

**Titre:** Conception de sources non-classiques dans les fibres optiques  
Title:

**Auteur:** Stéphane Virally  
Author:

**Date:** 2014

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Virally, S. (2014). Conception de sources non-classiques dans les fibres optiques [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/1433/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/1433/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Nicolas Godbout, & Suzanne Lacroix  
Advisors:

**Programme:** Génie physique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONCEPTION DE SOURCES NON-CLASSIQUES DANS LES FIBRES OPTIQUES

STÉPHANE VIRALLY  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE PHYSIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(GÉNIE PHYSIQUE)  
JUIN 2014

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

CONCEPTION DE SOURCES NON-CLASSIQUES DANS LES FIBRES OPTIQUES

présentée par : VIRALLY Stéphane  
en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor  
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. FRANCOEUR Sébastien, Ph.D., président

M. GODBOUT Nicolas, Ph.D., membre et directeur de recherche

Mme LACROIX Suzanne, D.Sc., membre et codirectrice de recherche

M. KÉNA-COHEN Stéphane, Ph.D., membre

M. SIMON Christoph, Ph.D., membre

*À Clément et Paul,  
tout vous est possible !*

## REMERCIEMENTS

Je n'aurais pas terminé ce doctorat sans l'aide précieuse de Mikaël Leduc, technicien et “pilier” du laboratoire des fibres. Certaines expériences cruciales, qui semblaient définitivement vouées à l'échec, ont été débloquées à la dernière heure par sa dextérité, sa patience et sa persévérance.

Je dois beaucoup au professeur Suzanne Lacroix, qui m'a donné la chance de réaliser ce rêve d'un retour aux études, et qui a accepté de suivre mon doctorat jusqu'au bout, au-delà de la retraite. J'ai beaucoup profité de son expérience et toujours pu compter sur elle pour relire mes calculs, clarifier ma démarche, et filtrer mes idées, qui ne sont pas toujours pertinentes.

L'intuition physique du professeur Nicolas Godbout est à l'origine d'un grand nombre d'avancées présentées dans cette thèse. En particulier, l'importante de la cohérence de la pompe dans l'efficacité de certains processus non-linéaires n'aurait sans doute pas été découverte sans son instinct. Il n'y aurait pas de doctorat sans lui.

Au cours de ces nombreuses années passées au laboratoire, j'ai pu rencontrer et apprécier un grand nombre d'étudiants ou anciens étudiants. Les nombreuses discussions que nous avons eues ne me laissent que d'excellents souvenirs. Je pense notamment à Eliot Bolduc, Bryan Burgoyne, François Busque, Xavier Daxhelet, Philippe Décoste, Alexandre Dupuis, Vincent Mai, David Guzmán-Rincón, Elyes Khettal, Étienne de Lamotte, Yasaman Soudagar et Maxime Tousignant. Wendy-Julie Madore, toujours tout sourire, a beaucoup égayé ces années. J'ai passé des moments inoubliables, parfois surréels, avec Philippe Richelet, jamais à court d'histoires extraordinaires. Enfin, mes innombrables conversations avec Jean-Simon Corbeil, dont l'esprit physique “paysan” est remarquable, m'ont ouvert les yeux sur une manière d'appréhender le monde qui m'était totalement étrangère.

## RÉSUMÉ

Les sources non-classiques constituent l'un des éléments indispensables à la réalisation d'un possible futur réseau global de télécommunications qui utiliserait la cryptographie quantique pour sécuriser les échanges.

Dans ce travail, nous analysons, d'un point de vue aussi bien théorique que pratique, la conception de sources non-classiques dans les fibres optiques.

Ces sources reposent sur des effets non-linéaires qui font apparaître des corrélations fortes entre photons. Des outils de calcul sont proposés pour analyser ces effets non-linéaires, y compris dans le cadre d'une pompe incohérente, ce qui constitue un élément original du travail ici présenté.

L'aspect quantifié des sources est traité de manière originale au travers de ses implications statistiques. Là encore, des outils pratiques de conception sont développés. Ces outils permettent de déterminer à l'avance l'état quantique du signal en sortie de source.

Enfin, ce travail met en avant des applications pratiques des concepts développés, avec en particulier la conception d'une nouvelle fibre et les premières étapes de la réalisation d'une source de photons intriqués en polarisation, fondée sur une instabilité de modulation vectorielle de type orthogonal, dans le domaine des longueurs d'ondes des réseaux de télécommunications.

## ABSTRACT

The goal of this work is to provide theoretical and experimental tools for the analysis of optical fibre-based nonclassical sources.

Strong correlations lie at the heart of nonclassical sources. In optical fibers, these correlations are provided by nonlinear processes. The analysis of such processes requires a number of theoretical steps that are explored in this work. This includes a novel approach to treat the case of an incoherent pump, which may constitute the beginning of a comprehensive treatment of incoherent nonlinear optics.

Instead of using the heavy quantum formalism to describe the discretized aspect of these sources, a statistical approach is favored. This approach enables a complete determination of the output quantum state, used as a predictor for the implemented source.

The last part describes practical applications of all the concepts introduced in the work. In particular, we show the first steps in the implementation of a source of polarization-entangled photons in the fiber optics telecommunication bandwidth. This source is based on vectorial modulation instabilities with the polarization of the daughter photons orthogonal to that of the pump. The design requires the use of a novel optical fiber that was developed in the course of this work.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES FIGURES . . . . .	x
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xii
LISTE DES SIGLES, ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS . . . . .	xiii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 2 OPTIQUE NON-LINÉAIRE . . . . .	3
2.1 Polarisation du milieu . . . . .	3
2.1.1 Approximation dipolaire (champ local) . . . . .	6
2.1.2 Approximation quadripolaire . . . . .	6
2.2 Propagation des termes non-linéaires . . . . .	7
2.2.1 Théorie des modes couplés . . . . .	7
2.2.2 Condition d'accord de phase . . . . .	9
2.2.3 Pompe non appauvrie . . . . .	10
2.3 Effets non-linéaires “utiles” dans les fibres . . . . .	11
2.3.1 Générations d'harmoniques . . . . .	11
2.3.2 Modulations de phase . . . . .	16
2.3.3 Instabilités de modulation . . . . .	18
2.4 Accords de phase . . . . .	23
2.4.1 Méthode approchée . . . . .	23
2.4.2 Force brute . . . . .	26
2.5 Résumé . . . . .	27

CHAPITRE 3 LUMIÈRE QUANTIFIÉE . . . . .	30
3.1 Optique quantique . . . . .	30
3.1.1 Équation de Schrödinger du photon . . . . .	31
3.1.2 Commutateur fondamental . . . . .	36
3.2 Traitement statistique de la lumière quantifiée . . . . .	39
3.2.1 Statistique de la génération de photons simultanés . . . . .	40
3.2.2 Sources de photons annoncés . . . . .	43
3.2.3 Sources de photons intriqués en polarisation . . . . .	49
3.3 Résumé . . . . .	57
CHAPITRE 4 POMPE INCOHÉRENTE . . . . .	58
4.1 Conventions . . . . .	58
4.2 Matrice densité à indices continus (fonction densité) . . . . .	59
4.2.1 Nécessité de la matrice densité . . . . .	59
4.2.2 Rappels sur la matrice densité . . . . .	60
4.2.3 Fonction densité, fonction de cohérence . . . . .	62
4.2.4 Construction de la fonction densité dans le cadre incohérent . . . . .	64
4.3 Propagation de la fonction densité . . . . .	66
4.3.1 Rappels sur la méthode “split-step Fourier” . . . . .	67
4.3.2 Propagateurs . . . . .	67
4.3.3 Méthode “split-step Fourier” généralisée . . . . .	69
4.4 Résumé . . . . .	70
CHAPITRE 5 CONSIDÉRATIONS PRATIQUES . . . . .	71
5.1 Non-linéarité . . . . .	71
5.2 Biréfringence . . . . .	72
5.2.1 Biréfringence et accord de phase . . . . .	72
5.2.2 Biréfringence par courbure . . . . .	73
5.3 Dispersion . . . . .	74
5.4 Dégroupement (“walkoff”) . . . . .	77
5.4.1 Dégroupement dû à la dispersion . . . . .	77
5.4.2 Dégroupement dû à la biréfringence . . . . .	78
5.4.3 Facteur limitant . . . . .	78
5.5 Résumé . . . . .	78
CHAPITRE 6 APPLICATIONS . . . . .	80
6.1 Fibres effilées torsadées . . . . .	80

6.2	Génération d'harmoniques dans les fibres effilées . . . . .	80
6.3	Atténuation de l'automodulation de phase par l'utilisation d'une pompe incohérente . . . . .	82
6.4	Génération d'intrication par instabilité de modulation vectorielle . . . . .	86
6.4.1	Description de la source . . . . .	87
6.4.2	Instabilité de modulation vectorielle de type O dans le domaine télécom	89
6.4.3	Filtrage . . . . .	91
6.4.4	Résultats en comptage de photons . . . . .	93
6.5	Résumé . . . . .	96
CHAPITRE 7 CONCLUSION . . . . .		99
RÉFÉRENCES . . . . .		101
ANNEXES . . . . .		106
A.1	Fonction de variables discrètes . . . . .	106
A.2	Fonction d'une infinité continue de variables . . . . .	106
A.3	Généralisation du produit scalaire . . . . .	107
A.4	Application à la polarisation d'un milieu . . . . .	107
B.1	Système à résoudre . . . . .	109
B.2	Solution . . . . .	109
C.1	Ensemble multi-mode de processus thermiques . . . . .	111
C.2	Transition vers une distribution de Poisson . . . . .	112
E.1	Cas général . . . . .	115
E.2	Cas cohérent . . . . .	116
F.1	Problème à résoudre . . . . .	117
F.2	Résolution . . . . .	117
F.3	Application : compétition entre type C et type O . . . . .	118
G.1	Accords de phase . . . . .	121
G.1.1	Programmes principaux . . . . .	121
G.1.2	Programme auxiliaire . . . . .	128
G.2	Tomographie quantique . . . . .	129
G.2.1	Programmes principaux . . . . .	129
G.2.2	Programmes auxiliaires . . . . .	139

