A.19) se déduit le coefficient de force latéral sous forme générale :

$$C Y_s = C Y_{wb} + \frac{S_{vt}}{S_{wb}} C Y_{vt} \cos(\beta) - \frac{S_{vt}}{S_{wb}} C D_{vt} \sin(\beta) \quad (A.22)$$

**Selon l'axe  $(O, \vec{X}_s)$  :**

De même le moment en roulis total selon l'axe longitudinal du repère stabilité s'écrit :

$$M_{tot_x} = M_x + m_x + (z_{vt} \cos(\alpha) - x_{vt} \sin(\alpha)) (f_y \cos(\beta) - f_x \sin(\beta)) \quad (A.23)$$

où  $z_{vt}$  est la distance entre le centre de référence de l'aile et celui du stabilisateur vertical projetée sur le plan  $(O, \vec{x}_b, \vec{z}_b)$ . Soit en développant (A.23) :

$$M_{tot_x} = \frac{1}{2} \rho S_{wb} V_{tas}^2 b_{wb} Cl_{wb} + \frac{1}{2} \rho S_{vt} V_{tas}^2 b_{vt} Cl_{vt} + \dots \quad (A.24)$$

$$\dots + \frac{1}{2} \rho S_{vt} V_{tas}^2 (z_{vt} \cos(\alpha) - x_{vt} \sin(\alpha)) (CY_{vt} \cos(\beta) - CD_{vt} \sin(\beta))$$

$$M_{tot_x} = \frac{1}{2} \rho S_{wb} V_{tas}^2 b_{wb} \left[ Cl_{wb} + \frac{S_{vt} b_{vt}}{S_{wb} b_{wb}} Cl_{vt} + \dots \right. \quad (A.25)$$

$$\left. \dots + \frac{S_{vt} (z_{vt} \cos(\alpha) - x_{vt} \sin(\alpha))}{S_{wb} b_{wb}} (CY_{vt} \cos(\beta) - CD_{vt} \sin(\beta)) \right]$$

Soit l'expression du coefficient de moment de roulis total dans le repère stabilité de l'aile :

$$Cl_s = Cl_{wb} + \frac{S_{vt} b_{vt}}{S_{wb} b_{wb}} Cl_{vt} + \frac{S_{vt} (z_{vt} \cos(\alpha) - x_{vt} \sin(\alpha))}{S_{wb} b_{wb}} (CY_{vt} \cos(\beta) - CD_{vt} \sin(\beta)) \quad (A.26)$$

**Selon l'axe  $(O, \vec{Z}_s)$  :**

Enfin un dernier bilan des moments selon l'axe vertical du repère stabilité de l'aile nous donne :

$$M_{tot_z} = M_z + m_z + (x_{vt} \cos(\alpha) + z_{vt} \sin(\alpha)) (f_y \cos(\beta) - f_x \sin(\beta)) \quad (A.27)$$

où  $x_{vt}$  est la distance entre le centre de référence de l'aile et celui du stabilisateur vertical projetée sur le plan  $(O, \vec{x}_b, \vec{z}_b)$ . Soit en développant (A.27) :

$$M_{tot_z} = \frac{1}{2} \rho S_{wb} V_{tas}^2 b_{wb} Cn_{wb} + \frac{1}{2} \rho S_{vt} V_{tas}^2 b_{vt} Cn_{vt} + \dots \quad (A.28)$$

$$\dots + \frac{1}{2} \rho S_{vt} V_{tas}^2 (x_{vt} \cos(\alpha) + z_{vt} \sin(\alpha)) (CY_{vt} \cos(\beta) - CD_{vt} \sin(\beta))$$

$$M_{tot_z} = \frac{1}{2} \rho S_{wb} V_{tas}^2 b_{wb} \left[ Cn_{wb} + \frac{S_{vt} b_{vt}}{S_{wb} b_{wb}} Cn_{vt} + \dots \right. \quad (A.29)$$

$$\left. \dots + \frac{S_{vt} (x_{vt} \cos(\alpha) + z_{vt} \sin(\alpha))}{S_{wb} b_{wb}} (CY_{vt} \cos(\beta) - CD_{vt} \sin(\beta)) \right]$$

