POLYPUBLIE

Modélisation par une approche milieu poreux de l'instabilité fluidélastique dans un faisceau de tubes soumis à un écoulement diphasique transverse

Eliott Tixier

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

Date	2014
Type	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis Mémoire de maîtrise/Master's thesis
URL de PolyPublie PolyPublie URL	https://publications.polymtl.ca/1446/
Conditions d'utilisation Terms of use	© Tous droits réservés / All rights reserved
Référence Citation	Tixier, E. (2014). Modélisation par une approche milieu poreux de l'instabilité fluidélastique dans un faisceau de tubes soumis à un écoulement diphasique transverse [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/1446/

Détails de la thèse
Thesis details

Directeurs de recherche Advisors	Stéphane Étienne, & Dominique Pelletier
Programme Program	Génie mécanique

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal
https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION PAR UNE APPROCHE MILIEU POREUX DE L'INSTABILITÉ FLUIDÉLASTIQUE DANS UN FAISCEAU DE TUBES SOUMIS À UN ÉCOULEMENT DIPHASIQUE TRANSVERSE

ELIOTT TIXIER
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
JUIN 2014

© Eliott Tixier, 2014.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÉLISATION PAR UNE APPROCHE MILIEU POREUX DE L'INSTABILITÉ FLUIDÉLASTIQUE DANS UN FAISCEAU DE TUBES SOUMIS À UN ÉCOULEMENT DIPHASIQUE TRANSVERSE

présenté par : TIXIER Eliott
en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. TEYSSEDOU Alberto, Ph.D., président
M. ÉTIENNE Stéphane, Doct., membre et directeur de recherche
M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et codirecteur de recherche
M. LAURENDEAU Éric, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Je souhaiterais tout d'abord remercier mon directeur de recherche Stéphane Étienne ainsi que mon co-directeur Dominique Pelletier pour leur confiance et leur supervision continue.

Je tiens également à remercier Cédric Béguin et Alexander Hay pour leur aide précieuse et leurs conseils avisés.

J'adresse mes vifs remerciements à Guillaume Ricciardi pour nos échanges répétés, sa contribution au modèle du milieu poreux et l'opportunité qui m'a été donnée d'effectuer un stage de recherche au CEA de Cadarache.

Je remercie chaleureusement tous les autres membres de la chaire IFS ainsi que ceux du laboratoire d'aérothermique pour la bonne ambiance qu'ils ont contribué à créer et leur soutien pendant ces deux ans.

Je tiens également à remercier Alberto Teyssedou et Éric Laurendeau pour leur participation au jury d'examen ainsi que pour la lecture attentive du présent rapport et les corrections proposées.

RÉSUMÉ

Cette étude porte sur la prédiction de l'apparition de l'instabilité fluidélastique dans un faisceau de tubes soumis à un écoulement diphasique transverse. L'étude des écoulements diphasiques a de nombreuses applications industrielles, et plus particulièrement dans l'industrie nucléaire. En effet, les générateurs de vapeur des centrales nucléaires sont soumis à des écoulements transverses diphasiques qui sont à l'origine de phénomènes vibratoires délétères. Les sollicitations de la structure entraînent une fatigue mécanique qui engendre dans le meilleur des cas une usure maîtrisée mais nécessitant un arrêt partiel de la centrale et, dans le pire, la rupture de tubes assurant le refroidissement du circuit primaire et donc un incident nucléaire. Les générateurs de vapeur sont d'immenses faisceaux comptant de plusieurs centaines à plusieurs dizaines de milliers de tubes, rendant leur étude très délicate.

Parmi les causes des vibrations de ces structures, le mécanisme d'instabilité fluidélastique est de loin le plus destructeur. Par conséquent, beaucoup d'efforts sont fournis au sein de la communauté scientifique afin de comprendre ce phénomène et d'être capable de prédire son apparition. La présente étude a pour objectif de modéliser et de simuler numériquement cette instabilité dans un faisceau de tubes soumis à un écoulement transverse diphasique. Le principal défi est de développer une méthode de modélisation permettant de simuler un faisceau comptant de nombreux tubes à moindre coût de calcul, ce qui est inenvisageable avec une approche directe (simulations numériques directes ou *DNS*).

Tout d'abord, la méthode de moyennage en espace est présentée et est appliquée aux équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour le fluide et la structure. On obtient alors les équations du milieu poreux dans lesquelles les interactions entre les tubes et l'écoulement sont modélisées et injectées sous forme de termes sources. La variante des équations de Navier–Stokes obtenue représente un gain significatif en terme de coût de calcul puisque le moyennage en espace autorise l'utilisation de maillages plus grossiers puisque les tourbillons de petite échelle et les détails de la géométrie sont filtrés. De plus, le mouvement des tubes est indépendant de la discrétisation spatiale employée et par conséquent des maillages fixes sont utilisés, ce qui représente un gain additionnel en termes de temps de calcul.

La formulation obtenue est implémentée dans un code de calcul éléments-finis et est vérifiée par la méthode des solutions manufacturées. L'étalonnage et la validation sont effectués

grâce à la simulation de cas tests simples et la comparaison avec les résultats d'un autre modèle numérique. Ce dernier est un modèle d'ordre plein correspondant à l'approche directe (*DNS*) dans lequel aucune approximation n'est faite et dont les résultats ont été présentés dans de récentes publications.

Des simulations numériques sont effectuées dans le cas d'un faisceau de tubes soumis à un écoulement transverse monophasique. Les valeurs de la vitesse critique d'apparition de l'instabilité fluidélastique sont comparées avec celles obtenues expérimentalement dans la littérature et celles obtenues numériquement avec l'approche DNS. Les prédictions obtenues tendent à être surestimées, de l'ordre de 100 %, par rapport aux données de référence. La cause semble être le modèle lui-même en ce qu'il ne reproduit pas de façon suffisante le couplage entre des tubes voisins. En revanche, l'approche développée représente un gain de temps substantiel par rapport à une méthode DNS.

Le modèle du milieu poreux est ensuite étendu à des écoulements diphasiques, en l'occurence un mélange d'une phase gazeuse et d'une phase liquide. Les cas d'étude sont restreints à des écoulements à bulles et de faible taux de vide afin de respecter les limites physiques du modèle utilisé. Le mélange diphasique est modélisé par une approche Euler–Euler et les forces d'interaction entre les phases sont modélisées. Le modèle est à nouveau vérifié et validé et les résultats des simulations numériques sont comparés avec des données expérimentales provenant de la littérature et de rapports techniques du laboratoire. Les résultats obtenus surestiment les valeurs de la vitesse critique d'instabilité fluidélastique. Néanmoins, cet écart avec les résultats expérimentaux semble prendre son origine dans le modèle de couplage entre le fluide et la structure dans le cas monophasique. Les raisons de la discordance entre les résultats numériques et expérimentaux sont investiguées et des suggestions d'amélioration du modèle sont données.

ABSTRACT

This work deals with the prediction the fluidelastic instability onset in a tube bundle subject to a two-phase cross-flow. The study of two-phase flows leads to numerous industrial applications, in particular in the nuclear energy field. Indeed, nuclear plants steam generators are subject to two-phase cross-flows that cause damaging vibrations. Repetitive stresses in the structure lead to mechanical fatigue that have many important consequences ranging from regular maintenance partial shutdowns of the plant to a nuclear incident. Steam generators are immense tube arrays counting up to hundreds of thousands of tubes, which makes their study a difficult task.

Among the cause of these vibrations, the fluidelastic mechanism is certainly the most destructive one. Therefore, a lot of effort is being put within the research community into understanding this phenomenon and developing tools to predict its triggering. The present study aims at modeling and numerically simulating this instability in a tube bundle subject to a two-phase cross-flow. The main challenge is to develop a model able to simulate a bundle counting numerous tubes with a low computational cost, which is not possible with a direct approach (Direct Numerical Simulations, DNS).

First, the averaging technique is presented and then applied to continuity and momentum conservation equations for both the flow and the structure. As the consequence, the model of the porous medium is obtained, in which the fluide-structure interactions are modeled and lumped into the equations. The modified form of the Navier–Stokes equations obtained is significantly cheaper in terms of computational cost. First, the volume averaging process filters many details of the flow such as the geometry of the tubes and small-scale vortices. The resulting macroscopic model presents smoother variations so that coarser meshes may be used. Second, the fluid mesh and the tubes are independent. Therefore, fixed meshes may be used to simulate unsteady problems.

The averaged equations are solved by a finite element method and the code is verified using the method of manufactured solutions. Calibration and validation are conducted by comparing the results of simple test cases simulations to the results obtained by DNS simulations. The latter corresponds to the full-order model and results of fluid-structure simulations were presented in recent publications.

Simulations were run for a tube bundle subject to a single-phase cross-flow using the porous medium model. The values of the fluidelastic onset critical velocity were compared to those obtained using DNS and to experimental data found in the literature. The predictions obtained tend to be overestimated with respect to reference data. The reason may be that the model itself fails to accurately represent the coupling of neighboring tubes. However, the porous medium approach is significantly less costly than DNS.

The porous medium model is then extended to two-phase flows and more precisely to gas-liquid mixtures. The investigation is restricted to bubbly flows and low void fraction in order to stay within the physical boundaries of the model. The two-phase mixture is modeled by an Euler-Euler approach and gas-liquid interactions are modeled. The resulting code is again verified and validated and the results of the numerical simulations are compared to experimental data from the literature and local technical reports. The results obtained overestimate the values of the fluidelastic instability onset critical velocity. Nevertheless, the gap observed seems to be due to the single-phase fluid-structure coupling model. The reasons of scatter between the numerical results and experimental data are investigated and suggestions are made in order to improve the porous medium model.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS iii

RÉSUMÉ iv

ABSTRACT vi

TABLE DES MATIÈRES viii

LISTE DES TABLEAUX xi

LISTE DES FIGURES xii

LISTE DES ANNEXES xiv

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xv

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
1.1 Contexte industriel et scientifique 1
1.2 Plan du mémoire 4

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTERATURE 6
2.1 L'instabilité fluidélastique dans un faisceau de tubes 6
2.1.1 Modèles théoriques ou semi-empiriques de l'IFE 7
2.1.2 Données expérimentales sur l'IFE monophasique 8
2.2 Simulations numériques de l'instabilité fluidélastique 8
2.3 Écoulements diphasiques 11
2.3.1 Modèles de type Euler-Lagrange 11
2.3.2 Modèles de type Euler-Euler 12
2.3.3 Non-hyperbolicité des modèles diphasiques 13
2.3.4 Instabilité fluidélastique diphasique 14

CHAPITRE 3 L'APPROCHE MILIEU POREUX 16
3.1 Modélisation 16
3.1.1 Méthode de moyennage 16
3.1.2 Fonction de porosité 18
3.1.3 Dérivation des fonctions indicatrices 19

3.1.4 Moyennage dans l'espace de la conservation de la masse 20
3.1.5 Moyennage dans l'espace de la conservation de la quantité de mouvement 23
3.1.6 Relations de fermeture 24
3.1.7 Équations de mouvement pour les tubes 25
3.2 Méthodes numériques 28
3.2.1 Formulation variationnelle et méthode des éléments finis 28
3.2.2 Méthodes numériques 31
3.3 Vérification, validation et étalonnage 32
3.3.1 Vérification par la méthode des solutions manufacturées 33
3.3.2 Étalonnage et validation 35
3.4 Validation et comparaison avec les modèles instationnaire et quasi-stationnaire 41
3.4.1 Dérivée de stabilité 41
3.4.2 Mesures dynamiques sur le tube central 42
3.5 Instabilité fluidélastique monophasique 44
3.5.1 Méthodologie 45
3.5.2 Influence du nombre de Reynolds 49
3.5.3 Influence du coefficient de traînée 50
3.6 Conclusion 51

CHAPITRE 4 LE MODELE DIPHASIQUE 53
4.1 Modélisation 53
4.1.1 Modélisation du mélange diphasique par une approche Euler-Euler . . . 53
4.1.2 Equations du modèle à deux fluides 54
4.1.3 Taux de vide et porosité 55
4.1.4 Modèle pour les interactions gaz-liquide et liquide-solide 56
4.2 Vérification et validation du modèle diphasique 58
4.2.1 Vérification par la méthode des solutions manufacturées 59
4.2.2 Validation sur un cas d'essai simple 59
4.3 Analyse mathématique du modèle 61
4.3.1 Inconnues et équations 61
4.3.2 Hyperbolicité du modèle diphasique à deux fluides 62
4.4 Instabilité fluidélastique diphasique 66
4.4.1 Présentation du cas d'essai 66
4.4.2 Influence du taux de vide 67
4.4.3 Influence de la gravité 69
4.4.4 Influence du rayon des bulles 70

4.5 Conclusion 72

CHAPITRE 5 CONCLUSION 74
5.1 Synthèse des travaux 74
5.2 Limitations de la solution proposée 74
5.3 Améliorations futures 75

RÉFÉRENCES 77

ANNEXES 83

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 Influence du nombre de Reynolds sur R_C et C_D. 39
Tableau 3.2 Comparaison de la dérivée de stabilité entre la DNS et le milieu poreux. 42
Tableau 3.3 Amplitude et phase des forces fluides dynamiques. 45
Tableau 4.1 Vitesse réduite critique en fonction du taux de vide. 68
Tableau 4.2 Vitesse réduite critique en fonction du rayon des bulles pour $\varepsilon = 10$ % en entrée. 71

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Générateur de vapeur : vue du faisceau de tubes et zoom sur la région en U. 2
Figure 2.1 Principe schématisé des forces fluidélastiques. 6
Figure 3.1 Volume de contrôle. 17
Figure 3.2 Porosité en fonction de la distance au centre du tube avec $R_C/R_T = 1.5$. 19
Figure 3.3 Contours de porosité calculés pour un faisceau de tubes triangulaire avec $P/D_T = 1.5$ et $R_C/R_T = 1.5$. 20
Figure 3.4 Discrétisation du problème. 21
Figure 3.5 Efforts fluides du volume de contrôle. 26
Figure 3.6 Contours de vorticité dans un faisceau de tubes (Re = 133, écoulement de bas en haut) avec un calcul DNS (gauche) et la formulation milieu poreux (droite). 28
Figure 3.7 Exemple de maillage type (les nœuds de pression sont matérialisés par des carrés et les nœuds de vitesse par des cercles). 31
Figure 3.8 Domain de calcul pour la méthode des solutions manufacturées. 34
Figure 3.9 Convergence spatiale de l'erreur exacte pour la vitesse et la pression. . 35
Figure 3.10 Géométrie du cas de référence tournée à 90^o. 36
Figure 3.11 Vitesse moyenne autour du tube central en fonction de la taille du maillage. 37
Figure 3.12 Vitesse verticale autour du tube central, DNS, Re=133. 38
Figure 3.13 La solution de la DNS est moyennée sur un volume de contrôle. 39
Figure 3.14 Vitesse verticale en fonction de R_C. 40
Figure 3.15 Force verticale en fonction de R_C. 41
Figure 3.16 Force transverse en fonction du déplacement statique transverse. 42
Figure 3.17 Agrandissement sur le tube central vibrant et ses tubes voisins. 43
Figure 3.18 Forces transverses dynamiques sur le tube central à $U_R = 2.5$. 44
Figure 3.19 Déplacement du tube central après un lâcher libre. 46
Figure 3.20 Amplitude d'un tube en fonction de la vitesse réduite. 47
Figure 3.21 Trajectoire polaire des tubes dans le cycle limite, $U_r = 10$. 48
Figure 3.22 Amplitude de mouvement d'un tube en fonction du temps pour deux valeurs de U_r. 49

Figure 3.23 Carte de stabilité de « type Connors » montrant des résultats expérimentaux collectés par Price (1995) (marqueurs blancs et noirs), les résultats DNS par Étienne et Pelletier (2011)(cercles rouges) et les résultats présents (carrés verts). 50
Figure 3.24 Influence du nombre de Reynolds sur la carte de stabilité. 51
Figure 3.25 Amplitude en fonction de la vitesse réduite pour plusieurs valeurs de C_D. 52
Figure 4.1 Moyennage spatial pour le mélange diphasique. 55
Figure 4.2 Convergence spatiale de l'erreur exacte pour la pression (norme $\mathcal{L}^2$). . . 60
Figure 4.3 Convergence spatiale de l'erreur exacte pour la vitesse (norme $\mathcal{H}^1$). . . 61
Figure 4.4 Cas d'essai d'un écoulement diphasique à vitesse de glissement constante. 62
Figure 4.5 Contours du taux de vide en fonction du paramètre λ. 64
Figure 4.6 Géométrie (tournée à 90^o) du cas de référence diphasique. 66
Figure 4.7 Contours de porosité (gauche) et de pression (droite) (les contours des tubes ont été ajoutés en trait plein, $\varepsilon = 0.2$ en entrée). 67
Figure 4.8 Contours de vitesses horizontale (gauche) et verticale (droite) (les contours des tubes ont été ajoutés en trait plein, $\varepsilon = 0.2$ en entrée). 68
Figure 4.9 Contours de vorticité (gauche) et de taux de vide (droite) (les contours des tubes ont été ajoutés en trait plein, $\varepsilon = 0.2$ en entrée). 69
Figure 4.10 Amortissement fluide diphasique en fonction du taux de vide, reproduit de Pettigrew et Taylor (2004). 70
Figure 4.11 Carte de stabilité diphasique : résultats expérimentaux collectés par Price (1995) (marqueurs blancs et noirs) résultats expérimentaux par Ricciardi *et al.* (2011)(cercles rouges) et les résultats présents (carrés verts). 71
Figure A.1 Schéma du dispositif expérimental. 83
Figure A.2 Dispositif expérimental. 84
Figure A.3 Schéma du tube vibrant. 84
Figure A.4 Signal temporel (en haut) et DSP (en bas) pour $\theta = 110^o$ et $V_\infty = 0.47$ m.s^{-1}. 86
Figure A.5 Cohérence et déphasage entre déplacement et pression pour $\theta = 110^o$ et $V_\infty = 0.47$ m.s^{-1}. 87
Figure A.6 Coefficient de pression en fonction de l'angle θ pour deux valeurs de la vitesse d'entrée. 88
Figure A.7 Phase et cohérence pour $V_\infty = 0$ (eau stagnante). 89
Figure A.8 Phase et cohérence pour $V_\infty = 0.47$ m.s^{-1}. 89
Figure A.9 Phase et cohérence pour $V_\infty = 0.76$ m.s^{-1}. 90

LISTE DES ANNEXES

Annexe A Stage de recherche au CEA
Mesures dynamiques de pression sur un tube en vibration transverse à un écoulement 83

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

k	Indice désignant une phase fluide ($k = g$ ou l)
s	Indice désignant la phase solide
b	Indice désignant un paramètre associé aux bulles
T	Indice désignant un paramètre associé aux tubes
w	Exposant désignant une interface fluide-solide
i	Exposant désignant une interface fluide-fluide
ρ_k	Densité de la phase k, $kg.m^{-3}$
ρ_S	Densité du solide, $kg.m^{-3}$
$\mathbf{v_k}$	Vitesse de la phase k, $m.s^{-1}$
χ_k	Fonction indicatrice de la phase k, sans dimension
χ_s	Fonction indicatrice de la phase solide, sans dimension
$\mathbf{r_j}$	Position du centre du tube j, m
R_T	Rayon d'un tube, m
D_T	Diamètre d'un tube, m
R_b	Diamètre d'une bulle, m
Ω_C	Aire du "volume" de contrôle, m^2
R_C	Rayon du volume de contrôle, m
C_M	Coefficient de masse ajoutée, sans dimension
C_D	Coefficient de traînée, sans dimension
ω	Fonction de poids, sans dimension
Φ	Fonction de porosité, sans dimension
ϵ	Taux de vide, sans dimension
m	Masse, kg
$\mathcal{F}_r$	Nombre de Froude, sans dimension
Re	Nombre de Reynolds, sans dimension
U_R	Vitesse réduite, sans dimension
$m^*\delta$	Paramètre de masse-amortissement, sans dimension
$\mathbf{f}$	Force surfacique, $N.m^{-2}$
$\mathbf{F}$	Force, N
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur fluide, $N.m^{-2}$
DNS	Simulations Numériques Directes (*Direct Numerical Simulations*)

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Contexte industriel et scientifique

Les interactions entre fluides et structures sont un vaste domaine de recherche et intéressent une grande variété d'industriels et de chercheurs par leur omniprésence dans les phénomènes physiques du quotidien. De la dialyse au pont de Tacoma en passant par les colonnes montantes des plateformes pétrolières en mer, le couplage fort entre un écoulement et une structure flexible est à l'origine de comportements extrêmement intéressants, complexes et, quelquefois, désastreux.

L'industrie nucléaire porte beaucoup d'intérêt aux interactions fluide-structure à l'oeuvre dans ses centrales en général et dans les générateurs de vapeur en particulier. Lorsque ces derniers sont de type CANDU (CANada Deutérium Uranium) par exemple, ils comptent jusqu'à plusieurs milliers de tubes qui assurent le transfert de chaleur entre le circuit d'eau primaire et le circuit secondaire qui transporte de l'eau et de la vapeur. L'écoulement de ce mélange à travers le faisceau de tubes est à l'origine de phénomènes vibratoires complexes très activement étudiés.
L'Instabilité FluidÉlastique (IFE) est, de loin, la forme la plus destructrice des vibrations induites par l'écoulement dans les faisceaux de tubes. Elle apparaît dans la région en U (voir figure 1.1) et impose d'importantes restrictions dans le design des générateurs de vapeur des centrales nucléaires. Le paramètre clé dans l'IFE est la vitesse critique d'instabilité U_{rc}. Lorsque la vitesse du fluide en entrée atteint cette valeur, le mouvement de la structure extrait de l'énergie de l'écoulement par un phénomène de rétroaction positive : l'IFE se déclenche.

Par conséquent, la détermination précise de U_{rc} revêt une importance critique et stratégique. La revue de littérature de Price (1995) permet de prendre connaissance de la plupart des grandes familles de modèles visant à identifier ce paramètre. Malheureusement, il apparaît très difficile d'obtenir des estimations précises et des écarts d'un ordre de grandeur sont parfois observés entre les prédictions des modèles et les données expérimentales [voir Yetisir et Weaver (1993)]. A cela s'ajoute une grande variabilité des résultats au sein même des études expérimentales. Enfin, les estimations sont encore plus complexes dans le cas d'écoulements diphasiques [voir Khushnood *et al.* (2004)].

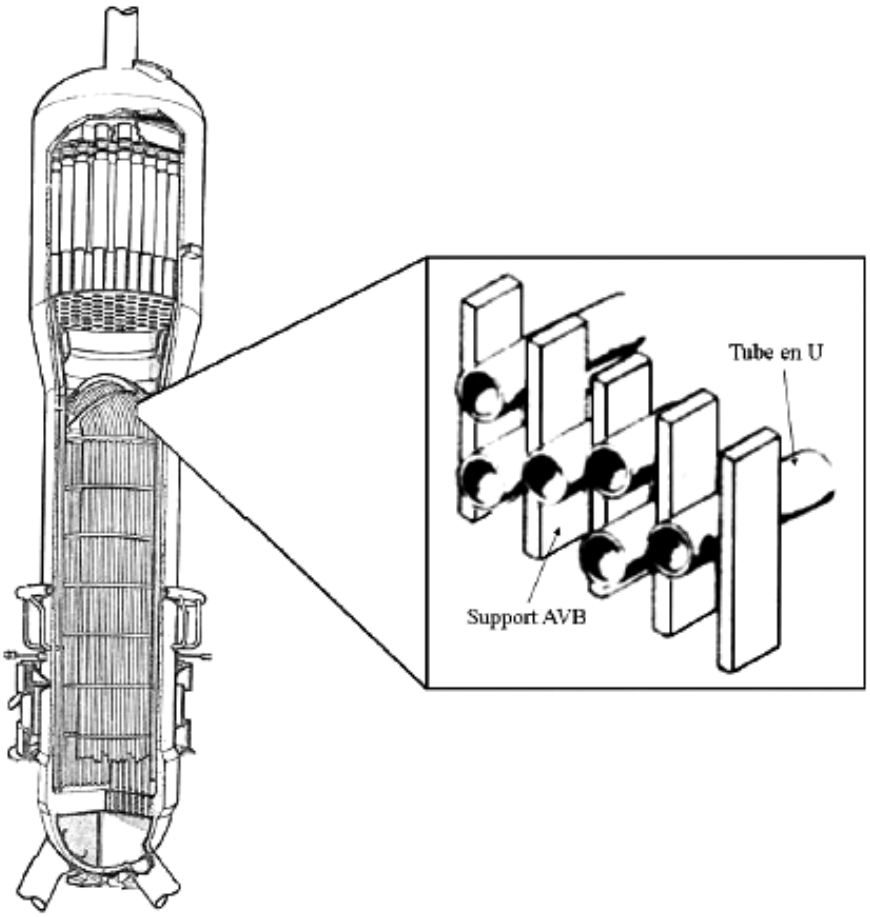


Figure 1.1 Générateur de vapeur : vue du faisceau de tubes et zoom sur la région en U.

Par conséquent, les industriels préfèrent adopter de larges marges de sécurité pour U_{rc} afin d'assurer l'intégrité de leurs installations. Les fabricants de générateurs de vapeur utilisent des modèles semi-analytiques dérivés des premiers travaux de Connors Jr. (1978). Si ces derniers ont l'avantage d'être relativement simples à appliquer, ils donnent en général une estimation très conservative de U_{rc}.
La principale conséquence de l'application de ces précautions se traduit par un fonctionnement suboptimal des centrales nucléaires [voir Adobes *et al.* (2006)]. C'est la raison pour laquelle beaucoup d'efforts sont fournis afin d'améliorer les modèles existants et de développer de nouvelles méthodes de prédiction basées sur l'expérimentation et les simulations numériques.

Un autre désavantage des modèles utilisés par l'industrie est qu'ils nécessitent de déterminer expérimentalement certains paramètres utilisés dans les équations de la structure. Par

exemple, dans les modèles quasi-stationnaires, un paramètre de retard est mesuré et modélise le délai entre une modification locale de l'écoulement et son effet sur le mouvement de la structure [voir Price et Païdoussis (1984)]. Ces paramètres impliquent donc une expérimentation longue et coûteuse et sont spécifiques à une géométrie et une configuration de l'écoulement particulières.
Une alternative consiste à calculer ces coefficients empiriques en utilisant des simulations numériques. C'est par exemple ce qui a été fait dans Gillen et Meskell (2008a) où les équations de Navier–Stokes ont été utilisées pour résoudre l'écoulement autour d'un faisceau de tubes fixes et en extraire des coefficients utilisables par un modèle quasi-stationnaire. Toutefois, en raison des hypothèses simplificatrices utilisées dans leur modèle quasi-stationnaire étalonné numériquement, les auteurs ont été incapables de produire des prédictions précises de U_{rc}. Pourtant, en principe, il est possible d'observer directement l'IFE grâce à des simulations précises des interactions fluide-structure dans un faisceau de tubes soumis à un écoulement transverse.

La Simulation Numérique Directe (l'acronyme DNS, pour *Direct Numerical Simulations*, sera utilisé dans toute la suite) d'un écoulement transverse dans un faisceau de tubes implique la résolution des équations de Navier–Stokes incompressibles sur une géométrie mobile et couplée au mouvement de corps rigide des tubes. Ce genre de modèle numérique est extrêmement précis mais est toutefois très coûteux en termes de temps de calcul. Par conséquent, ce genre d'approche représente un véritable défi d'un point de vue du calcul scientifique.
En effet, le nombre élevé de tubes dans un faisceau typique (entre quelques centaines et plusieurs milliers) nécessite d'impressionnantes ressources, à la fois en ce qui concerne la mémoire et la puissance de calcul même en se restreignant au cas d'écoulements laminaires bi-dimensionnels.
En outre, le maillage des espaces interstitiels entre les tubes est une tâche délicate puisqu'il est nécessaire de capturer toutes les couches limites au voisinage de ceux-ci. Le mouvement des tubes apporte une complexité supplémentaire puisque les équations de l'écoulement doivent être résolues sur un domaine mobile et par conséquent des degrés de liberté additionels correspondant aux déformations du maillage doivent être calculés.

Cette approche a été adoptée avec succès par Étienne et Pelletier (2011) qui ont utilisé la méthode des éléments-finis en **deux dimensions** et une formulation ALE (Arbitraire Lagrangienne Eulerienne) pour tenir compte de la géométrie mobile. Des schémas d'intégration en temps, de type Runge-Kutta, implicites et d'ordre élevé ont été utilisés ainsi qu'une approche monolithique tout-couplé. Les résultats très prometteurs de cet article incluent l'observation

de l'IFE pour un faisceau de 25 tubes et un nombre de Reynolds de 200. Les prédictions obtenues sont en bon accord avec les données expérimentales disponibles et les limites du modèle à l'origine des écarts observés sont clairement identifiées.
Pourtant, comme mentionné précédemment, cette stratégie souffre de sévères limitations telles que le nombre de Reynolds ne pouvant excéder quelques centaines sans utiliser de modèle de turbulence ou le faible nombre de tubes qui peuvent être considérés. Toutefois, le modèle obtenu est très précis en ce qui concerne les écoulements monophasiques et servira de référence dans la première partie de ce mémoire.

Enfin, l'ajout d'une phase supplémentaire complexifie grandement un cas particulier déjà difficile à modéliser dans le cas monophasique. Un écoulement diphasique à travers un faisceau de tubes mobiles est un problème beaucoup trop intriqué et compliqué pour être résolu par une approche directe de type DNS, même en se restreignant à un écoulement bi-dimensionnel. Par conséquent, il est indispensable de développer une nouvelle approche permettant, d'une part de résoudre le problème monophasique à moindre coût comparé à la DNS et, d'autre part, de simuler un écoulement diphasique sans décupler les ressources de calcul nécessaires.

1.2 Plan du mémoire

L'objectif de cette recherche est de développer une formulation de type milieu poreux pour modéliser l'IFE dans un faisceau de tubes soumis à un écoulement transverse diphasique. Cette variante des équations de Navier-Stokes est beaucoup plus parcimonieuse en termes de ressources de calcul requises, produisant ainsi des résultats approchés pour un coût moindre.

Dans le premier chapitre, le processus de moyennage en espace est présenté et le modèle du milieu poreux dans le cas monophasique est développé. Le code implémenté est vérifié puis validé et étalonné en comparant les résultats obtenus avec ceux, de référence, obtenus par la méthode DNS. Enfin, des simulations numériques instationnaires sont effectuées sur un faisceau de tubes mobiles soumis à un écoulement transverse et l'instabilité fluidélastique est mise en évidence. Les prédictions de déclenchement de l'IFE sont comparées à de précédents résultats numériques et expérimentaux trouvés dans la littérature.

Dans le second chapitre, le modèle du milieu poreux est étendu au cas d'écoulements diphasiques. La formulation obtenue est implémentée et vérifiée par la méthode des solutions manufacturées. La validation est faite sur un cas test simple dont la solution analytique est

connue. Enfin, des simulations instationnaires sont conduites en utilisant la même méthodologie que celle du premier chapitre avec pour complexité supplémentaire la présence d'un écoulement diphasique. L'influence des paramètres clés est investiguée et les prédictions sont comparées aux données expérimentales disponibles.

Enfin, la dernière partie fait office de conclusion. Une synthèse des étapes suivies est présentée et les limitations des modèles utilisés sont identifiées ou, pour le moins, discutées. Des améliorations pour le modèle du milieu poreux sont envisagées afin d'améliorer les prédictions des simulations numériques.

CHAPITRE 2

REVUE DE LITTERATURE

2.1 L'instabilité fluidélastique dans un faisceau de tubes

Il est assez difficile de définir directement ce qu'est l'instabilité fluidélastique et ce que sont les forces fluidélastiques à l'origine de l'instabilité. Généralement, cette définition est faite par élimination, c'est-à-dire qu'on définit les forces fluidélastiques comme les forces qui ne sont ni dues aux détachements tourbillonnaires ni dues à la turbulence. Ces dernières peuvent être mesurées sur un unique tube immobile car elles ne proviennent que de l'écoulement lui-même. En revanche, les forces fluidélastiques résultent d'un **couplage fort** entre le mouvement solide et l'écoulement.
Ces forces peuvent être schématisées de la façon suivante : un petit mouvement de la structure induit une perturbation de l'écoulement ambiant qui elle-même induit une force sur la structure et donc un nouveau déplacement (voir figure 2.1). Les forces fluidélastiques correspondent donc à une rétroaction (ou *feed-back*) entre les mouvements de la structure et l'écoulement. Lorsque cette rétroaction est positive (c'est-à-dire que la force induite par un déplacement génère un déplacement encore plus grand), on parle d'**Instabilité FluidÉlastique** (IFE).

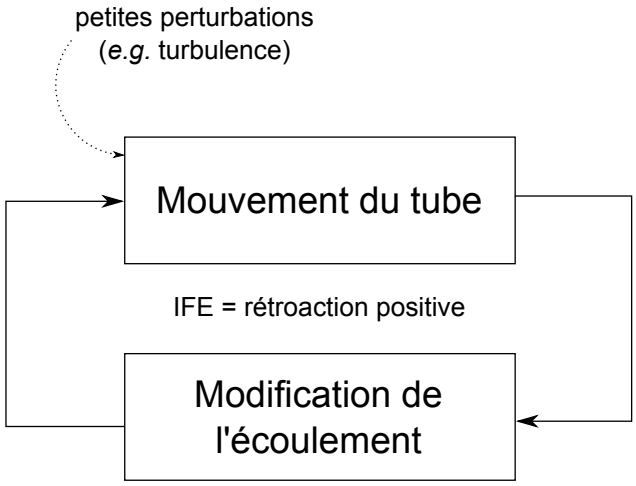


Figure 2.1 Principe schématisé des forces fluidélastiques.