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Génération de second harmonique . . . . .	12
Figure 2.2	Automodulation de phase . . . . .	16
Figure 2.3	Modulation de phase croisée . . . . .	17
Figure 2.4	Instabilité de modulation . . . . .	18
Figure 2.5	Instabilité de modulation de type C . . . . .	20
Figure 2.6	Instabilité de modulation de type O . . . . .	20
Figure 2.7	Instabilité de modulation de type M . . . . .	21
Figure 2.8	Processus non-linéaires en polarisation circulaire . . . . .	23
Figure 2.9	Accords de phase de type C . . . . .	27
Figure 2.10	Accords de phases de type O . . . . .	28
Figure 2.11	Accords de phase de type M (faible biréfringence) . . . . .	29
Figure 2.12	Accords de phase de type M (forte biréfringence) . . . . .	29
Figure 3.1	Instabilité de modulation . . . . .	40
Figure 3.2	Source de photons annoncés . . . . .	44
Figure 3.3	Caractérisation de source de photons annoncés . . . . .	47
Figure 3.4	Source d'intrication en polarisation . . . . .	52
Figure 3.5	Caractérisation d'une source de photons intriqués en polarisation . . . . .	53
Figure 3.6	Paramètre $\mathcal{S}$ de Bell-CHSH . . . . .	56
Figure 4.1	Diagonales de la fonction densité . . . . .	63
Figure 4.2	Compression le long des diagonales . . . . .	66
Figure 4.3	Méthode "split-step Fourier" . . . . .	67
Figure 4.4	Méthode "split-step Fourier" généralisée . . . . .	69
Figure 5.1	Mandrin pour enroulement . . . . .	75
Figure 6.1	Instabilité de modulation dans une fibre torsadée . . . . .	81
Figure 6.2	Accords de phase pour la GSH et la GTH . . . . .	82
Figure 6.3	Génération de GSH et GTH dans une fibre effilée . . . . .	83
Figure 6.4	Propagation cohérente vs. incohérente . . . . .	84
Figure 6.5	Spectre cohérent vs. incohérent . . . . .	85
Figure 6.6	Source d'intrication dans le domaine des télécommunications . . . . .	87
Figure 6.7	Profil d'indice de la fibre conçue pour l'enroulement . . . . .	89
Figure 6.8	Diamètre du mode fondamental en fonction de l'étirage . . . . .	90
Figure 6.9	Instabilité de modulation de type O . . . . .	91
Figure 6.10	Évolution du spectre signal en fonction de la puissance de pompe . . . . .	92

Figure 6.11	Spectre du signal à l'OSA après filtrage . . . . .	93
Figure 6.12	Filtrage par coupleurs . . . . .	94
Figure 6.13	Mesures en comptage de photon . . . . .	96
Figure 6.14	Filtrage par réseau de Bragg . . . . .	96
Figure 6.15	Reconstitution de la matrice densité . . . . .	98

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	FONCTIONNELLES . . . . .	106
Annexe B	RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE PROPAGATION . . . . .	109
Annexe C	TRANSITION THERMIQUE-POISSON . . . . .	111
Annexe D	RECENTRAGE DES IMPULSIONS . . . . .	114
Annexe E	FONCTION DENSITÉ DANS LE CAS GAUSSIEN . . . . .	115
Annexe F	PROPAGATION AVEC PERTURBATION . . . . .	117
Annexe G	PROGRAMMES MATLAB . . . . .	121

## LISTE DES SIGLES, ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS

### Liste des sigles et abréviations

CHSH	Clauser, Horne, Shimony et Holt
GSH	Génération de second harmonique
GTH	Génération de troisième harmonique
HBT	Hanbury Brown et Twiss
Nd:YAG	Néodyme YAG (laser au néodyme dans un grenat d'aluminium et d'yttrium)
OSA	Optical Spectrum Analyzer (analyseur de spectre optique)
PMD	Polarization Mode Dispersion (dispersion des modes de polarisation)
TF	Transformée de Fourier
TF2D	Transformée de Fourier à deux dimensions
$\text{TF}^{-1}$	Transformée de Fourier inverse
$\text{TF2D}^{-1}$	Transformée de Fourier inverse à deux dimensions

### Conventions de notations

En règle générale (en-dehors des exceptions clairement stipulées dans le texte)

- la transformée de Fourier dans le domaine des pulsations se voit attribuer un diacritique suscrit “tilde” [par exemple,  $\chi(t)$  se transforme en  $\tilde{\chi}(\omega)$ ] ;
- les quantités non scalaires (vecteurs, matrices, tenseurs) sont représentées en caractères gras (par exemple  **$E$** ) ;
- les vecteurs orthonormés se voient attribuer un diacritique suscrit “barre” (par exemple  $\bar{e}$ ) ;
- les opérateurs se voient attribuer un diacritique suscrit “circonflexe” (par exemple  $\hat{a}$ ) ;
- la dérivée par rapport au temps se voit attribuer un diacritique suscrit “point” (par exemple  $\dot{x}$ ) ;
- le complexe conjugué se voit attribuer un exposant “astérisque” (par exemple  $a^*$ ) ;
- l’opérateur hermitien conjugué se voit attribuer un exposant “dague” (par exemple  $\hat{a}^\dagger$ ) ;
- un vecteur transposé se voit attribuer un exposant  $t$  (par exemple  $\mathbf{V}^t$ ).

## Liste des notations

$a, A, \alpha$	Amplitude complexe	
<b>A</b>	Potentiel vecteur	
$\hat{a}$	Opérateur annihilation	
$\hat{a}^\dagger$	Opérateur création	
<b>B</b>	Vecteur induction magnétique	
$\beta$	Constante de propagation (spécifique aux fibres optiques)	
$\beta^{(n)}$	$n$ -ième dérivée de $\beta$ par rapport à la pulsation $\omega$	
$c$	Célérité de la lumière dans le vide	$299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$
$d$	Probabilité d'observer un “compte sombre” (“dark count” en anglais) lors d'une fenêtre de détection ; différentielle classique	
<b>D</b>	Vecteur déplacement électrique	
$ D\rangle$	État de polarisation diagonale	
$\delta$	Différentielle fonctionnelle	
$\delta\lambda$	Différence entre deux longueurs d'ondes proches	
$\delta n$	Biréfringence	
$\Delta$	Écart-type statistique	
$\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t$	Dérivée partielle par rapport à la coordonnée $x, y, z, t$	
$e$	Charge élémentaire	$\simeq 1,602 \times 10^{-19} \text{ A.s}$
$\varepsilon$	Petite valeur scalaire ( $\varepsilon \ll 1$ )	
$\epsilon_0$	Permittivité du vide	$\simeq 8,854 \times 10^{-12} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{A}^2 \cdot \text{s}^4$
<b>E</b>	Énergie	
<b>E</b>	Vecteur champ électrique	
$\eta$	Efficacité quantique totale d'une branche de détection	
$f, F$	Fonction ou fonctionnelle générique	
<b>F</b>	Vecteur force générique	
<b>F</b>	Fidélité entre deux matrices densité	
$g^{(n)}$	Fonction de cohérence d'ordre $n$	

$\gamma$	Coefficient non-linéaire de l'automodulation de phase	
$\Gamma$	Coefficient non-linéaire générique	
$\mathcal{H}$	Vecteur champ magnétique	
$\hat{H}$	Opérateur hamiltonien	
$ H\rangle$	État de polarisation horizontale	
$\hbar$	Constante de normalisation ayant des unités d'action	
$\hbar$	Constante de Planck réduite	$\simeq 1,055 \times 10^{-34} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}$
$i$	Unité imaginaire	$\sqrt{-1}$
$k$	Constante de propagation générique	
$k_B$	Constante de Boltzmann	$\simeq 1,381 \times 10^{-23} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}.\text{K}^{-1}$
$\chi^{(n)}$	Tenseur susceptibilité électrique d'ordre $n$	
$L$	Longueur générique	
$L_{\max}$	Longueur maximale d'interaction non-linéaire	
$\lambda$	Longueur d'onde	
$\lambda/2$	Lame demi-onde	
$\lambda/4$	Lame quart-d'onde	
$M$	Matrice générique	
$m$	Masse	
$\mu$	Nombre moyen de photons	
$\mu_0$	Perméabilité du vide	$4\pi \times 10^{-7} \text{ kg.m.A}^{-2}.\text{s}^{-2}$
$n$	Indice de réfraction	
$N$	Matrice générique	
$\mathcal{N}$	Densité d'électrons de valence	
$\hat{N}$	Opérateur "nombre de photons"	
$\nabla$	Opérateur différentiel vectoriel "nabla"	
$\nu$	Valeur propre générique	
$\omega$	Pulsation	
$\mathbf{p}$	Vecteur quantité de mouvement	
$P$	Puissance	
$\mathcal{P}$	Vecteur polarisation	
$ \Phi^+\rangle$	État de Bell " $\Phi^+$ "	$\frac{1}{\sqrt{2}} ( HH\rangle +  VV\rangle)$
$ \Phi^-\rangle$	État de Bell " $\Phi^-$ "	$\frac{1}{\sqrt{2}} ( HH\rangle -  VV\rangle)$

$ \Psi^+\rangle$	État de Bell “ $\Psi^+$ ”	$\frac{1}{\sqrt{2}} ( HV\rangle +  VH\rangle)$
$ \Psi^-\rangle$	État de Bell “ $\Psi^-$ ”	$\frac{1}{\sqrt{2}} ( HV\rangle -  VH\rangle)$
$\mathbf{r}$	Vecteur position	
$r_c$	Rayon de cœur (d'une fibre)	
$r_g$	Rayon de gaine externe (d'une fibre)	
$R$	Rayon de courbure imparti à une fibre en flexion	
$\hat{\rho}$	Opérateur densité	
$S$	Spectre d'une impulsion	
$\mathcal{S}$	Variable de l'inégalité de Bell-CHSH	
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Matrices de Pauli	
$t$	Temps	
$T$	Température	
$\tau$	Durée d'impulsion	
$\tau_c$	Temps de cohérence	
$\mathbf{v}$	Vecteur vitesse	
$v_g$	Vitesse de groupe	
$v_\phi$	Vitesse de phase	
$\mathbf{V}$	Vecteur propre générique	
$ V\rangle$	État de polarisation verticale	
$\mathbf{X}$	Vecteur générique	
$x, y, z$	Coordonnées spatiales	
$\zeta$	Efficacité quantique totale d'une branche de détection pour les expériences de Bell-CHSH	

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION

Dans les années 1920, un groupe restreint de physiciens codifie ce qui allait devenir l'une des théories les plus importantes du XXème siècle. Niels Bohr, Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Paul Dirac, Wolfgang Pauli, mais aussi Paul Ehrenfest, Pascual Jordan ou Max Born, souvent moins cités, sont les "pères" de la mécanique quantique. Ils suivent les traces des pionniers, Max Planck, Albert Einstein et Louis de Broglie.