Soit l'expression du coefficient de moment de lacet total dans le repère stabilité de l'aile :

$$Cn_s = Cn_{wb} + \frac{S_{vt} b_{vt}}{S_{wb} b_{wb}} Cn_{vt} + \frac{S_{vt} (x_{vt} \cos(\alpha) + z_{vt} \sin(\alpha))}{S_{wb} b_{wb}} (CY_{vt} \cos(\beta) - CD_{vt} \sin(\beta)) \quad (A.30)$$

## ANNEXE B

### DÉFINITION DES COEFFICIENTS AÉRODYNAMIQUES DU CESSNA CITATION X ET CEUX DU HAWKER 800XP

#### Définition des coefficients aérodynamiques du Cessna Citation X

Pour rappel, les coefficients du Cessna Citation X proviennent d'un simulateur de CAE Inc. Ils sont fonction des conditions de vol et dépendent principalement de l'angle d'incidence ( $\alpha$ ), du nombre de Mach ( $M$ ), des gourvernes (ex :  $\delta_f$ ,  $\delta_e$ ,  $\delta_a$ ,  $\delta_r$ ) et de l'angle de dérapage ( $\beta$ ).

$$CD_{wb} = CD_{wb_0} + CD_\beta \beta + CD_{\delta_{spbk}} \delta_{spbk} + CD_{\delta_g} \delta_g + CD_{ge} + CD_{ice} \quad (B.1)$$

$$CY_{wb} = CY_{wb_0} + CY_\beta \beta + CY_{ct} + CY_{\delta_a} \delta_a + CY_{\delta_{r1}} \delta_{r1} + CY_{\delta_{r2}} \delta_{r2} + CY_{\delta_g} \delta_g + \dots \quad (B.2)$$

$$\dots + CY_p \hat{p} + CY_r \hat{r}$$

$$CL_{wb} = CL_{wb_0} + CL_{ct} + CL_\beta \beta + CL_{\delta_{spbk}} \delta_{spbk} + CL_{\delta_g} \delta_g + CL_{ge} + CL_{ice} + CL_q \hat{q} \quad (B.3)$$

$$Cl_{wb} = Cl_\beta \beta + Cl_{ct} + Cl_{\Delta_{splin}} \Delta_{splin} + Cl_{\Delta_{splout}} \Delta_{splout} + Cl_{\delta_a} \delta_a + Cl_{\delta_{r1}} \delta_{r1} + \dots \quad (B.4)$$

$$\dots + Cl_{\delta_{r2}} \delta_{r2} + Cl_p \hat{p} + Cl_r \hat{r}$$

$$Cm_{wb} = Cm_{wb_0} + Cm_\beta \beta + Cm_{\delta_{spbk}} \delta_{spbk} + Cm_{\delta_{splin}} \delta_{splin} + Cm_{\delta_{splout}} \delta_{splout} + \dots \quad (B.5)$$

$$\dots + Cm_{ge} + Cm_q \hat{q}$$

$$Cn_{wb} = Cn_\beta \beta + Cn_{\Delta_{splin}} \Delta_{splin} + Cn_{\Delta_{splout}} \Delta_{splout} + Cn_{\delta_a} \delta_a + Cn_{\delta_{r1}} \delta_{r1} + \dots \quad (B.6)$$

$$\dots + Cn_{\delta_{r2}} \delta_{r2} + Cn_p \hat{p} + Cn_r \hat{r}$$

où les contributions de l'empennage arrière sont calculées comme suit :

$$CD_{ht} = CD_{ht}(CL_{ht}) \quad (B.7)$$

$$CL_{ht} = CL_{ht_{\alpha_{ht}}} \alpha_{ht} + CL_{ht_{\delta_e}} \delta_e \quad (B.8)$$

$$Cm_{ht} = 0 \quad (B.9)$$

Presque tous les coefficients du Cessna Citation X sont non linéaires et prennent en compte le décrochage.