2.1.1 Modèles théoriques ou semi-empiriques de l'IFE

De très nombreuses revues de littérature ont été rédigées sur l'IFE et les différents modèles permettant de prédire son déclenchement. On lira à profit l'excellente revue de Price (1995) et, incluant les développements plus récents, celles de Sawadogo (2012) et Païdoussis *et al.* (2010).
Il serait donc inutile de reprendre ici une revue détaillée de l'IFE. Toutefois, il est nécessaire d'introduire les concepts et les modèles qui seront cités tout au long de ce mémoire à titre de comparaison.
L'influence la plus notable est celle de Connors Jr. (1978) et de son **modèle quasi-statique**. Ce modèle théorique, très simpliste, lui a permis d'obtenir la relation suivante, elle-même inspirée des travaux de son prédécesseur Roberts :

$$U_{rc} = K m^* \delta,$$

où U_{rc} est la vitesse réduite critique du fluide (*i*.e. vitesse réduite à laquelle se déclenche l'IFE), $m^*\delta$ le paramètre de masse-amortissement et K une constante dépendant de la géométrie du faisceau de tubes. m^* est appelé le ratio de masse et est égal à ρ_S/ρ_f et δ est le décrément logarithmique, correspondant à l'amortissement. Ces deux paramètres sont déterminés expérimentalement respectivement en mesurant la fréquence naturelle des tubes dans l'écoulement et en effectuant un lâcher libre, toujours dans l'écoulement. Ces deux paramètres contiennent donc implicitement les effets du fluide environnant. Cette relation est largement utilisée dans l'industrie et de nombreux travaux ont tenté de la généraliser ou d'en fournir des variantes. Les travaux de Connors Jr. ont également influé sur la façon de représenter de façon condensée des résultats expérimentaux et des limites théoriques. On parle de carte de stabilité de « type Connors » où les axes sont U_{rc} et $m^*\delta$. Même si cette façon de représenter les données est contestée [voir Price (2001)], elle n'en est pas moins largement utilisée dans la littérature car aucune alternative satisfaisante n'a été trouvée.
Un autre modèle très utilisé est le **modèle instationnaire**, introduit pour la première fois dans Tanaka et Takahara (1981). L'argument principal en faveur de ce modèle est qu'il utilise directement des mesures faites sur le déplacement dynamique d'un tube. Il contient en ce sens « plus de physique » que les autres modèles même si l'expérimentation qui lui est associée est très coûteuse. L'idée est de résoudre les équations dynamiques du mouvement de la structure en ajoutant aux équations de mouvement structurelles des forces de couplage entre les tubes. Ces forces contiennent des coefficients qui sont calculés expérimentalement en faisant vibrer un tube au milieu d'un faisceau et en mesurant les efforts induits sur ce tube et les tubes environnants. Une phase (correspondant au retard induit par le fluide) et une

amplitude sont calculées pour chaque tube et sont ensuite incorporées dans les coefficients de force [voir Tanaka *et al.* (2002); Chen et Srikantiah (2001)].
La classe des modèles **quasi-stationnaires** semble être un amalgame hétéroclite de différents modèles. Leur dénominateur commun est qu'ils donnent une prédiction du déclenchement de l'IFE à partir de mesures faites sur des déplacements statiques [voir Price et Païdoussis (1984); Lever et Weaver (1986)]. Un paramètre, appelé *time delay* (retard), est ajouté afin de prendre en compte le délai mis en évidence expérimentalement entre le mouvement de la structure et les forces induites par le fluide. Le modèle a également besoin des dérivées de stabilité, dont par exemple $\partial C_L/\partial y$ (la dérivée de la force de portance par rapport a un déplacement statique dans la direction transverse de l'ecoulement). Ce paramètre, déterminé expérimentalement, a une importance cruciale dans la détermination de la vitesse critique d'IFE [voir par exemple Charreton *et al.* (2013)]. Par conséquent, ce paramètre constitue un bon point de comparaison entre le modèle développé dans ce rapport, les autres modèles déjà existants et les données expérimentales (voir la section 3.4). Afin d'être plus représentatif de la réalité physique des forces fluidélastiques, de nombreuses variantes du modèle quasi-stationnaire ont été développées. On peut citer par exemple le modèle **quasi-instationnaire** [voir Granger et Païdoussis (1996)] dans lequel le paramètre de *time delay* a été remplacé par des fonctions temporelles plus complexes.

2.1.2 Données expérimentales sur l'IFE monophasique

Dans la plupart des articles cités, des résultats expérimentaux sont présentés afin de comparer les prédictions du modèle avec l'expérience. Néanmoins, ces résultats ne correspondent pas nécessairement au cas étudié dans ce rapport car il existe une variété abondante de géométries et de configurations d'écoulements. Les résultats présentés dans Price (1995) ont été abondamment utilisés dans ce rapport car ils offrent un condensé de données expérimentales sur des graphes de « type Connors ». On utilisera également à profit les résultats de Ricciardi *et al.* (2011) et Ricciardi (2010) qui ont la particularité d'avoir été produits sur une section test identique à celle étudiée dans ce rapport. Enfin, les résultats de Sawadogo (2012), Violette (2005) et Perrot *et al.* (2011) ont également été utilisés pour comparer les résultats numériques du présent modèle avec les données expérimentales.

2.2 Simulations numériques de l'instabilité fluidélastique

Les simulations numériques d'écoulements dans des faisceaux de tubes onf fait très tôt leur apparition et la complexité des problèmes simulés a suivi le rapide développement des puissances de calcul.

Une approche peu coûteuse consiste à faire l'hypothèse d'un fluide non visqueux et donc d'utiliser le formalisme associé aux écoulements potentiels. Dans Balsa (1977), cette méthode ne permet de capturer que des instabilités statiques.

Réduire le domaine de calcul est aussi une excellente façon d'économiser les ressources informatiques disponibles. Dans Singh *et al.* (1989), un faisceau de tubes est ramené à deux tubes seulement grâce à un choix judicieux de conditions aux limites. Néanmoins, seule une instabilité statique est étudiée et les hypothèses restrictives liées aux conditions aux limites ne permettent pas aux auteurs d'obtenir des conclusions générales sur l'IFE. Dans Kassera et Strohmeier (1997), les vibrations d'un faisceau de tubes soumis à un écoulement transverse sont simulées en utilisant la méthode des volumes finis et un modèle de turbulence $k-\omega$ à un Reynolds de $2 \cdot 10^5$. Les simulations ont été effectuées sur une variété remarquable de géométries de faisceaux et la comparaison avec les données expérimentales est très bonne. Cependant, le faible nombre de résultats numériques ne permet pas de confirmer que le modèle parvient à capturer véritablement le déclenchement de l'IFE. D'autre part, le maillage structuré cartésien utilisé est très grossier et produit des contours de tubes en « marches d'escalier » leur surface calculée étant donc très différente de leur surface réelle.

Dans Schröder et Gelbe (1999), les auteurs utilisent cette fois-ci une formulation éléments-finis et un modèle de turbulence de type $k-\epsilon$ en 2–D et 3–D. Si les comparaisons avec les expériences sont bonnes, le faisceau ne comporte qu'une seule rangée de 5 tubes et aucune IFE n'est observée.

Dans Liang et Papadakis (2007), les auteurs ont simulé l'écoulement d'un fluide autour d'un faisceau de tubes en utilisant la méthode LES (Large Eddy Simulations) afin d'atteindre un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^4. Cependant, les tubes étant fixes, aucune IFE n'a pu être observée puisqu'il s'agit, rappelons-le, d'une instabilité induite par le mouvement des tubes.

Dans Gillen et Meskell (2008b), l'écoulement est simulé par la méthode des volumes-finis avec une formulation RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes) et les tubes sont immobiles. Le décalage de l'un des tubes permet d'obtenir des coefficients qui sont ensuite injectés dans un modèle quasi-statique pour prédire l'IFE. Cet article a le mérite de mettre en évidence le fait que les cartes de stabilité de « type Connors » (vitesse réduite en fonction du paramètre de masse-amortissement) ne sont pas parfaites en ce sens que l'influence de certains paramètres importants comme le nombre de Reynolds ou le ratio de masse est ignorée.

On peut trouver dans Païdoussis *et al.* (2010) un récapitulatif complet des tentatives de simulations numériques d'IFE jusqu'en 2010.

Dans Hossin (2010), l'auteur utilise des simulations éléments-finis avec une méthode RANS pour obtenir des paramètres d'amortissement et de raideur. Ces paramètres sont ensuite utilisés pour prédire l'IFE grâce à un modèle instationnaire. Là encore, l'IFE n'est jamais di-

rectement prédite par la CFD. Celle-ci n'est qu'un outil permettant d'obtenir des paramètres utilisés dans un modèle de prédiction de l'IFE.

Dans Sawadogo (2012), l'écoulement n'est pas résolu. Seules les équations de la structure sont résolues numériquement et un modèle de forces permet de simuler la présence de l'écoulement autour du faisceau de tubes. Le résultat des simulations numériques se compare de façon satisfaisante aux résultats expérimentaux mais l'IFE n'a pas été directement simulée.

Dans Jafari et Dehkordi (2013), l'écoulement dans un faisceau de 17 tubes dont 1 à 7 tubes sont flexibles est simulé par la méthode des volumes finis. Les auteurs obtiennent des valeurs de vitesse critique d'IFE mais celles-ci ne sont comparées à des résultats expérimentaux que pour un seul tube flexible.

Dans Khalifa *et al.* (2013), des simulations éléments-finis sont effectuées afin d'obtenir la valeur du retard de phase (« time-delay ») utilisé comme paramètre dans le modèle semi-analytique de Lever et Weaver (1986).

Enfin, Étienne et Pelletier (2011) ont utilisé une méthode éléments-finis pour simuler un écoulement 2–D dans un faisceau de tubes mobiles. La déformation du domaine est résolue par une formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Des intégrateurs en temps d'ordre élevé ont été utilisés avec une approche couplée monolithique. Les résultats pour un faisceau de 25 tubes à Reynolds 200 sont très intéressants, les auteurs étant par exemple capable d'observer et de différencier la résonance due aux VIV (Vortex Induced Vibrations) et le déclenchement de l'IFE.

Cependant, comme toutes les méthodes citées précédemment, cette approche a pour limitation le nombre de tubes pris en compte car elle nécessite un maillage suffisamment fin pour capturer les couches limites de chaque tube. Une autre limitation est le faible de nombre de Reynolds atteignable sans modèle de turbulence. Toutefois, ce modèle est très précis et se compare de façon très satisfaisante aux résultats expérimentaux. Il se distingue également par le fait que l'IFE est directement simulée sans passer par un modèle intermédiaire. Par conséquent, les résultats de cet article serviront de référence tout au long de ce rapport en ce qui concerne la simulation numérique de l'IFE dans le cas **monophasique**.

Une approche innovante, à l'origine de ce projet de maîtrise, est d'effectuer une approche moyennée de l'ensemble fluide-structure. C'est ce que l'on appelle l'approche « milieu poreux » et elle fut utilisée pour la première fois pour modéliser des faisceaux de tubes par Ricciardi *et al.* (2009) et Ricciardi (2010), dans le premier cas pour les assemblages combustibles des réacteurs nucléaires et dans le second pour les générateurs de vapeur. La bonne concordance entre les résultats numériques et expérimentaux ont motivé la présente étude.

2.3 Écoulements diphasiques

L'objectif ultime de cette étude est de prédire l'IFE dans le cas d'un écoulement **diphasique**. Par conséquent, il est nécessaire de se pencher sur les différentes façons de modéliser et de simuler un écoulement diphasique. Il est également intéressant de recenser les tentatives faites dans la littérature de simulation de tels écoulements et plus particulièrement celles appliquées à l'étude de l'IFE. Tout d'abord, rappelons que nous ne nous intéressons ici que des écoulements à phase dispersée, c'est-à-dire que l'une des phases (dans notre cas la phase gazeuse) est répartie dans l'autre sous forme discontinue (goutelettes ou bulles). On distingue deux grandes méthodes pour modéliser un écoulement à phase dispersée : l'approche **Euler-Lagrange** et l'approche **Euler-Euler**.

2.3.1 Modèles de type Euler-Lagrange

L'approche Euler-Lagrange (E-L) consiste à résoudre la phase principale comme si c'était une phase continue et à suivre individuellement les bulles (ou gouttelettes) de l'autre phase [pour plus de détails, voir Prosperetti et Tryggvason (2007a)]. La difficulté consiste à développer un bon modèle de fermeture, c'est-à-dire les forces agissant sur la phase dispersée dues à son mouvement relatif. Dans Hu et Celik (2008) et Delnoij *et al.* (1999), les auteurs utilisent un modèle composé de plusieurs forces : masse ajoutée, traînée, portance, gravité (et/ou poussée d'Archimède). Le modèle est validé en comparant les résultats de simulations numériques en 3–D avec des données issues de PIV (Particle Image Velocimetry).
La comparaison est bonne mais la limitation principale d'une telle approche est le nombre de bulles qui peuvent être traitées par calcul. En effet, suivre individuellement chaque bulle s'avère très coûteux en termes de temps de calcul. Cependant, des techniques efficaces de parallélisation des calculs peuvent permettre de simuler de nombreuses bulles avec un temps de calcul raisonnable [cent mille bulles dans Darmana *et al.* (2006)].
D'autres exemples d'utilisation de l'approche E-L peuvent être trouvés dans la littérature et témoignent des difficultés généralement rencontrées lors de la validation de modèles diphasiques. Dans Kitagawa *et al.* (2001), l'accent est mis sur l'analyse mathématique des différents modèles plutôt que sur leur validation. Celle-ci repose uniquement sur la comparaison qualitative entre des résultats de simulations et des photographies d'écoulements diphasiques. Dans Shams *et al.* (2011), la validation est effectuée sur un cas très spécifique d'interaction entre une bulle et le sillage d'un cylindre. La comparaison avec les expériences est très bonne mais la singularité du cas test utilisé ne permet pas de valider complètement le modèle.
L'approche E-L a l'avantage de pouvoir représenter très finement des configurations d'écoulements diphasiques moyennant de bons modèles de fermeture. Toutefois, le coût numérique

prohibitif que cela représenterait dans notre cas (rappelons-le, il s'agit de modéliser l'écoulement dans un faisceau de tubes de grande échelle, donc comportant potentiellement de très nombreuses bulles) nous a poussé à utiliser l'approche E-E.

2.3.2 Modèles de type Euler-Euler

L'approche Euler-Euler (E-E) consiste à décrire de façon eulérienne les deux phases, c'est-à-dire qu'en chaque point de l'espace sont définies une vitesse moyenne pour le liquide et pour le gaz. Il s'agit donc bien d'une modélisation de la configuration réelle de l'écoulement et donc une approximation moins fine qu'une approche E-L. Il est néanmoins possible d'enrichir le modèle en choisissant une distribution de taille de bulles particulière ou en adoptant la technique MUSIG (*MUltiple SIze Group*) [voir Shi *et al.* (2004)].
On obtient alors deux paires d'équations de type Navier–Stokes [voir Prosperetti et Tryggvason (2007a) ou De Lemos (2012)] dans lesquelles interviennent le taux de vide (ou titre volumique) représentant la proportion du volume total occupée par la phase dispersée.
Afin que le système soit bien posé, il faut introduire des forces de couplage diphasique dans les équations de conservation de quantité de mouvement. Dans Deen *et al.* (2001), ces forces sont composées d'une force de masse ajoutée, de traînée et de portance qui sont des fonctions des vitesses du gaz et du liquide et de paramètres déterminés expérimentalement ou analytiquement. Une variante de l'approche E-E dans laquelle la pression est identique dans les deux phases est appelée le « modèle à deux fluides ». Ce modèle a été vérifié dans Azpitarte et Buscaglia (2003) en comparant les résultats issus de simulations numériques avec des données expérimentales et plus précisément la répartition radiale du taux de vide dans un écoulement interne à un tube cylindrique. Le modèle étudié permet de reproduire qualitativement la configuration diphasique observée expérimentalement même si certains écarts existent, imputables selon les auteurs à une turbulence sous-estimée par le modèle numérique.
Le modèle à deux fluides est également applicable à des problèmes d'interaction fluide-structure. En effet, dans Uchiyama (2002), l'auteur simule un tube vibrant dans un écoulement diphasique transverse. De plus, cet article met en évidence un point important : il est extrêmement difficile de valider un modèle diphasique avec interactions fluide-structure car la comparaison avec les expériences est délicate. Dans cet article, le nombre de Strouhal auquel apparaît le phénomène de « lock-in » est comparé mais la validité de l'écoulement diphasique n'est pas confirmée.
On retrouvera cette limitation tout au long du présent rapport, à savoir qu'il est extrêmement difficile de valider le résultat de simulations numériques diphasiques. A cette difficulté s'ajoute celle, spécifique à notre cas, d'un écoulement moyenné en espace. Une alternative consiste à confronter le modèle, non pas à l'expérience, mais à des simulations numériques

à partir d'un modèle plus fin. Dans Biswas *et al.* (2005), les auteurs comparent les résultats du modèle à deux fluides à ceux issus d'un calcul utilisant l'approche E-L considéré comme le modèle de référence. Ces derniers arrivent à la conclusion qu'il est possible d'utiliser un modèle de référence (ici appelé DNS) pour valider et calibrer un modèle plus grossier (en l'occurence le modèle à deux fluides). Ceci suggère qu'il est possible, à défaut d'avoir suffisamment de données expérimentales, d'utiliser un premier modèle numérique pour en valider un second.
Un autre difficulté consiste à calibrer les paramètres utilisés dans les relations de fermeture (par exemple, les coefficients de traînée, masse ajoutée, etc.) car là encore la comparaison avec les expériences dans le cas diphasique est délicate. On utilisera donc des résultats précédemment obtenus dans la littérature. Par exemple, on utilisera simplement la loi de Stokes pour la valeur du coefficient de traînée [comme par exemple dans Oliveira et Issa (1994)]. En ce qui concerne le coefficient de masse ajoutée d'une bulle de gaz, celle-ci ne fait absolument pas consensus dans la littérature. Néanmoins, nous utiliserons la formule dérivée par Béguin (2014).

2.3.3 Non-hyperbolicité des modèles diphasiques

Le modèle à deux fluides décrit précédemment est, en l'état, mathématiquement mal posé. Très tôt, des numériciens et mathématiciens se sont penchés sur le caractère bien posé de ces équations [voir Lyczkowski *et al.* (1978) et Jones et Prosperetti (1985)], c'est-à-dire leur capacité à fournir une solution numérique quelle que soit la discrétisation adoptée. Le problème du modèle diphasique employé provient essentiellement du terme de gradient de pression. Des oscillations numériques, par définition non physiques, sont observées dans la solution, en particuluier au niveau des contours du taux de vide. Si de rares justifications physiques sont parfois avancées [Prosperetti et Tryggvason (2007b)], les modifications apportées aux équations ne sont en général pas ou peu justifiées et sont la plupart du temps adaptées au cas par cas [voir par exemple Coquel *et al.* (1997)]. Malgré ces difficultés, un modèle faisant consensus a émergé dans la littérature [voir par exemple Cordier *et al.* (2014), Delale (2013) ou Panescu (2006)].
Un revue détaillée des différentes tentatives pour « rendre » le problème mathématiquement bien posé est donnée dans Lhuillier *et al.* (2013) et le sujet est discuté plus longuement dans la section 4.3.2 de ce rapport.

2.3.4 Instabilité fluidélastique diphasique

Pour conclure cette revue de littérature, nous nous penchons à présent sur les études publiées à propos de l'instabilité fluidélastique dans un écoulement diphasique, c'est-à-dire une combinaison des deux grands thèmes abordés précédemment. La littérature est relativement avare à ce sujet car il est très spécifique.

Néanmoins, on lira à profit la revue Khushnood *et al.* (2004) dans laquelle sont rapportés les récents développements autour des écoulements diphasiques dans des faisceaux de tubes. Différents modèles de simulation d'écoulements diphasiques sont présentés ainsi que les méthodes de détermination de l'amortissement et de la masse ajoutée diphasiques, indispensables à l'obtention des limites théoriques de l'IFE. On y trouve également des analyses comparées des différentes tentatives de rapprochement entre les résultats expérimentaux de l'IFE diphasique et les modèles théoriques de « type Connors » adaptés aux cas diphasiques. Bien souvent, il s'agit de déterminer le facteur d'instabilité K, évoqué précédemment, en fonction du taux de vide.

Néanmoins, on peut noter l'étude très complète en trois articles réalisée par Nakamura *et al.* (2002). Ces derniers ont déterminé expérimentalement les coefficients de masse ajoutée et d'amortissement dans un écoulement diphasiques, nécessaires à l'obtention de la formule théorique de prédiction de l'IFE. En outre, les auteurs ont réalisé des tests de vibration afin de déterminer expérimentalement la vitesse critique d'IFE pour différentes configurations d'écoulement diphasique. Pour les écoulements homogènes (donc à faible taux de vide), la comparaison entre les résultats expérimentaux et les limites théoriques est bonne. En revanche, ce n'est pas le cas pour des configurations de l'écoulement plus complexes.

L'un des points qui semble focaliser l'attention de la communauté spécialisée dans l'IFE diphasique est la caractérisation de l'amortissement fluide dans le cas diphasique. En effet, il est nécessaire de connaître ce dernier afin de pouvoir appliquer directement la formule de Connors dans le cas diphasique. Dans Pettigrew et Taylor (2004), les auteurs ont mis en évidence que l'amortissement diphasique est prédominant, de l'ordre de 10 fois l'amortissement structurel. Ceci suggère qu'une bonne compréhension de l'amortissement diphasique est indispensable à une prédiction fiable de l'IFE dans le cas d'écoulements diphasiques.

Plus récemment, Sawadogo et Mureithi (2014) ont proposé une approche quasi-stationnaire de l'IFE diphasique, c'est-à-dire d'adapter une méthode fonctionnant dans le cas monophasique à un cas diphasique. Pour ce faire, les auteurs ont mesuré les efforts du fluide diphasique sur les tubes dans le but d'obtenir les coefficients de force et les paramètres de délai expliqués précédemment. Les auteurs ont montré que la dérivée de stabilité change de signe entre un écoulement purement monophasique et un écoulement diphasique à faible taux de vide. Ceci laisse suggérer que le modèle quasi-stationnaire n'est peut être pas en mesure de capturer la

nature physique des forces fluidélastiques dans le cas diphasique.
Notons également les importantes contributions de Perrot (2011) et Shahriary (2007), dont les rapports contiennent de nombreuses données expérimentales sur l'IFE diphasique. Enfin, à ce jour, aucune tentative de simulation numérique de l'IFE diphasique n'a été rapportée dans la littérature scientifique.

CHAPITRE 3

L'APPROCHE MILIEU POREUX

Dans ce chapitre, nous allons développer le modèle du milieu poreux grâce auquel l'écoulement et la structure peuvent être simulés avec un coût de calcul raisonnable. Tout d'abord, nous allons présenter le processus de moyennage en espace puis l'appliquer aux équations de Navier–Stokes afin d'obtenir le modèle du milieu poreux. Une fois le code implémenté, celui-ci est vérifié par la méthode des solutions manufacturées. Le modèle est ensuite étalonné et validé grâce à des comparaisons avec des résultats issus de l'approche DNS. Enfin, des simulations numériques instationnaires sont effectuées sur un faisceau de tubes mobiles soumis à un écoulement transverse et l'instabilité fluidélastique est mise en évidence. Les prédictions de déclenchement de l'IFE sont comparées à de précédents résultats numériques et expérimentaux trouvés dans la littérature.
Ce chapitre reprend dans les grandes lignes les travaux présentés dans une conférence dont les publications sont soumises à un comité de lecture [voir Tixier *et al.* (2014a)].

3.1 Modélisation

3.1.1 Méthode de moyennage

L'étude présentée ici s'appuie sur le moyennage en espace des équations de Navier-Stokes décrivant deux phases. Il est également possible de moyenner ces équations en temps. Cependant, le moyennage en espace est plus pertinent dans notre cas puisque le code doit simuler des vibrations. Les indices $k = g, l$ se rapportent respectivement au gaz et au liquide et l'indice s se rapporte au solide. On adopte une représentation eulérienne pour les fluides en définissant $\mathbf{v_k}$ la vitesse de la phase k et on adopte une représentation lagrangienne pour le solide en définissant $\mathbf{r_j}$ la position du centre du tube j (et donc $\frac{\partial \mathbf{r_j}}{\partial t}$ sa vitesse). Les exposants ^{i} et ^{w} indiquent que la variable est liée respectivement à l'interface gaz-liquide ou à la paroi du solide et les fonctions de Dirac δ^i et δ^w sont les fonctions indicatrices de ces interfaces. Enfin, on note χ_k et χ_s les fonctions indicatrices respectivement de la phase k et du solide.

Le moyennage en espace se fait sur un volume de contrôle Ω_C de taille fixe (cf. Fig. 3.1). On note $\langle \cdot \rangle$ l'opération de moyennage en espace et on a la relation suivante :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\Omega_C} \int_{\Omega_C} \omega(\mathbf{r}) f(\mathbf{x}, t) r \mathrm{d}r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

La fonction $\omega(\mathbf{r})$ est une « fonction de poids » qui modélise le fait que, en un point donné, les effets du fluide ou de la structure environnante sont d'autant plus faibles qu'ils sont éloignés. Cette fonction de poids est d'autant plus pertinente que le volume de contrôle est grand ; elle doit respecter les conditions suivantes :

$$\omega(r \to \infty) = 0,$$
$$\frac{1}{\Omega_C} \int_{\Omega_C} \omega(r) r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 1$$

On vérifie que l'opérateur $\langle \cdot \rangle$ vérifie les propriétés classiques de linéarité et on supposera ici que le cadre mathématique utilisé nous autorise à faire commuter l'opération de moyenne avec les opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$. Dans la suite, on prendra comme volume de contrôle un disque dont le rayon R_C est de l'ordre de grandeur du rayon d'un tube et l'on prendra $\omega(r) = 1$. On suppose donc que R_C est suffisamment petit pour que, dans un volume de contrôle centré sur un point donné, les différentes contributions ne dépendent pas de leur distance à ce point. Ce choix sera justifié *a posteriori* lors de l'établissement du rayon de contrôle optimal dans la section 3.3.2.

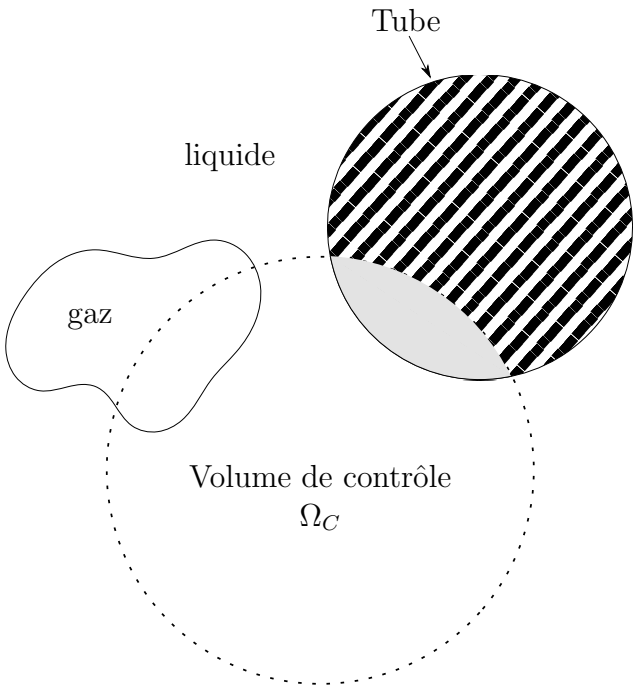


Figure 3.1 Volume de contrôle.

3.1.2 Fonction de porosité

On définit la fonction de porosité Φ comme la moyenne spatiale de la fonction indicatrice du solide :

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \langle \chi_{\mathbf{s}} \rangle$$

En d'autres termes, la fonction de porosité en un point $\mathbf{x}$ a pour valeur la proportion de solide par rapport au fluide dans le volume de contrôle centré en $\mathbf{x}$.

Dans le cas où le volume de contrôle est un disque, une expression analytique de la fonction de porosité existe. En notant R_C le rayon du volume de contrôle, R_T le rayon du tube j et d la distance entre le centre du volume de contrôle et celui du tube, on obtient :

$$\Phi_j(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \begin{cases} R_T^2/R_C^2 & \text{si } d < R_C - R_T \\ \frac{1}{\pi R_C^2}\left[R_T^2 \cos^{-1}\left(\frac{d^2+R_T^2-R_C^2}{2dR_T}\right)\dots\right. & \\ \quad +R_C^2 \cos^{-1}\left(\frac{d^2+R_C^2-R_T^2}{2dR_C}\right)\dots & \\ \left. -\frac{1}{2}\sqrt{4d^2R_T^2-(d^2-R_C^2+R_T^2)^2}\right] & \text{si } d \leq R_C + R_T \\ \\ 0 & \text{si } d > R_C + R_T \end{cases}$$

Par exemple, dans le cas de la Figure 3.1, la valeur de Φ_1 correspond à l'aire coloriée en gris divisée par l'aire du disque de contrôle.

Dans le cas où le volume de contrôle intersecte N tubes, on a $\Phi = \sum_{j=1}^{N} \Phi_j$.

Cette expression analytique (et exacte) de la porosité n'est malheureusement pas $\mathcal{C}^1$ (dérivable et à dérivée continue), en particulier sa dérivée en $d = R_C - R_T$ n'est pas continue. Dans notre cas, une telle condition est indispensable dans la mesure où les dérivées spatiales de la porosité interviennent dans les équations et les fonctions d'interpolation utilisées ne peuvent pas correctement représenter des discontinuités. Une alternative consiste à utiliser une approximation polynômiale de la porosité, à condition qu'elle respecte la condition suivante :

$$\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}) d\Omega = N_t \pi R_T^2, \tag{3.1}$$

ce qui revient à dire que l'intégrale sur tout le domaine de la porosité doit être égale à la surface exacte de l'ensemble des tubes, soit $\int \Phi_j = \pi R_T^2$. Cette condition est essentielle pour garantir la conservation de l'énergie cinétique du système, nous reviendrons sur ce point dans la section 3.1.6. Un polynôme d'ordre 3 remplit ces critères et c'est l'expression suivante de

la porosité que nous utiliserons par la suite :

$$\Phi_j(\mathbf{x},t) = \begin{cases} \Phi_{max}\left\{2\left(\frac{d_j}{R_C+R_T}\right)^3 - 3\left(\frac{d_j}{R_C+R_T}\right)^2 + 1\right\} & \text{si } d_j < R_C + R_T \\ 0 & \text{si } d_j \geq R_C + R_T \end{cases}, \tag{3.2}$$

avec Φ_{max} une constante ajustée de façon à ce que (3.1) soit vérifiée. Les deux expressions possibles pour la porosité sont tracées dans la figure 3.2. La figure 3.3 montre les contours

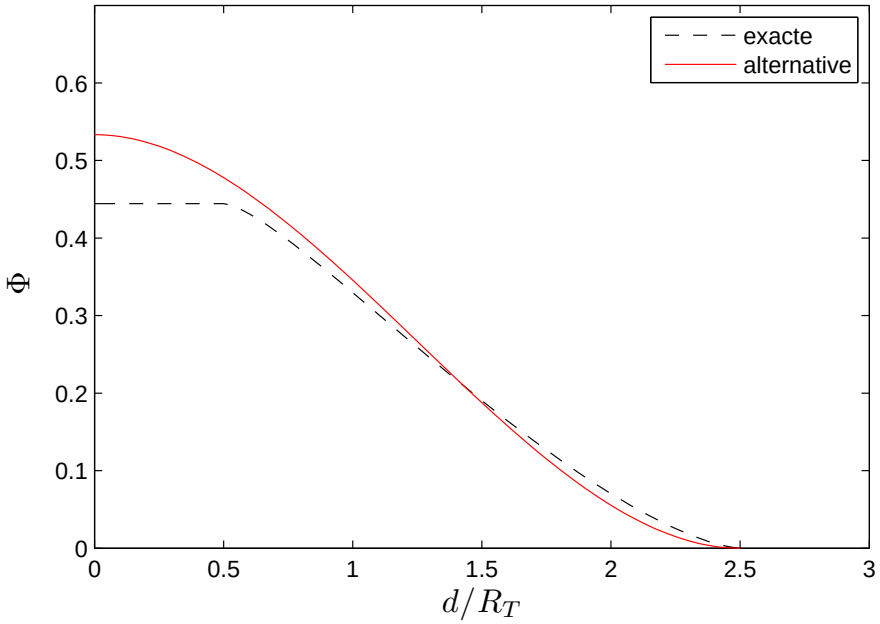


Figure 3.2 Porosité en fonction de la distance au centre du tube avec $R_C/R_T = 1.5$.

de porosité pour un faisceau de tubes (en 2–D). À ce stade, il est important de noter que la porosité est un **champ** scalaire, c'est-à-dire qu'elle est définie en tout point de l'espace (et du temps dans un cas instationnaire) et est une fonction de la position des tubes. Pour le problème discrétisé, la porosité est calculée en chaque nœud du maillage, lesquels ne coïncident pas avec les centres des tubes (cf. figure 3.4).

3.1.3 Dérivation des fonctions indicatrices

Les dérivées spatiales des fonctions indicatrices χ_k sont nulles partout sauf aux interfaces. On distingue deux types d'interface : l'interface gaz-liquide notée avec l'exposant ^{i} et l'interface avec les parois notée avec l'exposant ^{w}. En supposant les parois mobiles, c'est-à-dire $\mathbf{v}_k\delta^w = \frac{\partial \mathbf{r_s}}{\partial t}\delta^w$, on obtient :

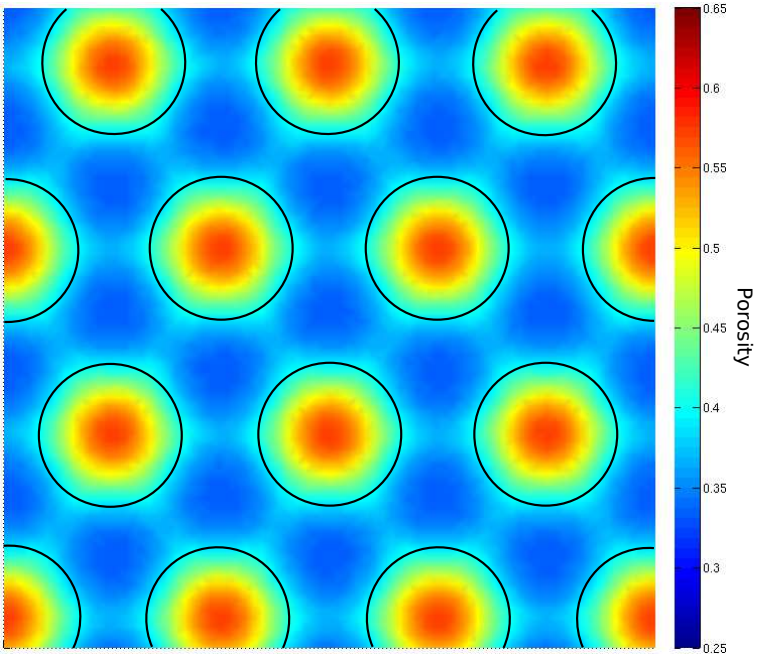


Figure 3.3 Contours de porosité calculés pour un faisceau de tubes triangulaire avec $P/D_T = 1.5$ et $R_C/R_T = 1.5$.

$$\begin{array}{rcccc} \frac{\partial \chi_k}{\partial t} & = & -\mathbf{v^i}.\mathbf{n_k^i}\delta^{\mathbf{i}} & + & -\mathbf{v}_k.\mathbf{n}_k^w\delta^w \\ \nabla\chi_k & = & \mathbf{n}_k^i\delta^i & + & \mathbf{n_k^w}\delta^{\mathbf{w}} \\ \mathbf{v}_k\cdot\nabla\chi_k & = & \underbrace{\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{n}_k^i\delta^i}_{\text{interface gaz-liquide}} & + & \underbrace{\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{n}_k^w\delta^w}_{\text{interface à la paroi}} \end{array} \tag{3.3}$$

L'obtention de ces formules ne présente pas de difficulté particulière, on peut trouver le détail des calculs dans les travaux de Panescu (2006).