On a tendance à penser que la mécanique quantique est une avancée principalement théorique qui nous permet de mieux comprendre le monde microscopique mais qui n'a pas d'impact sur la réalité de tous les jours. Pourtant, il existe une multitude d'avancées technologiques dont on aurait du mal à se passer aujourd'hui et qui sont le fruit direct de cette théorie. Pour ne prendre que deux exemples, on peut citer l'effet de magnétoresistance géante au cœur de la technologie du disque dur de l'ordinateur sur lequel ces lignes sont écrites, ou le réseau international de télécommunications par fibres optiques, qui constitue la colonne vertébrale d'Internet, et qui ne fonctionnerait pas sans sources laser.

Dans les années 1980 et 1990, certaines applications pratiques de la théorie quantique sont proposées et mises en application, comme la cryptographie quantique (Bennett et Brassard (1984), dont on ne trouve malheureusement aucune trace écrite) et la téléportation quantique (Bennett *et al.* (1993b)). Ces avancées laissent penser qu'il sera possible un jour de communiquer de manière sécuritaire sur des réseaux optiques sensiblement équivalents à ceux qui existent aujourd'hui. Il est très difficile de faire un pronostic réaliste sur l'horizon temporel de l'aboutissement de ce projet, mais il semble réaliste de penser qu'il ne prendra forme que si nous pouvons développer des sources non-classiques compatibles avec les réseaux de télécommunication existants. Précisons tout de suite ce que nous entendons par sources non-classiques. Dans le cadre du travail ici présenté, il s'agit de sources lumineuses possédant au moins les deux caractéristiques suivantes :

1. une émission détectable dans le régime "photon à photon" avec la technologie de détecteurs de photons individuels existante ;
2. des corrélations fortes entre des signaux séparés spatialement ; au minimum, cela veut dire une corrélation temporelle bien identifiée ; mais il peut s'agir de corrélations plus fortes, sur d'autres degrés de liberté (dans le cadre de l'intrication), comme nous le montrons au chapitre 3.

Nous tentons ici de donner des outils théoriques et pratiques pour la réalisation de telles sources dans les fibres optiques. Ces dernières constituent en effet l'élément essentiel du réseau mentionné ci-dessus. Elles possèdent par ailleurs des caractéristiques qui en font de très bons candidats pour la réalisation de sources non-classiques. En particulier, elles confinent l'énergie lumineuse sur une petite surface transverse et de grandes longueurs, ce qui permet le développement d'effets non-linéaires qui sont à l'origine des corrélations nécessaires au caractère non-classique de ces sources. Les fibres optiques permettent également la transmission de signaux relativement faibles sur de grandes distances, en raison de leurs faibles pertes. Enfin, la technologie développée pour les systèmes de télécommunication actuels permet d'envisager la conception de sources à partir de composants commerciaux relativement peu onéreux.

Il existe une grande variété d'effets non-linéaires pouvant générer des corrélations utiles. Cette variété est étudiée au chapitre 2, qui reprend succinctement la théorie non-linéaire avant d'aborder plus en détails les effets les plus intéressants dans les fibres optiques.

La compétition entre effets non-linéaires complexifie leur étude et l'interprétation des observations. Le chapitre 4 montre comment cette compétition peut être influencée par la cohérence temporelle de la pompe.

La "granularité" du signal (le fait qu'il doit être constitué de photons détectables individuellement) est abordée au chapitre 3. Ce chapitre développe quelques résultats quantiques intéressants qui n'apparaissent pas dans la littérature et aborde le sujet de la détection des photons sous l'angle statistique, le plus simple et le plus à même de révéler les corrélations décrites ci-dessus.

L'aspect pratique de la conception de sources non-classiques n'est pas négligé. Il est l'objet, avec les applications réalisées par notre laboratoire, des chapitres 5 et 6.

Ce travail se veut relativement rigoureux sur le plan mathématique. Cependant, afin d'alléger le texte principal, les aspects les plus techniques du traitement mathématique sont renvoyés dans les nombreuses annexes. Les résultats traités de manière approfondie dans la littérature ne sont pas en général développés à nouveau. Seuls les résultats importants pour la suite du développement sont repris. Le cas échéant, le lecteur est invité à se reporter aux ouvrages cités.

## CHAPITRE 2

### OPTIQUE NON-LINÉAIRE

La réalisation de sources non-classiques requiert des corrélations fortes entre photons. Ces corrélations existent de manière naturelle lorsque les photons sont générés par des processus non-linéaires. On peut en effet voir ces derniers de manière simplifiée comme des interactions localisées (“diffusions”) entre photons et atomes ayant pour effet de faire disparaître un ou plusieurs photons du ou des faisceaux incidents au profit d’un ou plusieurs autres photons.

Dans les interactions non-linéaires dites “paramétriques”, l’état quantique du milieu d’interaction ne change pas. Les niveaux d’énergie impliqués sont donc virtuels, et ils ne peuvent subsister que pour des temps courts afin de respecter le principe d’incertitude temps-énergie (voir par exemple Messiah (2003)). La génération des photons “signaux” (photons produits de l’interaction) est donc quasi-instantanée (quelques femtosecondes au plus pour les énergies du spectre visible et proche infrarouge), et il existe des corrélations très fortes entre ces derniers. Par ailleurs, les principes de conservation de l’énergie, de la quantité de mouvement et du moment cinétique impliquent des corrélations très fortes entre les fréquences optiques des photons générés, leurs directions de propagation, et leurs états de polarisation.

L’optique non-linéaire est étudiée depuis plusieurs décennies. Nicolaas Bloembergen fut sans conteste un des pionniers de la matière, avec la publication de nombreux travaux sur le sujet dans les années 1960. Il est par ailleurs l’auteur d’un des premiers ouvrages traitant de l’optique non-linéaire (Bloembergen (1996)) et le lauréat du Prix Nobel de Physique en 1981 pour ses travaux sur la spectroscopie laser. L’ouvrage de référence générale est aujourd’hui Boyd (1992), et Agrawal (2013) pour ce qui a trait plus spécifiquement à l’optique non-linéaire dans les fibres optiques.

#### 2.1 Polarisation du milieu

L’image donnée ci-dessus de diffusions localisées entre photons et atomes est purement quantique. Il est cependant possible de traiter l’optique non-linéaire de manière classique. Le raisonnement est le suivant :

- Les nuages électroniques des atomes d’un milieu quelconque sont influencés par la présence d’un champ électromagnétique extérieur. Un faisceau lumineux traversant un tel milieu crée donc une “polarisation” de ce milieu, un état hors-équilibre qui varie en fonction des oscillations du champ incident.

- Les oscillations des nuages électroniques créent à leur tour un champ électromagnétique oscillant. Elles deviennent donc la source d'un nouveau faisceau lumineux.
- La nature des oscillations des nuages électroniques dépend de la nature du milieu considéré et de l'amplitude du champ incident. Lorsque cette dernière est faible, la réponse est linéaire. Si l'amplitude est suffisamment élevée, la réponse devient non-linéaire, et de nouvelles fréquences optiques peuvent apparaître.

D'un point de vue purement mathématique, la polarisation du milieu est introduite comme un vecteur qui modifie une des équations des constituants associées aux équations de Maxwell dans la limite des milieux continus. Concrètement, on écrit

$$\mathcal{D} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}, \quad (2.1)$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\mathcal{D}$  le vecteur déplacement électrique,  $\mathcal{E}$  le vecteur champ électrique, et  $\mathcal{P}$  le vecteur polarisation du milieu.

La polarisation est une fonctionnelle du champ externe appliquée au milieu (voir l'annexe A). Elle s'exprime sous la forme

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \geq 1} \int d\mathbf{r}_1 dt_1 \cdots d\mathbf{r}_n dt_n \chi^{(n)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1, \dots, \mathbf{r} - \mathbf{r}_n, t - t_n) : \mathcal{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdots \mathcal{E}(\mathbf{r}_n, t_n), \quad (2.2)$$

où  $\chi^{(n)}$  est le tenseur susceptibilité électrique d'ordre  $n$  du milieu (tenseur d'ordre  $n+1$ ) et le symbole “:” représente la relation tensorielle entre  $\chi^{(n)}$  et les vecteurs  $\mathcal{E}(\mathbf{r}_i, t_i)$ . Le préfacteur dépend de la convention de transformée de Fourier utilisée (voir les équations 2.3 ci-dessous).

Le premier terme,  $\chi^{(1)}$ , est un tenseur d'ordre 2 qui décrit les indices de réfraction du milieu (potentiellement biréfringent) et éventuellement son absorption. Il décrit une interaction purement linéaire entre le champ incident et la polarisation du milieu. Les termes d'ordre supérieur à 2 sont quant à eux responsables des interactions non-linéaires.