## Définition des coefficients aérodynamiques du Hawker 800XP

Les coefficients aérodynamiques du Hawker, pour rappel, proviennent du logiciel FDerivatives. Ce programme estime les coefficients aérodynamiques à partir d'une forme géométrique [34, 49]. Il en découle que les coefficients aérodynamiques sont décrits par les équations ci-dessous :

$$CD_{wb} = CD_{wb_0} + \Delta CD_{wb_0} \quad (\text{B.10})$$

$$CY_{wb} = CY_{wb_0} + CY_{\beta} \beta + CD_{\delta_{r1}} \delta_{r1} \quad (\text{B.11})$$

$$CL_{wb} = CL_{wb_0} + \Delta CL_{wb_0} + CL_q \hat{q} + CL_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} \quad (\text{B.12})$$

$$Cl_{wb} = Cl_{\beta} \beta + Cl_{\delta_a} \delta_a + Cl_{\delta_{r1}} \delta_{r1} + Cl_p \hat{p} + Cl_r \hat{r} \quad (\text{B.13})$$

$$Cm_{wb} = Cm_{wb_0} + \Delta Cm_{wb_0} + Cm_{\beta} \beta + Cm_q \hat{q} + Cm_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} \quad (\text{B.14})$$

$$Cn_{wb} = Cn_{\beta} \beta + Cn_{\Delta_a} \Delta_a + Cn_{\delta_{r1}} \delta_{r1} + Cn_p \hat{p} + Cn_r \hat{r} \quad (\text{B.15})$$

où les contributions de l'empennage arrière sont données par :

$$CD_{ht} = \Delta CD_{ht} \quad (\text{B.16})$$

$$CL_{ht} = \Delta CL_{ht} \quad (\text{B.17})$$

$$Cm_{ht} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Comme pour le Cessna Citation X, il est commun de considérer que le  $Cm_{ht}$  est nul à cause du profil symétrique du stabilisateur horizontal. De plus, les coefficients du Hawker 800XP sont purement linéaires, ce qui signifie que son modèle ne pourra jamais décrocher durant les simulations. Cependant, nous vérifierons que l'avion n'ira pas dans des conditions susceptible de produire un décrochage (exemple :  $\alpha \leq 15^\circ$ ).

## ANNEXE C

### EXEMPLE D'APPLICATION D'UN FILTRE DE KALMAN

La présente annexe montre comment utiliser un filtre de Kalman pour estimer l'altitude d'un avion à partir de mesures provenant d'un accéléromètre et d'un baromètre.

#### Système linéaire discret et principe du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un processus récursif qui permet d'estimer les paramètres ou l'état d'un système ( $S$ ) à partir de mesures bruitées et biaisées. Soit le système dynamique sous forme discrétisée ci-dessous :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^{n+1} = Ax^{(n)} + B\eta^{(n)} + w^{(n)} \\ y^{(n+1)} = Cx^{(n)} + v^{(n)} \end{cases} \quad (C.1)$$

où  $x^{(n)}$  représente l'état du système au temps  $t^{(n)} = n\Delta T$  ( $\Delta T$  étant l'intervalle de temps entre deux instants d'échantillonnage),  $\eta^{(n)}$  l'entrée du système au temps  $t^{(n)}$ ,  $y^{(n)}$  la sortie du système au temps  $t^{(n)}$ ,  $w^{(n)}$  est un bruit blanc qui représente les erreurs de modélisation du système et  $v^{(n)}$  un bruit blanc qui caractérise l'incertitude de la mesure.

On appelle  $\hat{x}^{(n)} = E\{x^{(n)}\}$  la valeur estimée (ou attendue) de  $x^{(n)}$ . On définit la variance  $P^{(n)} = E\{[x^{(n)} - \hat{x}^{(n)}][x^{(n)} - \hat{x}^{(n)}]^T\}$  qui représente l'écart type entre la variable réelle et l'estimée. Le but d'un filtre de Kalman est de déterminer la meilleure estimation de l'état  $\hat{x}^{(n)}$  qui minimise  $P^{(n)} = E\{[x^{(n)} - \hat{x}^{(n)}][x^{(n)} - \hat{x}^{(n)}]^T\}$  à partir de l'estimation de l'état initial  $\hat{x}^0$ .