3.1.4 Moyennage dans l'espace de la conservation de la masse

De façon générale, la conservation de la masse pour la phase $k = \{g \text{ ou } l\}$ s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_k\mathbf{v}_k) = 0$$

En multipliant par χ_k et en moyennant sur le volume de contrôle, on obtient :

$$\langle\chi_k\frac{\partial \rho_k}{\partial t}\rangle + \langle\chi_k\nabla\cdot(\rho_k\mathbf{v}_k)\rangle = 0,$$

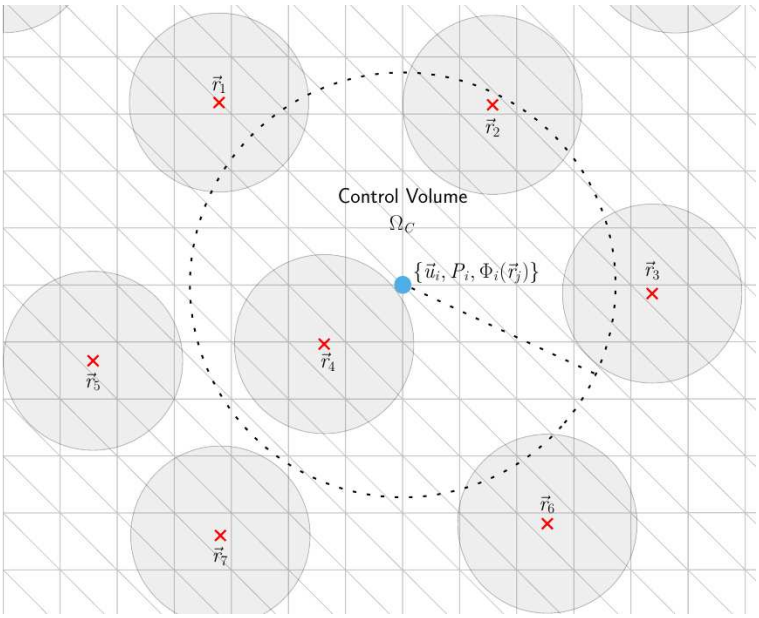


Figure 3.4 Discrétisation du problème.

où :

$$\chi_k = \begin{cases} \chi_{k=g} = \begin{cases} 1 & \text{dans la phase gazeuse} \\ 0 & \text{dans la phase liquide} \end{cases} \\ \chi_{k=l} = \begin{cases} 1 & \text{dans la phase liquide} \\ 0 & \text{dans la phase gazeuse} \end{cases} \end{cases}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \langle \chi_k \frac{\partial \rho_k}{\partial t} \rangle &= \frac{\partial \langle \chi_k \rho_k \rangle}{\partial t} - \langle \rho_k \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \rangle, \\ &= \frac{\partial \langle \chi_k \rho_k \rangle}{\partial t} + \langle \rho_k \mathbf{v^i} \cdot \mathbf{n_k^i} \delta^{\mathbf{i}} \rangle + \langle \rho_{\mathbf{k}} \mathbf{v_k} \cdot \mathbf{n_k^w} \delta^{\mathbf{w}} \rangle \end{aligned}$$

Et que :

$$\begin{aligned} \langle \chi_k \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) \rangle &= \nabla \cdot \langle \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k \rangle - \langle \nabla \chi_k \cdot \rho_k \mathbf{v}_k \rangle, \\ &= \nabla \cdot \langle \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k \rangle - \langle \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k^i \delta^i \rangle - \langle \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k^w \delta^w \rangle \end{aligned}$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit donc, pour la phase k :

$$\frac{\partial \langle \chi_k \rho_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k \rangle = \langle \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v^i}) \cdot \mathbf{n_k^i} \delta^{\mathbf{i}} \rangle$$

On fait l'hypothèse importante qu'il n'y a **pas de transfert de masse** entre la phase liquide et la phase solide, ce qui est équivalent à dire que $\rho_k(\mathbf{v}_k - \mathbf{v^i}).\mathbf{n_k^i}\delta^\mathbf{i} = \mathbf{0}$. De plus, on fait l'hypothèse d'un écoulement incompressible, donc $\langle\rho_k\rangle = \rho_k = Cte$. On obtient donc :

$$\frac{\partial\langle\chi_k\rangle}{\partial t} + \nabla\cdot\langle\chi_k\mathbf{v}_k\rangle = 0 \tag{3.4}$$

On définit à présent les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k &= \langle\chi_k\rangle/(1-\Phi) \\
\langle\rho_k\rangle &= \langle\chi_k\rho_k\rangle/\left((1-\Phi)\varepsilon_k\right) \\
\langle\mathbf{v_k}\rangle &= \langle\chi_k\rho_k\mathbf{v}_k\rangle/\left((1-\Phi)\varepsilon_k\rho_k\right)
\end{aligned}$$

L'équation (3.4) se réécrit donc :

$$\frac{\partial(\varepsilon_k(1-\Phi))}{\partial t} + \nabla\cdot\left\{\varepsilon_k(1-\Phi)\langle\mathbf{v_k}\rangle\right\} = 0 \tag{3.5}$$

On vient d'obtenir l'équation de continuité pour le modèle dit « à deux fluides » (two-fluid flow model en anglais) bien connu dans la littérature diphasique. L'équation (3.5) sera donc utilisée dans le chapitre consacré aux écoulements diphasiques (voir le chapitre 4). On va à présent faire l'hypothèse que l'**écoulement est homogène**, c'est-à-dire que les deux phases ont dans tout le domaine fluide la même vélocité : $\mathbf{v_g} = \mathbf{v_l} = \mathbf{v}$. On va donc sommer $(3.5)_{k=g}$ et $(3.5)_{k=l}$ pour obtenir une seule équation de conservation de la masse correspondant aux deux phases. Par définition des fonctions indicatrices, on rappelle que :

$$\begin{aligned}
&\langle\chi_g\rangle + \langle\chi_l\rangle + \langle\chi_s\rangle = 1, \\
&\Phi = \langle\chi_s\rangle
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\varepsilon_g + \varepsilon_l = \frac{\langle\chi_g\rangle + \langle\chi_l\rangle}{1-\Phi} = \frac{1-\langle\chi_s\rangle}{1-\Phi} = 1$$

Dans la suite, on posera donc $\varepsilon_g = \varepsilon$ et $\varepsilon_l = 1-\varepsilon$. On obtient, en posant $\mathbf{u} = \langle\mathbf{v}\rangle$:

$$\boxed{\frac{\partial(1-\Phi)}{\partial t} + \nabla\cdot\left\{(1-\Phi)\mathbf{u}\right\} = 0} \tag{3.6}$$

3.1.5 Moyennage dans l'espace de la conservation de la quantité de mouvement

De façon générale, la conservation de la quantité de mouvement pour la phase $k = \{g \text{ ou } l\}$ s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial \rho_k \mathbf{v}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_k + \rho_k \mathbf{g}.$$

En multipliant par χ_k et en moyennant sur le volume de contrôle, on obtient :

$$\langle \chi_k \frac{\partial \rho_k \mathbf{v}_k}{\partial t} \rangle + \langle \chi_k \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k) \rangle = \langle \chi_k \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma_k} \rangle.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \langle \chi_k \frac{\partial \rho_k \mathbf{v}_k}{\partial t} \rangle &= \frac{\partial \langle \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k \rangle}{\partial t} - \langle \rho_k \mathbf{v}_k \frac{\partial \chi_k}{\partial t} \rangle, \\ &= \frac{\partial \langle \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k \rangle}{\partial t} + \langle \rho_k (\mathbf{v}^i \cdot \mathbf{n}_k^i) \mathbf{v}_k \delta^i \rangle + \langle \rho_k (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k^w) \mathbf{v}_k \delta^w \rangle \end{aligned}$$

et que :

$$\langle \chi_k \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k) \rangle = \nabla \cdot \langle \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k \rangle - \langle \rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k^i \delta^i \rangle - \langle \rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k^w \delta^w \rangle$$

et enfin que :

$$\langle \chi_k \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma_k} \rangle = \nabla \cdot \langle \chi_k \boldsymbol{\sigma_k} \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma_k} \cdot \mathbf{n}_k^i \delta^i \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma_k} \cdot \mathbf{n}_k^w \delta^w \rangle.$$

Plusieurs simplifications apparaissent en sommant les différents termes. Tout d'abord, on a l'identité tensorielle suivante : $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$. Par conséquent on a :

$$\langle \rho_k (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k^w) \mathbf{v}_k \delta^w \rangle - \langle \rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n}_k^w \delta^w \rangle = 0.$$

Ensuite, on rappelle l'hypothèse selon laquelle il n'y a pas de transfert de masse entre les phases. Ainsi :

$$\langle \rho_k (\mathbf{v^i} \cdot \mathbf{n_k^i}) \mathbf{v_k} \delta^\mathbf{i} \rangle - \langle \rho_\mathbf{k} \mathbf{v_k} \otimes \mathbf{v_k} \cdot \mathbf{n_k^i} \delta^\mathbf{i} \rangle = \langle (\mathbf{v^i} - \mathbf{v_k}) \cdot \mathbf{n_k^i} \rho_\mathbf{k} \mathbf{v_k} \delta^\mathbf{i} \rangle = \mathbf{0}$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc, pour la phase k :

$$\frac{\partial \langle \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k \rangle = \nabla \cdot \langle \chi_k \boldsymbol{\sigma_k} \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma_k} \cdot \mathbf{n}_k^i \delta^i \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma_k} \cdot \mathbf{n}_k^w \delta^w \rangle$$

On définit à présent les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
\langle\rho_k\rangle\langle\mathbf{v_k}\rangle\otimes\langle\mathbf{v_k}\rangle &= \langle\chi_k\rho_k\mathbf{v}_k\otimes\mathbf{v}_k\rangle/((1-\Phi)\varepsilon_k)+\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{R_e}}\\
\langle\boldsymbol{\sigma_k}\rangle &= \langle\chi_k\boldsymbol{\sigma_k}\rangle/((1-\Phi)\varepsilon_k)\\
\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{tot}} &= \langle\boldsymbol{\sigma_k}\rangle+\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{R_e}}
\end{aligned}$$

On fait l'hypothèse que l'on peut modéliser les effets turbulents par un phénomène de viscosité turbulente, c'est-à-dire : $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{R_e}}=2\mu_k^T\langle\boldsymbol{d}_k\rangle$, avec $\boldsymbol{d}_k=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v_k}+\nabla\mathbf{v_k^T})$. Cette modélisation du tenseur de Reynolds peut sembler simpliste mais elle est suffisante dans la mesure où on suppose que le phénomène d'IFE ne dépend pas de la turbulence. On a donc, en posant $\mu_k'=\mu_k^T+\mu_k$:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{tot}}=2\mu_k'\langle\boldsymbol{d}_k\rangle-\langle p\rangle\boldsymbol{I}$$

L'équation de la conservation de quantité de mouvement se réécrit donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left\{\rho_k\varepsilon_k(1-\Phi)\langle\mathbf{v}_k\rangle\right\}}{\partial t}+\nabla\cdot\left\{\rho_k\varepsilon_k(1-\Phi)\langle\mathbf{v}_k\rangle\otimes\langle\mathbf{v}_k\rangle\right\} &= \nabla\cdot\left\{\varepsilon_k(1-\Phi)\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{tot}}\right\}\\
&\quad-\langle\boldsymbol{\sigma_k}\cdot\mathbf{n}_k^i\delta^i\rangle-\langle\boldsymbol{\sigma_k}\cdot\mathbf{n}_k^w\delta^w\rangle
\end{aligned}\tag{3.7}$$

On vient d'obtenir l'équation de conservation de quantité de mouvement pour le modèle dit « à deux fluides ». L'équation (3.7) sera donc utilisée dans le chapitre consacré aux écoulements diphasiques (voir le chapitre 4).
Dans le cas d'un écoulement **monophasique**, l'équation précédente se simplifie pour devenir :

$$\boxed{\begin{aligned}
\rho\frac{\partial(1-\Phi)\mathbf{u}}{\partial t}+\rho\nabla\cdot\left\{(1-\Phi)\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\right\} &= -\nabla\left\{(1-\Phi)P\right\}+2\mu\nabla\cdot\left\{(1-\Phi)\boldsymbol{D}\right\}\\
&\quad-\mathbf{f}_{\Omega_C}^{F\to S}
\end{aligned}},\tag{3.8}$$

avec

$$\boxed{\mathbf{f}_{\Omega_C}^{F\to S}=\langle\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}^w\delta^w\rangle},\tag{3.9}$$

où $P=\langle p\rangle$ et $\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla u}+\boldsymbol{\nabla u}^T\right)$.

3.1.6 Relations de fermeture

L'objet de cette section est de relier le terme $\mathbf{f}_{\Omega_C}^{F\to S}$ de la conservation de quantité de mouvement pour le fluide diphasique à l'équation du mouvement des tubes. Cette étape est cruciale car c'est le terme responsable, avec la porosité, du couplage entre les équations du fluide et du solide. Ce terme ne peut pas être calculé exactement, il doit donc être **modélisé**.

On va faire l'hypothèse que, pour un tube j donné, le fluide contenu dans le volume de contrôle Ω_C contribue à $\mathbf{F}_j^{F\to S}$, la résultante des forces fluides agissant sur le tube solide, dans le rapport $\frac{\Omega_C \Phi_j}{\pi R_T^2}$ (cf. Fig. 3.5). En d'autres termes :

$$\mathbf{f}_{\Omega_C}^{F\to S} = \frac{\Phi_j}{\pi R_T^2} \mathbf{F}_j^{F\to S}. \tag{3.10}$$

Pour reprendre l'exemple de la figure 3.5, la force $\Omega_C \mathbf{f}_{\Omega_C}^{F\to S}$ est égale à $\mathbf{F}_j^{F\to S}$ multipliée par le rapport de l'aire coloriée en gris sur la section du tube. Cette hypothèse peut-être justifiée en considérant que la proportion du tube qui participe à la variation de quantité de mouvement d'un volume de contrôle donné correspond à la surface qui est intersectée par le volume de contrôle. Une explication plus détaillée est disponible dans Prosperetti et Tryggvason (2007b). Dans le cas où l'intégralité du tube se trouve dans le volume de contrôle, cette hypothèse est consistante car on a alors l'égalité :

$$\Omega_C \mathbf{f}_{\Omega_C}^{F\to S} = \mathbf{F}_j^{F\to S}.$$

Dans le cas général, en revanche, l'équation (3.10) n'est pas exacte. En effet, cette dernière implique que, quel que soit le volume de contrôle intersectant un tube donné, la force volumique associée est toujours colinéaire à la force totale sur ce tube. C'est faux en général car la force totale est une somme de forces élémentaires, sur le contour du tube, ayant des directions *a priori* différentes. Cela pourrait expliquer pourquoi le couplage entre des tubes voisins n'est pas correctement représenté par ce modèle. Une amélioration du modèle consisterait à ajouter un terme proportionnel à $\boldsymbol{\nabla}\Phi$ afin de tenir compte du fait que la direction des forces partielles peut être différente de celle de la force totale.

3.1.7 Équations de mouvement pour les tubes

Nous allons à présent prendre en compte le comportement des tubes. En supposant que ceux-ci peuvent-être modélisés par de simples systèmes masse-ressort amortis, l'équation du mouvement pour un tube j s'écrit :

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j + c_j \dot{\mathbf{r}}_j + k_j \mathbf{r}_j = \mathbf{F}_j^{F\to S}. \tag{3.11}$$

D'après les équations (3.11) et (3.10), on constate que la relation suivante doit être satisfaite pour que l'énergie du système soit conservée :

$$\int_\Omega \mathbf{f}_{\Omega_C}^{F\to S} = \sum_j \mathbf{F}_j^{F\to S}. \tag{3.12}$$

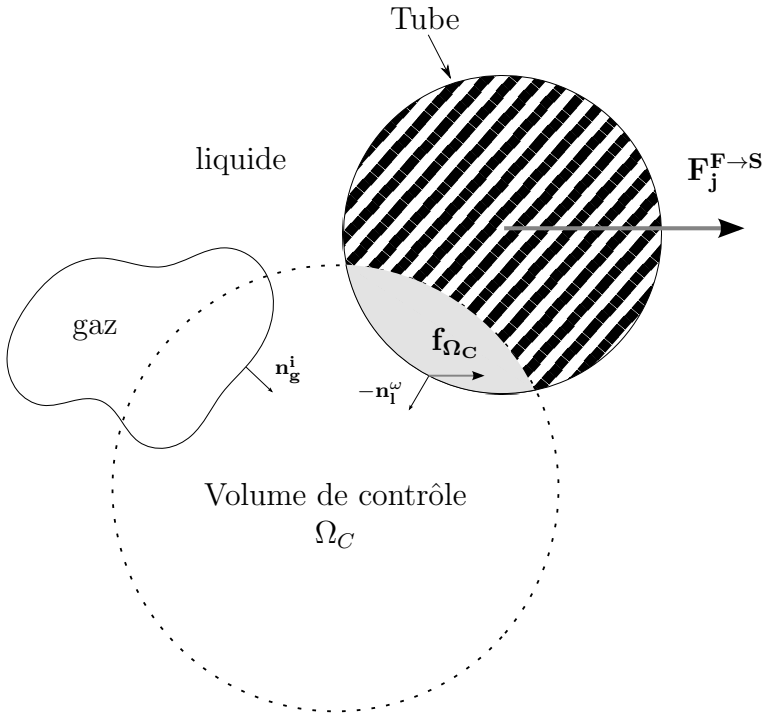


Figure 3.5 Efforts fluides du volume de contrôle.

En d'autres termes, les forces par unité de surface $\mathbf{f}_{\Omega_C}^{F\to S}$ intégrées sur tout le domaine doivent être égales à la somme des forces du fluide sur les tubes. Comme mentionné plus haut (voir la sous-section 3.1.2), la porosité vérifie la condition suffisante suivante :

$$\int_{\Omega} \Phi_j = \pi R_T^2. \tag{3.13}$$

En effet, on retrouve (3.12) en injectant (3.13) dans (3.10). La suite de cette sous-section est consacrée à la **modélisation** du terme de force $\mathbf{F}_j^{F\to S}$. On suppose qu'il peut-être décomposé en trois termes : une force due à l'effet de **masse ajoutée** $\mathbf{F}_M$, de **traînée** $\mathbf{F}_D$ et de **portance** $\mathbf{F}_L$. Cette décomposition est très classique et on la retrouve à de multiples reprises dans la littérature (voir Darmana *et al.* (2006); Miloh (2003); Prosperetti et Tryggvason (2007b) par exemple).

$$\mathbf{F}_j^{F\to S} = \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_L, \tag{3.14}$$

avec :

$$\mathbf{F}_M = \rho\pi R_T^2 \left((1 + C_M) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - C_M \ddot{\mathbf{r}}_j \right), \tag{3.15}$$

$$\mathbf{F}_D = \rho R_T C_D \|\mathbf{u} - \dot{\mathbf{r}}_j\| \left(\mathbf{u} - \dot{\mathbf{r}}_j\right), \tag{3.16}$$

$$\mathbf{F}_L = \rho R_T C_L \left(\mathbf{u} - \dot{\mathbf{r}}_j\right) \times \left(\nabla \times \mathbf{u}\right). \tag{3.17}$$

où C_M, C_D et C_L sont respectivement les coefficients de masse ajoutée, traînée et portance et $\mathbf{u}$ est la vitesse moyenne du fluide. Dans notre cas, le modèle utilisé a été développé dans Delnoij *et al.* (1999) et Darmana *et al.* (2006) pour modéliser le mouvement de bulles immergées dans un liquide.

La force de masse ajoutée (voir Eq. 3.15) est proportionnelle à l'accélération relative du solide par rapport au fluide, elle modélise la résistance opposée par le fluide au mouvement du solide. On peut l'interpréter comme l'énergie cinétique additionnelle que doit recevoir le solide pour mouvoir le fluide qui l'entoure. La force de traînée (voir Eq. 3.16) est porportionnelle au carré de la vitesse relative du solide. Elle correspond aux effets (seuls) de la pression dynamique.

La force de portance est beaucoup moins bien établie que les deux précédentes. L'expression fournie dans 3.16 est consistante avec la majeure partie la littérature [voir par exemple Prosperetti et Tryggvason (2007b)] et fait intervenir le produit vectorial de la vitesse relative avec la vorticité moyenne autour de l'obstacle. Elle concerne généralement de petites particules solides ou des bulles immergées dans un fluide au repos ou dans un écoulement à faible vorticité.

Cette expression est souvent utilisée en CFD mais n'est pas adaptée à notre approche de milieu poreux. Le fait d'introduire la vorticité du fluide est un idée attribuable à Auton (1987) dont l'objectif était de modéliser les forces de portance agissant sur un corps sphérique plongé dans un écoulement non visqueux soumis à un cisaillement uniforme et faible. Dans le cas d'un écoulement dans un faisceau de tubes ce n'est clairement pas le cas : la vorticité n'est ni faible ni uniforme et suit un motif non trivial en raison de la géométrie complexe du problème et des nombres de Reynolds relativement élevés mis en jeu. Il suffit pour s'en convaincre de visualiser le champ de vorticité calculé par la DNS dans un faisceau de tubes à $\mathrm{Re} = 133$ (voir la figure 3.6). On constate également que, dans le cas du milieu poreux, la vorticité est nulle au niveau du centre des tubes : la formule d'Auton est donc inutilisable dans notre cas. Une autre raison pour laquelle cette force est inutilisable dans notre cas est que l'approche du milieu poreux consiste à résoudre un champ **moyen** de vitesse. Ainsi, le produit $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$ ne correspond pas aux termes dérivés pas Auton. Pour ces raisons, l'ajout de cette contribution de portance n'a pas donné de résultats satisfaisants, par conséquent la force $\mathbf{F}_L$ a été retirée du modèle. Il est cependant important de noter que les deux forces restantes ont une composante dans chaque direction : celle de l'écoulement et celle transverse (souvent appelée direction de portance). Ainsi, la force de traînée a également une composante dans la direction transverse. Le modèle résultant est alors davantage similaire à l'approche de Morison [voir Molin (2002)] qui s'est intéressé au calcul des forces hydrodynamiques sur les structures en mer. Il sera démontré dans la sous-section 3.3.2 que l'ajout d'une force proportionnelle à la vorticité n'est pas nécessaire dans notre cas. En effet, la force de traînée $\mathbf{F}_D$ a deux

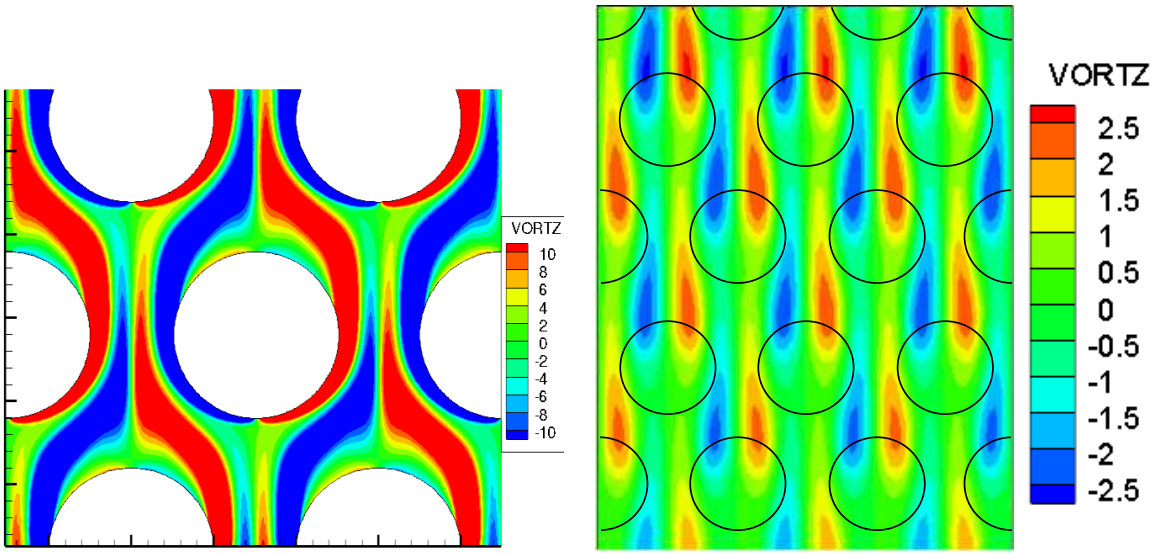


Figure 3.6 Contours de vorticité dans un faisceau de tubes (Re = 133, écoulement de bas en haut) avec un calcul DNS (gauche) et la formulation milieu poreux (droite).

composantes : l'une dans la direction de l'écoulement et l'autre dans la direction transverse. Cette dernière est en bon accord avec la composante transverse en DNS dans la limite des petits déplacements.

Enfin, rappelons que la vitesse du fluide $\mathbf{u}$ introduite dans le modèle est la vitesse moyenne autour du tube. Par construction, la vitesse moyenne $\mathbf{u_j}$ autour du tube j situé en $\mathbf{r_j}$ est exactement $\mathbf{u}(r_j)$. L'expression des forces est donc définie dans tout le domaine de calcul et la façon dont la vitesse $\mathbf{u}$ est calculée dans le cas discret sera expliquée dans la section suivante.

3.2 Méthodes numériques

3.2.1 Formulation variationnelle et méthode des éléments finis

Dans un souci de clarté des équations, on définit dans la suite :

$$\boxed{\alpha = 1 - \Phi \qquad \text{et} \qquad \mathbf{f_{\Omega_C}} = \mathbf{f_{\Omega_C}^{F \to S}}}$$

Soient W_u, W_v et W_P des fonctions-test admissibles respectivement pour la composante horizontale de la vitesse moyenne u, sa composante verticale v et la pression moyenne P. En anticipant sur le choix de ces fonctions-test, W_u, W_v sont choisies égales à W. On obtient la formulation variationnelle associée au problème en multipliant les équations (3.6), $(3.8)_x$

et $(3.8)_y$ par les fonctions-test et en intégrant sur un domaine Ω :

Conservation de la masse :

$$\underbrace{\int_\Omega W_P \frac{\partial \alpha}{\partial t}}_{\boxed{1}} + \underbrace{\int_\Omega W_P \frac{\partial \alpha u}{\partial x}}_{\boxed{2}} + \underbrace{\int_\Omega W_P \frac{\partial \alpha v}{\partial y}}_{\boxed{3}} = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement projetée sur $\mathbf{e_x}$:

$$\overbrace{\int_\Omega \rho W \frac{\partial \alpha u}{\partial t}}^{\boxed{4}} + \overbrace{\int_\Omega \rho W \left(\frac{\partial \alpha u^2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha uv}{\partial y} \right)}^{\boxed{5}} - \overbrace{\int_\Omega \frac{\partial W}{\partial x} \left(-P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \alpha}^{\boxed{6}}$$
$$\underbrace{- \int_\Omega \frac{\partial W}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \alpha}_{\boxed{7}} - \underbrace{\int_\Omega W \mathbf{f_{\Omega_C}} \cdot \mathbf{e_x}}_{\boxed{8}} = \underbrace{\int_{\Gamma_N} W f_x}_{\boxed{9}}$$

Conservation de la quantité de mouvement projetée sur $\mathbf{e_y}$:

$$\overbrace{\int_\Omega \rho W \frac{\partial \alpha v}{\partial t}}^{\boxed{10}} + \overbrace{\int_\Omega \rho W \left(\frac{\partial \alpha v^2}{\partial y} + \frac{\partial \alpha uv}{\partial x} \right)}^{\boxed{11}} - \overbrace{\int_\Omega \frac{\partial W}{\partial y} \left(-P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \alpha}^{\boxed{12}}$$
$$\underbrace{- \int_\Omega \frac{\partial W}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \alpha}_{\boxed{13}} - \underbrace{\int_\Omega W \mathbf{f_{\Omega_C}} \cdot \mathbf{e_y}}_{\boxed{14}} = \underbrace{\int_{\Gamma_N} W f_y}_{\boxed{15}}$$

On a ici écrit la formulation variationnelle pour le problème **continu**. Notons que les termes $\boxed{6}, \boxed{9}$ *et* $\boxed{12}, \boxed{15}$ ont été obtenus en effectuant une intégration par parties, opération que l'on suppose licite dans notre cas. Écrivons à présent le problème discret. On suppose que l'on peut découper le domaine de calcul en une somme finie d'éléments que l'on appellera génériquement K. Dans chaque élément, on suppose que l'on peut interpoler la solution y à partir des valeurs nodales Y_j grâce à des fonctions d'interpolation Ψ_j. Soit y_h la solution approchée, on a alors la relation suivante dans chaque élément K :

$$y \simeq y_h = \sum_j Y_j \Psi_j$$

Nous utilisons la méthode de Galerkin qui consiste à choisir comme fonctions-test les fonctions d'interpolations. On choisit comme fonctions-test les interpolants issus de la méthode des éléments finis :

$$\begin{array}{lll} u = \sum_j U_j N_j & , \quad v = \sum_j V_j N_j & , \quad W = \sum_i N_i \\ P = \sum_j P_j M_j & , \quad \phi = \phi_j & , \quad W_P = \sum_i M_i \end{array}$$

On obtient alors la formulation variationnelle élémentaire en choisissant l'élément K comme domaine Ω. Le détail de chaque terme est donné ci-dessous :

$$\boxed{1} = \int_K M_i \frac{\partial \phi_j}{\partial t}$$

$$\boxed{2} = U_j \int_K M_i \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial x}$$

$$\boxed{3} = V_j \int_K M_i \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial y}$$

$$\boxed{4} = \rho \int_K N_i N_j \frac{\partial \phi_j U_j}{\partial t}$$

$$\boxed{5} = \rho U_j^2 \int_K N_i \frac{\partial \phi_j N_j^2}{\partial x} + \rho U_j V_j \int_K N_i \frac{\partial \phi_j N_j^2}{\partial y}$$

$$\boxed{6} = -P_j \int_K \frac{\partial N_i}{\partial x} M_j \phi_j + 2\mu U_j \int_K \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j$$

$$\boxed{7} = \mu U_j \int_K \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j + \mu V_j \int_K \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j$$

$$\boxed{8} = \int_K N_i \mathbf{f_{\Omega_C, j}} \cdot \mathbf{e_x}$$

$\boxed{9}$ = Conditions aux limites de type Neumann

$$\boxed{10} = \rho \int_K N_i N_j \frac{\partial \phi_j V_j}{\partial t}$$

$$\boxed{11} = \rho V_j^2 \int_K N_i \frac{\partial \phi_j N_j^2}{\partial y} + \rho U_j V_j \int_K N_i \frac{\partial \phi_j N_j^2}{\partial x}$$

$$\boxed{12} = -P_j \int_K \frac{\partial N_i}{\partial y} M_j \phi_j + 2\mu V_j \int_K \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j$$

$$\boxed{13} = \mu U_j \int_K \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j + \mu V_j \int_K \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j$$

$$\boxed{14} = \int_K N_i \mathbf{f_{\Omega_C, j}} \cdot \mathbf{e_y}$$

$\boxed{15}$ = Conditions aux limites de type Neumann

Le choix du type d'élément utilisé n'est pas anodin : la géométrie et le nombre de nœuds accordés à chaque variable ont un impact sur la précision, le temps de calcul et quelquefois la stabilité de la solution numérique. Dans notre cas, la précision n'est pas le critère le plus important puisque de nombreuses approximations ont déjà été faites lors de la modélisation. Autrement dit, il est inutile de chercher à obtenir une solution numérique très précise à partir d'une modélisation qui est intrinsèquement peu précise. Nous avons donc fait le choix d'utiliser des éléments triangulaires de Taylor Hood d'ordre 2 (aussi appelés P2–P1) qui respectent la condition de stabilité dite de Babuska-Brezzi [voir Boffi *et al.* (2013)]. Ce type d'élément possède 3 nœuds pour la pression situés aux sommets du triangle et 6 nœuds pour les composantes de la vitesse. D'autre part, comme expliqué précédemment, les tubes sont matérialisés par la fonction de porosité mais ne font pas partie de la géométrie du problème. Par conséquent, il est naturel de choisir un maillage uniforme et structuré. Rappelons également que, dans le cas de simulations instationnaires, le maillage reste fixe alors même les tubes sont libres de se déplacer. La figure 3.7 montre un maillage structuré et uniforme contenant 8 éléments, 25 nœuds de vitesse et 9 nœuds de pression.