Il n'est pas question ici de reproduire la démarche mathématique rigoureuse permettant de passer des équations de Maxwell aux équations de propagation non-linéaires. Le lecteur est invité à se reporter aux ouvrages cités ci-dessus. Le cœur de la démarche est de partir de l'équation 2.1 pour aboutir à une équation de propagation dans laquelle le vecteur polarisation est un terme de source. Sa partie linéaire ne fait que changer la célérité de propagation, alors que les termes non-linéaires sont à l'origine de l'apparition de nouvelles fréquences.

Dans tout le texte, nous utilisons la convention de Fourier symétrique

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{i\omega t}, \quad (2.3a)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (2.3b)$$

La transformée de Fourier de l'expression 2.2 est alors

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon_0 \sum_{n \geq 1} \int d\mathbf{r}_1 d\omega_1 \cdots d\mathbf{r}_n d\omega_n \delta(\omega - \omega_1 - \cdots - \omega_n) \\ &\quad \tilde{\chi}^{(n)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \omega_1, \dots, \mathbf{r} - \mathbf{r}_n, \omega_n) : \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_1, \omega_1) \cdots \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}_n, \omega_n), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\delta$  étant la distribution “delta de Dirac”, ce qui assure la conservation de l'énergie. On voit donc qu'il peut se créer de nouvelles fréquences, sommes de toutes les fréquences (y compris négatives) existantes dans le faisceau incident.

Dans le développement 2.2, le champ électrique appliqué est considéré comme une perturbation, et les termes d'ordre supérieur ont des valeurs de plus en plus faibles. On ne s'intéresse donc en général qu'aux termes de plus bas ordre. Cela signifie qu'*a priori* le terme non-linéaire le plus intéressant est le terme quadratique en champ électrique. Cependant, dans les milieux isotropes continus, il est nécessaire que le vecteur polarisation soit une fonctionnelle impaire du champ incident. Comparons en effet deux situations physiques distinctes :

- On applique le champ extérieur  $\mathcal{E}$  à un milieu  $\mathcal{M}$  donné. La polarisation résultante est  $\mathcal{P}$ .
- On applique le champ extérieur  $-\mathcal{E}$  au milieu  $\mathcal{M}$  après avoir fait subir à ce dernier une inversion par rapport à l'origine, soit la transformation  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ .

La relation géométrique existant entre le champ appliqué et le milieu  $\mathcal{M}$  est la même dans les deux cas, ce qui implique que le milieu est polarisé de la même manière. Mais comme le deuxième cas est inversé par rapport à l'origine, la polarisation résultante est  $-\mathcal{P}$ . Si le milieu est isotrope, les rotations ne changent pas ses propriétés, et c'est comme si elles n'avaient pas eu lieu. On a donc  $\mathcal{P}[-\mathcal{E}] = -\mathcal{P}[\mathcal{E}]$ .

Dans un milieu isotrope (comme la silice amorphe des fibres optiques) la fonctionnelle est donc impaire et le terme de degré 2 nul. Pour cette raison, l'optique non-linéaire dans les fibres est principalement concernée par les effets de troisième ordre (c'est-à-dire le terme cubique en champ électrique), sauf près des interfaces, où la symétrie est brisée.

### 2.1.1 Approximation dipolaire (champ local)

L'approximation dipolaire consiste à ne considérer que le champ local, car les variations de champ sont faibles sur les distances atomiques typiques. Autrement dit

$$\tilde{\chi}^{(n)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \omega_1, \dots, \mathbf{r} - \mathbf{r}_n, \omega_n) \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdots \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \tilde{\chi}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n), \quad (2.5)$$

et on a immédiatement

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon_0 \sum_{n \geq 1} \int d\omega_1 \cdots d\omega_n \delta(\omega - \omega_1 - \cdots - \omega_n) \\ &\quad \tilde{\chi}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) : \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega_1) \cdots \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \omega_n). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pour éviter la notation tensorielle, on écrit plus généralement

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_i^{(n)}(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon_0 \int d\omega_1 \cdots d\omega_n \delta(\omega - \omega_1 - \cdots - \omega_n) \\ &\quad \sum_{j_1, \dots, j_n} \tilde{\chi}_{i, j_1, \dots, j_n}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \tilde{\mathcal{E}}_{j_1}(\mathbf{r}, \omega_1) \cdots \tilde{\mathcal{E}}_{j_n}(\mathbf{r}, \omega_n), \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $\tilde{\mathcal{P}}^{(n)}$  est le terme d'ordre  $n$  de la somme 2.6.

Pour le troisième ordre, on a donc

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_i^{(3)}(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon_0 \int d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\ &\quad \sum_{j, k, \ell} \tilde{\chi}_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \tilde{\mathcal{E}}_j(\mathbf{r}, \omega_1) \tilde{\mathcal{E}}_k(\mathbf{r}, \omega_2) \tilde{\mathcal{E}}_\ell(\mathbf{r}, \omega_3). \end{aligned} \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Approximation quadripolaire

L'approximation quadripolaire consiste à considérer le champ local ainsi que ses premières dérivées spatiales. Cette étape supplémentaire est nécessaire près des interfaces, où le champ peut subir des discontinuités. Nous ne la développons ici que pour le deuxième ordre, où elle prend la forme générale

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_i^{(2)}(\mathbf{r}, \omega) &= \epsilon_0 \int d\omega_1 d\omega_2 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \\ &\quad \left[ \sum_{j, k} \tilde{\chi}_{ijk}^{(2)D}(\omega_1, \omega_2) \tilde{\mathcal{E}}_j(\mathbf{r}, \omega_1) \tilde{\mathcal{E}}_k(\mathbf{r}, \omega_2) + \sum_{\ell, m, n} \tilde{\chi}_{i\ell mn}^{(2)Q}(\omega_1, \omega_2) \tilde{\mathcal{E}}_\ell(\mathbf{r}, \omega_1) \nabla_m \tilde{\mathcal{E}}_n(\mathbf{r}, \omega_2) \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $\nabla_m$  représente une composante de l'opérateur différentiel vectoriel  $\nabla$ .

La première somme représente la partie dipolaire de l'expression. Elle reste nulle dans un milieu isotrope, car le champ purement local ne voit pas l'interface, et les arguments de parité restent valables. En revanche, la seconde somme, qui représente la partie quadripolaire de l'expression, peut devenir importante avec les discontinuités de champ aux interfaces. Dans les fibres optiques, ce terme peut induire des effets de second ordre, en particulier dans certains cristaux photoniques possédant de nombreuses interfaces air/verre, et dans les fibres effilées.

## 2.2 Propagation des termes non-linéaires

### 2.2.1 Théorie des modes couplés

La théorie des modes couplés (voir par exemple le chapitre 31 de Snyder et Love (1983)) permet de prendre en compte la contribution de la polarisation du milieu dans la propagation de l'onde lumineuse dans la fibre optique, au travers du terme 2.1. Nous en donnons ici seulement les grandes lignes.

On commence par discréteriser l'onde qui se propage en modes monochromatiques polarisées linéairement, de la forme

$$\mathcal{E}_\kappa(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_\kappa(\mathbf{r}) \cos(\omega_\kappa t + \phi), \quad (2.10a)$$

$$\mathcal{H}_\kappa(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}_\kappa(\mathbf{r}) \cos(\omega_\kappa t + \phi), \quad (2.10b)$$

où les indices  $\kappa$  intègrent tous les degrés de liberté des modes (mode spatial, pulsation et polarisation). On a alors, dans le domaine fréquentiel,

$$\tilde{\mathcal{E}}_\kappa(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2} [\mathbf{e}_\kappa(\mathbf{r}) \delta(\omega - \omega_\kappa) + \mathbf{e}_\kappa^*(\mathbf{r}) \delta(\omega + \omega_\kappa)], \quad (2.11a)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_\kappa(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2} [\mathbf{h}_\kappa(\mathbf{r}) \delta(\omega - \omega_\kappa) + \mathbf{h}_\kappa^*(\mathbf{r}) \delta(\omega + \omega_\kappa)], \quad (2.11b)$$

où la phase  $\phi$  est encodée dans les  $\mathbf{e}_\kappa(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{h}_\kappa(\mathbf{r})$ .

Dans la fibre optique, on considère une base de modes se propageant dans la direction  $z$ , ayant la forme

$$\bar{\mathcal{E}}_\kappa(\mathbf{r}, \omega) = e^{i\beta_\kappa z} \delta(\omega - \omega_\kappa) \bar{\mathbf{e}}_\kappa(x, y), \quad (2.12a)$$

$$\bar{\mathcal{H}}_\kappa(\mathbf{r}, \omega) = e^{i\beta_\kappa z} \delta(\omega - \omega_\kappa) \bar{\mathbf{h}}_\kappa(x, y), \quad (2.12b)$$

où le diacritique suscrit “barre” indique le caractère orthonormé de la base (voir la justification ci-dessous). Dans ces expressions,  $\beta_\kappa \equiv \frac{2\pi n_\kappa \omega_\kappa}{c}$  est la constante de propagation,  $n_\kappa$  étant l'indice effectif du mode (qui peut varier en fonction de la direction de polarisation dans les

fibres sans symétrie de rotation).

La base comprend également les modes conjugués  $\bar{\tilde{\mathcal{E}}}_\kappa^*$  et  $\bar{\tilde{\mathcal{H}}}_\kappa^*$ . Ils sont considérés comme des vecteurs de base comme les autres, de pulsation négative  $-\omega_\kappa$ , et de constante de propagation négative  $-\beta_\kappa$ .