De même, on définit la matrice de covariance du bruit de commande  $Q^{(n)} = E\{w^{(n)}(w^{(n)})^T\}$  et la matrice de covariance du bruit de mesure  $R^{(n)} = E\{v^{(n)}(v^{(n)})^T\}$ . Ces dernières sont très importantes car elles permettent de quantifier les incertitudes sur le modèle et sur la mesure. Si l'on sous-estime les erreurs, le filtre de Kalman ne sera pas en mesure de corriger les erreurs du modèle et les estimations seront biaisées. Si l'on sur-estime les erreurs on obtient des estimations moins biaisées mais de mauvaise qualité. Il faut donc trouver de bonne variances qui permettent d'obtenir des résultats de bonne qualité et le moins biaisés possible.

La procédure du filtre de Kalman peut se résumer en deux étapes :

1. **La phase de prédiction** : elle permet de faire une prédiction de l'état au temps  $t = (n + 1)\Delta T$  à partir de la connaissance des paramètres au temps précédent et d'un modèle de dynamique ( $S$ ).

$$\tilde{x}^{(n+1)} = A\hat{x}^{(n)} + B\eta^{(n)} \quad (\text{C.2})$$

$$\hat{y}^{(n+1)} = C\tilde{x}^{(n+1)} \quad (\text{C.3})$$

$$\tilde{P}^{(n+1)} = AP^{(n)}A^T + BQB^T \quad (\text{C.4})$$

où  $\tilde{x}^{(n+1)}$  est l'estimation de l'état  $x^{(n+1)}$  avant correction.

2. **La phase de correction** : elle permet de corriger l'état prédict en ajoutant un facteur proportionnel à la différence entre la mesure attendue et la mesure venant des capteurs.

$$K^{(n+1)} = \tilde{P}^{(n+1)}C^T(C\tilde{P}^{(n+1)}C^T + R)^{-1} \quad (\text{C.5})$$

$$P^{(n+1)} = \tilde{P}^{(n+1)} - K^{(n+1)}(C\tilde{P}^{(n+1)}C^T + R)(K^{(n+1)})^T \quad (\text{C.6})$$

$$\hat{x}^{(n+1)} = \tilde{x}^{(n+1)} + K^{(n+1)}(y^{(n+1)} - C\tilde{x}^{(n+1)}) \quad (\text{C.7})$$

où  $K$  est le gain de Kalman.

Puis on recommence le processus avec le nouvel état estimé et corrigé. Plus  $P^{(n)}$  tendra vers 0, meilleure sera l'estimation et plus petit sera le gain de Kalman.

## Présentation du problème d'estimation d'altitude

Pour mieux comprendre la notion de filtre de Kalman, prenons l'exemple de l'estimation de l'altitude.

### Modèle des capteurs

Tout d'abord, nous présentons les différents capteurs nécessaires pour l'étude. On suppose que l'on dispose d'un accéléromètre selon l'axe vertical dont le modèle de mesure est le suivant :

$$a_{z_m}^{(n)} = a_z^{(n)} - \frac{gR_T^2}{(R_T + h^{(n)})^2} + w_{acc}^{(n)} \quad (\text{C.8})$$

où  $a_z$  est l'accélération verticale réelle,  $a_{z_m}$  est la mesure fournie par l'accéléromètre,  $g$  est l'accélération en chute libre,  $R_T$  est le rayon terrestre,  $h$  est l'altitude de l'avion et  $w_{acc}$  est

le bruit blanc de l'accéléromètre caractérisé par un écart type de  $\pm 0.01g$ .

De même, on suppose que l'on dispose d'un baromètre qui nous donne l'altitude barométrique  $h_b$  avec la dynamique suivante :

$$h_b^{(n+1)} = h_b^{(n)} + \frac{\Delta T}{\tau} \left( h^{(n)} - h_b^{(n)} + w_b^{(n)} \right) \quad (\text{C.9})$$

où  $h$  est l'altitude réelle de l'avion,  $h_b$  est l'altitude barométrique mesurée sans bruit,  $\Delta T$  est la période d'échantillonnage du système,  $\tau$  est la constante de temps du baromètre,  $h_{b_m}$  est la mesure fournie par le baromètre (altitude barométrique + bruit) et  $w_b$  est le bruit blanc du baromètre caractérisé par  $\pm 15$  pi.