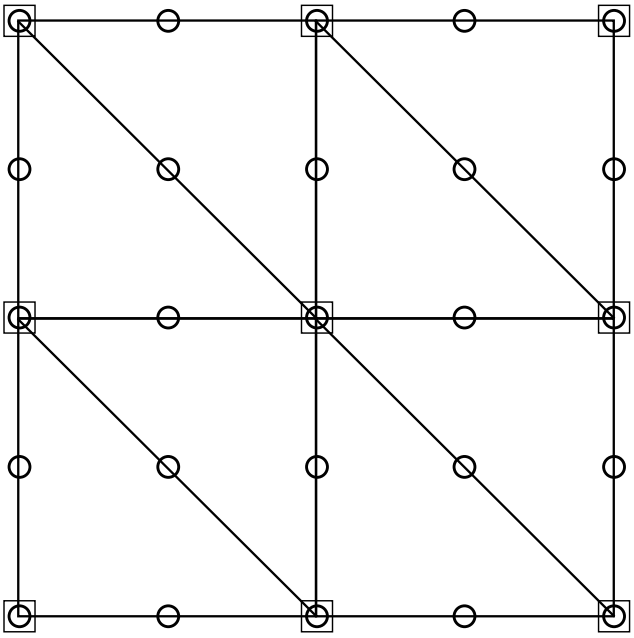


Figure 3.7 Exemple de maillage type (les nœuds de pression sont matérialisés par des carrés et les nœuds de vitesse par des cercles).

3.2.2 Méthodes numériques

L'outil utilisé pour ce projet est le logiciel éléments-finis CADYF. Les détails concernant le fonctionnement de ce logiciel peuvent être trouvés dans la littérature (voir Hay *et al.* (2014b)

et Charlot (2011) par exemple). Les aspects les plus importants sont résumés ci-dessous :

— Le système d'équations est résolu en utilisant une formulation mixte, appelée aussi « vitesse-pression ». La pression est alors interprétée comme étant un multiplicateur de Lagrange qui impose la condition d'incompressibilité.
— Aucune méthode de stabilisation n'est nécessaire car les nombres de Reynolds explorés sont relativement faibles ($\mathrm{Re} \leq 400$).
— L'intégration temporelle est réalisée par un algorithme « hp-adaptatif » (*i.e.* le pas de temps et l'ordre sont adaptatifs) basé sur les *Backward Differentiation Formulas* (BDF). Ces schémas d'intégration ainsi que l'algorithme associé sont expliqués en détail dans Hay *et al.* (2014a). D'autre part, le même schéma d'intégration temporelle est utilisé à la fois pour l'écoulement et la structure (dans notre cas les tubes).
— Une stratégie « tout-couplé » est choisie, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule matrice globale pour le fluide et la structure. Le système creux est résolu par factorisation LU avec le solveur parallèle PARDISO [voir Schenk et Gärtner (2004)].
— Le problème non linéaire est résolu grâce à la méthode de Newton. Soit $\mathbf{U}$ le vecteur solution de l'itération précédente et $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ le résidu, on résout le système :

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} = -\mathbf{R}(\mathbf{U})$$

Il est très difficile d'obtenir une expression analytique du Jacobien ($\partial \mathbf{R}(\mathbf{U})/\partial \mathbf{U}$). Par conséquent, on en calcule une valeur approximée, appelée le Jacobien numérique, grâce un schéma de différences finies décentré d'ordre 1. Toutefois, le calcul du Jacobien numérique peut s'avérer très coûteux et dans certains cas on ne le recalcule pas à chaque itération. On utilise alors une méthode de factorisation adaptative qui consiste à ne calculer le Jacobien que lorsque la convergence devient trop lente.
— Le calcul des systèmes élémentaires, leur assemblage dans le système global ainsi que la résolution de ce dernier sont exécutés en parallèle grâce à un algorithme de mémoire partagée basée basée sur l'interface de programmation *OpenMP*.

3.3 Vérification, validation et étalonnage

Les équations du modèle exposé dans la section 3.1 ont été implémentées dans le logiciel CADYF. L'étape suivante consiste à vérifier que l'implémentation a été correctement effectuée (vérification). Puis les résultats obtenus sont comparés à des résultats expérimentaux ou numériques obtenus indépendamment (validation). Enfin, les différents paramètres du modèle (par exemple le rayon de contrôle) sont ajustés de façon à reproduire le plus fidèlement

possible les résultats précédents (étalonnage). Dans notre cas, le nombre de paramètres est faible : la validation et l'étalonnage de certains d'entre eux sont effectués simultanément.

3.3.1 Vérification par la méthode des solutions manufacturées

De façon générale, la vérification du code a pour objectif de certifier que les équations du modèle ont été correctement implémentées. Lorsque le pas de temps ou le pas d'espace tendent vers zéro, la solution numérique doit tendre vers la solution exacte avec un certain taux de convergence. La méthode des solutions manufacturées (MMS) consiste à vérifier que ce taux de convergence théorique est asymptotiquement atteint en *forçant* la solution numérique à converger vers une solution analytique donnée. Ainsi, on est en mesure de calculer l'**erreur exacte**. Cette méthode est un outil très puissant de vérification [voir Roache (1998)] et on fait l'hypothèse qu'il est suffisant dans notre cas.
La vérification générale de la discrétisation spatiale de la formulation éléments-finis a déjà été présentée dans Étienne *et al.* (2004) et la discrétisation temporelle par les schémas BDF dans Hay *et al.* (2014b) à la fois pour des maillages fixes et déformables. Ici, nous nous restreindrons à la vérification de l'implémentation relative à l'approche des milieux poreux dans un cas stationnaire.
La méthode MMS consiste à choisir une solution analytique, puis à ajuster les conditions aux limites et les termes source de façon à ce que la solution numérique converge vers la solution analytique souhaitée. Ainsi, nous avons choisi une expression analytique pour la pression p_{MS}, les deux composantes de la vitesse $\mathbf{u}_{MS}$ (u_{MS} pour la composante selon l'axe x et v_{MS} selon l'axe y) et la porosité Φ_{MS} :

$$\begin{cases} u_{MS} &= x^2 \\ v_{MS} &= y^2 \\ p_{MS} &= xy \\ \Phi_{MS} &= 1 - \frac{1}{x^2 y^2} \end{cases}$$

Le domaine de calcul est un carré (voir la figure 3.8) de côté unité. Les conditions aux limites correspondant à la solution analytique manufacturée sont appliqués à son bord : des conditions de Dirichlet sur 3 des 4 côtés et une condition de Neumann sur le dernier afin de fixer un niveau de pression. Un tube est ajouté au centre du domaine afin de vérifier que le couplage fluide-structure est correctement implémenté (on vérifie ainsi par exemple que la vitesse moyenne autour du tube est correctement évaluée). La présence de ce tube est matérialisée par un terme source (voir (3.16)). Il est important de remarquer que, pour les besoins de l'exercice de vérification, la porosité manufacturée ne correspond pas du tout

au champ de porosité normalement induit par un tube. Afin de converger vers la solution

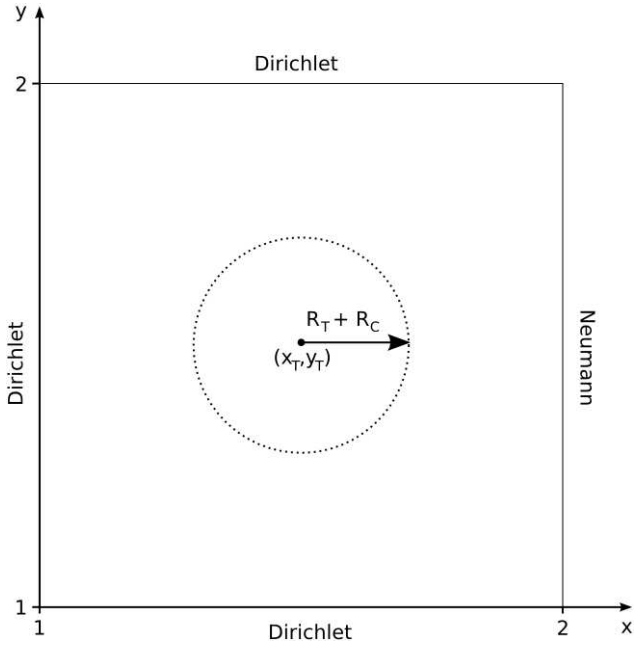


Figure 3.8 Domain de calcul pour la méthode des solutions manufacturées.

manufacturée, des termes sources sont ajoutés aux équations initiales (3.6) et (3.8). Or, par construction, l'équation de continuité est déjà vérifiée :

$$\nabla \cdot \{(1 - \Phi_{MS})\, \mathbf{u}_{MS}\} = 0.$$

Par conséquent, un terme source $\mathbf{g}_{MS}$ doit être ajouté uniquement dans (3.8) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g^x_{MS} & = & 2\rho\frac{x}{y^2} - \frac{1}{yx^2} + 4\mu\frac{1}{x^2y^2} + \mathbf{f}^{F\to S}_{MS} \cdot \mathbf{e}_x \\ g^y_{MS} & = & 2\rho\frac{y}{x^2} - \frac{1}{xy^2} + 4\mu\frac{1}{x^2y^2} + \mathbf{f}^{F\to S}_{MS} \cdot \mathbf{e}_y \end{array} \right. ,$$

avec :

$$\left\{ \mathbf{f}^{F\to S}_{MS} = \frac{\rho C_D}{\pi R_T}\Phi_{MS}\|\mathbf{u_{MS}}\|\mathbf{u_{MS}} \quad \text{si } d \leq R_T + R_C \right. ,$$

où d est la distance au centre du tube : $d = \sqrt{(x - x_T)^2 + (y - y_T)^2}$.
Le maillage est uniformément raffiné et on calcule, pour chaque taille h, les normes des erreurs exactes pour la pression (norme $\mathcal{L}^2$) et pour la vitesse (norme $\mathcal{H}^1$). Pour des éléments P1–P2, l'ordre de convergence théorique pour ces deux erreurs est de 2. La figure 3.9 présente ces erreurs en fonction de h^{-1}. Notons au passage qu'en 2–D on a la relation suivante entre la

taille du maillage et le nombre de nœuds N_h :

$$N_h \propto \frac{1}{h^2}$$

On constate que, dans les deux cas, l'erreur exacte atteint asymptotiquement l'ordre de convergence théorique lorsque la taille du maillage tend vers 0. L'implémentation est donc vérifiée.

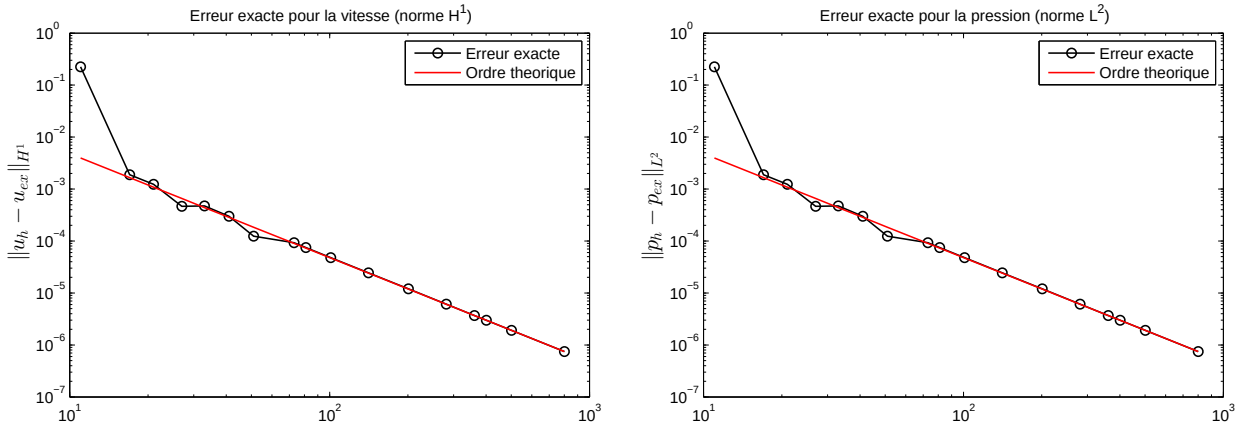


Figure 3.9 Convergence spatiale de l'erreur exacte pour la vitesse et la pression.

3.3.2 Étalonnage et validation

L'objectif de cette sous-section est de déterminer les paramètres clés du modèle du milieu poreux, à savoir le rayon de contrôle R_C, les coefficients de traînée et de masse ajoutée C_D et C_M et la taille du maillage h. Cette partie est cruciale car c'est dans le moyennage et les termes de couplage fluide-structure que se situe la majeure partie de l'erreur de modélisation. Ainsi, la précision des prédictions de l'instabilité fluidélastique repose sur l'étalonnage de ces paramètres.

Description du cas d'essai

Dans la suite, les calculs sont effectués sur un cas de référence et les résultats obtenus à partir du modèle seront confrontés à ceux fournis par la DNS. La géométrie de référence est un faisceau de tubes bi-dimensionnel comptant 25 tubes de diamètre unité D_T et de « *pitch* » (distance entre les centres de deux tubes voisins) $1.5D_T$ (voir la figure 3.10). La vitesse de l'écoulement à l'infini est unitaire et sans dimension et a uniquement une composante verticale (*i.e.* dans la direction y) V_∞. Les densité et viscosité adimensionnelles sont respectivement

égales à 1 et 7.5×10^{-3}. Par conséquent, le nombre de Reynolds Re est égal à 133. L'étalonnage et la validation vont reposer sur la **comparaison des efforts** induits par l'écoulement sur le tube central (tube n^{o}13) entre la DNS et le milieu poreux et ce dans des **cas stationnaires** uniquement.

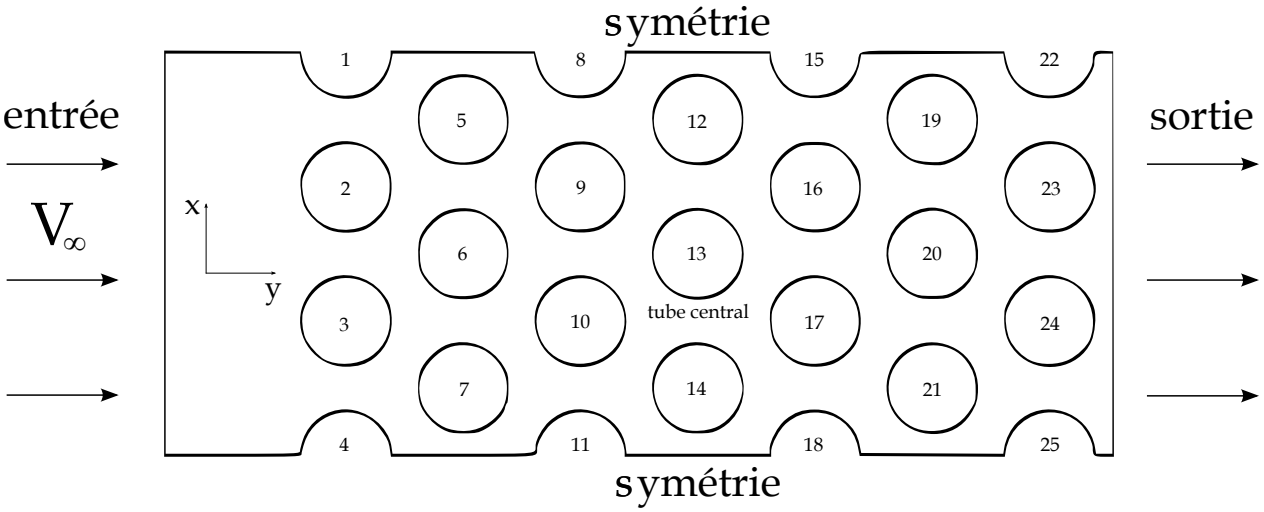


Figure 3.10 Géométrie du cas de référence tournée à 90^o.

Détermination de la taille du maillage optimal

Il est important de déterminer la taille optimale de notre maillage de façon à ce que la solution soit approchée avec une bonne précision tout en assurant un temps de calcul raisonnable. Comme expliqué précédemment, il est inutile d'avoir un maillage très fin car cela est très coûteux et la plus grande source d'erreur se situe dans la modélisation elle-même et non dans la discrétisation. Par conséquent, il n'est pas pertinent de chercher à obtenir une excellente précision numérique dans notre cas.

Pour les besoins de cet étalonnage, les autres paramètres sont pour le moment figés à des valeurs dont l'ordre de grandeur est physique. Le rayon de contrôle est fixé à $1.5R_T$ et le coefficient de traînée à 1. L'étalonnage se fait dans un cas stationnaire donc les termes de masse ajoutée sont nulles. Ainsi, le choix de C_M n'a strictement aucune incidence sur la solution.

La figure 3.11 montre la vitesse verticale V (qui correspond à une vitesse moyenne pour la formulation milieu poreux) au niveau du tube central par rapport à h^{-1}. En considérant que le maillage le plus fin est convergé, on décide de choisir le h optimal de façon à garantir une erreur inférieure à 1% sur la valeur de la vitesse. On obtient donc $h = 10^{-1}$ et c'est cette

taille de maillage qui sera utilisée dans toute la suite. Pour la géométrie du cas d'essai, le maillage correspondant possède environ 10^4 nœuds.

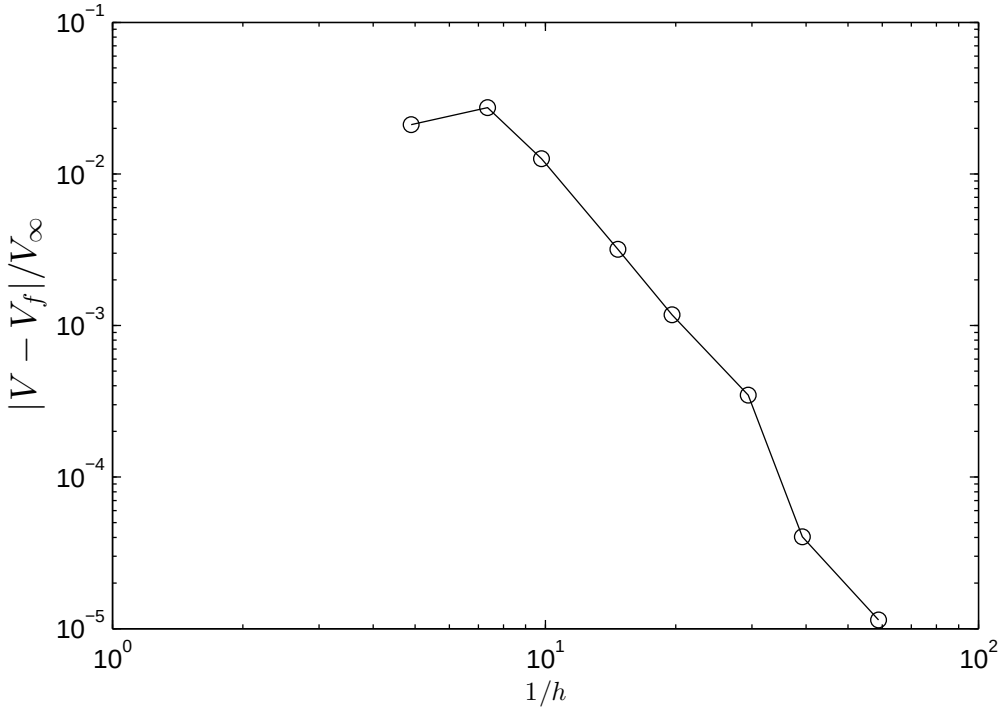


Figure 3.11 Vitesse moyenne autour du tube central en fonction de la taille du maillage.

Étalonnage du rayon de contrôle et du coefficient de traînée

La taille du maillage étant fixée, trois paramètres doivent être déterminés : (1) le rayon de contrôle R_C, (2) le coefficient de traînée C_D et (3) le coefficient de masse ajoutée C_M.

Le coefficient de masse ajoutée : Dans la suite de cette section, le coefficient de masse ajoutée est supposé constant et égal à 1. Cette valeur est consistante avec celles trouvées dans la littérature [voir par exemple Nakamura *et al.* (2002) et Sawadogo (2012)]. D'autre part, les variations de ce paramètre n'ont que peu d'incidence sur la valeur de la vitesse critique d'instabilité dans notre cas. Pour cette raison, aucun effort n'a été fourni pour déterminer précisément sa valeur optimale. Enfin, puisque l'étalonnage et la validation se font sur des cas stationnaires, les forces de masse ajoutée sont de toute façon nulles.

Determination du coefficient de traînée : Les efforts sur le tube central ont été calculés à la fois par l'approche milieu poreux et par la DNS. Pour la DNS, la solution finale (voir figure 3.12) a été calculée puis moyennée au niveau du tube central pour différentes valeurs

du rayon de contrôle R_C (voir figure 3.13). On obtient ainsi la vitesse moyenne $\mathbf{U}_m^{DNS}(R_C)$ que l'on va ensuite comparer à celle obtenue pour le milieu poreux : $\mathbf{U}_m^{MP}(R_C)$. En revanche, la force verticale exercée sur le tube central F_y^{DNS} a une valeur unique, indépendante du rayon de contrôle. On peut donc définir un coefficient de traînée qui est une fonction de R_C de la façon suivante :

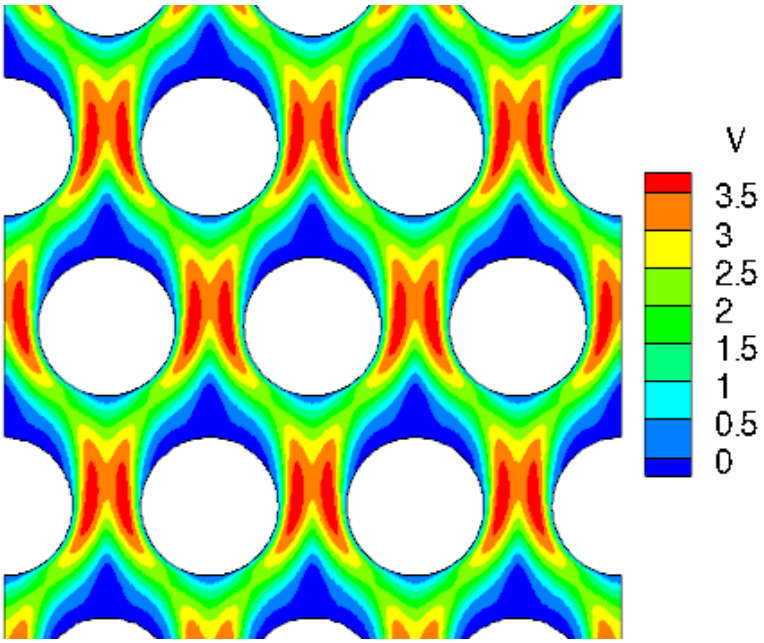


Figure 3.12 Vitesse verticale autour du tube central, DNS, Re=133.

$$F_y^{DNS} = \rho R_T C_D^{DNS}(R_C) \|\mathbf{U}_m^{DNS}(R_C)\| V_m^{DNS}(R_C)$$

Les valeurs de $C_D^{DNS}(R_C)$ sont ensuite utilisées comme paramètres pour le modèle milieu poreux. Des simulations sont effectuées pour plusieurs valeurs de R_C et les valeurs de C_D correspondantes. On compare ensuite la vitesse et les efforts obtenus par les deux différentes formulations. Les figures 3.14 et 3.15 montrent qu'il existe une valeur de R_C pour laquelle $V_m^{DNS} = V_m^{PM}$ et $F_y^{DNS} = F_y^{PM}$. Ce sont donc ces valeurs pour R_C ($R_C \simeq 1.4R_T$) et C_D ($C_D(1.4) \simeq 2$) qui seront utilisées dans la suite pour Re = 133.
D'un point de vue qualitatif, on peut constater à partir de la figure 3.13 que le rayon de contrôle optimal correspond à l'épaisseur moyenne de la couche limite autour d'un tube.

Influence du Reynolds sur les paramètres

S'il est bien établi que le coefficient de traînée d'un tube dépend du nombre de Reynolds, il est important de vérifier qu'un comportement similaire est observable dans notre cas et que

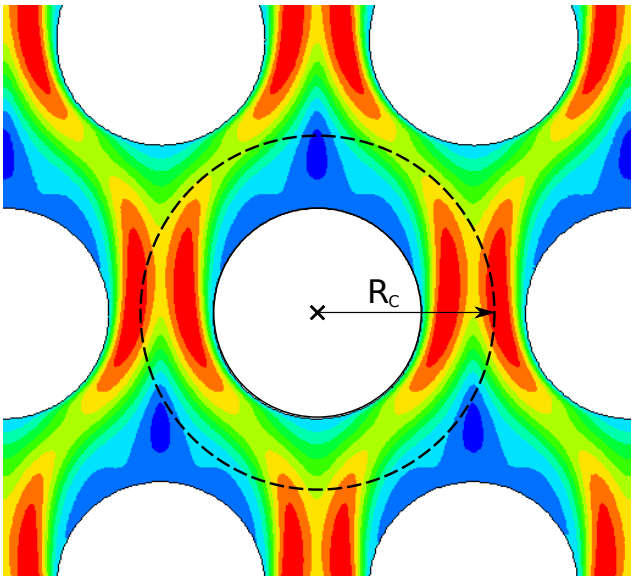


Figure 3.13 La solution de la DNS est moyennée sur un volume de contrôle.

les variations observées ont bien un sens physique. L'étalonnage décrit précédemment a été effectué pour trois valeurs du nombre de Reynolds (133, 200 and 400). Nous nous sommes restreints à de faibles valeurs de ce paramètre car, en 2–D et sans modèle de turbulence ni stabilisation, il est extrêmement difficile d'atteindre des valeurs plus élevées en DNS. Les résultats sont exposés dans la table 3.1. Remarquons que le rayon de contrôle ne dépend que très faiblement de Re pour la plage considérée alors que le coefficient de traînée diminue en fonction de ce dernier. La vitesse de décroissance de C_D suggère qu'un régime asymptotique doit être atteint pour des valeurs plus élevées du Re, ce qui nous conforte dans l'idée que des simulations effectuées à bas Reynolds peuvent tout de même fournir de bonnes prédictions pour des cas réels faisant intervenir des Reynolds élevés.

Tableau 3.1 Influence du nombre de Reynolds sur R_C et C_D.

Re	C_D	R_C/R_T
133	2.30	1.41
200	1.85	1.40
400	1.45	1.38

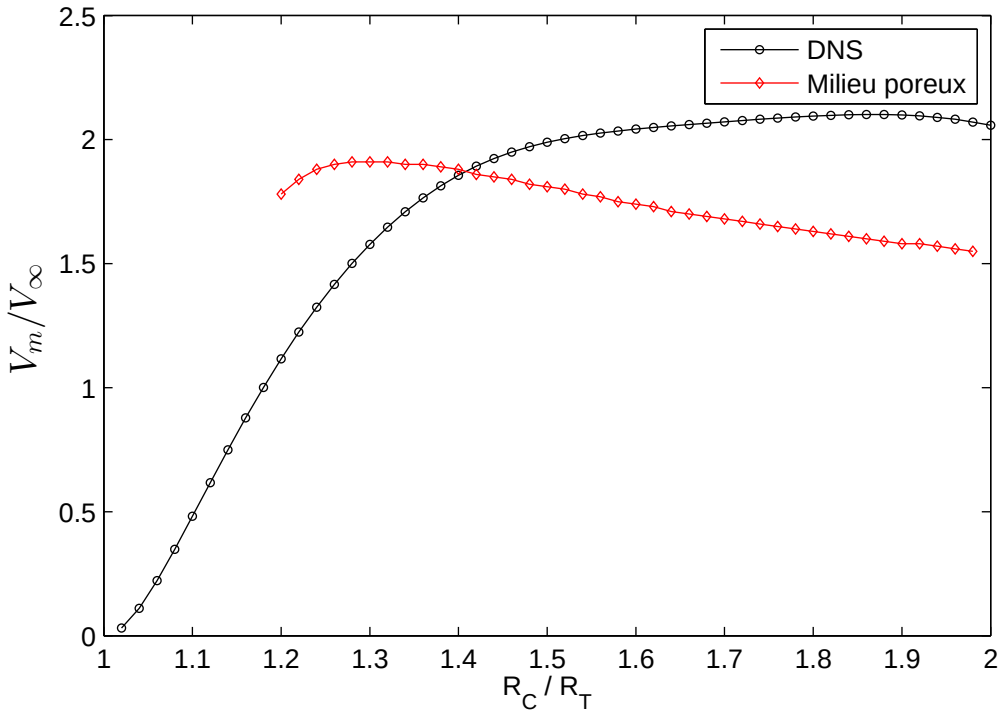


Figure 3.14 Vitesse verticale en fonction de R_C.

Forces dans la direction transverse à l'écoulement

À présent que tous les paramètres ont été fixés, on propose l'étape de validation suivante : on compare cette fois-ci les efforts horizontaux sur le tube central (*i*.e. dans la direction transverse à l'écoulement) entre la DNS et le milieu poreux. Ce dernier est déplacé **statiquement** dans la direction transverse jusqu'à une distance égale à 10% de son diamètre et les forces horizontales induites par le fluide ont été calculées par les deux approches.
La figure 3.16 montre une bonne correspondance entre les deux méthodes, ce qui est très encourageant puisqu'aucun étalonnage n'a été effectué pour les efforts transverses. La correspondance est meilleure pour les petites valeurs du déplacement (jusqu'à 5% du diamètre). Toutefois, le but de cette étude est de pouvoir prédire le déclenchement de l'IFE qui se développe à partir de déplacements de petite amplitude. Par conséquent, nous avons fait l'hypothèse qu'une bonne précision au niveau des efforts induits par de petits déplacements était suffisante pour prédire correctement cette instabilité. En outre, il est intéressant de mettre ces résultats en regard avec le modèle instationnaire [voir Tanaka et Takahara (1981)] dans lequel un paramètre clé est la dérivée du coefficient de portance par rapport au déplacement quasi-statique dans la même direction. Dans le cas présent, ce paramètre correspond exactement à la pente à l'origine de la courbe, qui coïncide très bien avec celle donnée par la

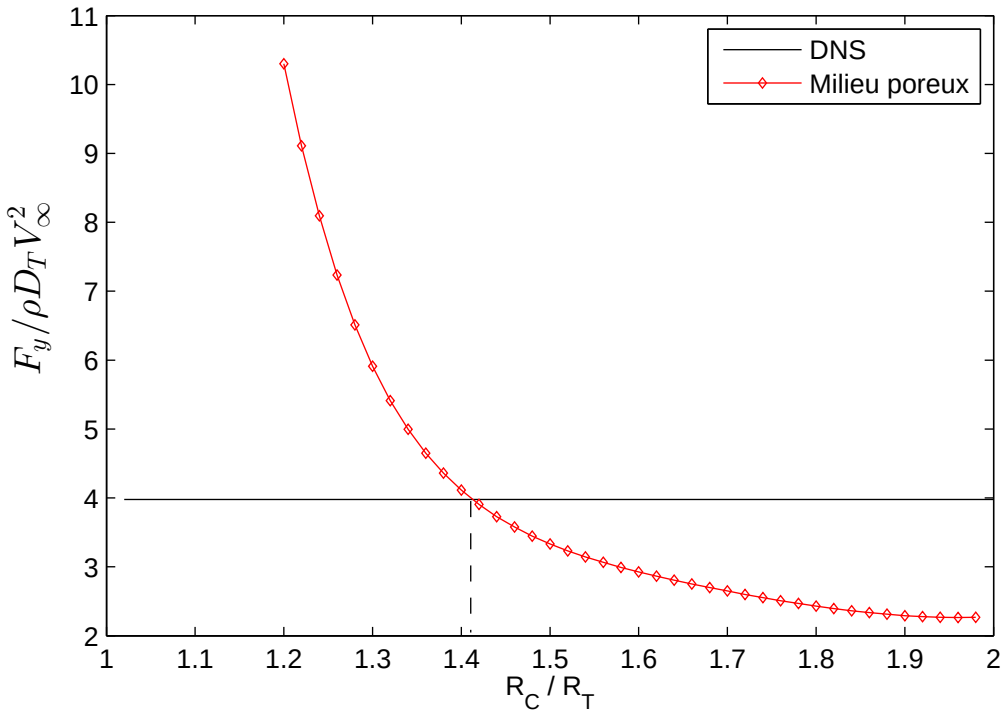


Figure 3.15 Force verticale en fonction de R_C.

DNS.

Enfin, l'hypothèse faite dans la sous-section 3.1.6 concernant la force de « *lift* » $\mathbf{F}_L$ est confirmée. En effet, la formulation de Morrison « $C_D + C_M$ » suffit à obtenir des efforts corrects dans la direction transverse. Rappelons à nouveau que la force de traînée a une composante dans la direction de l'écoulement mais aussi une composante dans sa direction transverse (aussi appelée direction de la portance).

3.4 Validation et comparaison avec les modèles instationnaire et quasi-stationnaire

3.4.1 Dérivée de stabilité

Une validation plus approfondie peut être effectuée en comparant une dérivée de stabilité particulière. Ce terme est égal à $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ et est interprété comme la dérivée spatiale de la force de portance par rapport à un déplacement dans la même direction. C'est par exemple un paramètre clé utilisé dans les modèles quasi-stationnaires [voir Charreton *et al.* (2013); Price et Païdoussis (1984)].

Nous avons donc cherché à comparer la valeur de ce paramètre à celle donnée par la DNS. Le tableau 3.2 montre qu'il y a un très bon accord entre les résultats donnés par les deux méthodes. Ceci n'est guère étonnant puisque la dérivée de stabilité correspond à la pente à

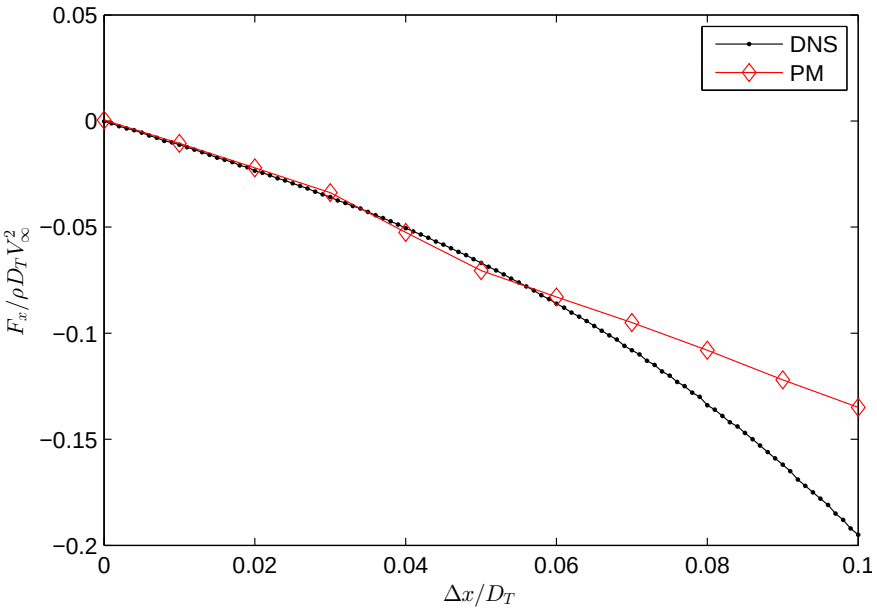


Figure 3.16 Force transverse en fonction du déplacement statique transverse.

l'origine des courbes de la figure 3.16. D'autre part, les valeurs obtenues se comparent de façon satisfaisante aux résultats de Charreton *et al.* (2013) avec le même nombre de Reynolds mais une configuration du faisceau de tubes différente. En effet, Charreton a trouvé une valeur de -1.22 pour un « Reynolds de pitch » de 400 (ce qui correspond à un Reynolds de 133 si l'on suit notre définition).