Cette base est orthonormée au sens où

$$\int_{\perp} dS \left( \bar{\tilde{\mathcal{E}}}_\kappa \times \bar{\tilde{\mathcal{H}}}_\lambda^* + \bar{\tilde{\mathcal{E}}}_\lambda \times \bar{\tilde{\mathcal{H}}}_\kappa^* \right) \cdot \bar{z} = 4 \operatorname{sign}(\beta_\kappa) \delta_{\kappa,\lambda}, \quad (2.13)$$

$\delta_{\kappa,\lambda}$  étant le symbole de Kronecker,  $\bar{z}$  le vecteur unitaire dans la direction  $z$  et  $\operatorname{sign}$  la fonction signe. L'intégration se fait sur tout le plan  $(x, y)$  transverse à la direction de propagation  $z$ .

On décompose donc le champ se propageant sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &= \sum_{\kappa} A_\kappa \bar{\tilde{\mathcal{E}}}_\kappa + A_\kappa^* \bar{\tilde{\mathcal{E}}}_\kappa^*, \\ \tilde{\mathcal{H}} &= \sum_{\kappa} A_\kappa \bar{\tilde{\mathcal{H}}}_\kappa + A_\kappa^* \bar{\tilde{\mathcal{H}}}_\kappa^*. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pour ne pas alourdir les notations, nous n'ajoutons pas de diacritique suscrit “tilde” sur les amplitudes  $A_\kappa$ . Dans toute la suite de ce chapitre, ces amplitudes sont cependant des fonctions de la pulsation (et de la position  $z$ ). La puissance véhiculée par chaque mode est donnée directement par  $|A_\kappa|^2$  lorsque les modes sont normalisés suivant l'équation 2.13.

La répartition entre modes peut évoluer en cours de propagation, et on montre que l'équation des constituants 2.1 mène à

$$\frac{dA_\kappa}{dz} = i \operatorname{sign}(\beta_\kappa) \frac{\omega_\kappa}{4} e^{-i\beta_\kappa z} \int_{\perp} dS \tilde{\mathcal{P}}(\omega_\kappa) \cdot \bar{e}_\kappa^*. \quad (2.15)$$

Pour une non-linéarité de troisième ordre, dans l'approximation dipolaire, on peut alors écrire

$$\frac{dA_\kappa}{dz} = i \operatorname{sign}(\beta_\kappa) \sum_{\substack{\lambda,\mu,\nu \\ \omega_\lambda + \omega_\mu + \omega_\nu = \omega_\kappa}} \Gamma_{\kappa\lambda\mu\nu}(\omega_\kappa, \omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu) A_\lambda A_\mu A_\nu e^{i(\beta_\lambda + \beta_\mu + \beta_\nu - \beta_\kappa)z}, \quad (2.16)$$

après avoir défini

$$\Gamma_{\kappa\lambda\mu\nu}(\omega_\kappa, \omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu) \equiv \frac{\epsilon_0 \omega_\kappa}{4} \int_{\perp} dS \tilde{\chi}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(3)}(\omega_\lambda, \omega_\mu, \omega_\nu) \bar{e}_\lambda \bar{e}_\mu \bar{e}_\nu \bar{e}_\kappa^*. \quad (2.17)$$

Pour une non-linéarité quadripolaire de second ordre, on a

$$\frac{dA_\kappa}{dz} = i \operatorname{sign}(\beta_\kappa) \sum_{\substack{\lambda, \nu \\ \omega_\lambda + \omega_\nu = \omega_\kappa}} \Gamma_{\kappa\lambda\mu\nu}^Q(\omega_\kappa, \omega_\lambda, \omega_\nu) A_\lambda A_\nu e^{i(\beta_\lambda + \beta_\nu - \beta_\kappa)z}, \quad (2.18)$$

avec

$$\Gamma_{\kappa\lambda\mu\nu}^Q(\omega_\kappa, \omega_\lambda, \omega_\nu) \equiv \frac{\epsilon_0 \omega_\kappa}{4} \int_{\perp} dS \tilde{\chi}_{\kappa\lambda\mu\nu}^{(2)Q}(\omega_\lambda, \omega_\nu) \bar{e}_\lambda \nabla_\mu \bar{e}_\nu \bar{e}_\kappa^*. \quad (2.19)$$

Dans les domaines optiques dans lesquels on travaille généralement avec les fibres (proche ultraviolet, visible et proche infrarouge), et dans les matériaux transparents à ces longueurs d'onde (donc loin des résonances optiques), les susceptibilités non-linéaires  $\tilde{\chi}^{(n)}$  dépendent en fait très peu des pulsations. Par contre, elles gardent un aspect tensoriel qui dépend de la nature cristalline du milieu. En particulier, pour un milieu isotrope comme la silice, on a

$$\tilde{\chi}_{\kappa\kappa\kappa\kappa}^{(3)} = 3 \tilde{\chi}_{\kappa\kappa\lambda\lambda}^{(3)} = 3 \tilde{\chi}_{\kappa\lambda\kappa\lambda}^{(3)} = 3 \tilde{\chi}_{\kappa\lambda\lambda\kappa}^{(3)} \quad \forall(\kappa, \lambda), \quad (2.20)$$

tous les autres coefficients étant nuls.

### 2.2.2 Condition d'accord de phase

Les équations 2.16 et 2.18 contiennent un très grand nombre de termes qui s'additionnent. Cependant, si l'argument de l'exponentielle complexe d'un terme donné est grand, les variations de phase de ce terme en cours de propagation sont importantes, et l'effet de ce terme est quasi nul (voir l'annexe B). Ainsi, pour le troisième ordre, par exemple, seuls les termes pour lesquels on a  $\beta_\lambda + \beta_\mu + \beta_\nu \simeq \beta_\kappa$  auront un effet notable. La condition

$$\beta_\lambda + \beta_\mu + \beta_\nu = \beta_\kappa \quad (2.21)$$

s'appelle condition d'accord de phase. Elle représente la conservation de la quantité de mouvement dans le processus non-linéaire. La section 2.4 explore cette condition de manière plus approfondie, et donne des outils pour la calculer.

En pratique, on considère donc seulement un nombre très restreint de termes vérifiant la condition d'accord de phase, et souvent chaque terme un par un. Par exemple, on peut considérer un terme de la forme

$$\frac{dA_1}{dz} = i \Gamma_1 A_2 A_3 A_4^* e^{i(\beta_2 + \beta_3 - \beta_4 - \beta_1)z}, \quad (2.22)$$

où  $\Gamma_1$  représente désormais un coefficient non-linéaire générique de la forme 2.17. Cette équation s'interprète comme la destruction d'un photon du mode 2 et d'un photon du mode 3,

qui s'opère simultanément à la génération un photon du mode 1 et un photon du mode 4. Un tel processus s'accompagne nécessairement des équations symétriques. On a donc en fait un système de quatre équations

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= i \Gamma_1 A_2 A_3 A_4^* e^{i(\beta_2+\beta_3-\beta_4-\beta_1)z}, \\ \frac{dA_2}{dz} &= i \Gamma_2 A_1 A_3^* A_4 e^{i(\beta_1+\beta_4-\beta_3-\beta_2)z}, \\ \frac{dA_3}{dz} &= i \Gamma_3 A_1 A_2^* A_4 e^{i(\beta_1+\beta_4-\beta_2-\beta_3)z}, \\ \frac{dA_4}{dz} &= i \Gamma_4 A_1^* A_2 A_3 e^{i(\beta_2+\beta_3-\beta_1-\beta_4)z}.\end{aligned}\tag{2.23}$$

### 2.2.3 Pompe non appauvrie

Un système tel que 2.23 n'est pas aisé à résoudre. En pratique, on a souvent une ou plusieurs pompes fortes, et on considère ces pompes comme un réservoir infini de photons. Les amplitudes de pompe sont donc considérées comme constantes. C'est l'approximation de la pompe non appauvrie. Dans l'exemple ci-dessus, par exemple, si les modes 2 et 3 sont des modes de pompe, les équations deviennent

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= i \Gamma_1 A_2 A_3 A_4^* e^{i(\beta_2+\beta_3-\beta_4-\beta_1)z}, \\ \frac{dA_2}{dz} &\simeq 0, \\ \frac{dA_3}{dz} &\simeq 0, \\ \frac{dA_4}{dz} &= i \Gamma_4 A_1^* A_2 A_3 e^{i(\beta_2+\beta_3-\beta_1-\beta_4)z},\end{aligned}\tag{2.24}$$

ou encore, en réarrangeant les indices et en identifiant les amplitudes de pompe séparément

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= i \Gamma_1 A_{p1} A_{p2} A_2^* e^{i(\beta_{p1}+\beta_{p2}-\beta_1-\beta_2)z}, \\ \frac{dA_2}{dz} &= i \Gamma_2 A_{p1} A_{p2} A_1^* e^{i(\beta_{p1}+\beta_{p2}-\beta_1-\beta_2)z}.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Il est possible de symétriser ces équations. On remarque tout d'abord que les  $\Gamma_i$  vérifient

$$\frac{\Gamma_i}{\Gamma_j} \simeq \frac{\omega_i}{\omega_j},\tag{2.26}$$

car les intégrales contenues dans les expressions 2.17 ont souvent des valeurs très proches les unes des autres.

On définit alors le changement de variable

$$a_i \equiv \frac{A_i}{\sqrt{\hbar\omega_i}}, \quad (2.27)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite,  $\hbar\omega_i$  l'énergie d'un photon du mode  $i$ . Avec cette définition,  $|a_i|^2$  a la dimension d'un nombre de photons par unité de temps. Le système d'équations 2.25 devient alors

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dz} &= i\Gamma a_{p1} a_{p2} a_2^* e^{i(\beta_{p1} + \beta_{p2} - \beta_1 - \beta_2)z}, \\ \frac{da_2}{dz} &= i\Gamma a_{p1} a_{p2} a_1^* e^{i(\beta_{p1} + \beta_{p2} - \beta_1 - \beta_2)z}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

où le facteur de gain est identique pour les deux équations, soit  $\Gamma = \Gamma_1 \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \simeq \Gamma_2 \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}$ . Il est intéressant de noter qu'il a fallu utiliser un changement de variable qui traite naturellement la lumière de manière quantifiée pour symétriser les équations. L'interprétation en termes de photons créés et annihilés prend alors un sens beaucoup plus concret.