### Dynamique réelle de l'avion et modèle d'estimation

À partir du principe fondamental de la dynamique, nous pouvons facilement décrire le comportement vertical de l'avion sous forme discrétisée ci-dessous :

$$\ddot{h}^{(n)} = a_z^{(n)} \quad (\text{C.10})$$

$$\dot{h}^{(n+1)} = \dot{h}^{(n)} + \Delta T \ddot{h}^{(n)} \quad (\text{C.11})$$

$$h^{(n+1)} = h^{(n)} + \Delta T \dot{h}^{(n)} \quad (\text{C.12})$$

De ces dernières équations et de l'équation (C.8) se déduit directement le modèle d'estimation ci-dessous :

$$\hat{\ddot{h}}^{(n)} = a_{z_m}^{(n)} + \frac{g R_T^2}{(R_T + \hat{h}^{(n)})^2} \quad (\text{C.13})$$

$$\hat{\dot{h}}^{(n+1)} = \hat{\dot{h}}^{(n)} + \Delta T \hat{\ddot{h}}^{(n)} \quad (\text{C.14})$$

$$\hat{h}^{(n+1)} = \hat{h}^{(n)} + \Delta T \hat{\dot{h}}^{(n)} \quad (\text{C.15})$$

Puis, en substituant (C.8) dans (C.13), on obtient l'équation (C.16) :

$$\hat{\ddot{h}}^{(n)} = a_z^{(n)} - \frac{g R_T^2}{(R_T + h^{(n)})^2} + \frac{g R_T^2}{(R_T + \hat{h}^{(n)})^2} + w_{acc}^{(n)} \quad (\text{C.16})$$

qui nous permet d'estimer l'accélération verticale en fonction de la mesure de l'accéléromètre et de l'estimation de l'altitude au temps ( $n$ ).

## Application du filtre de Kalman

Maintenant que toutes nos équations sont introduites, la dernière chose qui reste à faire est d'écrire le système ( $S$ ) et d'appliquer le filtre de Kalman en suivant la procédure précédente. Nous rappelons que le but est d'estimer l'altitude de l'avion. Pour cela, il nous faut aussi avoir une estimation de la vitesse verticale. Enfin, nous considérerons la dynamique du baromètre dans le filtre de Kalman. Le vecteur d'état à estimer est le suivant :

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} \hat{h}^{(n)} & \dot{\hat{h}}^{(n)} & \hat{h}_b^{(n)} \end{bmatrix}^T \quad (\text{C.17})$$

En reprenant les équations de la dynamique estimée et celles du baromètre, on obtient le système linéarisé ci-dessous :

$$\Delta x^{(n+1)} = A\Delta x^{(n)} + B\Delta w^{(n)} \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1^{(n+1)} \\ \Delta x_2^{(n+1)} \\ \Delta x_3^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T & 0 \\ \frac{-2g\Delta T}{R_T} & 1 & 0 \\ \frac{\Delta T}{\tau} & 0 & 1 - \frac{\Delta T}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(n)} \\ \Delta x_2^{(n)} \\ \Delta x_3^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w_{acc}^{(n)} \\ \Delta w_b^{(n)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

et la mesure de l'altitude barométrique est donnée par :

$$\Delta y^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta x^{(n)} = \Delta x_3^{(n)} \quad (\text{C.20})$$

où la deuxième ligne (des matrices  $A$  et  $B$ ) qui représente la variation de l'estimation de la vitesse verticale ( $\Delta x_2^{n+1}$ ) autour de l'équilibre est calculée à partir des équations ci-dessous :

$$\begin{aligned} \hat{h}_0^{(n+1)} + \Delta \hat{h}^{(n+1)} &= \hat{h}_0^{(n)} + \Delta \hat{h}^{(n)} + \Delta T \left[ a_{z_0}^{(n)} - \frac{gR_T^2}{(R_T + h_0^{(n)})^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{gR_T^2}{(R_T + \hat{h}_0^{(n)} + \Delta \hat{h}^{(n)})^2} + \omega_{acc0}^{(n)} + \Delta \omega_{acc}^{(n)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} &= \hat{h}_0^{(n)} + \Delta \hat{h}_0^{(n)} + \Delta T \left[ a_{z_0}^{(n)} - \frac{gR_T^2}{(R_T + h_0^{(n)})^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{gR_T^2}{(R_T + \hat{h}_0^{(n)})^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta \hat{h}^{(n)}}{R_T + \hat{h}_0^{(n)}}\right)^2} + \omega_{acc0}^{(n)} + \Delta \omega_{acc}^{(n)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