Tableau 3.2 Comparaison de la dérivée de stabilité entre la DNS et le milieu poreux.

	DNS	MP
$\frac{1}{\rho V_\infty^2}\frac{\partial F_x}{\partial x}$	-1.1	-1.1

3.4.2 Mesures dynamiques sur le tube central

Une autre étape de la validation consiste à suivre une approche inspirée des modèles instationnaires. Ces modèles reposent sur la mesure expérimentale des forces instationnaires agissant sur les tubes lorsque l'un d'entre eux subit une vibration forcée de faible amplitude. L'approche développée par Tanaka Tanaka *et al.* (2002); Tanaka et Takahara (1981) consiste à injecter ces coefficients expérimentaux pour les forces dans les équations de mouvement de

la structure afin d'obtenir la vitesse critique d'instabilité. Dans notre cas, ces coefficients ne seront pas déterminés expérimentalement mais seront calculés à la fois avec la méthode du milieu poreux et avec la DNS afin de les comparer.
On impose au tube central le déplacement suivant :

$$\xi(t) = X_0 \cos(2\pi f t),$$

avec $X_0/D_T = 2\%$. En supposant qu'elles sont également harmoniques, les forces transverses

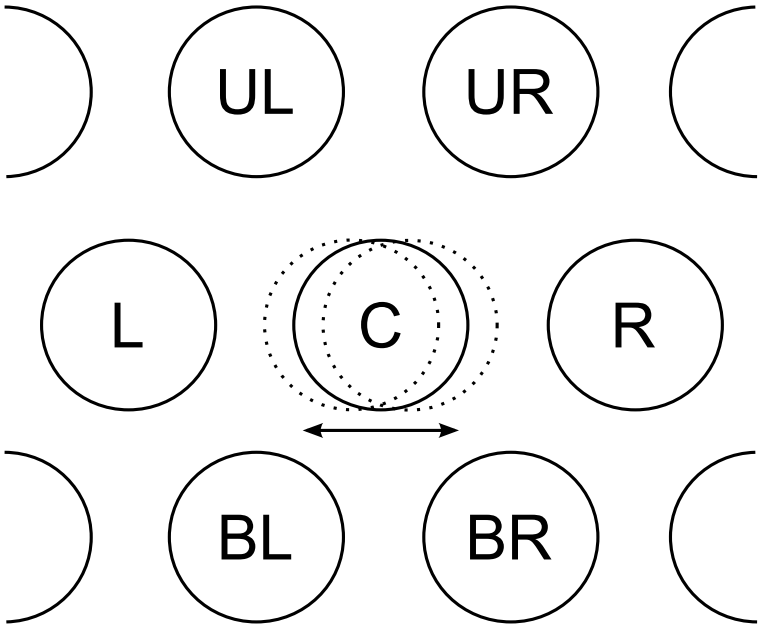


Figure 3.17 Agrandissement sur le tube central vibrant et ses tubes voisins.

induites sur les tubes voisins (voir la figure. 3.17) peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$F_x(t) = \rho V_\infty^2 D_T c_0 \cos(2\pi f t + \phi),$$
$$F_y(t) = \rho V_\infty^2 D_T c_1 \cos(2\pi f t + \psi),$$

où les amplitudes $c_{0,1}$ et les phases ϕ, ψ sont des fonctions de la vitesse réduite U_R. Il existe plusieurs définitions de la vitesse réduite ; on utilisera dans cette section l'expression suivante :

$$U_R = \frac{P}{P - D_T} \frac{V_\infty}{f D_T}.$$

Dans la suite, on se concentrera sur les efforts transverses en comparant les valeurs de c_0 et de ϕ. La figure 3.18 montre la force fluide exercée par le tube vibrant pour la DNS et le milieu poreux. Le déplacement imposé $\xi(t)$ est également montré. On constate qu'il y a un bon

accord entre la DNS et le milieu poreux, à la fois pour la phase et l'amplitude. Le tableau 3.3

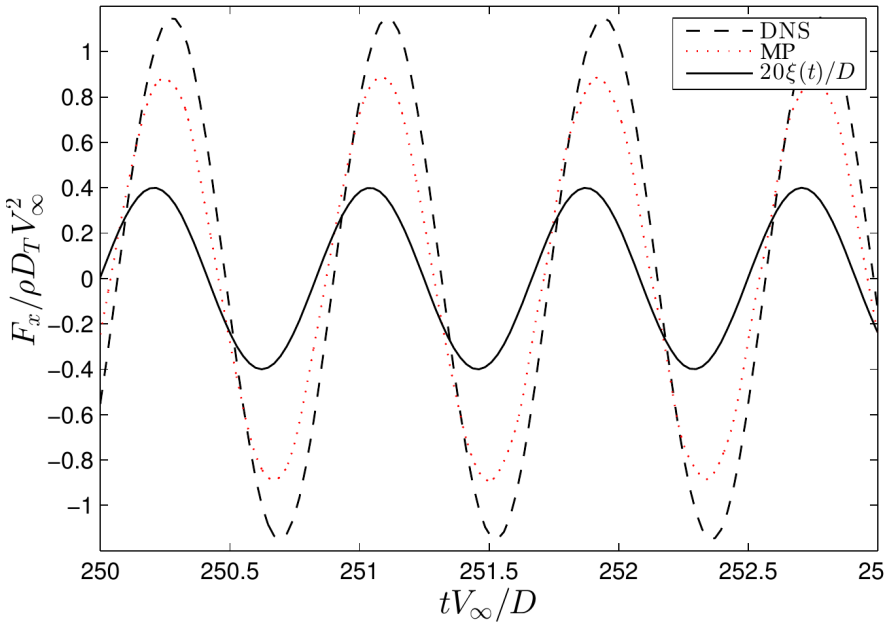


Figure 3.18 Forces transverses dynamiques sur le tube central à $U_R = 2.5$.

regroupe la phase et l'amplitude de la force transverse exercée par le fluide sur le tube central et ses plus proches voisins. On constate alors que la bonne concordance entre la DNS et le milieu poreux n'existe que pour le tube central. Si les différences de phase restent acceptables, on remarque un écart significatif en ce qui concerne l'amplitude des forces induites sur les tubes voisins. Ceci suggère que le modèle du milieu poreux génère un faible couplage entre des tubes adjacents, ce qui pourrait expliquer pourquoi il tend à surestimer la vitesse critique d'IFE. Ce point sera discuté à la fin de la prochaine section.

3.5 Instabilité fluidélastique monophasique

Le modèle étant implémenté, vérifié, validé et étalonné, la vitesse critique d'IFE peut être investiguée. Des simulations ont été effectuées pour la géométrie du cas d'essai (voir figure 3.10) afin d'être comparées avec des résultats expérimentaux et des résultats numériques indépendants. Comme expliqué précédemment, des calculs en DNS ont déjà été effectués pour la même géométrie dans Étienne et Pelletier (2011). Ces calculs ont été effectués à bas nombre de Reynolds (Re = 200) sur un maillage déformable avec une formulation ALE (Euler-Lagrange Arbitraire). L'auteur a été capable de reproduire le déclenchement de l'instabilité fluidélastique et de distinguer cette dernière des vibrations induites par les vortex (VIV). La consistance et la précision de l'approche précédente ont été investiguées et les convergences

Tableau 3.3 Amplitude et phase des forces fluides dynamiques.

Tube	DNS		MP	
	$\phi(^\circ)$	c_0	$\phi(^\circ)$	c_0
DL	-267	0.20	-339	0.09
DR	-269	0.20	-334	0.09
L	-183	0.33	-178	0.09
C	30	1.15	19	0.90
R	-185	0.33	-180	0.09
UL	-228	0.40	-271	0.14
UR	-219	0.40	-273	0.14

spatiale et temporelle ont été vérifiées dans Étienne *et al.* (2006, 2009).
Puisqu'un modèle DNS a été utilisé pour étalonner et valider notre approche, il est tout naturel de comparer les vitesses critiques d'IFE obtenues dans les deux cas. Les résultats seront aussi comparés avec ceux, expérimentaux, trouvés dans la littérature. Les premier résultats ont été effectuées à Re = 133 et sont présentés dans la première sous-section. Puis, l'influence du nombre de Reynolds a été investiguée. Enfin, nous nous sommes penchés sur l'influence d'un paramètre clé : le coefficient de traînée.

3.5.1 Méthodologie

Nombres adimensionnels et paramètres

Tout d'abord, il est nécessaire d'introduire les paramètres adimensionnés qui sont couramment utilisés dans la littérature pour décrire l'IFE. Les résultats sont souvent présentés dans des cartes de stabilité de « type Connors » faisant intervenir deux paramètres adimensionnés. Ce choix ne fait pas l'unanimité [voir Price (2001)] mais il est aujourd'hui la façon la plus satisfaisante de compiler plusieurs résultats sur un même graphe. C'est donc ce type de carte que nous utiliserons dans la suite pour comparer les résultats numériques et expérimentaux. On peut représenter ce graphe comme suit :

$$\frac{V_{pc}}{f_n D_T} = g\left(m^* \delta\right), \tag{3.18}$$

où V_p est la vitesse de « *pitch* » définie comme suit :$V_p = V_\infty P/(P - D_T)$. Dans notre cas, ce paramètre est fixe : $V_p = 3V_\infty$. V_{pc} est la vitesse critique de « pitch » à laquelle L'IFE apparaît. f_n est la fréquence naturelle des tubes dans l'écoulement, $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, m^* est le

rapport de masse, $m^* = \frac{\rho_s}{\rho_f} = \frac{m}{\rho_f \pi R_T^2}$ et δ est le décrément logarithmique de l'amortissement (voir la section 3.5.1).
Dans la suite, nous ferons référence à la vitesse critique réduite $U_r = \frac{V_p}{f_n D_T}$ et le paramètre masse-amortissement $m^*\delta$.

Calcul de l'amortissement fluide

Nous verrons dans la section 3.5 que l'amortissement structurel des tubes est un paramètre important de notre problème. Plus précisément, les cartes de stabilité utilisées abondamment dans la littérature font intervenir la vitesse critique d'instabilité fluidélastique en fonction, entre autres, de ce paramètre. Pour plus de précision, il faut inclure dans le paramètre d'amortissement à la fois l'amortissement structurel des tubes mais aussi l'amortissement lié au fluide lui-même. Il y a plusieurs façons de déterminer un tel amortissement, la plus simple étant de déplacer le tube de sa position d'équilibre puis de le relâcher. Le mouvement est alors caractérisé par des oscillations d'amplitude décroissante (voir figure 3.19). On calcule alors décrément logarithmique δ de cette amplitude qui est lié à l'amortissement c par la formule suivante :

$$c = \frac{\delta\sqrt{km}}{\pi}.$$

Dans le cas où l'amortissement structurel est égal à zéro, on mesure exactement l'amortissement dû au fluide. On notera dans la suite δ_f le décrément logarithmique dû au fluide. Pour Re = 133, on trouve $\delta_f = 4\%$.

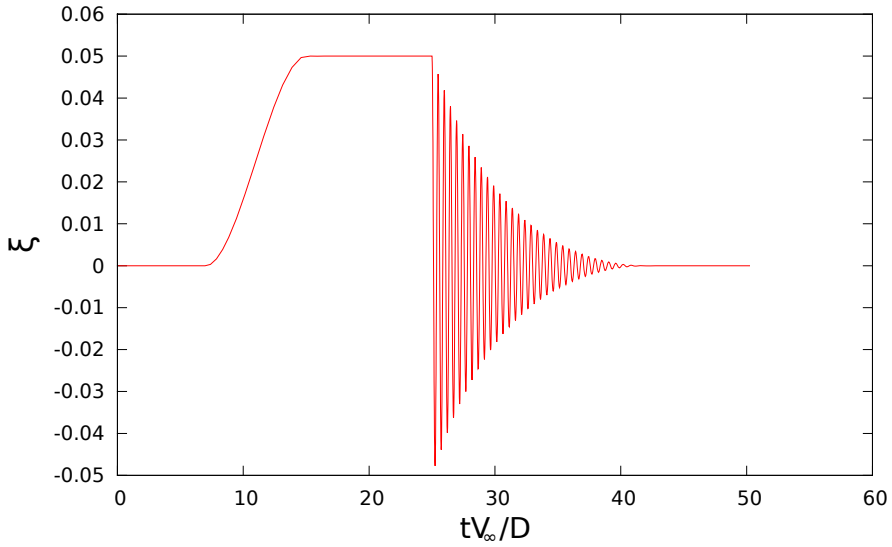


Figure 3.19 Déplacement du tube central après un lâcher libre.

Notons qu'en pratique, le calcul de l'amortissement fluide se fait à la moitié de la vitesse

critique d'instabilité. Cette mesure devrait être faite dans le cas stagnant, impossible pour les écoulements diphasiques.

Résultats des simulations

Une façon de déterminer la vitesse critique d'instabilité est d'effectuer une simulation instationnaire avec un paramètre de masse-amortissement constant et une raideur structurelle $k(t)$ décroissante dans le temps. Ainsi, le système évolue d'une faible vitesse réduite (pour laquelle aucune vibration significative n'est observée) vers une vitesse réduite élevée jusqu'à atteindre l'IFE (voir la figure 3.20).
Plusieurs critères existent pour déterminer lorsque l'IFE est atteinte. Dans le cas présent, nous condidèrerons qu'elle est atteinte lorsque l'amplitude de l'un des tubes atteint 10% de son diamètre. Il s'agit de la technique utilisée dans Étienne et Pelletier (2011) mais dans notre

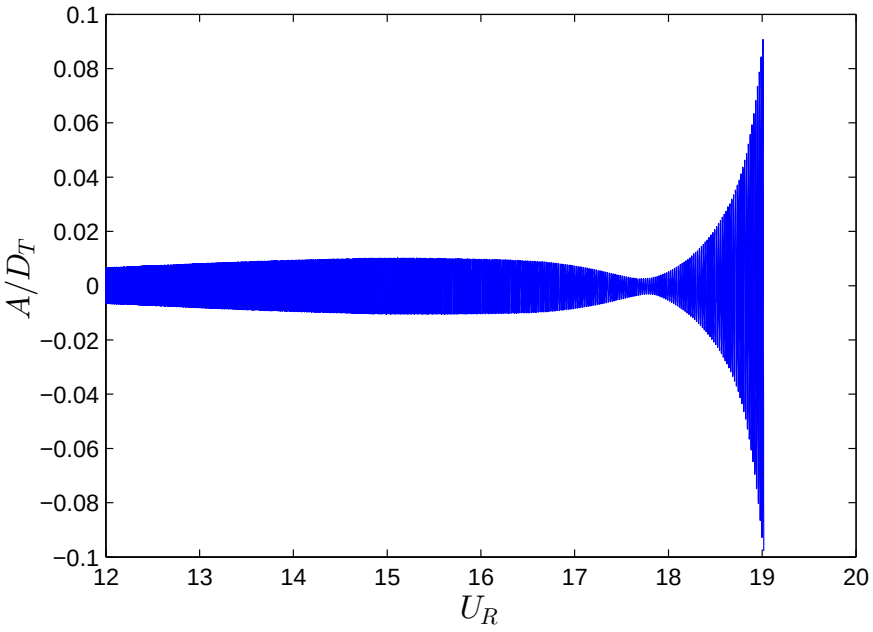


Figure 3.20 Amplitude d'un tube en fonction de la vitesse réduite.

cas, elle fournit une valeur légèrement surévaluée de la vitesse critique car les effets d'histoire ne sont pas négligeables. Par conséquent, la méthode utilisée est celle de la dichotomie : des simulations différentes sont effectuées pour chaque valeur de k.
La figure 3.22 montre deux simulations effectuées à Re = 133, $m^*\delta = 20$ et $U_r = 14$ et 15. Dans cet exemple, l'IFE est atteinte pour $U_r = 15$ mais pas pour $U_r = 14$. En procédant par dichotomie, plusieurs valeurs de U_{rc} sont obtenues pour différentes valeurs du paramètre de masse-amortissement.

La figure 3.21 montre les trajectoires polaires des sept tubes centraux dans le cas où un cycle limite est atteint, c'est-à-dire que le mouvement des tubes devient périodique. L'amplitude de mouvement des tubes est multipliée par cinq pour permettre une meilleure visualisation. On constate une grande variété dans la trajectoire limite des tubes et on peut distinguer certaines tendances qui rejoignent les observations relevées dans la littérature. Tout d'abord, les rangées plus en aval de l'écoulement semblent avoir une plus grande amplitude. De plus, les premières rangées ont un mouvement essentiellement transverse alors que les dernières ont un mouvement dans les deux directions. Enfin, le sens dans lequel les tubes suivent leur cycle limite semble aléatoire.

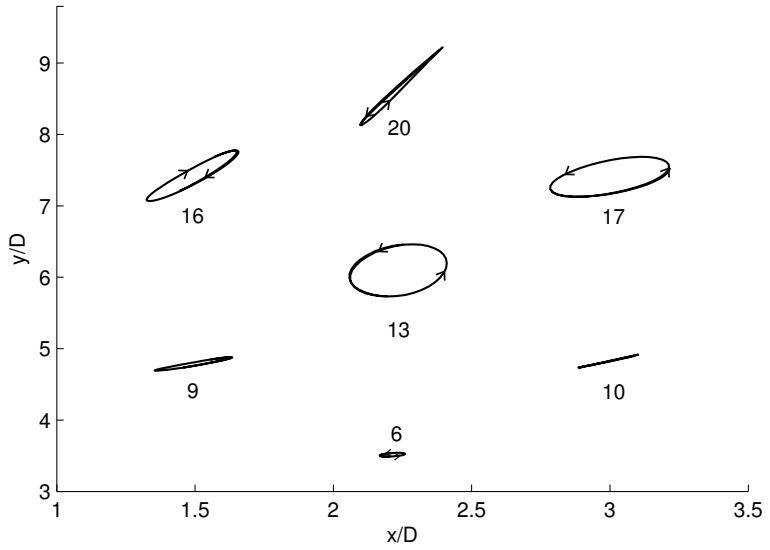


Figure 3.21 Trajectoire polaire des tubes dans le cycle limite, $U_r = 10$.

Comparaison avec des résultats expérimentaux et numériques

Les résultats numériques obtenus ont été reportés sur la carte de stabilité tracée dans Price (1995). Les données incluent des résultats expérimentaux obtenus pour des faisceaux triangulaires tournés (la même configuration que dans notre cas) soumis à des écoulements gazeux, liquides et diphasiques. Ont également été ajoutés les résultats produits par Étienne et Pelletier (2011). On observe un écart significatif entre les résultats présents et ceux de Étienne et Pelletier (2011) (voir figure 3.23). Les nombres de Reynolds étant du même ordre de grandeur, l'écart ne peut être expliqué que par les limitations du modèle poreux lui-même.
Tout d'abord, l'écoulement n'est pas résolu avec la même finesse qu'en DNS puisque les équations de Navier–Stokes sont moyennées sur un volume de contrôle. On n'observe par exemple

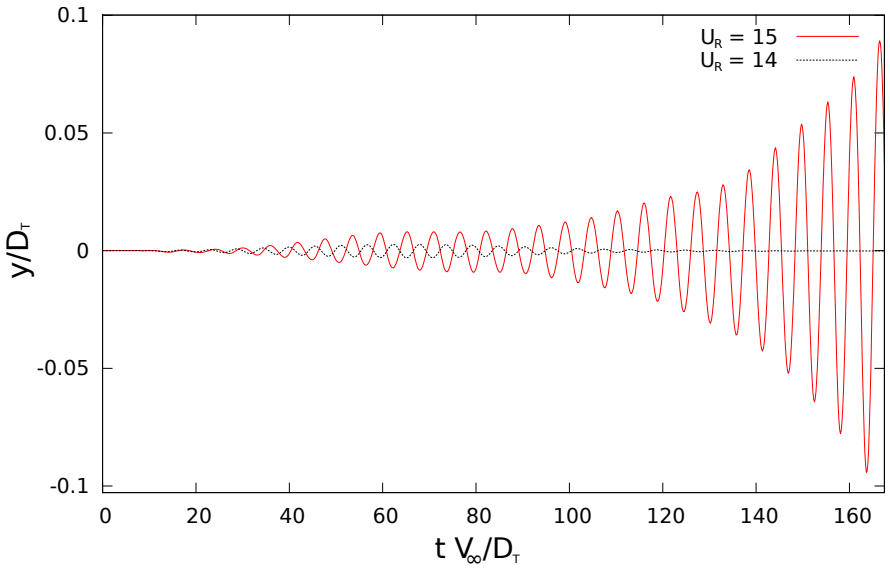


Figure 3.22 Amplitude de mouvement d'un tube en fonction du temps pour deux valeurs de U_r.

pas de VIV, ce qui suggère que d'autres phénomènes physiques nécessaires à l'établissement de l'IFE ne sont pas résolus ou en tout cas pas avec la précisions nécessaire. D'autre part, le modèle utilisé pour le calcul des forces n'est qu'une approximation des efforts hydrodynamiques complexes mis en jeu. Enfin, les résultats de la section 3.4 tendent également à incriminer le modèle et plus précisément les approximations faites dans le calcul des forces. Des améliorations concernant ces points délicats sont suggérées dans le chapitre 5.
Concernant les résultats expérimentaux, on constate également un écart important pour les faibles valeurs du paramètre masse-amortissement. Toutefois, les données expérimentales présentent une forte variabilité, même pour des configurations de l'écoulement et des géométries similaires. Remarquons que nos résultats concordent mieux avec les données expérimentales pour les valeurs élevées de $m^*\delta$ et avec la limite théorique développée dans Teh et Goyder (1988) (ligne en pointillés). Cependant, cette relativement bonne concordance doit être nuancée par le fait qu'il s'agit d'un graphe dont les axes sont logarithmiques.

3.5.2 Influence du nombre de Reynolds

Les résultats précédents ont été reproduits à Re = 200. La figure 3.24 montre les données présentées précédemment ainsi que les résultats obtenus à Re = 200.
On n'observe que peu d'écarts avec les cas à Re = 133, ce qui suggère que le nombre de Reynolds n'a que peu d'influence sur la vitesse critique d'IFE dans la plage explorée. D'autre part, ces résultats confirment que les écarts observés entre nos résultats et ceux d'Étienne et

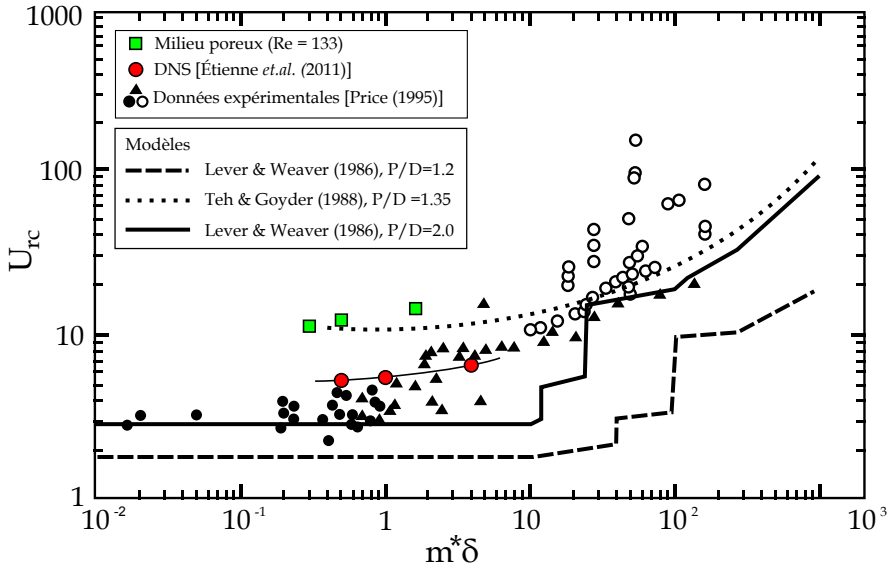


Figure 3.23 Carte de stabilité de « type Connors » montrant des résultats expérimentaux collectés par Price (1995) (marqueurs blancs et noirs), les résultats DNS par Étienne et Pelletier (2011)(cercles rouges) et les résultats présents (carrés verts).

les données expérimentales ne sont très probablement pas dus à la différence des nombres de Reynolds mis en jeu.

3.5.3 Influence du coefficient de traînée

Dans cette section, nous nous interrogeons sur l'influence du coefficient de traînée C_D sur la prédiction de la vitesse critique d'IFE. Plus précisément, l'objectif est de déterminer si une erreur sur la valeur de C_D peut à elle seule expliquer l'écart entre nos résultats et les données expérimentales. Autrement dit, la question est de savoir si les écarts observés proviennent d'un mauvais étalonnage des paramètres ou du modèle poreux lui-même. La figure 3.25 représente l'amplitude d'un tube en fonction de la vitesse réduite. Si cette méthode de détermination de la vitesse critique s'avère peu précise comme évoqué précédemment, elle se prête bien dans notre cas puisque l'on veut comparer plusieurs résultats entre eux. On constate que la vitesse critique augmente avec C_D, ce qui n'est pas étonnant puisque l'amplitude des forces hydrodynamiques sur les tubes est directement proportionnelle à ce paramètre. En revanche, la sensibilité de la vitesse critique par rapport à ce paramètre est faible. En effet, en multipliant par quatre C_D, la vitesse critique est environ divisée par deux. Cela confirme donc l'hypothèse selon laquelle l'écart avec les résultats expérimentaux provient du modèle lui-même et non d'une éventuelle erreur d'étalonnage sur la valeur des paramètres.

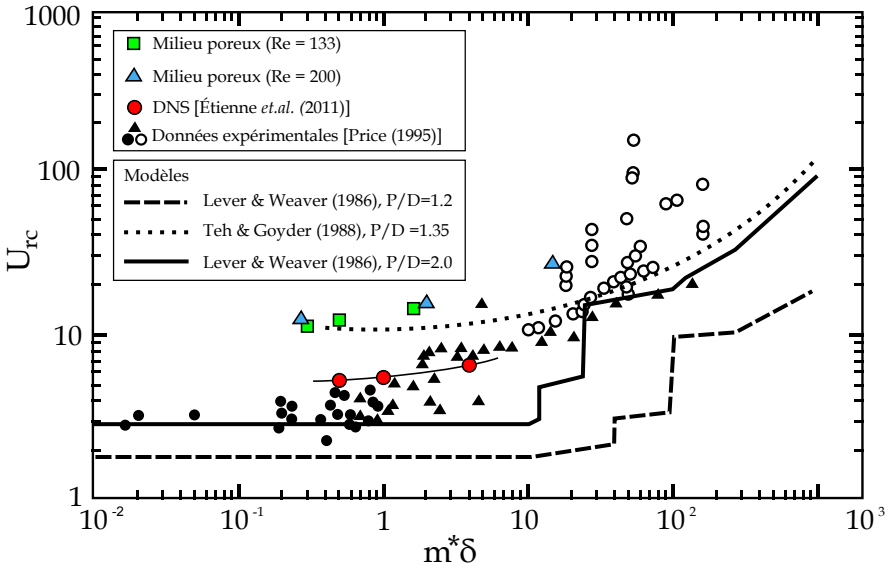


Figure 3.24 Influence du nombre de Reynolds sur la carte de stabilité.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle du milieu poreux a été développé afin de modéliser les interactions fluide-structure dans un faisceau de tubes soumis à un écoulement transverse monophasique. L'objectif de cette approche est d'être capable de prédire le déclenchement de l'IFE avec un coût de calcul réduit par rapport à la DNS.

Tout d'abord, une forme moyennée en espace des équations de Navier–Stokes a été présentée et un modèle simple de couplage entre le fluide et la structure a été établi. Ensuite, le code a été vérifié par la méthode des solutions manufacturées et l'approche étalonnée par une comparaison avec des résultats DNS faisant office de référence. La validation a été conduite en comparant le milieu poreux et la DNS au niveau des forces, statiques et dynamiques, sur le tube central du faisceau d'essai. Des simulations instationnaires sur un faisceau de 25 tubes ont été effectuées et la vitesse critique de l'IFE obtenue a été comparée avec de précédents résultats DNS et des valeurs expérimentales trouvées dans la littérature. Enfin, l'influence des paramètres clés comme le coefficient de traînée ou le nombre de Reynolds a été étudiée.

Les résultats obtenus ne se comparent pas très bien avec de précédents résultats expérimentaux. Les données montrent que le modèle du milieu poreux tend à surestimer la valeur de la vitesse critique d'instabilité. Le faible nombre de Reynolds utilisé ne peut pas expliquer cet écart car cela n'a pas empêché Étienne et Pelletier (2011) d'obtenir des résultats plus proches des données expérimentales. Les résultats obtenus dans la deuxième partie de la va-

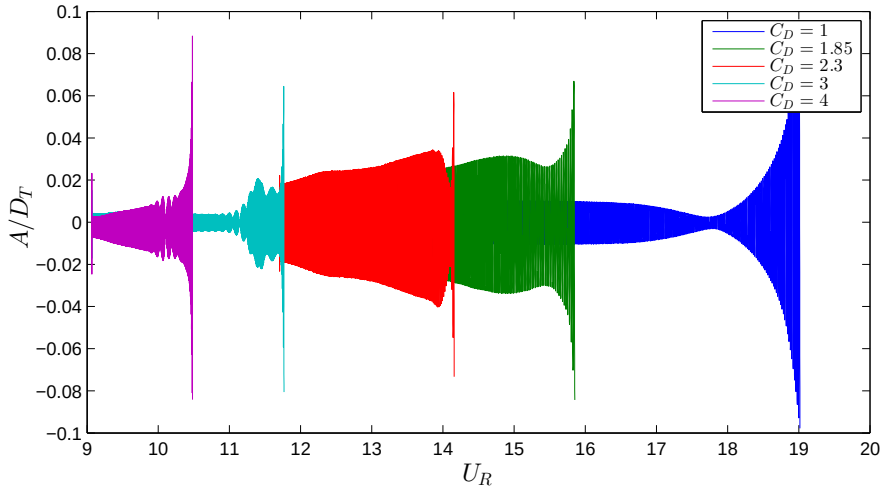


Figure 3.25 Amplitude en fonction de la vitesse réduite pour plusieurs valeurs de C_D.

lidation suggèrent que l'écart obtenu peut être dû au faible couplage entre des tubes voisins dans le cas du modèle du milieu poreux. En effet, l'amplitude des forces générées par un tube vibrant et induites sur ses voisins est environ trois fois plus faible dans les calculs du milieu poreux que dans ceux de la DNS. Par conséquent, le faisceau de tubes est plus stable dans le premier cas et donc nécessite plus d'énergie (c'est-à-dire une vitesse réduite plus grande) pour atteindre de le seuil de l'IFE.

Le prochain chapitre est consacré à l'extension du présent modèle au cas d'écoulements diphasiques.

CHAPITRE 4

LE MODELE DIPHASIQUE

Dans ce chapitre, nous allons étendre le modèle du milieu poreux, développé dans le chapitre précédent, au cas d'écoulements diphasiques. La première partie de ce chapitre se concentre sur la modélisation de l'écoulement diphasique. On verra qu'il existe plusieurs façons de le faire et on retiendra celle qui répond aux critères imposés par le cadre de cette étude. Ensuite, suivant le même cheminement que le premier chapitre, l'extension du code sera vérifiée et validée grâce à des cas d'essai simples. Enfin, la dernière partie est consacrée à l'étude de l'IFE proprement dite et un accent particulier sera mis sur la comparaison avec les résultats expérimentaux disponibles et sur l'analyse de l'effet du taux de vide sur la vitesse critique d'IFE.
Ce chapitre reprend dans les grandes lignes les travaux présentés dans une conférence dont les publications sont soumises à un comité de lecture [voir Tixier *et al.* (2014b)].