La résolution d'un système générique similaire à celui de l'équation 2.28 est présentée dans l'annexe B. Cette résolution est utile pour la suite.

### 2.3 Effets non-linéaires “utiles” dans les fibres

Dans cette partie, nous explorons les effets non-linéaires les plus utiles pour la réalisation de sources non-classiques dans les fibres optiques. Ils se rangent en deux catégories : les générations d'harmoniques et les instabilités de modulation.

#### 2.3.1 Générations d'harmoniques

La génération d'harmoniques consiste à réunir l'énergie de  $n$  photons de pulsation  $\omega$  en un seul photon “fille” de pulsation  $n\omega$ . Elle est en fait utile dans sa version inversée, c'est-à-dire lorsqu'un photon d'énergie  $n\omega$  génère simultanément  $n$  photons identiques de pulsations  $\omega$ . La Fig. 2.1 illustre la génération de second harmonique (GSH) et son processus symétrique. Cette partie explore les possibilités offertes par les fibres optiques, sous la forme de génération de troisième harmonique (GTH) dans l'approximation dipolaire, et de génération de second harmonique aux interfaces, grâce aux termes quadripolaires.

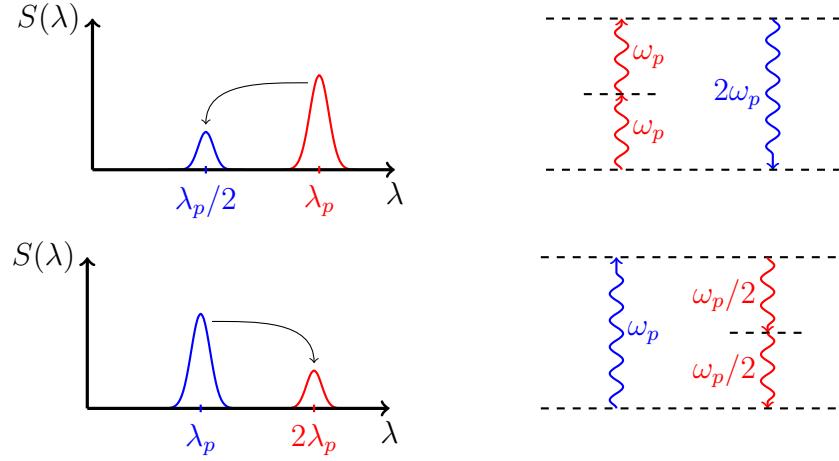


Figure 2.1 En haut : génération de second harmonique (deux photons de pompe disparaissent au profit d'un photon de fréquence double). En bas : effet inverse (un photon de pompe disparaît au profit de deux photons de fréquence moitié). C'est le deuxième effet qui est utile pour les sources non-classiques, en raison des corrélations existant entre les photons générés. Par symétrie de renversement du temps, les deux effets existent dans les mêmes conditions.

### Génération de troisième harmonique

L'équation de propagation du troisième harmonique s'écrit sous la forme

$$\frac{da_{3\omega}}{dz} = i \Gamma a_\omega^3 e^{i(3\beta_\omega - \beta_{3\omega})z}. \quad (2.29)$$

En partant d'une puissance de troisième harmonique nulle, l'intégration directe de l'équation 2.29 donne, dans l'approximation de la pompe non appauvrie  $P_\omega = \text{cste}$

$$P_{3\omega}(z) = \Gamma^2 P_\omega^3 z^2 \text{sinc}^2 \left[ \frac{(3\beta_\omega - \beta_{3\omega})z}{2} \right], \quad (2.30)$$

ce qui se réduit à

$$P_{3\omega}(z) = \Gamma^2 P_\omega^3 z^2 \quad (2.31)$$

lorsque la condition d'accord de phase  $3\beta_\omega = \beta_{3\omega}$  est respectée. On a alors une évolution quadratique de la puissance en fonction de la longueur de propagation. Il existe des effets non-linéaires qui ont une bien meilleure évolution (exponentielle), car ils peuvent être stimulés par la présence de signal. Les instabilités de modulation décrites dans la section 2.3.3 en font partie.

Étant donnée la définition de la constante de propagation  $\beta$ , la condition d'accord de

phase revient à l'égalité des indices effectifs

$$n_{3\omega} = n_\omega. \quad (2.32)$$

Cette condition ne peut être remplie pour un mode spatial donné que pour des conditions particulières de dispersion. Il est imaginable de le faire en fabriquant une fibre au profil de dispersion très particulier (voir par exemple Bétourné (2010)). Il est cependant en général plus facile de considérer des mélanges intermodaux, par exemple dans les fibres microstructurées (voir Knight *et al.* (2003)).

La section 6.2 présente les résultats de GTH par mélanges intermodaux que nous avons obtenus dans des fibres très effilées.

### Génération de second harmonique dans les fibres effilées

L'équation de propagation du second harmonique (GSH) s'écrit sous la forme

$$\frac{da_{2\omega}}{dz} = i \Gamma a_\omega^2 e^{i(2\beta_\omega - \beta_{2\omega})z}, \quad (2.33)$$

ce qui génère une puissance de signal

$$P_{2\omega}(z) = \Gamma^2 P_\omega^2 z^2 \operatorname{sinc}^2 \left[ \frac{(2\beta_\omega - \beta_{2\omega})z}{2} \right], \quad (2.34)$$

ou encore

$$P_{2\omega}(z) = \Gamma^2 P_\omega^2 z^2 \quad (2.35)$$

lorsque la condition d'accord de phase  $2\beta_\omega = \beta_{2\omega}$  est respectée.

La condition d'accord de phase revient de nouveau à une égalité entre indices effectifs

$$n_{2\omega} = n_\omega. \quad (2.36)$$

On a donc la même difficulté à obtenir cette condition pour un seul mode que dans le cas de la GTH.

Cependant, il existe une difficulté supplémentaire, en raison de l'absence de  $\chi^{(2)}$  dans un milieu isotrope. La littérature concernant les diverses tentatives de remédier à cette difficulté est assez importante.

Osterberg et Margulis (1986) décrivent l'une des premières observations (non expliquée à l'époque) de GSH dans une fibre optique pompée par un laser Nd :YAG. Il s'est avéré par la suite que dans cette expérience, comme dans d'autres expériences similaires, la structure

de la fibre avait été modifiée de manière périodique par un effet de photosensibilité. En effet, les réflexions sur les faces de la fibre impliquent la création d'une onde stationnaire lorsqu'un laser est injecté. Si cette condition perdure, les creux et ventres de l'onde stationnaire peuvent mener à un changement local périodique de l'indice de réfraction, brisant ainsi l'isotropie du milieu (voir par exemple Stolen et Tom (1987)).

La technique de "poling", qui consiste à créer un champ électrique permanent constant dans une fibre par migration de charges, permet également de générer des effets de second ordre par bris de symétrie (voir par exemple Kazansky *et al.* (1994)). Le mécanisme mis en jeu est en fait un effet non-linéaire de troisième ordre associé à la présence du champ permanent, comme montré par Godbout (2000).

Nous présentons ici une méthode fondée sur les effets d'interface associés au quadrupole électrique dans les fibres effilées. Si le diamètre de la fibre effilée est très faible (de l'ordre des longueurs d'onde optiques impliquées) ces effets peuvent être importants en raison des valeurs du champ électrique et de ses discontinuités à l'interface air/verre.

On s'intéresse donc ici à un effet quadripolaire avec une constante non-linéaire de type 2.19. Dans un milieu isotrope, Bloembergen *et al.* (1968) calculent les coefficients du tenseur de susceptibilité quadripolaire comme

$$\chi_{k,\ell,m,n}^{(2)Q} = \frac{3\epsilon_0(n^2-1)^2}{4\mathcal{N}e} (\delta_{k,\ell}\delta_{m,n} - \delta_{k,m}\delta_{\ell,n}), \quad (2.37)$$

avec  $n$  l'indice de réfraction du milieu,  $\mathcal{N}$  sa densité d'électrons de valence<sup>1</sup>, et  $e$  la charge élémentaire.

Cette relation permet de trouver la forme du vecteur polarisation de deuxième harmonique sous la forme

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(2)Q}(2\omega) = \frac{3[\epsilon_0(n^2-1)]^2}{4\mathcal{N}e} \left\{ \left[ \nabla \cdot \tilde{\mathcal{E}}(\omega) \right] \tilde{\mathcal{E}}(\omega) - \frac{1}{2} \nabla \left[ \tilde{\mathcal{E}}(\omega) \cdot \tilde{\mathcal{E}}(\omega) \right] \right\}. \quad (2.38)$$

Dans les fibres optiques, les modes de la base orthonormée 2.12 s'écrivent simplement dans les coordonnées cylindriques sous la forme

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_r(r, \theta, z) &= e_r(r) \cos(\mu\theta) e^{i\beta z} \\ \bar{\mathcal{E}}_\theta(r, \theta, z) &= e_\theta(r) \sin(\mu\theta) e^{i\beta z} \\ \bar{\mathcal{E}}_z(r, \theta, z) &= i e_z(r) \cos(\mu\theta) e^{i\beta z}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

où l'indice  $\mu$  est le nombre azimutal qui représente la dépendance angulaire du mode dans le

1. Soit  $\mathcal{N} \simeq 8,8 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  en prenant  $\rho \simeq 2,2 \text{ g.cm}^{-3}$  pour la densité de la silice amorphe et quatre électrons de valence par molécule de silice ( $\text{SiO}_2$ ).

plan transverse (voir par exemple Bures (2009)).