En notant que pour  $x < 1$ ,  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ , on peut écrire :

$$\frac{1}{\left[1 + \frac{\Delta\hat{h}^{(n)}}{R_T + \hat{h}_0^{(n)}}\right]^2} = \left[1 + \frac{\Delta\hat{h}^{(n)}}{R_T + \hat{h}_0^{(n)}}\right]^{-2} \approx 1 - 2\frac{\Delta h^{(n)}}{R_T + \hat{h}_0} \quad (\text{C.23})$$

Ainsi, l'équation (C.21) devient :

$$\begin{aligned} \hat{h}_0^{(n+1)} + \Delta\hat{h}^{(n+1)} &= \hat{h}_0^{(n)} + \Delta\hat{h}^{(n)} + \Delta T \left[ a_{z_0}^{(n)} - \frac{gR_T^2}{(R_T + \hat{h}_0^{(n)})^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{gR_T^2}{(R_T + \hat{h}_0^{(n)})^2} \left(1 - 2\frac{\Delta h^{(n)}}{R_T + \hat{h}_0}\right) + \omega_{acc_0}^{(n)} + \Delta\omega_{acc}^{(n)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Or à l'équilibre :

$$\hat{h}_0^{(n+1)} = \hat{h}_0^{(n)} + \Delta T \left[ a_{z_0}^{(n)} - \frac{gR_T^2}{(R_T + \hat{h}_0^{(n)})^2} + \frac{gR_T^2}{(R_T + \hat{h}_0^{(n)})^2} + \omega_{acc_0}^{(n)} \right] \quad (\text{C.25})$$

Ainsi, l'équation (C.24) devient :

$$\Delta\hat{h}^{(n+1)} = \Delta\hat{h}^{(n)} + \Delta T \left[ -\frac{2gR_T^2\Delta\hat{h}^{(n)}}{(R_T + \Delta\hat{h}_0^{(n)})^3} + \Delta\omega_{acc} \right] \quad (\text{C.26})$$

Pour finir, en supposant que  $R_T \gg \hat{h}_0^{(n)}$ , on obtient l'équation linéarisée ci-dessous :

$$\Delta\hat{h}^{(n+1)} = \Delta\hat{h}^{(n)} + \Delta T \left[ -\frac{2g\Delta\hat{h}^{(n)}}{R_T} + \Delta\omega_{acc} \right] \quad (\text{C.27})$$

## Résultats

Pour la simulation, nous avons supposé que l'altitude de l'avion oscille avec une période de 200 secondes autour de 20,000 pi. De même, nous supposons ne pas connaître exactement la position initiale de l'avion avec une erreur de 1,000 pi sur l'altitude et de 500 pi/min pour la vitesse verticale, le but étant de voir si le filtre de Kalman est capable de corriger l'erreur d'estimation initiale tout au long de la simulation. La Figure C.1 montre dans un premier temps les résultats sans utilisation d'un filtre de Kalman, c'est-à-dire uniquement en utilisant les équations (C.13) à (C.16). Comme on peut le remarquer sur la Figure C.1, au bout de 300 secondes de simulation l'erreur d'estimation sur l'altitude dépasse légèrement 4,000 pi ce qui est inacceptable pour un avion. Il est donc impossible de connaître la position de l'avion uniquement avec un modèle d'estimation car la propagation des erreurs due à une modélisation incertaine ou à des bruits de mesures n'est pas négligeable.

Nous avons donc refait le même essais avec un filtre de Kalman cette fois-ci. Comme on peut le voir sur la Figure C.2, la différence est nette avec un filtre de Kalman. En effet, après les premières secondes, on peut remarquer que le filtre corrige son erreur d'estimation initiale tant sur l'altitude que sur la vitesse. De plus, il est bien fidèle au comportement réel de l'avion et cela même en présence de bruit ou d'incertitude de modélisation. Cette exemple illustre donc bien l'importance et l'efficacité d'un filtre de Kalman.