4.1 Modélisation

4.1.1 Modélisation du mélange diphasique par une approche Euler-Euler

Dans le chapitre précédent, nous avons modélisé l'instabilité fluidélastique d'un faisceau de tubes soumis à un écoulement monophasique. Ceci était en fait équivalent à considérer un écoulement diphasique homogène, c'est-à-dire un écoulement dans lequel les deux phases ont la même vitesse. Ainsi toute interaction entre les deux phases, généralement liée à leur vitesse relative, est négligeable et le mélange diphasique peut alors être traité comme un fluide monophasique ayant une densité et une viscosité modifiées. Cette hypothèse est, on peut l'imaginer, très restrictive et ne parvient pas à représenter la plupart des configurations d'écoulements diphasiques.
Dans ce chapitre, nous allons généraliser l'approche diphasique en introduisant l'hypothèse que l'écoulement est à phase dispersée. Dans cette configuration, l'une des phases est représentée par un continuum (dans notre cas ce sera la phase liquide) alors que la seconde est dispersée sous forme de bulles (la phase gazeuse dans notre cas). Il existe deux façons de représenter une telle configuration : l'approche dite « Euler-Euler « (E-E) et celle dite Euler-Lagrange » (E-L), les deux présentant des avantages et des inconvénients.
Dans l'approche E-L [voir Darmana *et al.* (2006)], le liquide est traité comme une phase continue et son écoulement est résolue par les équations de Navier–Stokes alors que les bulles

sont suivies individuellement. L'une des limites évidentes de cette approche est le nombre de bulles qui peuvent être traitées avec un coût de calcul raisonnable. En revanche, cette approche a pour avantage de pouvoir représenter très finement un écoulement diphasique moyennant de bons modèles de fermeture. Néanmoins, la limitation évoquée plus tôt ne permet actuellement pas à cette méthode d'être appliquée à des problèmes complexes comme un écoulement à travers un faisceau de tubes.
L'approche E-E consiste à moyenner dans l'espace les équations de Navier–Stokes pour les deux phases [voir Deen *et al.* (2001)]. Nous avons choisi cette approche dans notre cas car elle est cohérente avec le processus de moyennage déjà effectué pour l'ensemble fluide-structure. L'une des limitations de ce modèle est que la distribution de taille des bulles est un paramètre du problème. En revanche cette méthode est très intéressante car elle présente un coût de calcul bien moindre que dans le cas de l'approche E-L.
L'approche principale étant désormais fixée, nous allons faire des hypothèses supplémentaires. Tout d'abord, tout transfert de chaleur et de masse entre les deux phases est supposé nul. Il est évident que de tels phénomènes existent et sont très importants dans les générateurs de vapeur. Néanmoins, on suppose qu'ils n'ont pas ou peu d'influence sur le phénomène d'instabilité fluidélastique qui est purement mécanique et non thermique. On suppose également que les phénomènes de tension de surface sont négligeables de telle sorte qu'il y a un équilibre de pression entre le gaz et le liquide :

$$P_g = P_l = P. \tag{4.1}$$

4.1.2 Equations du modèle à deux fluides

Rappelons que l'on a désormais deux ensembles d'équations de type Navier–Stokes, une première pour la phase liquide et une seconde pour la phase gazeuse. C'est ce que l'on appelle le modèle à deux fluides et la variante qui nous intéresse, celle ne comportant qu'une pression pour les deux phases, est abondamment étudiée et utilisée [voir par exemple Coquel *et al.* (1997); Cordier *et al.* (2014); Delale (2013); Panescu (2006)]. Pour alléger les équations, on utilisera dans la suite la notation suivante :

$$\alpha_k = (1 - \Phi)\varepsilon_k.$$

En repartant de l'équation (3.5), on obtient l'équation suivante pour la conservation de quantité de mouvement de la phase $k = g, l$:

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \mathbf{U_k}) = 0, \tag{4.2}$$

avec $\varepsilon_g = \varepsilon$ et $\varepsilon_l = 1-\varepsilon$. Rappelons que ε est le taux de vide, c'est à dire le rapport des volumes du gaz et du liquide dans un volume de contrôle. Il est au gaz ce que la porosité est au solide. On retrouve cette analogie entre taux de vide et porosité dans la formulation des équations, les deux variables intervenant de façon similaire. Cependant cette similitude s'arrête là car le taux de vide et la porosité sont, d'un point de vue mathématique, radicalement différents. En effet, la porosité est une donnée du problème lorsque les tubes sont fixes et ne dépend que de la position de ceux-ci lorsqu'ils sont en mouvement. En revanche, le taux de vide est une vraie variable dans le sens où elle est partout calculée implicitement, au même titre que la pression par exemple. Cette expression de la conservation de la masse est rencontrée très régulièrement dans la littérature [voir par exemple De Lemos (2012); Prosperetti et Tryggvason (2007a)]. De façon analogue, on obtient l'équation de conservation de quantité de mouvement pour la phase k :

$$\rho_k \frac{\partial \alpha_k \mathbf{U_k}}{\partial t} + \rho_k \nabla \cdot (\alpha_k \mathbf{U_k} \otimes \mathbf{U_k}) = -\nabla (\alpha_k P) + 2\mu_k \nabla \cdot (\alpha_k \boldsymbol{D}_k) - \mathbf{f}^{k \to S} - \mathbf{f}^{2\phi}, \tag{4.3}$$

où $\mathbf{f}^{2\phi}$ est la force par unité de surface exercée par la phase k sur l'autre phase ($\mathbf{f}^{l \to g} = -\mathbf{f}^{g \to l}$) et $\mathbf{f}^{k \to S}$ est la force exercée par le fluide sur le solide, déjà recontrée dans le chapitre 3.

4.1.3 Taux de vide et porosité

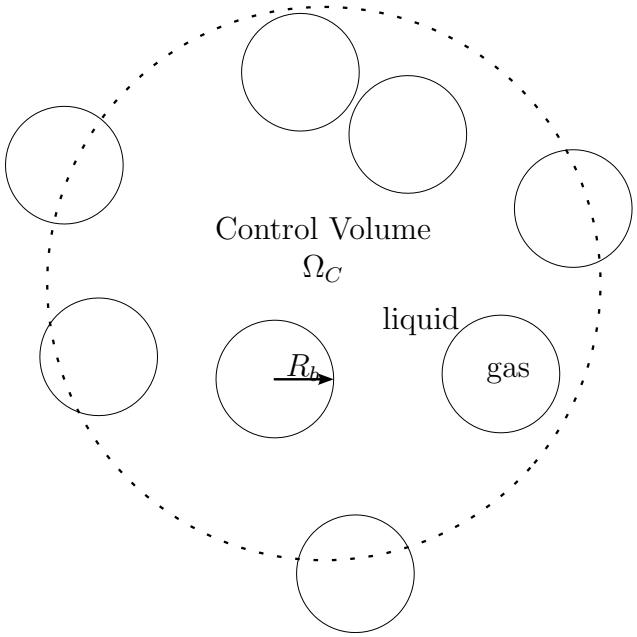


Figure 4.1 Moyennage spatial pour le mélange diphasique.

En rappelant que la fonction caractéristique pour la phase k est χ_k et celle pour le solide,

χ_S (voir la section 3.1), on a alors, par définition :

$$\varepsilon_k = \frac{\langle \chi_k \rangle}{1 - \Phi}, \tag{4.4}$$

et on rappelle à nouveau que $\varepsilon_g = 1 - \varepsilon_l = \varepsilon$ and ε. Dans notre cas, le taux de vide ε est une variable du temps et de l'espace :$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{t})$. Comme expliqué précédemment, l'approche E-E nécessite d'imposer un paramètre correspondant à la taille des bulles. En effet, celle-ci est nécessaire dans les relations de fermeture développées plus bas. Supposons que les bulles sont toutes de même rayon R_b, on peut alors écrire une relation qui nous sera utile par la suite, reliant le taux de vide ε, le rayon des bulles R_b et le nombre de bulles N_b :

$$N_b = \varepsilon \frac{R_C^2}{R_b^2}. \tag{4.5}$$

Ceci revient simplement à dire que le taux de vide moyenné dans un volume de contrôle est égal au volume total des bulles de gaz divisé par le volume de contrôle (voir la figure 4.1).

4.1.4 Modèle pour les interactions gaz-liquide et liquide-solide

Couplage entre les phases gazeuse et liquide

De la même façon que les forces agissant entre le fluide et la structure ont été modélisées dans le précédent chapitre, un modèle de couplage entre les deux phases est développé dans cette sous-section. L'idée est d'utiliser des modèles habituellement employés dans le cas de formulations E-L. Dans un volume de contrôle de rayon R_C, on peut donc écrire la force par unité de surface $\mathbf{f}^{l \to g}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{l \to g} &= \mathbf{f}_M + \mathbf{f}_D, \\
\mathbf{f}_M &= \frac{1}{\pi R_C^2} N_b \rho_l \frac{4}{3} \pi R_b^3 \left((1 + C_M^b) \frac{\partial \mathbf{u_l}}{\partial t} - C_M^b \frac{\partial \mathbf{u_g}}{\partial t} \right), \\
\mathbf{f}_D &= \frac{1}{\pi R_C^2} N_b C_D^b \rho_l \pi R_b^2 \| \mathbf{u_l} - \mathbf{u_g} \| \left(\mathbf{u_l} - \mathbf{u_g} \right).
\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (4.5), on obtient les relations simplifiées suivantes :

$$\mathbf{f}_M = \rho_l \frac{4}{3} \varepsilon \left((1 + C_M^b) \frac{\partial \mathbf{u_l}}{\partial t} - C_M^b \frac{\partial \mathbf{u_g}}{\partial t} \right), \tag{4.6}$$

$$\mathbf{f}_D = \rho_l \frac{\varepsilon}{R_b} C_D^b \| \mathbf{u_l} - \mathbf{u_g} \| \left(\mathbf{u_l} - \mathbf{u_g} \right). \tag{4.7}$$

La calibration des paramètres clés C_D^b et C_M^b est différente de celle conduite dans le chapitre précédent puisqu'aucun résultat de DNS n'est disponible pour les écoulements diphasiques. On suppose que le coefficient de traînée est simplement donné par la loi de Stokes :

$$C_D^b = \frac{24}{\mathrm{Re}_b}. \tag{4.8}$$

Cette hypothèse est justifiée car le nombre de Reynolds Re_b basé sur la vitesse relative gaz-liquide et le diamètre des bulles est plus faible (d'un facteur au moins supérieur à 10) que celui des tubes, Re, de l'ordre de 100. Le modèle est donc valide pour la plage de Re investiguée. En ce qui concerne la masse ajoutée, nous allons mettre à profit l'étude complète qui en a été faite dans Béguin (2014). Les résultats de cette étude sont directement applicables à notre cas et on utilisera dans la suite la relation suivante :

$$C_M^b = 0.5 + 0.34\varepsilon^2. \tag{4.9}$$

Couplage entre le mélange diphasique et la structure

Dans notre cas, la densité relative du gaz (de la vapeur d'eau dans générateurs de vapeur et de l'air pour les expériences en laboratoire) par rapport à la phase liquide est négligeable. Par conséquent, la quantité de mouvement échangée entre les tubes et le gaz est négligeable devant celle échangée entre le liquide et les tubes, dans l'hypothèse où le taux de vide n'est pas voisin de 1 et où les vitesses du gaz sont du même ordre de grandeur que celles du liquide. Dans toute la suite, on supposera donc que seule la phase liquide interagit avec les tubes, c'est-à-dire que $\mathbf{f}^{g\to S} = \mathbf{0}$. Par conséquent, la structure et le fluide sont directement couplés par $(4.3)_l$, alors que le gaz est couplé indirectement à la structure par le biais de son couplage direct avec le liquide dans $\mathbf{f}^{2\phi}$.
Par analogie avec le modèle du chapitre précédent, la force par unité de surface $\mathbf{f}^{l\to S}$ induite par la phase liquide sur le tube j s'écrit :

$$\mathbf{f}^{l\to S} = (1-\varepsilon)\frac{\Phi_j}{\pi R_T^2}\mathbf{F}_j^{l\to S}. \tag{4.10}$$

On constate que l'on a simplement étendu le modèle du milieu poreux à celui d'un milieu poreux diphasique en introduisant le facteur $(1-\varepsilon)$.

Rappelons également que l'on a :

$$\mathbf{F}_j^{l\to S} = \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_D, \tag{4.11}$$

$$\mathbf{F}_M = \rho_l \pi R_T^2 C_M \left(\frac{\partial \mathbf{u_l}}{\partial t} - \ddot{\mathbf{r}}_j \right), \tag{4.12}$$

$$\mathbf{F}_D = \rho_l R_T C_D \|\mathbf{u_l} - \dot{\mathbf{r}}_j\| \left(\mathbf{u_l} - \dot{\mathbf{r}}_j\right). \tag{4.13}$$

Effet de la gravité

Contrairement au cas monophasique, l'effet de la gravité ne peut pas être négligé dans le cas d'écoulements diphasiques verticaux. En effet, les deux phases n'ayant pas la même masse volumique, la moins dense des deux subit une accélération verticale par rapport à la plus dense. Ainsi, l'une des phases glisse » par rapport à l'autre sous l'effet de la gravité, ce qui induit des efforts interfaciaux et donc une modification de l'écoulement. Puisque l'ensemble de nos équations est adimensionné, on introduit le paramètre sans dimension $\mathcal{F}_r$ appelé nombre de Froude :

$$\mathcal{F}_r = \frac{V_\infty}{\sqrt{g D_T}}.$$

Le nombre de Froude peut être interprété comme la racine carrée du rapport de la pression dynamique sur la pression hydrostatique ou encore comme une mesure de l'importance relative des forces d'inertie et de pesanteur [voir de Langre (2002)].
Ainsi, on ajoute un terme source $\mathbf{f}^{G\to k}$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour la phase k pour prendre en compte l'effet de la gravité dans le cas d'écoulements verticaux :

$$\mathbf{f}^{G\to l} = -(1-\varepsilon)\frac{\rho_l}{\mathcal{F}_r^2}\mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{f}^{G\to g} = -\varepsilon\frac{\rho_g}{\mathcal{F}_r^2}\mathbf{e}_y.$$

En ce qui concerne les tubes, on calcule leur déplacement par rapport à leur position d'équilibre. La gravité est donc déjà incluse et il faut donc, pour compenser, retirer le terme en $\alpha_k \rho_k g$ dans les équations.

4.2 Vérification et validation du modèle diphasique

L'extension du modèle milieu poreux aux écoulements diphasiques a été implémentée dans le logiciel CADYF. La prochaine étape consiste à vérifier que l'implémentation s'est faite correctement puis à valider le modèle sur un cas d'essai simple.

4.2.1 Vérification par la méthode des solutions manufacturées

Le détail de la méthode des solutions manufacturées est donné dans le chapitre 3. Dans cette section, nous nous contentons de vérifier la partie du code correspondant à l'extension diphasique, à savoir le modèle E-E à deux fluides, en supposant que cela suffit à vérifier l'ensemble du code (*i*.e. milieu poreux + diphasique).
Des solutions analytiques ont été manufacturées pour la pression P_{MS}, les deux composantes de la vitesse du liquide ($\mathbf{U}_{l,MS}$ et $V_{l,MS}$), les deux composantes de la vitesse du gaz ($\mathbf{U}_{g,MS}$ et $V_{g,MS}$) et le taux de vide ε_{MS} :

$$\begin{cases} U_{l,MS} &= (1-x)^3 \\ V_{l,MS} &= 4y(1-x)^2 \\ U_{g,MS} &= x^3 \\ V_{g,MS} &= -4yx^2 \\ \varepsilon_{MS} &= x \\ P_{MS} &= y\sin(x) \end{cases} \tag{4.14}$$

Le domaine de calcul est un carré de côté unité. Les conditions aux limites correspondant à la solution analytique manufacturée sont appliqués à son bord : des conditions de Dirichlet sur 3 des 4 côtés et une condition de Neumann sur le dernier afin de fixer un niveau de pression. En suivant la même démarche que dans le chapitre 3, on introduit des termes sources dans la formulation de telle sorte que la solution numérique converge vers la solution analytique manufacturée. Le maillage est uniformément raffiné et on calcule, pour chaque taille h, les normes de l'erreur exacte pour la pression (norme $\mathcal{L}^2$) et pour la vitesse (norme $\mathcal{H}^1$). On constate au regard des figures 4.2 et 4.3 que les ordres de convergence théoriques sont asymptotiquement atteints, ce qui clot l'étape de vérification du modèle diphasique.

4.2.2 Validation sur un cas d'essai simple

La validation de l'extension diphasique du code a été effectuée de la façon suivante. En partant d'un problème simple dont la solution analytique est bien connue, on extrait les conditions aux limites ainsi que les termes sources idoines. Il suffit ensuite de vérifier que le résultat de la simulation correspond bien à la solution analytique connue.
Le cas d'essai est un écoulement diphasique uniforme de bas en haut à taux de vide constant soumis à la gravité (voir la figure 4.4). On sait qu'un tel écoulement est caractérisé par une vitesse de glissement $(V_g - V_l)$ uniforme et on calcule aisément les différentes variables de

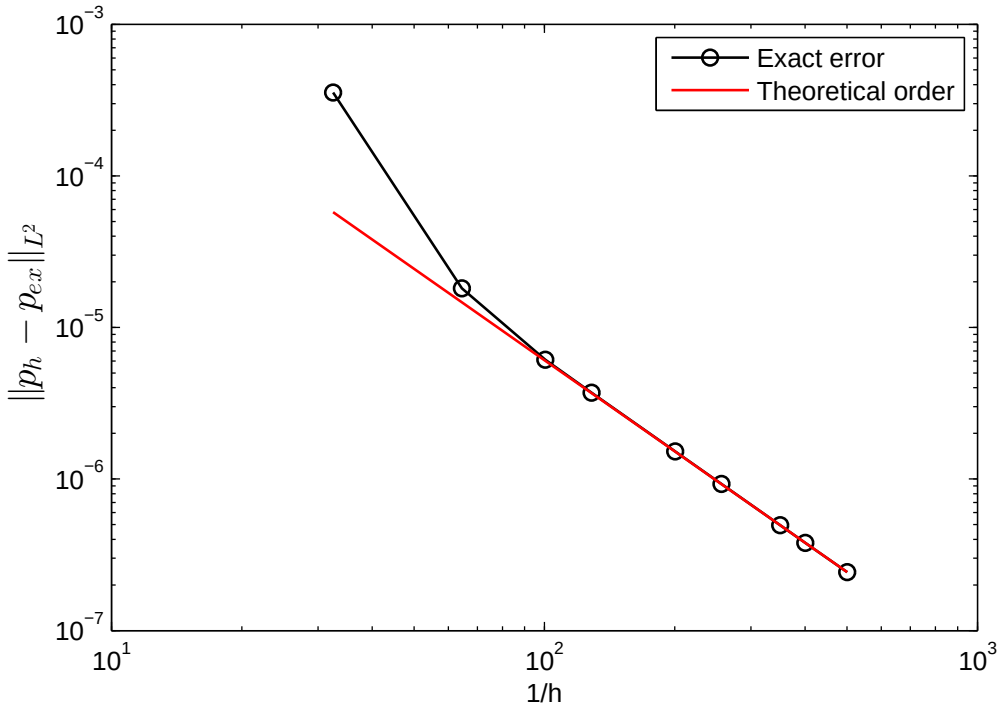


Figure 4.2 Convergence spatiale de l'erreur exacte pour la pression (norme $\mathcal{L}^2$).

l'écoulement :

$$\begin{cases} U_l &= 0 \\ U_g &= 0 \\ V_g - V_l &= \sqrt{\frac{gR_b}{C_D^b}}\sqrt{(1-\frac{\rho_g}{\rho_l})(1-\varepsilon)} \\ \varepsilon &= 0.1 \\ P &= -\left[\rho_g\varepsilon + \rho_l(1-\varepsilon)\right]gy \end{cases} \tag{4.15}$$

On vérifie que cette solution satisfait bien les équations $(4.3)_{k=l}$, $(4.3)_{k=g}$ et (4.13). Puis, on applique les conditions aux limites correspondant à cette solution ainsi qu'un terme source pour la gravité et on vérifie que la solution numérique est égale à la solution analytique aux erreurs de discrétisation près. Comme tous les champs sont constants ou linéaires, les deux solutions sont même égales à la précision machine car les éléments P2–P1 permettent de représenter exactement des champs de vitesse quadratiques et des champs de pression linéaires.

On constate avec (4.15) qu'il existe un gradient de pression hydrostatique proportionnel à la densité moyenne du mélange diphasique. Or, physiquement, ce gradient est censé être proportionnel à la densité de la phase continue (en l'occurence celle du liquide). On constate donc déjà les limites du modèle employé et on subodore le fait qu'il est mathématiquement mal posé, ce dont nous allons discuter dans la prochaine section.

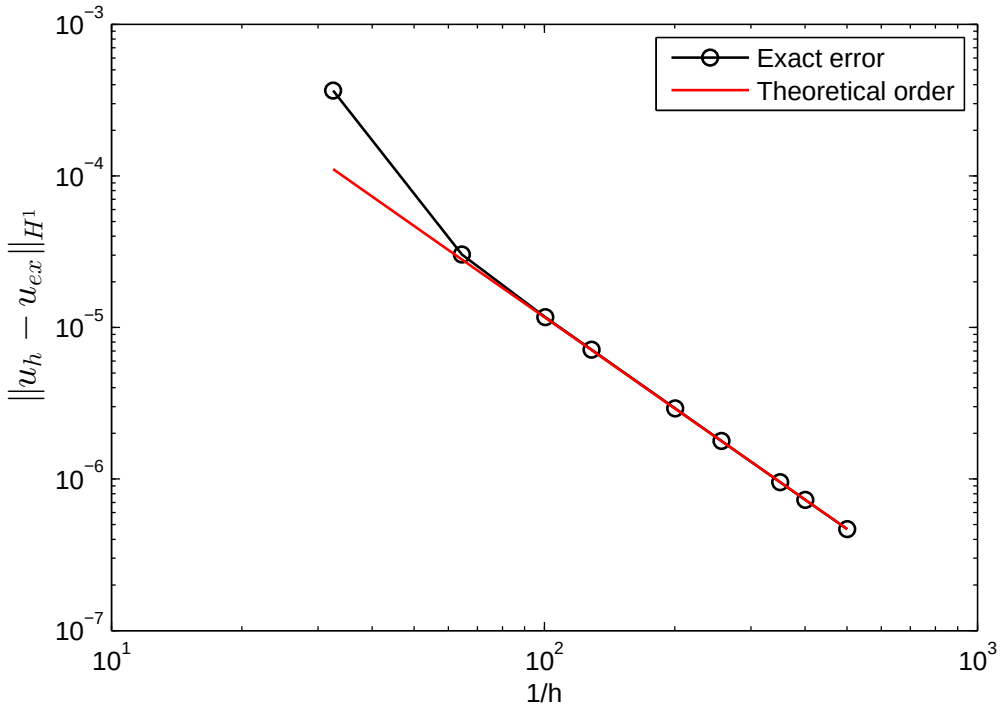


Figure 4.3 Convergence spatiale de l'erreur exacte pour la vitesse (norme $\mathcal{H}^1$).

4.3 Analyse mathématique du modèle

4.3.1 Inconnues et équations

Tout modèle, aussi fin et précis soit-il, ne peut aboutir à un résultat numérique que si il est bien posé mathématiquement (au sens d'Hadamard). Un problème est bien posé si et seulement si il existe une unique solution qui varie continuement par rapport aux données. Si l'énoncé paraît simple, il est malheureusement difficile voire impossible de prouver formellement qu'un problème est bien posé dans la plupart des cas pratiques.

Une condition nécessaire qui apparaît naturellement pour que le problème soit bien posé est qu'il y ait autant d'équations que d'inconnues. Cette condition est acquise pour le cas monophasique mais l'extension aux écoulements diphasiques a introduit trois nouvelles variables : U_g, V_g et ε. Les deux premières variables sont associées aux deux équations de conservation de la quantité de mouvement pour la phase gazeuse alors que ε est associé à l'équation de continuité pour la phase gazeuse. On constate donc que le taux de vide joue un rôle similaire à celui de la pression car l'équation qui lui est associée est une équation de conservation de la masse. Néanmoins, cette ressemblance s'arrête là car ε n'est pas un multiplicateur de Lagrange au même titre que P.

Le tableau 4.3.1 résume le caractère bien-posé du modèle milieu poreux diphasique (au sens

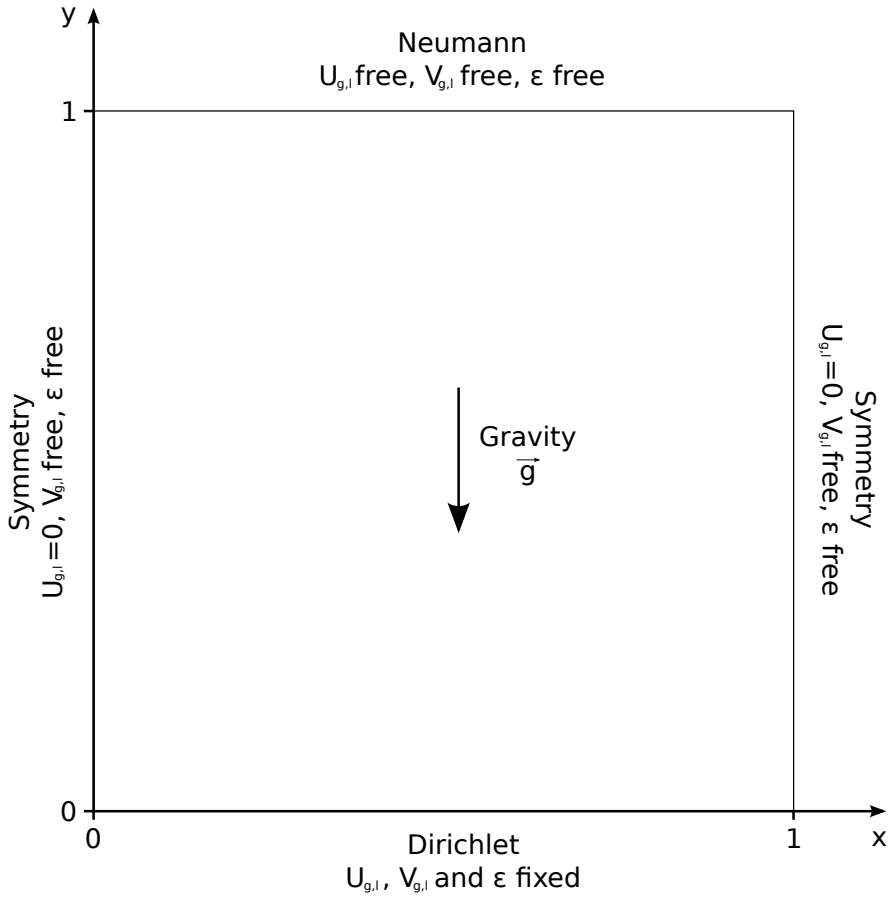


Figure 4.4 Cas d'essai d'un écoulement diphasique à vitesse de glissement constante.

simpliste du terme) en répertoriant les inconnues et leurs équations associées.

4.3.2 Hyperbolicité du modèle diphasique à deux fluides

Gradient de pression et taux de vide

Malgré les apparences, le modèle composé par les équations (4.3)-(4.2) est mathématiquement **mal posé**. Rappelons qu'un modèle bien posé n'est pas un caprice de mathématicien mais bien une condition absolument **nécessaire à l'obtention d'une solution physiquement acceptable**. Ce point sensible a été discuté dès les années 1970 par la communauté

Inconnues	Equations associées
$\mathbf{U_l}, \mathbf{V_l}$	$(4.3)_{k=l}$
$\mathbf{U_g}, \mathbf{V_g}$	$(4.3)_{k=g}$
$\mathbf{P}$	$(4.2)_{k=l}$
ε	$(4.2)_{k=g}$
$\mathbf{r_j}$	(3.11)

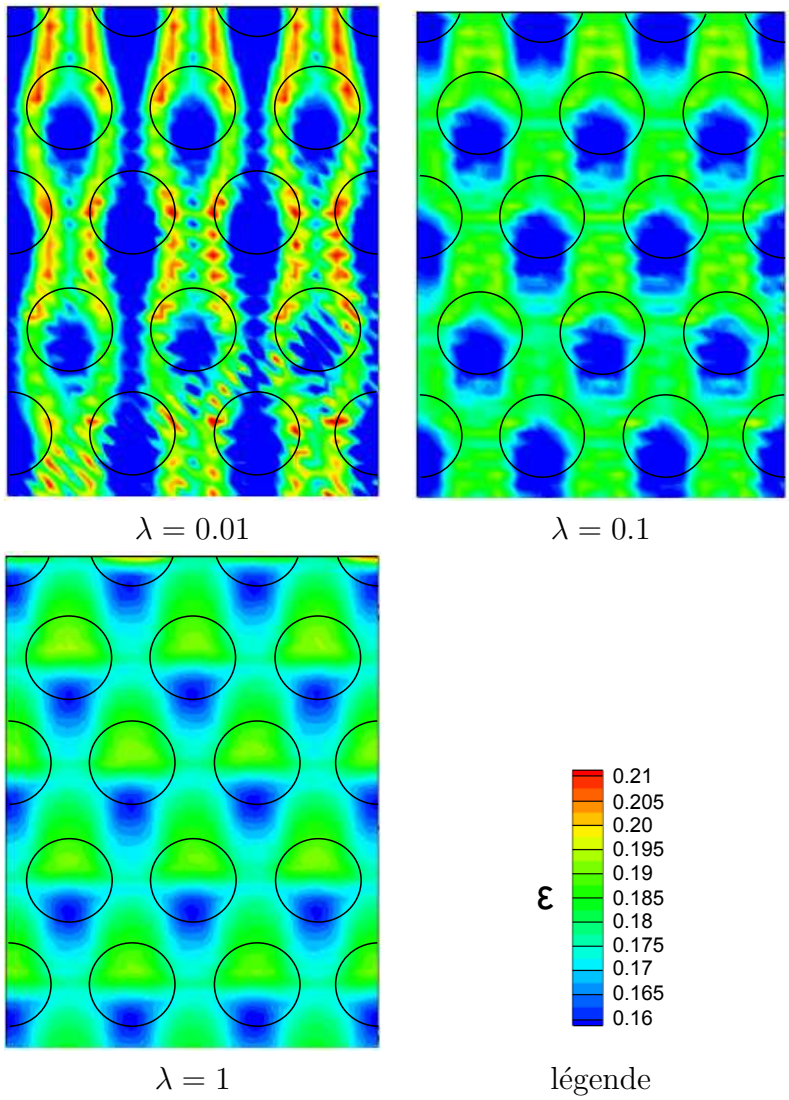
scientifique en général et la communauté mathématique en particulier.
Dans Lyczkowski *et al.* (1978), les auteurs relèvent qu'il existe deux façons possibles d'exprimer le terme de gradient de pression : $\boldsymbol{\nabla}(\alpha_k P)$ ou $\alpha_k \boldsymbol{\nabla} P$. Si aucun argument physique ne permet de discriminer l'un des deux modèles, c'est un argument mathématique qui est mis en avant en faveur de la seconde expression. En effet, les auteurs ont montré, à la fois par des simulations numériques et des développements analytiques, que la première expression rendait le modèle non-hyperbolique. La notion d'hyperbolicité en mathématique est voisine de ce que l'on a appelé plus haut « bien-posé » et on considèrera dans la suite qu'elles sont équivalentes.
Une tentative de justification physique d'un tel choix est esquissée dans Prosperetti et Tryggvason (2007b). Les auteurs font observer que, pour un fluide au repos, le terme $P\boldsymbol{\nabla}\alpha_k$ introduit une force motrice par le simple présence de deux phases. Prenons l'exemple d'une couche d'huile reposant sur un bassin d'eau. Aux environs de l'interface, il existe un gradient $P\boldsymbol{\nabla}\alpha_k$ alors qu'aucune force autre que la gravité ne s'exerce sur le mélange au repos.
Pour ces raisons, nous avons retenu la seconde expression du terme de gradient de pression. Elle est d'ailleurs majoritairement, sinon exclusivement, utilisée dans la littérature [voir par exemple Coquel *et al.* (1997); Cordier *et al.* (2014); Delale (2013); Panescu (2006)].

Rendre le modèle hyperbolique

Malheureusement, la manipulation évoquée dans le paragraphe précédent ne permet pas de restaurer l'hyperbolicité du modèle. Notons que, dans notre cas, nous ne résolvons pas le modèle classique à deux fluides mais un modèle hybride incluant le milieu poreux et des termes sources additionnels. D'autre part, les considérations concernant la nature hyperbolique du modèle dépassent de loin le cadre de ce travail de maîtrise.
Un rétrospective des différentes tentatives pour rendre hyperbolique le modèle diphasique à deux fluides peut être trouvée dans Lhuillier *et al.* (2013). On retiendra que, dans la limite des connaissances actuelles, il n'existe aucune façon satisfaisante de régler ce problème. Certains auteurs utilisent des valeurs non physiques de la masse ajoutée alors que d'autres introduisent une pression interfaciale dont la valeur est ajustée au cas par cas. C'est la seconde méthode que nous retiendrons, en gardant à l'esprit qu'elle n'est **pas physiquement satisfaisante**.
En ajoutant un terme de stabilisation $\lambda\boldsymbol{\nabla}\varepsilon_k$, on peut rétablir l'hyperbolicité du modèle pour une certaine valeur du paramètre λ. Cette valeur a été ajustée en comparant les résultats d'une simulation d'écoulement diphasique (avec $\varepsilon = 20\%$ en entrée) dans la géométrie du cas d'essai. Sans le terme de stabilisation, le calcul diverge très vite et aucune solution n'est obtenue. On peut proposer une interprétation physique de ce paramètre. Comme suggéré dans la littérature (cf. citations précédentes), on peut introduire une pression interfaciale

censée prendre en compte les effets de tension de surface au niveau des bulles. Dans notre cas, cela revient à supposer cette pression interfaciale constante et égale à λ. La figure 4.5 montre les contours du taux de vide en régime permanent pour différentes valeurs de λ.

On constate que la solution numérique est très « bruitée » pour les faibles valeurs de λ alors



$\lambda = 0.01$ $\lambda = 0.1$

$\lambda = 1$ légende

Figure 4.5 Contours du taux de vide en fonction du paramètre λ.

qu'elle est plus lisse pour les valeurs plus élevées. Ainsi, nous utiliserons dans la suite une valeur de $\lambda = 1$. L'équation de conservation de la masse n'est pas affectée par les remarques précédentes. En revanche, les équations de conservation de quantité de mouvement ont été modifiées afin de satisfaire la condition d'hyperbolicité qui est, rappelons-le, indispensable à l'obtention d'une solution numérique. La version finale de l'équation de conservation de

quantité de mouvement pour la phase k est la suivante :

$$\rho_k \frac{\partial \alpha_k \mathbf{U_k}}{\partial t} + \rho_k \nabla \cdot (\alpha_k \mathbf{U_k} \otimes \mathbf{U_k}) = -\alpha_k \boldsymbol{\nabla} P - \lambda \boldsymbol{\nabla} \varepsilon_k + 2\mu_k \nabla \cdot (\alpha_k \boldsymbol{D}_k) - \mathbf{f}^{k \to S} - \mathbf{f}^{2\phi}. \quad (4.16)$$

Tentons de justifier ce choix par une analyse physique de la situation. Comme expliqué dans le premier chapitre, la relation de fermeture pour les forces fluide-structure du modèle du milieu poreux n'est exacte que lorsque le tube est entièrement dans le volume de contrôle. Dans le cas contraire, la force est approximée car seulement une partie du tube est intersectée par le volume de contrôle.
On peut tenir un raisonnement analogue dans le cas diphasique. En effet, le volume de contrôle ne contient *a priori* pas uniquement des bulles entières. Dans le cas où des bulles sont intersectées par le volume de contrôle, on retombe dans le cas expliqué précédemment. Si l'on s'intéresse uniquement aux efforts exercés sur l'interface liquide-gaz qui est à l'intérieur du volume de contrôle. D'un point de vue formel, on a :

$$\mathbf{f}_i^{2\phi} = \int_{\partial\Omega_i} (p_i \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_i) dS,$$

où $\partial\Omega_i$ désigne l'interface liquide-gaz située à l'intérieur d'un volume de contrôle donné , p_i la pression interfaciale et $\boldsymbol{\tau}_i$ le tenseur des contraintes visqueuses. On peut alors réécrire l'équation de la façon suivante :

$$\mathbf{f}_i^{2\phi} = \int_{\partial\Omega_i} P \mathbf{n}_i dS + \int_{\partial\Omega_i} \left[(p_i - P)\mathbf{n}_i + \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_i \right] dS,$$

où P est, rappelons-le, la pression moyenne du mélange. Faisons l'hypothèse que :

$$\int_{\partial\Omega_i} \left[(p_i - P)\mathbf{n}_i + \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_i \right] dS = \mathbf{f}_M + \mathbf{f}_D.$$

On remarque que si toutes les bulles sont entièrement à l'intérieur du volume de contrôle alors $\int_{\partial\Omega_i} P \mathbf{n}_i dS$ est nul. Dans le cas contraire, il est nécessaire de modéliser ce terme. Pour retrouver le modèle choisi, on a alors :

$$\int_{\partial\Omega_i} P \mathbf{n}_i dS = (\lambda - P) \boldsymbol{\nabla} \varepsilon_k$$

On constate donc que le choix retenu n'a pas de fondement physique mais qu'il correspond à une convention utilisée dans la littérature pour pallier le problème de non-hyperbolicité du modèle utilisé.