On a donc

$$[\nabla \cdot \mathcal{E}] \mathcal{E} - \frac{1}{2} \nabla [\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}] = \frac{e^{i 2\beta z}}{r} \begin{bmatrix} \left( e_r^2 + \mu e_r e_\theta - r \beta e_r e_z - r e_z \frac{\partial e_z}{\partial r} \right) \cos^2(\mu \theta) - r e_\theta \frac{\partial e_\theta}{\partial r} \sin^2(\mu \theta) \\ \left( e_r e_\theta + r e_\theta \frac{\partial e_r}{\partial r} - r \beta e_\theta e_z + \mu e_r^2 - \mu e_z^2 \right) \cos(\mu \theta) \sin(\mu \theta) \\ i \left( r e_r \frac{\partial e_r}{\partial r} + e_r e_z + \mu e_\theta e_z - r \beta e_r^2 \right) \cos^2(\mu \theta) - i r \beta e_\theta^2 \sin^2(\mu \theta) \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

En injectant les équations 2.38 et 2.40 dans l'équation 2.19, on obtient

$$\Gamma^Q = \frac{3 \pi c [\epsilon_0(n^2 - 1)]^2}{8 \mathcal{N} e \lambda_p} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} dr \left\{ \left[ \left( e_{rp}^2 + \mu_p e_{rp} e_{\theta p} - r \beta_p e_{rp} e_{zp} - r e_{zp} \frac{\partial e_{zp}}{\partial r} \right) \cos^2(\mu_p \theta) - r e_{\theta p} \frac{\partial e_{\theta p}}{\partial r} \sin^2(\mu_p \theta) \right] e_{rs} \cos(\mu_s \theta) \right. \right. \\ \left. + \left[ \left( e_{rp} e_{\theta p} + r e_{\theta p} \frac{\partial e_{rp}}{\partial r} - r \beta_p e_{\theta p} e_{zp} + \mu_p e_{rp}^2 - \mu_p e_{zp}^2 \right) \cos(\mu_p \theta) \sin(\mu_p \theta) \right] e_{\theta s} \sin(\mu_s \theta) \right. \\ \left. + \left[ \left( r e_{rp} \frac{\partial e_{rp}}{\partial r} + e_{rp} e_{zp} + \mu_p e_{\theta p} e_{zp} - r \beta_p e_{rp}^2 \right) \cos^2(\mu_p \theta) - r \beta_p e_{\theta p}^2 \sin^2(\mu_p \theta) \right] e_{zs} \cos(\mu_s \theta) \right\}, \quad (2.41)$$

où l'indice  $p$  représente la pompe (de pulsation  $\omega$ ) et l'indice  $s$  le signal généré (de pulsation  $2\omega$ ). Dans cette équation,  $\lambda_p$  est la longueur d'onde de la pompe et  $c$  la vitesse de la lumière.

Pour les modes de type  $\text{HE}_{\mu,\nu}$  et  $\text{EH}_{\mu,\nu}$ , les  $\mu$  sont des entiers non nuls (voir par exemple Snyder et Love (1983)). L'équation 2.41 se simplifie alors après intégration selon  $\theta$  comme

$$\Gamma^Q = \frac{3 \pi^2 c [\epsilon_0 \chi^{(1)}(\omega)]^2}{16 \mathcal{N} e \lambda_p} \delta_{2\mu_p, \mu_s} \int_0^{+\infty} dr \left[ \left( e_{rp}^2 + \mu_p e_{rp} e_{\theta p} - r \beta_p e_{rp} e_{zp} - r e_{zp} \frac{\partial e_{zp}}{\partial r} + r e_{\theta p} \frac{\partial e_{\theta p}}{\partial r} \right) e_{rs} \right. \\ \left. + \left( e_{rp} e_{\theta p} + r e_{\theta p} \frac{\partial e_{rp}}{\partial r} - r \beta_p e_{\theta p} e_{zp} + \mu_p e_{rp}^2 - \mu_p e_{zp}^2 \right) e_{\theta s} \right. \\ \left. + \left( r e_{rp} \frac{\partial e_{rp}}{\partial r} + e_{rp} e_{zp} + \mu_p e_{\theta p} e_{zp} - r \beta_p e_{rp}^2 + r \beta_p e_{\theta p}^2 \right) e_{zs} \right]. \quad (2.42)$$

On voit alors qu'en plus de la condition d'accord de phase, tous les mélanges multimodaux ne sont pas possibles. Seuls les mélanges vérifiant  $\mu_s = 2\mu_p$  sont possibles.

L'interface air/verre peut jouer un rôle important au travers des termes de la forme  $\frac{\partial e_r}{\partial r}$ , car la composante radiale du champ y subit une discontinuité. On définit alors

$$e_r(r) = e_r^{(s)}(r) + \Theta(r - \rho) [e_r^{(a)}(r) - e_r^{(s)}(r)], \quad (2.43)$$

où  $e_r^{(s)}$  est la forme du champ dans la silice,  $e_r^{(a)}$  sa forme dans l'air,  $\Theta$  la fonction de Heaviside, et  $\rho$  le rayon externe de la fibre.

On a alors

$$\int_0^{+\infty} dr f(r) \frac{\partial e_r}{\partial r} = f(\rho) \frac{e_r^{(a)}(\rho) - e_r^{(s)}(\rho)}{2} + \int_0^\rho dr f(r) \frac{\partial e_r^{(s)}}{\partial r} + \int_\rho^{+\infty} dr f(r) \frac{\partial e_r^{(a)}}{\partial r}, \quad (2.44)$$

le premier terme pouvant apporter une contribution importante dans les fibres effilées en raison de la discontinuité du mode à l'interface (les contributions de autres termes ne sont cependant pas pour autant nécessairement négligeables). La section 6.2 décrit une expérience réussie de GSH dans une telle fibre.

### 2.3.2 Modulations de phase

Nous nous plaçons jusqu'à la fin du chapitre dans le cadre de l'approximation dipolaire et étudions des effets non-linéaires de troisième ordre.

Avant d'aborder directement les instabilités de modulation, il est nécessaire de faire un petit rappel sur deux autres effets non-linéaires importants, les modulations de phase. On distingue, dans cette catégorie, l'automodulation de phase et la modulation de phase croisée. Comme leurs noms l'indiquent, ces effets ont pour conséquence une modulation non-linéaire de la phase de la pompe (automodulation) et des signaux générés (modulation croisée), sans pour autant générer de transfert de puissance d'un mode à l'autre.

#### Automodulation de phase

L'automodulation de phase est représentée quantiquement sur la Fig. 2.2.

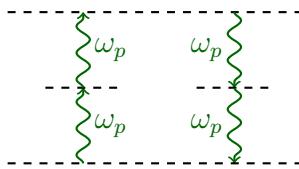


Figure 2.2 Représentation quantique de l'automodulation de phase.

L'équation de propagation de l'automodulation de phase est

$$\frac{da_p}{dz} = i \Gamma a_p a_p^* a_p. \quad (2.45)$$

On considère donc un effet ne concernant qu'un seul mode. Pour le mode fondamental, la constante non-linéaire  $\Gamma$  est notée  $\gamma$ , et les constantes non-linéaires de tous les autres processus peuvent être définis par rapport à  $\gamma$ . L'automodulation de phase est donc par définition, pour le mode fondamental

$$\frac{da_p}{dz} = i \gamma |a_p|^2 a_p = i \gamma P a_p. \quad (2.46)$$

Cette équation a pour solution évidente

$$a_p(z) = a_p(0) e^{i \gamma P z}. \quad (2.47)$$

L'automodulation de phase a pour conséquence un élargissement du spectre de pompe en cours de propagation. Cet effet se comprend aisément si on considère une impulsion dont la puissance évolue au cours du temps. La phase non-linéaire évolue alors proportionnellement à la puissance instantanée. La fréquence instantanée étant la dérivée temporelle de la phase, elle varie également au cours de l'impulsion, laissant apparaître de nouvelles fréquences dans le spectre.

L'automodulation de phase peut être la cause d'une suppression d'autres effets non-linéaires, en particulier ceux qui se produisent près de la pompe. Le chapitre 4 montre comment l'utilisation d'une pompe incohérente peut mitiger cet effet, voire supprimer complètement l'automodulation de phase pour laisser s'exprimer d'autres effets.

### Modulation de phase croisée

La modulation de phase croisée est représentée quantiquement sur la Fig. 2.3.

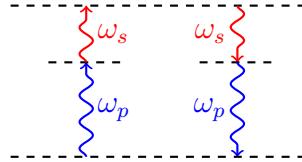


Figure 2.3 Représentation quantique de la modulation de phase croisée.

L'équation de propagation associée est

$$\frac{da_s}{dz} = i \Gamma a_p a_p^* a_s = i \Gamma P a_s, \quad (2.48)$$

dont la solution est

$$a_s(z) = a_s(0) e^{i \Gamma P z}. \quad (2.49)$$

Si le mode de pompe et le mode du signal sont des modes fondamentaux, le coefficient  $\Gamma$  de la modulation de phase croisée vaut

- $\Gamma = 2 \gamma$  si la pompe et le signal sont copolarisés ; le facteur 2 provient de la dégénérescence des termes dans la somme 2.16 ;
- $\Gamma = \frac{2}{3} \gamma$  si la pompe et le signal sont polarisés orthogonalement ; le facteur  $\frac{1}{3}$  supplémentaire par rapport au cas copolarisé provient des symétries de la susceptibilité  $\chi^{(3)}$  dans les milieux isotropes (voir les relations 2.20).

### 2.3.3 Instabilités de modulation

L'instabilité de modulation est un type de processus non-linéaire qui implique la destruction de deux photons de pompe au profit de deux photons signaux situés de part et d'autre de la longueur d'onde de pompe (dans le domaine fréquentiel) pour vérifier la conservation de l'énergie. L'effet inverse est également utile ; il permet en effet de générer des photons dégénérés en fréquence. Les deux effets symétriques sont représentés sur la Fig. 2.4.