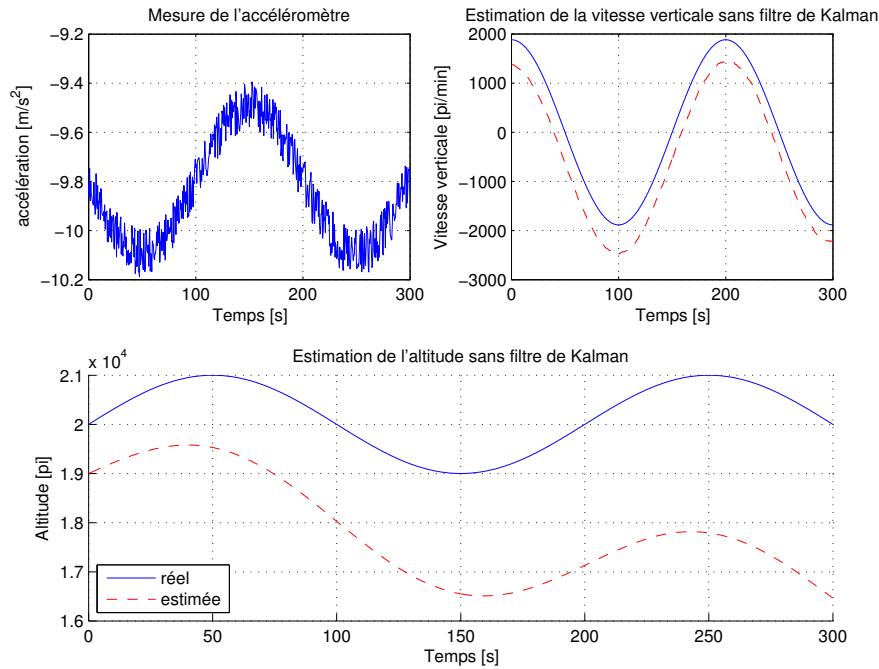


Figure C.1 Estimation de l'altitude et la vitesse sans filtre de Kalman

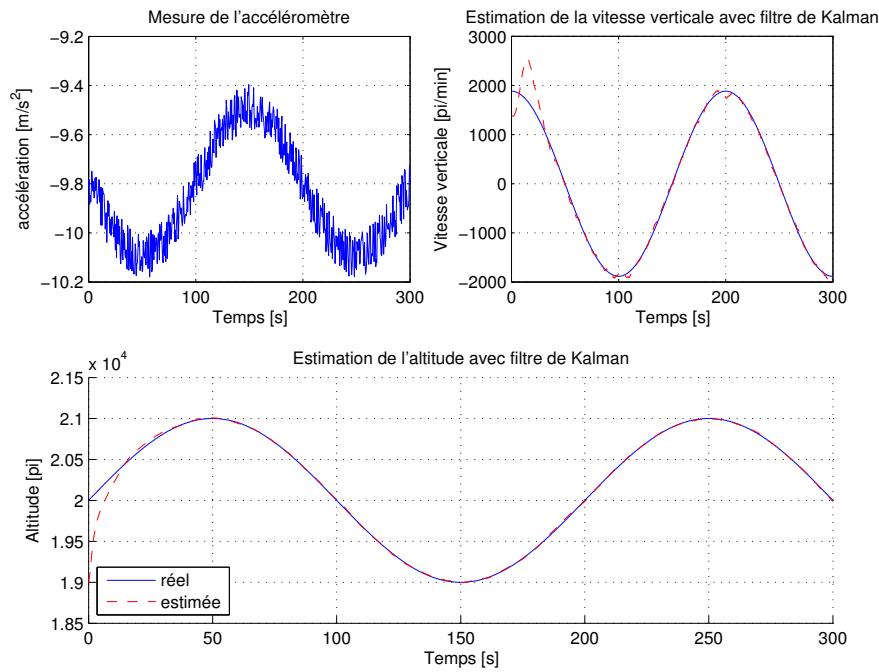


Figure C.2 Estimation de l'altitude et la vitesse avec filtre de Kalman