4.4 Instabilité fluidélastique diphasique

4.4.1 Présentation du cas d'essai

Comme dans le chapitre précédent, les simulations seront effectuées sur une géométrie de référence correspondant à un faisceau de 25 tubes (voir la figure 4.6). Puisqu'il y a désormais deux phases, on fixe une vitesse verticale unitaire en entrée pour les phases gazeuse et liquide :

$$V_{g,\infty} = V_{l,\infty} = 1,$$
$$U_{g,\infty} = U_{l,\infty} = 0,$$

et des conditions de symétrie sont appliquées sur les bords du domaine. Les densité et viscosité adimensionnelles sont respectivement égales à 1 et 5×10^{-3}. Par conséquent, le nombre de Reynolds Re (basé sur la vitesse de la phase liquide) est égal à 200.
Le rayon des bulles adimensionné R_b/D_T est considéré constant et égal à 5% du diamètre des tubes, ce qui est un choix raisonnable compte tenu du nombre de Reynolds et de la plage de taux de vide considérés. En effet, en prenant comme référence les travaux expérimentaux de Ricciardi (2010), on obtient $D_T = 40$ mm pour le diamètre des tubes et un choix de $R_b = 2$ mm correspond à la taille typique d'une bulle d'air sphérique dans de l'eau. On obtient donc $R_b/D_T = 5\%$.
Enfin, le taux de vide est fixé uniquement en entrée et libre sur les autres bords du domaine.

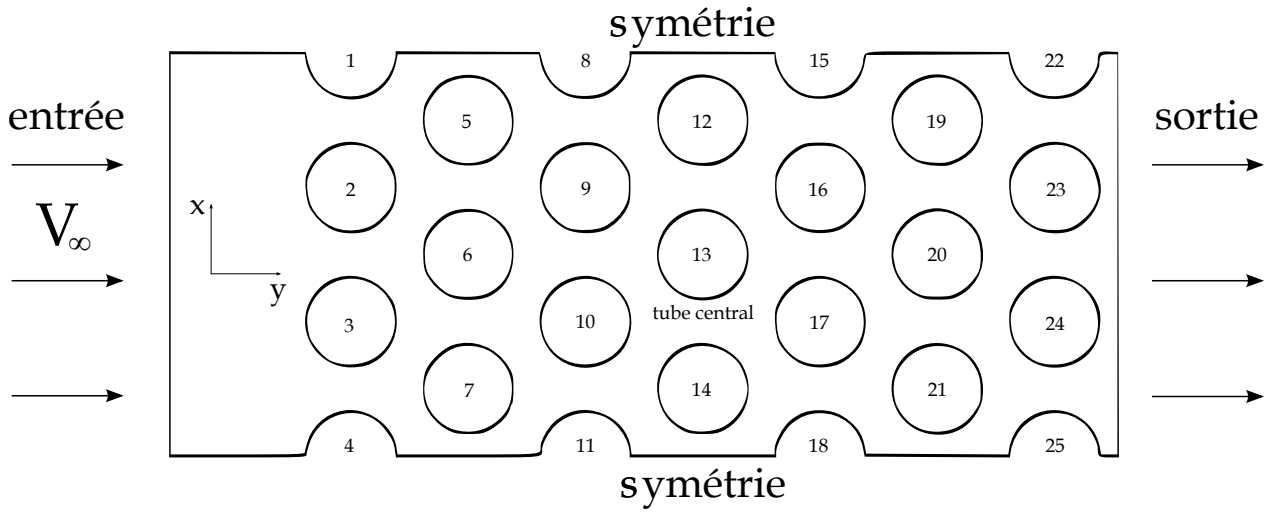


Figure 4.6 Géométrie (tournée à 90^o) du cas de référence diphasique.

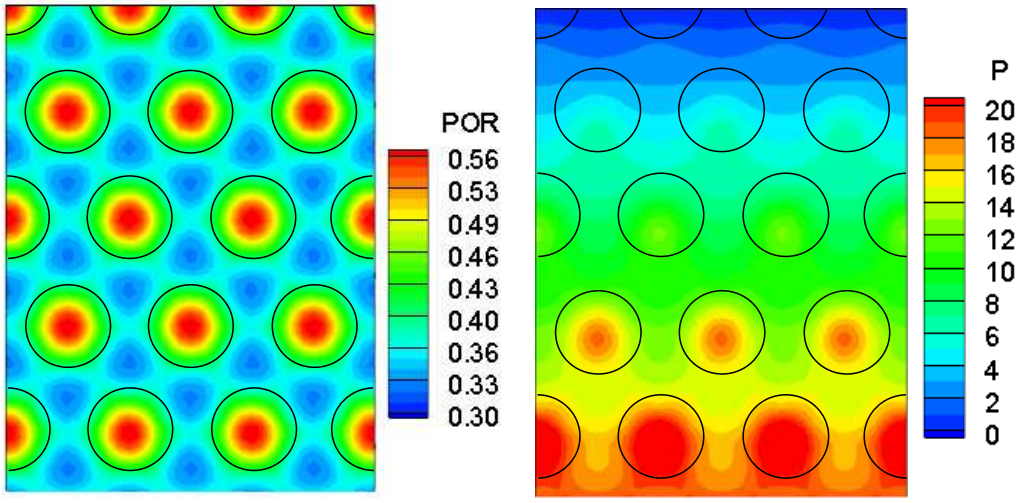


Figure 4.7 Contours de porosité (gauche) et de pression (droite) (les contours des tubes ont été ajoutés en trait plein, $\varepsilon = 0.2$ en entrée).

Les figures 4.7, 4.8 et 4.9 montrent les contours de l'écoulement autour du tube central de la section d'essai.

4.4.2 Influence du taux de vide

L'influence du taux de vide sur la vitesse critique d'IFE est à présent investiguée. Comme expliqué précédemment, le modèle utilisé dit du « bubbly flow » (écoulement à bulles) implique que le taux de vide doit être suffisamment faible pour que la phase gazeuse reste sous forme de bulles isolées. Bien entendu, le taux de vide à partir duquel une telle configuration n'existe plus dépend de nombreux paramètres. Cependant, il est classiquement admis qu'une valeur de 30% du taux de vide constitue une bonne limite pour l'écoulement à bulles.
En reprenant la même méthodologie que celle du chapitre précédent, on cherche la valeur critique U_{rc} en fonction du paramètre de masse-amortissement $m^*\delta$. Le nombre de Reynolds (calculé avec la phase liquide) est fixé à 200 et cinq valeurs du taux de vide allant de 0 à (30 %) sont investiguées.
Tout d'abord, il est nécessaire de mesurer l'amortissement fluide δ_f pour chaque valeur du taux de vide. Rappelons que l'amortissement fluide s'ajoute à l'amortissement structurel dans le calcul du paramètre $m^*\delta$. Le tableau 4.1 rassemble les valeurs de δ_f associées à chaque valeur du taux de vide.
Le tableau 4.1 montre que la vitesse critique d'IFE augmente avec le taux de vide, mais pas de façon significative. Le taux de vide donné est celui qui est imposé en entrée. En comparant ces données à celles, expérimentales, de la figure 4.10, on constate que l'amortissement fluide

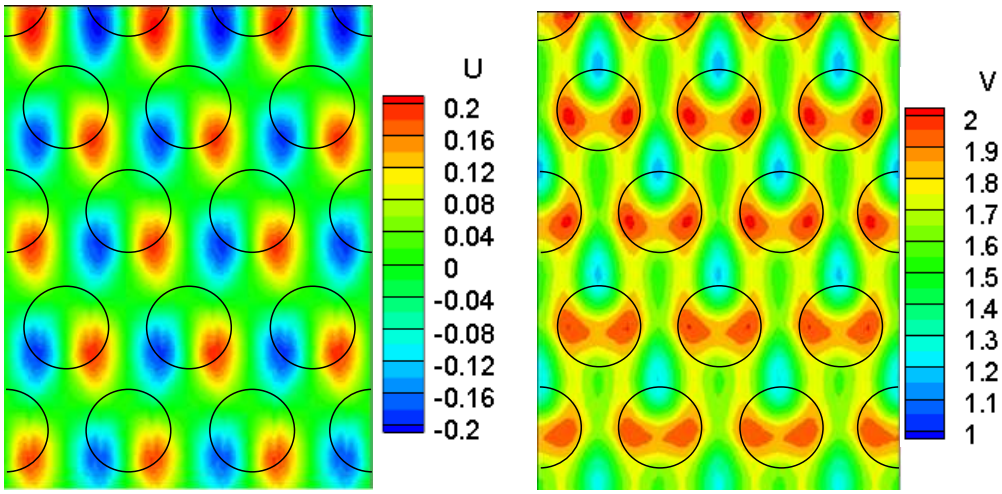


Figure 4.8 Contours de vitesses horizontale (gauche) et verticale (droite) (les contours des tubes ont été ajoutés en trait plein, $\varepsilon = 0.2$ en entrée).

Tableau 4.1 Vitesse réduite critique en fonction du taux de vide.

Taux de vide (%)	δ_f (%)	$m^*\delta$	U_{rc}
0	3.8	0.24	13.1
5	4.5	0.30	15.4
10	4.7	0.33	15.9
20	5.0	0.40	16.1
30	5.0	0.46	15.9

devrait fortement varier avec le taux de vide. Or, dans notre cas, on n'observe que peu de variations, ce qui suggère que l'amortissement diphasique n'est que partiellement modélisé probablement car il s'agit d'un phénomène qui se produit à une échelle plus petite que le volume de contrôle. Cette hypothèse viendrait en accord avec les travaux de Charreton (2014). La figure 4.11 permet de comparer les présents résultats avec les données expérimentales issues de Ricciardi *et al.* (2011). Les résultats de Violette (2005) et Sawadogo (2012) ne sont pas directement comparables car ils correspondent à une configuration différente du faisceau de tubes. Néanmoins, la tendance générale est la même, à savoir que la vitesse critique d'instabilité augmente en fonction du taux de vide.

Comme dans le cas monophasique, les valeurs de la vitesse critique issues des simulations sont nettement supérieures à celles obtenues expérimentalement. Ceci n'est pas étonnant car on retrouvait le même comportement dans le cas monophasique. Toutefois, la tendance géné-

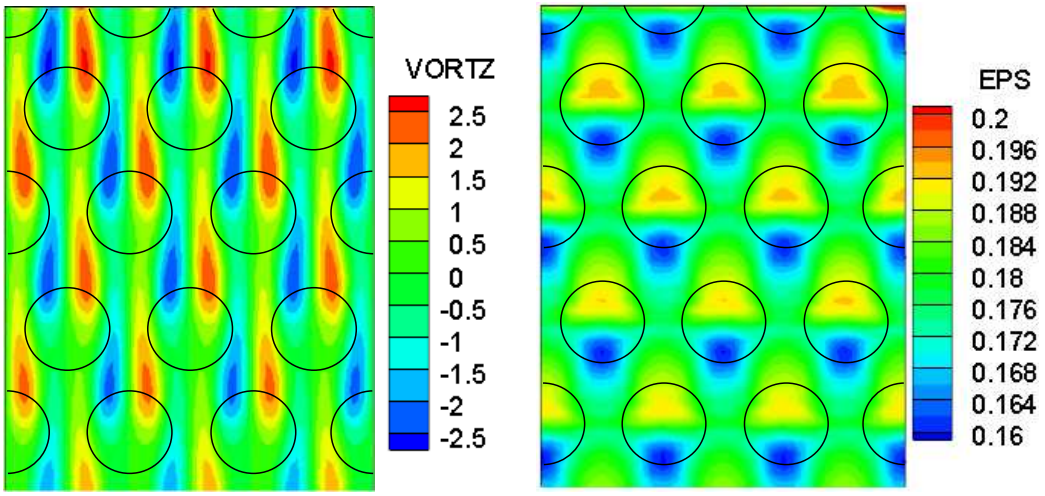


Figure 4.9 Contours de vorticité (gauche) et de taux de vide (droite) (les contours des tubes ont été ajoutés en trait plein, $\varepsilon = 0.2$ en entrée).

rale est cohérente, ce qui est encourageant. En effet, une amélioration du modèle du milieu poreux lui-même (à savoir des relations de fermeture plus physiques) devrait selon toute vraisemblance permettre d'obtenir de meilleurs résultats pour les cas diphasiques.

4.4.3 Influence de la gravité

La particularité des écoulements diphasiques est leur sensibilité à l'orientation par rapport au sol. En effet, un écoulement monophasique est censé être identique, qu'il soit dirigé verticalement ou horizontalement. En revanche, dans le cas d'un écoulement diphasique, les deux phases n'ont pas le même comportement vis-à-vis de la gravité. Plus précisément, l'une des phases va subir une force volumique plus élevée par rapport à l'autre phase en raison de leur différence de densité. Ainsi, dans le cas d'un écoulement vertical de bas en haut, la phase gazeuse va être accélérée par rapport à la phase liquide car elle est moins dense. Ceci vient donc naturellement modifier l'écoulement et il faut ajouter des termes forces dans le modèle afin d'en tenir compte :

$$\mathbf{f}^{G\to l} = -(1-\varepsilon)\frac{\rho_l}{\mathcal{F}_r^2}\mathbf{e}_y,$$
$$\mathbf{f}^{G\to g} = -\varepsilon\frac{\rho_g}{\mathcal{F}_r^2}\mathbf{e}_y,$$

où $\mathbf{f}^{G\to l}$ est la force agissant sur la phase liquide, $\mathbf{f}^{G\to g}$ celle agissant sur la phase gazeuse et $\mathcal{F}_r$ le nombre de Froude (voir section 4.1). Comme il est impossible d'obtenir en même temps une similitude des nombres de Reynolds et de Froude, ce-dernier doit être fixé. En prenant

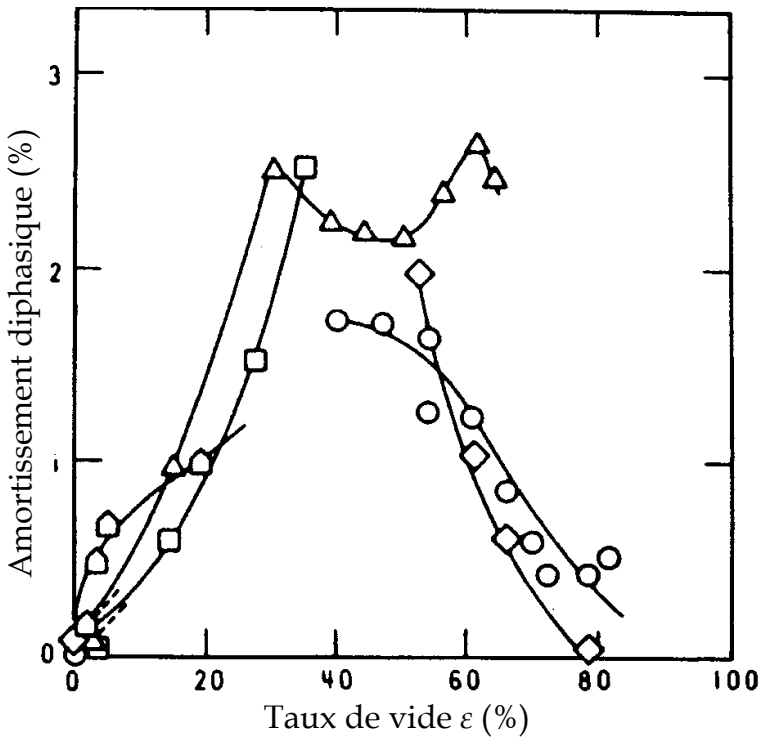


Figure 4.10 Amortissement fluide diphasique en fonction du taux de vide, reproduit de Pettigrew et Taylor (2004).

comme référence les travaux expérimentaux de Ricciardi (2010), on obtient un nombre de Froude moyen de 20.

Les simulations numériques effectuées en prenant en compte la gravité ne montrent pas de différence significative par rapport aux cas où la gravité est absente. Loin de pouvoir en conclure que cette dernière n'a pas d'effet physique substantiel, on ne peut que noter qu'elle n'a pas d'effet dans le cas de notre modèle et du nombre de Froude considéré. La valeur élevée du nombre de Froude signifie que les effets inertiels dominent largement les effets de pesanteur dans notre cas, ce qui peut expliquer la faible sensibilité des résultats par rapport à la gravité.

4.4.4 Influence du rayon des bulles

Comme expliqué précédemment, l'une des limitations du modèle utilisé est qu'il est nécessaire d'introduire le paramètre R_b, le rayon des bulles. Initialement, le choix de la valeur $R_b/D_T = 0.05$ a été retenu car elle correspond, dans le cas dimensionnel, à la taille typique des bulles dans un mélange eau/air.

Cependant, on peut s'interroger sur l'influence de ce paramètre qui intervient dans le calcul des forces de couplage entre les deux phases. Plus précisément, la force de traînée interfaciale

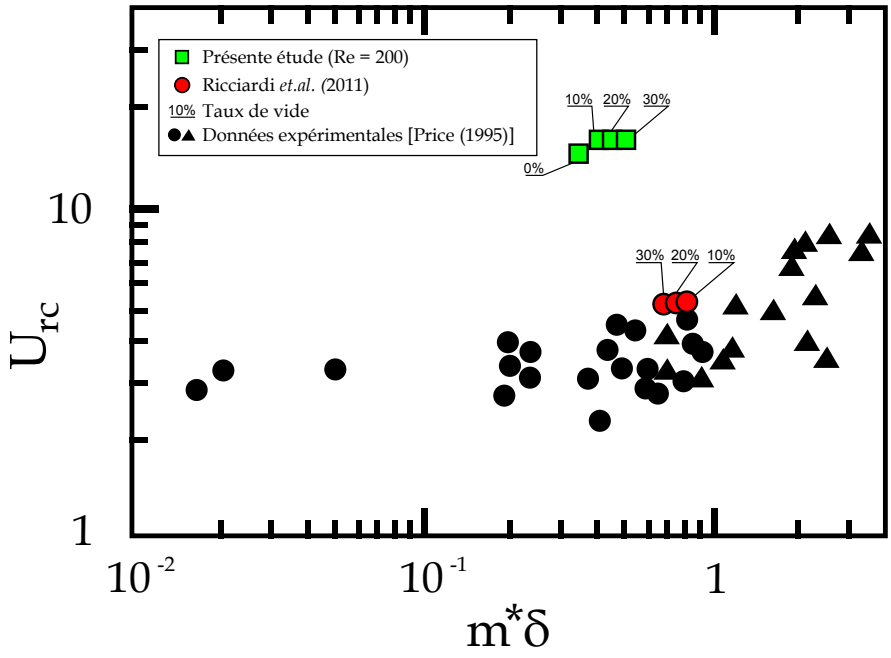


Figure 4.11 Carte de stabilité diphasique : résultats expérimentaux collectés par Price (1995) (marqueurs blancs et noirs) résultats expérimentaux par Ricciardi *et al.* (2011)(cercles rouges) et les résultats présents (carrés verts).

varie comme l'inverse de R_b. On s'attend donc à ce que, à mesure que le rayon R_b diminue, les forces de traînée augmentent et donc l'écoulement est stabilisé et donc moins turbulent. En revanche, il est difficile de prévoir l'effet d'une telle variation sur la vitesse critique d'apparition de l'IFE.

D'autre part, on souhaiterait à terme pouvoir simuler des écoulements dans lesquels la distribution de taille des bulles n'est pas constante. Par conséquent, des simulations ont été effectuées en faisant varier la valeur de R_b et les résultats sont consignés dans le tableau 4.2. Le résultats montrent que, lorsque le rayon des bulles augmentent, la vitesse réduite critique

Tableau 4.2 Vitesse réduite critique en fonction du rayon des bulles pour $\varepsilon = 10$ % en entrée.

R_b/D_T	U_{rc}
0.001	14.5
0.005	14.7
0.01	15.3
0.05	15.9
0.1	div.

d'IFE augmente. Ceci suggère que, plus les bulles sont petites, plus l'amortissement fluide est important. Cette hypothèse devrait être confirmée en calculant précisément l'amortissement fluide en fonction de R_b en utilisant la méthodologie de la sous-section 4.4.2. Enfin, le calcul diverge pour la valeur la plus élevée $R_b = 0.1$. Ceci semble indiquer que ce paramètre joue aussi un rôle dans l'hyperbolicité du modèle (voir section 4.3.2).

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle du milieu poreux a été étendu à des écoulements diphasiques. L'objectif de cette approche est d'être capable de prédire le déclenchement de l'IFE dans le cas d'écoulements diphasiques sans atteindre le coût prohibitif que représenterait une approche de type DNS.

Tout d'abord, le modèle E-E des écoulements à bulles est présenté et les équations dites à deux fluides sont obtenues. Un modèle simple d'interactions entre les deux phases est développé, analogue à celui développé pour l'interaction entre le fluide et la structure dans le chapitre précédent. On a ainsi obtenue une formulation complète dans laquelle les développements liés à l'écoulement diphasique se superposent à ceux liés au milieu poreux monophasique. Ensuite, le code a été vérifié par la méthode des solutions manufacturées et validé grâce à un cas d'essai simple dont on connaît une solution analytique. Le caractère « mathématiquement mal posé » du modèle diphasique utilisé est investigué et une solution provisoire, physiquement non acceptable, est adoptée à la lumière des récents développements trouvés dans la littérature. Des simulations instationnaires sur un faisceau de 25 tubes ont été effectuées pour différentes valeurs du taux de vide. La vitesse critique de l'IFE obtenue a été comparée avec des valeurs expérimentales trouvées dans la littérature. Enfin, l'influence des paramètres clés comme le rayon des bulles a été investiguée.

Les résultats obtenus ne se comparent pas très bien avec de précédents résultats expérimentaux. Les données montrent que le modèle du milieu poreux tend à surestimer la valeur de la vitesse critique d'instabilité. Le faible nombre de Reynolds utilisé ne peut pas expliquer cet écart car cela n'a pas empêché Étienne et Pelletier (2011) d'obtenir des résultats plus proches des données expérimentales. Les résultats obtenus dans la deuxième partie de la validation suggèrent que l'écart obtenu peut être dû au faible couplage entre des tubes voisins dans le cas du modèle du milieu poreux. En effet, l'amplitude des forces générées par un tube vibrant et induites sur ses voisins est environ trois fois plus faible dans les calculs du milieu poreux que dans ceux de la DNS. Par conséquent, le faisceau de tubes est plus stable dans

le premier cas et donc nécessite plus d'énergie (c'est-à-dire une vitesse réduite plus grande) pour atteindre de le seuil de l'IFE.

Les résultats sont à nouveau au-dessus des valeurs expérimentales trouvées dans la littérature. Cependant, l'évolution qualitative de la vitesse critique en fonction du taux de vide est respectée, ce qui est encourageant. En outre, une amélioration du modèle monophasique devrait conduire automatiquement à une meilleure précision pour les résultats de cas diphasiques.

CHAPITRE 5

CONCLUSION

5.1 Synthèse des travaux

Dans ce rapport, le modèle du milieu poreux a été développé afin de modéliser les interactions fluide-structure dans un faisceau de tubes soumis à un écoulement transverse diphasique.

Le premier chapitre est consacré à l'étude du modèle du milieu poreux dans le cas monophasique. Tout d'abord, le processus de moyennage en espace à l'origine du milieu poreux a été expliqué et les équations du modèle ont été établies. Les démarches classiques de vérification, validation et calibration du code ont été suivies. Des simulations instationnaires sur un faisceau de taillé réduite ont été effectuées et l'apparition de l'IFE a été observée. Les vitesses critiques obtenues ont été comparées à celles, expérimentales, provenant de la littérature et à des résultats numériques obtenus indépendamment par une méthode DNS. Enfin, l'influence des paramètres clés a été étudiée.

Dans le second chapitre, le modèle présenté précédemment est étendu au cas d'écoulements diphasiques. Tout d'abord, un modèle de l'écoulement diphasique a été développé et se superpose à celui du milieu poreux. Le mélange diphasique est représenté par une approche Euler-Euler et un modèle simple de couplage entre les deux phases est établi. Les démarches de vérification, validation et calibration sont à nouveau conduites à la différence près qu'aucune comparaison avec la DNS n'est cette fois possible. Le caractère mal posé, au sens d'Hadamard, des équations du modèle diphasique est mis en évidence et une solution y est apportée. Des simulations numériques instationnaires sur un faiceau de tubes mobiles sont effectuées et les valeurs de la vitesse critique d'IFE sont étudiées en faisant varier le taux de vide en entrée. Enfin, l'influence de la gravité et du rayon typique des bulles est investiguée.

5.2 Limitations de la solution proposée

Les résultats obtenus dans le cas diphasique ne sont pas en très bon accord avec les résultats expérimentaux issus de la littérature ni avec les résultats numériques issus de l'approche DNS. Ce relatif écart est à pondérer par l'extrême variabilité des résultats expérimentaux. De façon générale, les données montrent que le modèle du milieu poreux tend à surestimer la valeur de la vitesse critique d'instabilité. Les étapes de validation conduites ont permis

d'identifier l'une des raisons d'un tel écart. Ce dernier serait dû au fait que le modèle ne capture pas de façon suffisante le couplage existant entre deux tubes voisins.

De façon similaire, les résultats des simulations dans le cas diphasique montrent que le modèle surévalue la valeur de la vitesse critique d'IFE. Cependant, la variation de cette dernière en fonction du taux de vide est qualitativement respectée. En outre, l'écart observé semble uniquement imputable aux limitations du modèle du milieu poreux lui-même, et donc au cas monophasique. Ainsi, une amélioration du premier modèle devrait automatiquement se répercuter dans les résultats des simulations diphasiques.

5.3 Améliorations futures

L'objectif de cette maîtrise était de développer un code capable de modéliser un écoulement diphasique avec une approche milieu poreux en utilisant des relations de fermeture acceptables. La principale suite à donner à ces travaux serait d'obtenir de meilleures relations de fermeture. Voici quelques pistes d'améliorations possibles :

— De toute évidence, le modèle du milieu poreux doit être retravaillé. L'un des pistes envisagées est la modification du modèle de force reliant les efforts partiels dans un volume de contrôle à l'effort total sur un tube (voir l'équation 3.10). On pourrait par exemple ajouter un terme proportionnel au gradient de la porosité afin de tenir compte de la position angulaire par rapport au tube.
— La validation dans le cas monophasique doit être plus poussée. Les efforts fournis dans le cas de la comparaison des efforts dynamiques sur un tube vibrant doivent être prolongés en explorant d'autres valeurs des paramètre clés comme la fréquence d'excitation ou le nombre de Reynolds. En outre, une validation consistante avec d'autres modèles semi-empiriques peut être envisagée. Par exemple, il serait intéressant de mesurer le « time-delay » utilisé dans les modèles quasi-stationnaires.
— D'autres paramètres doivent être étalonnés. Par exemple, la masse ajoutée (C_M) n'a fait l'objet d'aucun étalonnage car sa valeur a été directement extraite de la littérature. On peut imaginer une mesure dynamique des efforts sur un tube vibrant, seul ou dans un faisceau, pour extraire ce coefficient. De plus, les coefficients de masse ajoutée (C_M^b) et de traînée (C_D^b) des bulles doivent être calibrés. Cependant, il est difficile d'effectuer la calibration de ces paramètres en utilisant des résultats expérimentaux diphasiques.
— La distribution de taille des bulles doit être enrichie. Initialement uniforme, on peut imaginer des distributions gaussiennes, log-normal ou de Poisson pour le rayon des

bulles R_b par exemple. De plus, un modèle de déformation des bulles peut facilement être ajouté au code déjà existant et ceci pourrait grandement améliorer la pertinence physique du modèle diphasique.

— D'autres géométries du faiceau de tubes doivent être investiguées. Dans le cadre de ce rapport, nous nous sommes restreints à une configuration triangulaire normale. Cependant, d'autres configurations (carrée, triangulaire tournée) existent et méritent d'être étudiées car elles sont utilisées dans l'industrie. D'autres paramètres peuvent aussi varier comme le ratio de pitch (P/D_T) ou le nombre de tubes.

— Plus de résultats numériques doivent être obtenus afin d'obtenir une carte de stabilité de « type Connors » plus complète. Les effets indépendants des paramètres m^* et δ doivent également être étudiés.

— Enfin, il est nécessaire d'estimer le gain en temps de calcul apporté par l'approche du milieu poreux par rapport à une approche DNS. Si on peut l'estimer rapidement à un facteur 10, il faut le calculer plus précisément afin de confirmer ou d'infirmer la pertinence de notre approche. En effet, si les résultats sont moins précis sans apporter un gain de temps substantiel, il paraîtrait plus logique d'adopter une approche de type DNS pour les calculs de l'IFE pour un écoulement monophasique. Pour des écoulements diphasiques, peu d'alternatives existent à ce jour, ce qui signifie que le code « milieu poreux + E-E » est unique.

RÉFÉRENCES

ADOBES, A., PILLET, J., DAVID, F. et GAUDIN, M. (2006). Influence of steam generator tube bundle vibrations on the operating diagram of a nuclear plant during stretch out. *ASME Pressure Vessels and Piping Conference/ICPVT-11*. ASME, vol. 4.

AUTON, T. (1987). The lift force on a spherical body in a rotational flow. *J. Fluid Mech*, 183, 199–218.

AZPITARTE, O. E. et BUSCAGLIA, G. C. (2003). Analytical and numerical evaluation of two-fluid model solutions for laminar fully developed bubbly two-phase flows. *Chemical engineering science*, 58, 3765–3776.

BALSA, T. (1977). Potential flow interactions in an array of cylinders in cross-flow. *Journal of Sound and Vibration*, 50, 285–303.

BÉGUIN, C. (2014). Void fraction effect on added mass in bubbly flow. *Proceedings of the ASME 2014 Pressure Vessels & Piping Conference*.

BISWAS, S., ESMAEELI, A. et TRYGGVASON, G. (2005). Comparison of results from dns of bubbly flows with a two-fluid model for two-dimensional laminar flows. *International journal of multiphase flow*, 31, 1036–1048.

BOFFI, D., BREZZI, F. et FORTIN, M. (2013). *Mixed finite element methods and applications*, Springer, chapitre 8. 496–504.

CHARLOT, L. (2011). *Calcul et analyse de sensibilité des écoulements à surface libre*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

CHARRETON, C. (2014). *Le mécanisme d'amortissement diphasique*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

CHARRETON, C., BÉGUIN, C., YU, R. et ÉTIENNE, S. (2013). Stability derivatives in a parallel triangular tube bundle subject to cross-flow at moderated reynolds number. *ASME 2013 Pressure Vessels and Piping Conference*. American Society of Mechanical Engineers.

CHEN, S. et SRIKANTIAH, G. (2001). Motion-dependent fluid force coefficients for tube arrays in crossflow. *Journal of pressure vessel technology*, 123, 429–436.

CONNORS JR., H. J. (1978). Fluidelastic vibration of heat exchanger tube arrays. *Journal of Mechanical Design*, 100, 347–353.

COQUEL, F., AMINE, K. E., GODLEWSKI, E., PERTHAME, B. et RASCLE, P. (1997). A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows. *J. Comput. Phys.*, 136, 272–288.

CORDIER, F., DEGOND, P. et KUMBARO, A. (2014). Phase appearance of disappearance in two-phase flows. *J. Sci. Comput.*, 58, 115–148.

DARMANA, D., DEEN, N. G. et KUIPERS, J. A. M. (2006). Parallelization of an euler–lagrange model using mixed domain decomposition and a mirror domain technique : Application to dispersed gas–liquid two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 220, 216–248.

DE LANGRE, E. (2002). *Fluides et Solides*. Editions de l'Ecole Polytechnique.

DE LEMOS, M. J. (2012). *Turbulence in porous media : modeling and applications*. Elsevier.

DEEN, N. G., SOLBERG, T. et HJERTAGER, B. H. (2001). Large eddy simulation of the gas–liquid flow in a square cross-sectioned bubble column. *Chemical Engineering Science*, 56, 6341–6349.

DELALE, F. (2013). *Bubble Dynamics and Shock Waves*, Springer, New York, chapitre 5. 216–219.

DELNOIJ, E., KUIPERS, J. et VAN SWAAIJ, W. (1999). A three-dimensional cfd model for gas–liquid bubble columns. *Chemical Engineering Science*, 54, 2217–2226.

ÉTIENNE, S., GARON, A. et PELLETIER, D. (2009). Perspective on the geometric conservation law and finite element methods for ALE simulations of incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 228, 2313–2333.

ÉTIENNE, S. et PELLETIER, D. (2011). Tube arrays flow-induced vibrations simulations with ale finite element method. *ASME Pressure Vessels and Piping division Conference*.

ÉTIENNE, S., PELLETIER, D. et GARON, A. (2004). A monolithic formulation for steady-state fluid-structure interaction problems. *34 th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*.

ÉTIENNE, S., PELLETIER, D. et GARON, A. (2006). A monolithic formulation for unsteady fluid-structure interactions. *Collection of Technical Papers–44th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. vol. 11, 8301.

GILLEN, S. et MESKELL, C. (2008a). Variation of fluidelastic critical velocity with mass ratio and reynolds number in a densely packed normal triangular tube array. *Proceedings of the Conference on Flow Induced Vibration. Prague, Czech Rep.* 6.

GILLEN, S. et MESKELL, C. (2008b). Variation of fluidelastic critical velocity with mass ratio and reynolds number in a densely packed normal triangular tube array. *Flow Induced Vibrations. Prague, Czech Republic*, 193–198.

GRANGER, S. et PAïDOUSSIS, M. P. (1996). An improvement to the quasi-steady model with application to cross-flow-induced vibration of tube arrays. *Journal of Fluid Mechanics*, 320, 163–184.

HAY, A., ÉTIENNE, S. et PELLETIER, D. (2014a). Time-integration for incompressible viscous flows : Stepsize and order selection based on the bdf. *Submitted to the 44 th AIAA Fluid Dynamics Conference*. Atlanta, Georgia.

HAY, A., ÉTIENNE, S., PELLETIER, D. et GARON, A. (2014b). High-order temporal accuracy for 3d finite-element ale flow simulations. *52nd AIAA Aerospace Sciences Meeting, National Harbor, Maryland*.

HOSSIN, O. (2010). *Numerical Simulations of Fluidelastic Instability in Tube Bundles*. Thèse de doctorat, University of New Brunswick.

HU, G. et CELIK, I. (2008). Eulerian–lagrangian based large-eddy simulation of a partially aerated flat bubble column. *Chemical Engineering Science*, 63, 253–271.

JAFARI, H. H. et DEHKORDI, B. G. (2013). Numerical prediction of fluid-elastic instability in normal triangular tube bundles with multiple flexible circular cylinders. *Journal of Fluids Engineering*, 135, 031102.

JONES, A. et PROSPERETTI, A. (1985). On the suitability of first-order differential models for two-phase flow prediction. *International Journal of Multiphase Flow*, 11, 133–148.

KASSERA, V. et STROHMEIER, K. (1997). Simulation of tube bundle vibrations induced by cross-flow. *Journal of fluids and structures*, 11, 909–928.

KHALIFA, A., WEAVER, D. et ZIADA, S. (2013). Modeling of the phase lag causing fluidelastic instability in a parallel triangular tube array. *Journal of Fluids and Structures*, 43, 371–384.

KHUSHNOOD, S., KHAN, Z. M., MALIK, M. A., KORESHI, Z. U. et KHAN, M. A. (2004). A review of heat exchanger tube bundle vibrations in two-phase cross-flow. *Nuclear engineering and design*, 230, 233–251.

KITAGAWA, A., MURAI, Y. et YAMAMOTO, F. (2001). Two-way coupling of eulerian–lagrangian model for dispersed multiphase flows using filtering functions. *International journal of multiphase flow*, 27, 2129–2153.

LEVER, J. et WEAVER, D. (1986). On the stability of heat exchanger tube bundles, part i : Modified theoretical model. *Journal of Sound and Vibration*, 107, 375–392.

LHUILLIER, D., CHANG, C.-H. et THEOFANOUS, T. G. (2013). On the quest for a hyperbolic effective-field model of disperse flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 731, 184–194.

LIANG, C. et PAPADAKIS, G. (2007). Large eddy simulation of cross-flow through a staggered tube bundle at subcritical reynolds number. *Journal of Fluids and Structures*, 23, 1215–1230.

LYCZKOWSKI, R. W., GIDASPOW, D., SOLBRIG, C. W. et HUGHES, E. D. (1978). Characteristics and stability analyses of transient one-dimensional two-phase flow equations and their finite difference approximations. *Nuclear Science and Engineering*, 66, 378–396.

MILOH, T. (2003). The motion of solids in inviscid uniform vortical fields. *Journal of Fluid Mechanics*, 479, 287–305.

MOLIN, B. (2002). *Hydrodynamique des structures offshore*. Éditions Technip.

NAKAMURA, T., HIROTA, K., WATANABE, Y., MUREITHI, N., KUSAKABE, T. et TAKAMATSU, H. (2002). Dynamics of an in-line tube array subjected to steam–water cross-flow. part i : two-phase damping and added mass. *Journal of fluids and structures*, 16, 123–136.

OLIVEIRA, P. J. et ISSA, R. I. (1994). On the numerical treatment of interphase forces in two-phase flow. *ASME-PUBLICATIONS-FED*, 185, 131–131.

PAïDOUSSIS, M. P., PRICE, S. J. et DE LANGRE, E. (2010). *Fluid-structure Interactions : Cross-flow-induced Instabilities*. Cambridge University Press.

PAïDOUSSIS, M. P., PRICE, S. J. et DE LANGRE, E. (2010). *Fluid-structure interactions. Cross-flow induced instabilities*, Cambridge University Press, chapitre 3. 261–265.

PANESCU, F. (2006). *Modélisation eulérienne d'écoulements diphasiques à phase dispersée et simulation numérique par une méthode volumes-éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis.

PERROT, E. (2011). *Forces d'Excitation Vibratoire dans un Faisceau de Tubes en Configuration Triangulaire Normale Soumis a Un Écoulement Diphasique*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

PERROT, E., MUREITHI, N, W., PETTIGREW, M, J. et RICCIARDI, G. (2011). Vibration excitation forces in a normal triangular tube bundle subjected to two-phase cross flow. *ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference*.

PETTIGREW, M. et TAYLOR, C. (2004). Damping of heat exchanger tubes in two-phase flow : Review and design guidelines. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 126, 523–533.

PRICE, S. J. (1995). A review of theoretical models for fluidelastic instability of cylinder arrays in cross-flow. *Journal of Fluids and Structures*, 9, 463–518.

PRICE, S. J. (2001). An investigation on the use of connors' equation to predict fluidelastic instability in cylinder arrays. *Journal of pressure vessel technology*, 123, 448–453.

PRICE, S. J. et PAïDOUSSIS, M. P. (1984). An improved mathematical model for the stability of cylinder rows subject to cross-flow. *Journal of Sound and Vibration*, 97, 615–640.

PROSPERETTI, A. et TRYGGVASON, G. (2007a). *Computational methods for multiphase flow*. Cambridge University Press.

PROSPERETTI, A. et TRYGGVASON, G. (2007b). *Computational methods for multiphase flow*, Cambridge University Press, chapitre 8. 251–257.

RICCIARDI, G. (2010). Modélisation du couplage fluide-structure d'un réseau de tubes soumis à un écoulement diphasique transverse, par une approche milieux poreux. Rapport technique, École Polytechnique de Montréal.

RICCIARDI, G., BELLIZZI, S., COLLARD, B. et COCHELIN, B. (2009). Modelling pressurized water reactor cores in terms of porous media. *Journal of Fluids and Structures*, 25, 112–133.

RICCIARDI, G., PETTIGREW, M. et MUREITHI, N. (2011). Fluidelastic instability in a normal triangular tube bundle subjected to air-water cross-flow. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 133, 061301.

ROACHE, P. J. (1998). *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico.

SAWADOGO, T. (2012). *Modélisation de l'instabilité fluidélastique d'un faisceau de tubes soumis à un écoulement disphasique transverse*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

SAWADOGO, T. et MUREITHI, N. (2014). Fluidelastic instability study in a rotated triangular tube array subject to two-phase cross-flow. part i : Fluid force measurements and time delay extraction. *Journal of Fluids and Structures*.

SCHENK, O. et GÄRTNER, K. (2004). Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with pardiso. *Future Generation Computer Systems*, 20, 475–487.

SCHRÖDER, K. et GELBE, H. (1999). Two-and three-dimensional cfd-simulation of flow-induced vibration excitation in tube bundles. *Chemical Engineering and Processing : Process Intensification*, 38, 621–629.

SHAHRIARY, S. (2007). *Fluid-Elastic Instability of a Tube Bundle in Two-Phase Cross-Flow Using Measured Quasi-Static Forces*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

SHAMS, E., FINN, J. et APTE, S. (2011). A numerical scheme for euler–lagrange simulation of bubbly flows in complex systems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67, 1865–1898.

SHI, J.-M., ZWART, P., FRANK, T., ROHDE, U. et PRASSER, H.-M. (2004). Development of a multiple velocity multiple size group model for poly-dispersed multiphase flows. *Annual Report*, 2004.

SINGH, P., CAUSSIGNAC, P., FORTES, A., JOSEPH, D. D. et LUNDGREN, T. (1989). Stability of periodic arrays of cylinders across the stream by direct simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 205, 553–571.

TANAKA, H. et TAKAHARA, S. (1981). Fluid elastic vibration of tube array in cross flow. *Journal of Sound and Vibration*, 77, 19–37.

TANAKA, H., TANAKA, K., SHIMIZU, F. et TAKAHARA, S. (2002). Fluidelastic analysis of tube bundle vibration in cross-flow. *Journal of fluids and structures*, 16, 93–112.

TEH, C. et GOYDER, H. (1988). Data for the fluidelastic instability of heat exchanger tube bundles. *Proceedings of the International Conference on Flow Induced Vibration Noise : Flow-Induced Vibration and Noise in Cylinder Arrays, Chicago, IL*. 77–94.

TIXIER, E., ÉTIENNE, S., BÉGUIN, C., PELLETIER, D., HAY, A. et RICCIARDI, G. (2014a). Fluid-structure interactions in a tube bundle subject to cross-flow. part a : A porous medium formulation. *52 nd AIAA Aerospace Sciences Meeting*. National Harbor, Maryland.

TIXIER, E., ÉTIENNE, S., BÉGUIN, C., PELLETIER, D., HAY, A. et RICCIARDI, G. (2014b). Fluid-structure interactions in a tube bundle subject to cross-flow. part b : Two-phase flow modeling. *A COMPLETER*. A COMPLETER.

UCHIYAMA, T. (2002). Finite element analysis of bubbly flow around an oscillating square-section cylinder. *Finite elements in analysis and design*, 38, 803–821.

VIOLETTE, R. (2005). *Instabilité fluidélastique d'un faisceau de tubes d'échangeurs de chaleur soumis à un écoulement diphasique transverse*. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

YETISIR, M. et WEAVER, D. (1993). An unsteady theory for fluidelastic instability in an array of flexible tubes in cross-flow. part ii : Results and comparison with experiments. *Journal of fluids and structures*, 7, 767–782.

ANNEXE A

Stage de recherche au CEA
Mesures dynamiques de pression sur un tube en vibration transverse à un écoulement

Dispositif expérimental

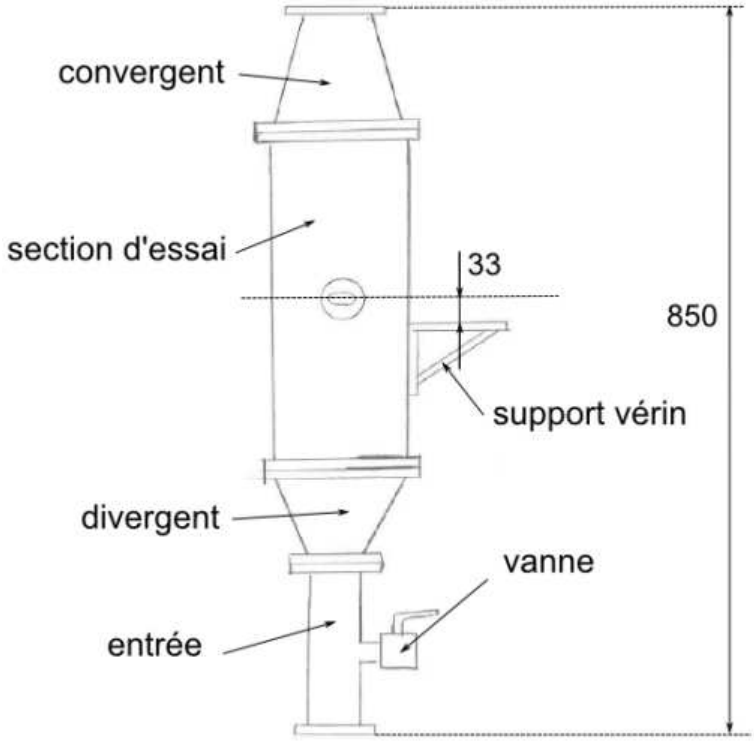


Figure A.1 Schéma du dispositif expérimental.

Le dispositif expérimental, conçu par Guillaume Ricciardi et Francis Moreno du CEA Cadarache (France), est destiné à mesurer les fluctuations dynamiques de pression à la surface d'une tube soumis à une vibration dans la direction transverse à un écoulement d'eau.
La section d'essai (voir figure A.1) est percée afin d'accueillir un tube instrumenté et le tout est étanchéifié par des soufflets en caoutchouc afin de ne pas entraver le mouvement du tube. Le tube subit une vibration transverse grâce à un pot vibrant électromagnétique (voir figure A.2) par l'intermédiaire d'un assemblage de tiges et de rotules. Le déplacement est imposé par le pot vibrant et est mesuré par un capteur de position de type LVDT (*Linear*

Variable Differential Transformer). Le tube est équipé d'un unique capteur de pression. Ainsi, la pression sur l'ensemble de son contour est reconstituée en faisant varier l'angle θ du capteur par rapport à la direction de l'écoulement (voir figure A.3).
Pour un angle θ donné, on mesure la pression en fonction du temps pour trois valeurs de la vitesse d'écoulement en entrée : $V_\infty = 0$ (eau stagnante), 0.47 et 0.76 m.s^{-1}.

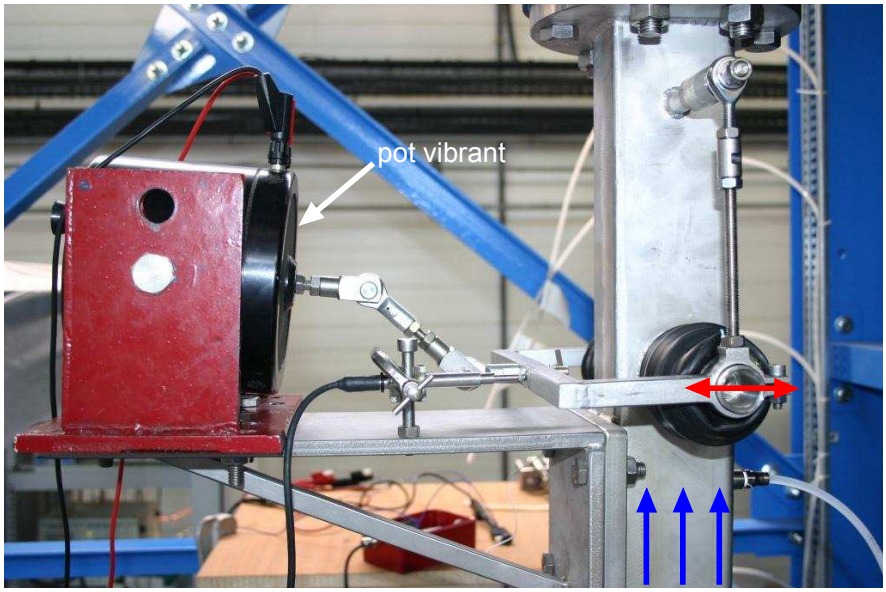


Figure A.2 Dispositif expérimental.

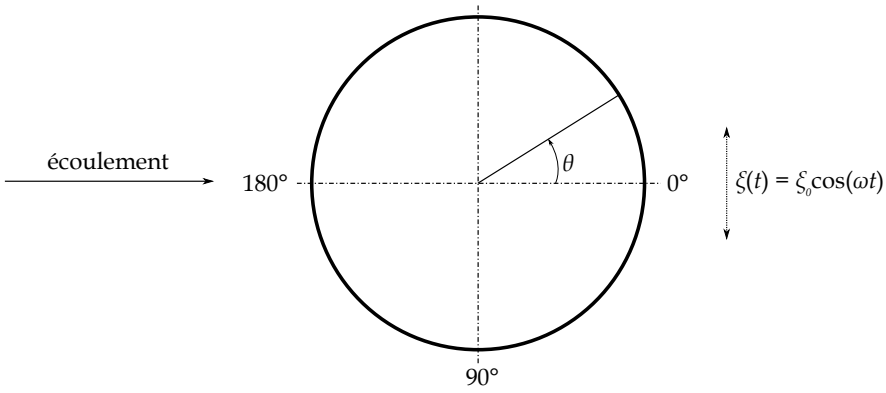


Figure A.3 Schéma du tube vibrant.

On peut donc définir les paramètres adimensionnées régissant notre problème :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V_\infty D}{\mu},$$
$$U_R = \frac{V_\infty}{fD},$$

où $D = 26.9$ mm est le diamètre du tube, $\rho = 1.0$ kg.m^{-3} la masse volumique de l'eau, $\mu = 10^{-3}$ Pa.s sa viscosité dynamique et f la fréquence de vibration du tube.
L'objectif est d'étudier l'influence de ces deux paramètres sur le déphasage et l'amplitude de la pression par rapport au déplacement du tube. Si l'on définit le déplacement du tube de la façon suivante :

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t),$$

alors on fait l'hypothèse que la pression peut s'écrire de la façon suivante :

$$p(t) = p_0(\theta) \cos\left[\omega t + \phi(\theta)\right].$$

Définissons à présent le coefficient de pression adimensionné :

$$c_p(\theta) = 1 - \frac{p_0(\theta) - p_{max}}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}.$$

Nous avons donc à présent deux paramètres adimensionnés c_p et ϕ qui définissent entièrement les fluctuations de pression pour des valeurs données de U_R et Re.

Afin de faire varier le paramètre Re, on modifie la vitesse en entrée V_∞. De plus, le déplacement imposé $\xi(t)$ est un balayage en fréquence, ce qui permet d'explorer, en une seule manipulation, une plage de valeurs pour U_R. Les mesures ont été effectuées avec un balayage de 1 à 15 Hz, ce qui correspond à des valeurs de la vitesse réduite U_R allant environ de 1 à 30.

Analyse des mesures dynamiques de pression

Une fois les signaux temporels de pression et de déplacement acquis, on utilise la DSP (Densité Spectrale de Puissance) afin d'analyser les résultats dans le domaine fréquentiel. La figure A.4 montre le signal temporel de pression ainsi que sa DSP pour $\theta = 110^o$ et $V_\infty = 0.47$ m.s^{-1}.

Le déphasage entre la pression et le déplacement du tube est calculé grâce à la CPSD

(Cross Power Spectral Density). On obtient donc, pour chaque valeur de f et de θ, le déphasage ϕ entre les deux signaux ainsi que la cohérence associée. La cohérence peut prendre une valeur entre 0 et 1. Plus les deux signaux sont cohérents entre eux et plus la cohérence est proche de 1. Dans la figure A.5, on constate que les signaux sont faiblement cohérents pour les faibles valeurs de f (donc pour des valeurs élevées de U_R) alors qu'ils sont très cohérents entre $f = 10$ et 15 Hz.

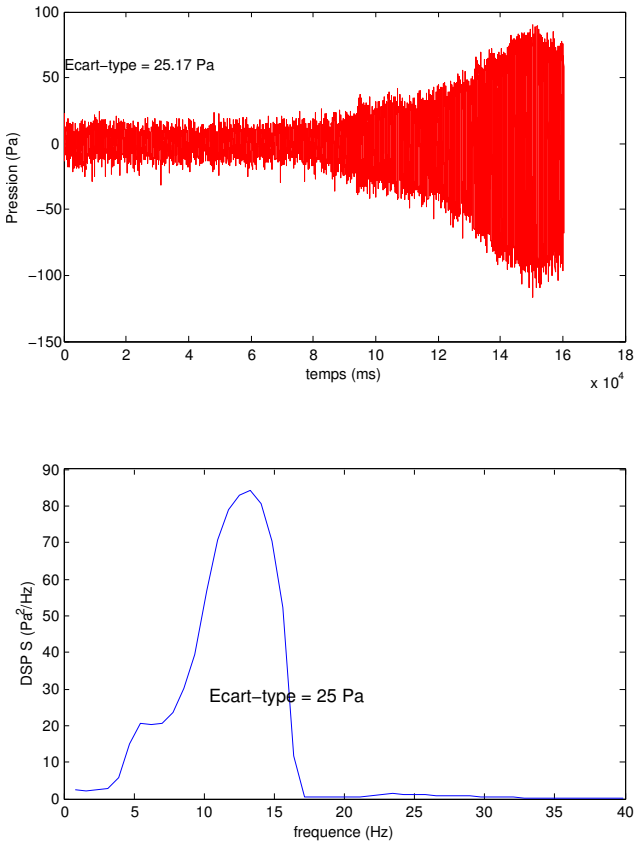


Figure A.4 Signal temporel (en haut) et DSP (en bas) pour $\theta = 110^o$ et $V_\infty = 0.47$ m.s^{-1}.

Coefficient de pression

Analysons à présent l'effet du nombre de Reynolds sur le coefficient de pression c_p. La figure A.6 montre le coefficient de pression en fonction de l'angle θ pour deux valeurs de la vitesse d'entrée. On constate dans les deux cas que la pression est maximale en $\theta = 0^o$, ce qui correspond au point d'arrêt. Elle passe par un minimum entre 40^o et 80^o avant de remonter vers un maximum secondaire en $\theta = 180^o$.

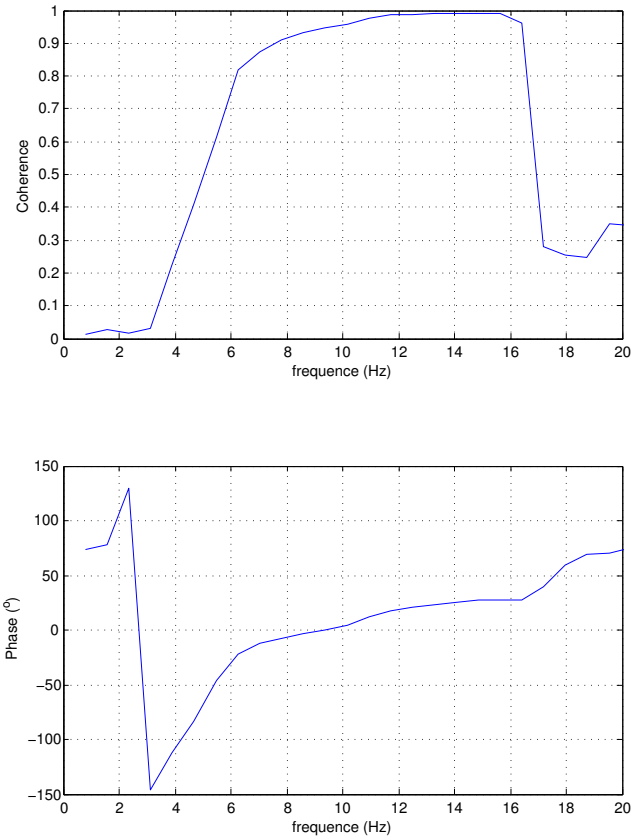


Figure A.5 Cohérence et déphasage entre déplacement et pression pour $\theta = 110^o$ et $V_\infty = 0.47$ m.s^{-1}.

Déphasage et cohérence

Eau stagnante

La figure A.7 montre le déphasage ϕ ainsi que la cohérence en fonction de θ pour deux valeurs de la fréquence d'excitation dans le cas où le tube est en eau stagnante. On constate tout d'abord qu'il y a une symétrie haut/bas, ce qui est cohérent puisqu'en absence d'écoulement la distribution de pression autour d'un tube est symétrique par rapport au plan de vibration.

On constate également que le déphasage est dans les deux cas minimal en $\theta = 90^o$ et qu'il est maximal aux pôles ($\theta = 0$ et 180^o).

Le déphasage minimal est plus faible ($\phi \simeq 0^o$) pour $f = 15$ Hz que pour $f = 10$ Hz ($\phi \simeq 30^o$). En ce qui concerne la cohérence, elle est proche de 1 sauf au niveau des pôles lorsque $f = 15$ Hz. Ceci suggère que l'écoulement est suffisamment turbulent dans le second cas pour que des perturbations locales liées à la vibration du tube polluent les mesures de pression au niveau des pôles.

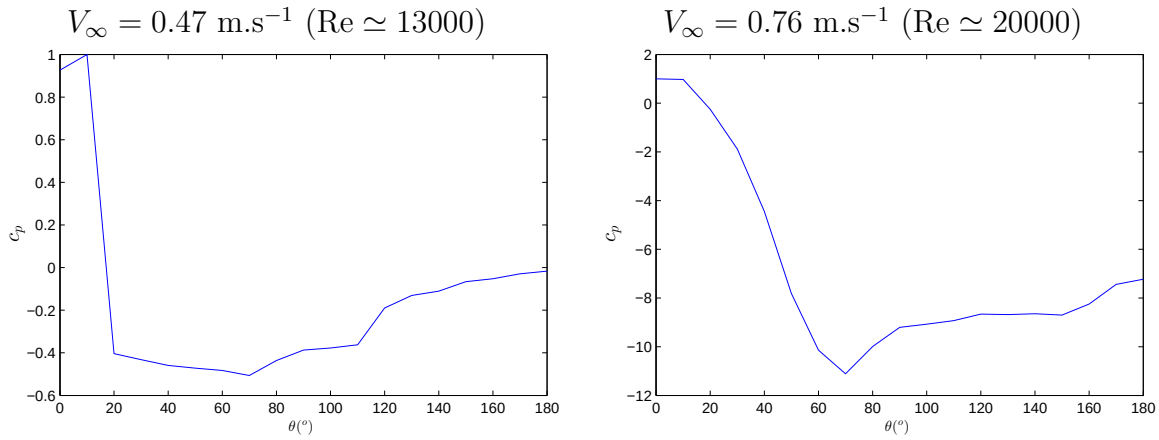


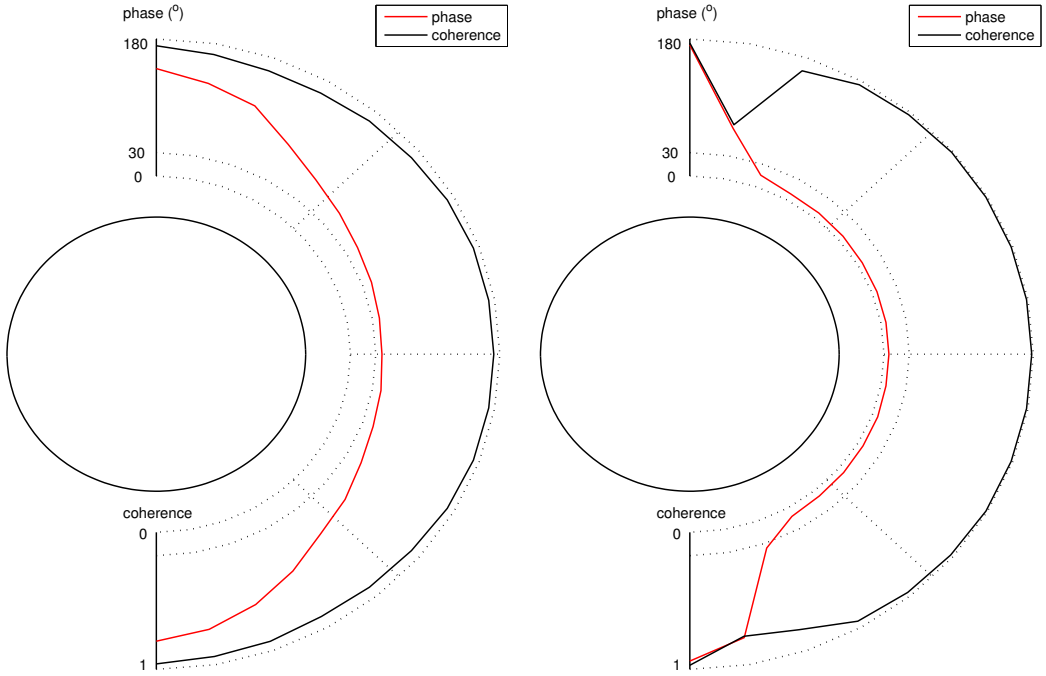
Figure A.6 Coefficient de pression en fonction de l'angle θ pour deux valeurs de la vitesse d'entrée.

Vitesse d'entrée faible ($V_\infty = 0.47$ m.s^{-1})

La figure A.8 montre le déphasage ϕ ainsi que la cohérence en fonction de θ pour deux valeurs de la fréquence d'excitation dans le cas où $V_\infty = 0.47$ m.s^{-1}.
Tout d'abord, la cohérence est proche de 1 partout sauf aux pôles, ce qui est logique puisque l'influence de la vibration sur la pression y est nulle. Par conséquent, les fluctuations de pression qui y sont observées sont uniquement dues à l'écoulement : les deux effets sont incohérents.
Dans les deux cas, le déphasage est plus important en amont du tube qu'en aval et il s'annule et change de signe aux alentours de $\theta = 90^o$. Ceci s'explique par le fait qu'en $\theta = 90^o$, la pression dynamique est directement en phase avec le mouvement du tube.

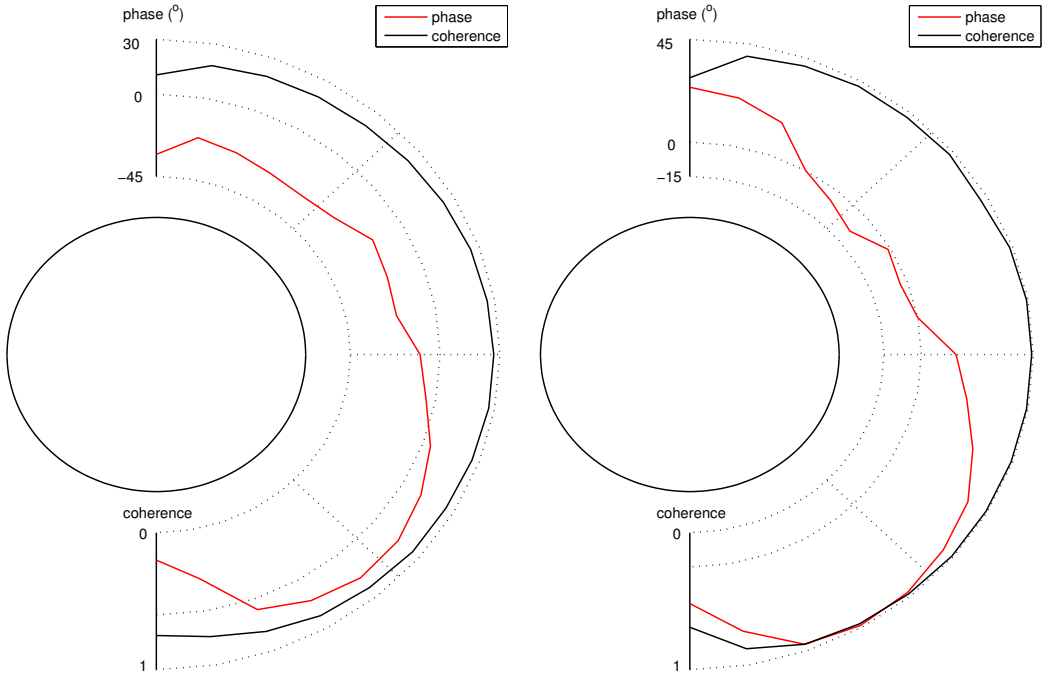
Vitesse d'entrée élevée ($V_\infty = 0.76$ m.s^{-1})

La figure A.9 montre le déphasage ϕ ainsi que la cohérence en fonction de θ pour deux valeurs de la fréquence d'excitation dans le cas où $V_\infty = 0.47$ m.s^{-1}.
On constate cette fois-ci que la cohérence est beaucoup plus faible, ce qui suggère que l'écoulement est beaucoup plus turbulent.
En revanche, on retrouve la même tendance pour $\phi(\theta)$, à savoir qu'il est maximal en amont, minimal en aval et qu'il s'annul et change de signe en $\theta = 90^o$.



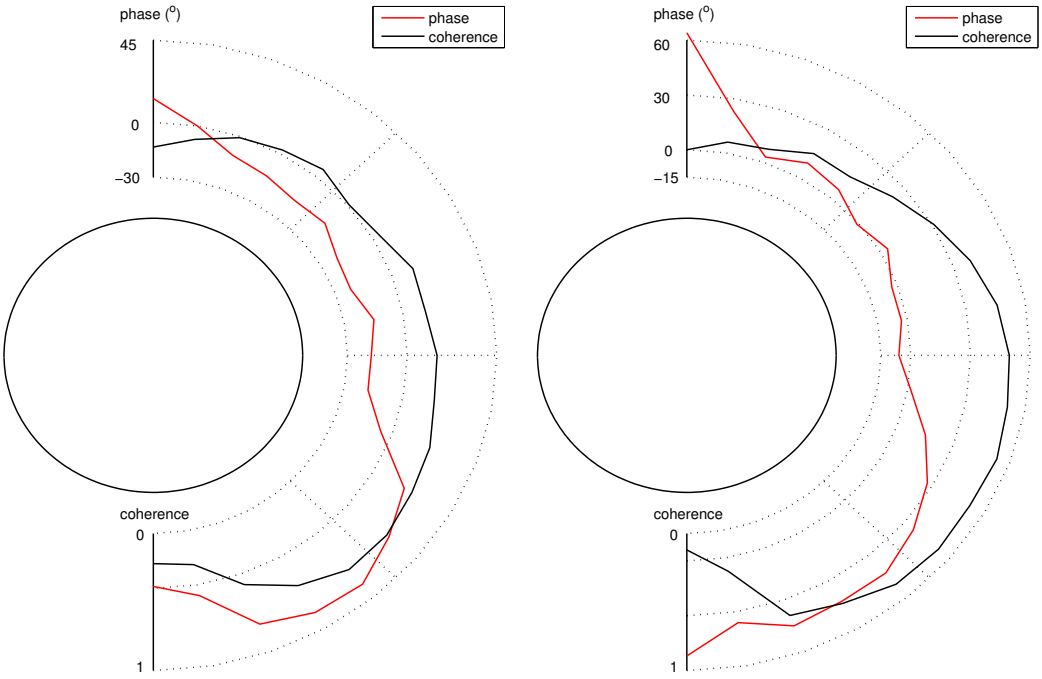
$f = 10$ Hz $\qquad$ $f = 15$ Hz

Figure A.7 Phase et cohérence pour $V_\infty = 0$ (eau stagnante).



$f = 10$ Hz $\qquad$ $f = 15$ Hz

Figure A.8 Phase et cohérence pour $V_\infty = 0.47$ m.s^{-1}.



$f = 10$ Hz $\qquad$ $f = 15$ Hz

Figure A.9 Phase et cohérence pour $V_\infty = 0.76$ m.s^{-1}.