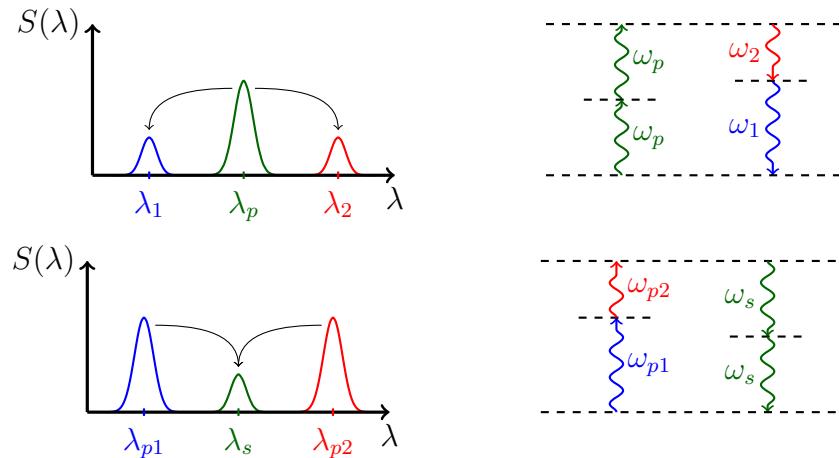


Figure 2.4 En haut : instabilité de modulation. Deux photons de pompe disparaissent au profit de deux photons de signal situés de part et d'autre de la longueur d'onde de pompe pour assurer la conservation de l'énergie. En bas : l'effet inverse peut également être utile comme source non-classique de photons dégénérés en fréquence.

La classification des instabilités de modulation en trois catégories distinctes (copolarisées, orthogonales et mixtes) présentée ci-dessous se réfère à des modes polarisés rectilignement. L'étude des modes polarisés circulairement est faite par la suite.

On se restreint donc dans un premier temps à deux modes de pompe ( $a_{px}$  et  $a_{py}$ , un sur chaque axe de polarisation) et quatre modes de signaux ( $a_{1x}$ ,  $a_{2x}$ ,  $a_{1y}$  et  $a_{2y}$ , de part et d'autre de la pompe pour respecter la condition de conservation de l'énergie, sur les deux axes de polarisation). Si on tient compte des modulations de phase croisées et qu'on ne considère que des modes fondamentaux, l'équation 2.16 se simplifie considérablement, pour donner

$$\begin{aligned} \frac{da_{1x}}{dz} = & i \gamma_1 \left( 2 |a_{px}|^2 + \frac{2}{3} |a_{py}|^2 \right) a_{1x} \\ & + i \frac{2}{3} \gamma_1 \left[ a_{px} a_{py}^* e^{i(\beta_{px} - \beta_{py})z} + a_{px}^* a_{py} e^{i(\beta_{py} - \beta_{px})z} \right] a_{1y} e^{i(\beta_{1y} - \beta_{1x})} \\ & + i \gamma_{12} a_{px}^2 a_{2x}^* e^{i(2\beta_{px} - \beta_{1x} - \beta_{2x})z} \\ & + i \frac{1}{3} \gamma_{12} a_{py}^2 a_{2x}^* e^{i(2\beta_{py} - \beta_{1x} - \beta_{2x})z} \\ & + i \frac{2}{3} \gamma_{12} a_{px} a_{py} a_{2y}^* e^{i(\beta_{px} + \beta_{py} - \beta_{1x} - \beta_{2y})}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

où les amplitudes de pompe doivent refléter les équations d'automodulation de phase 2.47 et de modulation de phase croisée 2.49 en fonction de la répartition de la puissance de pompe sur les axes. Les équations de propagation pour les autres signaux sont obtenues en intervertissant les indices 1 et 2 d'une part,  $x$  et  $y$  d'autre part. Dans ces équations, on a, en vertu des relations 2.26 et des changements de variables 2.27,

$$\begin{aligned} - \gamma_1 & \simeq \gamma \frac{\omega_1}{\omega_p} = \gamma \left( 1 + \frac{\delta\omega}{\omega_p} \right); \\ - \gamma_{12} & \simeq \gamma \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\omega_p} = \gamma \sqrt{1 - \frac{\delta\omega^2}{\omega_p^2}}. \end{aligned}$$

Par la suite, nous considérons des signaux suffisamment proches de la pompe (soit  $\delta\omega \ll \omega_p$ ) pour qu'on puisse faire l'approximation  $\gamma_1 \simeq \gamma_{12} \simeq \gamma$ . La généralisation aux cas où les signaux sont plus éloignés de la pompe ne pose de toute façon pas de problème particulier.

### Instabilité de modulation scalaire (type copolarisé)

L'instabilité de modulation scalaire, ou copolarisée, ou encore de type C, concerne un mode de pompe et deux signaux, tous copolarisés. Elle est représentée quantiquement sur la Fig. 2.5.

On ne considère donc qu'une pompe polarisée sur un axe donné (nous choisissons arbitrairement  $x$ ) et les deux signaux copolarisés avec la pompe. En tenant compte de l'automodulation

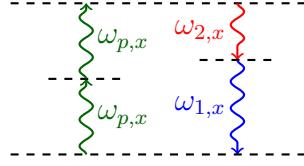


Figure 2.5 Représentation quantique de l'instabilité de modulation de type C.

dulation de phase de la pompe, l'équation 2.50 se réduit à

$$\begin{aligned}\frac{da_{1x}}{dz} &= i 2 \gamma P a_{1x} + i \gamma P a_{2x}^* e^{i(2 \gamma P + 2 \beta_{px} - \beta_{1x} - \beta_{2x})z}, \\ \frac{da_{2x}}{dz} &= i 2 \gamma P a_{2x} + i \gamma P a_{2x}^* e^{i(2 \gamma P + 2 \beta_{px} - \beta_{1x} - \beta_{2x})z}.\end{aligned}\quad (2.51)$$

On a donc une équation du type de celle résolue dans l'annexe B (équation B.1), avec

- $G_p = 2 \gamma P$ ;
- $G_{12} = \gamma P$ ;
- $\Delta\beta = 2 \gamma P + 2 \beta_{px} - \beta_{1x} - \beta_{2x}$ .

La condition de croissance est donc

$$0 \leq \beta_{px} - \frac{\beta_{1x} + \beta_{2x}}{2} \leq 2 \gamma P, \quad (2.52)$$

et la condition de gain maximal

$$\beta_{px} - \frac{\beta_{1x} + \beta_{2x}}{2} = \gamma P. \quad (2.53)$$

### Instabilité de modulation vectorielle de type orthogonal

Dans l'instabilité de modulation vectorielle orthogonale, ou encore de type O, les signaux sont orthogonaux à la pompe. Le processus est représenté quantiquement sur la Fig. 2.6.

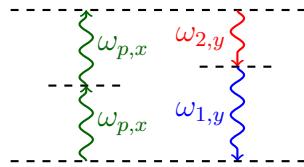


Figure 2.6 Représentation quantique de l'instabilité de modulation de type O.

On ne considère donc qu'une pompe polarisée sur un axe donné ( $x$ ) et les deux signaux polarisés orthogonalement à la pompe (sur l'axe  $y$ ). En tenant compte de l'automodulation

de phase de la pompe, l'équation 2.50 se réduit à

$$\begin{aligned}\frac{da_{1y}}{dz} &= i \frac{2}{3} \gamma P a_{1y} + i \frac{1}{3} \gamma P a_{2y}^* e^{i(2\gamma P + 2\beta_{px} - \beta_{1y} - \beta_{2y})z}, \\ \frac{da_{2y}}{dz} &= i \frac{2}{3} \gamma P a_{2y} + i \frac{1}{3} \gamma P a_{1y}^* e^{i(2\gamma P + 2\beta_{px} - \beta_{1y} - \beta_{2y})z}.\end{aligned}\quad (2.54)$$

On a donc une équation de type B.1, avec

- $G_p = \frac{2}{3} \gamma P$ ;
- $G_{12} = \frac{1}{3} \gamma P$ ;
- $\Delta\beta = 2\gamma P + 2\beta_{px} - \beta_{1y} - \beta_{2y}$ .

La condition de croissance est donc

$$-\frac{2}{3} \gamma P \leq \beta_{px} - \frac{\beta_{1y} + \beta_{2y}}{2} \leq 0, \quad (2.55)$$

et la condition de gain maximal

$$\beta_{px} - \frac{\beta_{1y} + \beta_{2y}}{2} = -\frac{1}{3} \gamma P. \quad (2.56)$$

La section 6.4 étudie la faisabilité d'une source de photons intriqués en polarisation, à l'aide d'une instabilité de modulation vectorielle de type O.

### Instabilité de modulation vectorielle de type mixte

Dans l'instabilité de modulation vectorielle mixte, ou encore de type M, on considère deux pompes polarisées orthogonalement. Un photon de chaque pompe disparaît au profit de photons signaux également polarisés orthogonalement. Les deux processus possibles sont représentés quantiquement sur la Fig. 2.7.



Figure 2.7 Représentation quantique des deux cas d'instabilité de modulation de type M.

On considère donc une pompe dont la puissance est répartie à parts égales sur les deux axes ( $P_x = P_y = \frac{P}{2}$ ), et un signal sur chaque axe de polarisation (nous choisissons arbitrairement  $a_{1x}$  et  $a_{2y}$ ). En tenant compte de l'automodulation de phase de la pompe, l'équation 2.50 se

réduit à

$$\begin{aligned}\frac{da_{1x}}{dz} &= i \frac{4}{3} \gamma P a_{1x} + i \frac{1}{3} \gamma P a_{2y}^* e^{i(\frac{5}{3} \gamma P + \beta_{px} + \beta_{py} - \beta_{1x} - \beta_{2y})z}, \\ \frac{da_{2y}}{dz} &= i \frac{4}{3} \gamma P a_{2y} + i \frac{1}{3} \gamma P a_{1x}^* e^{i(\frac{5}{3} \gamma P + \beta_{px} + \beta_{py} - \beta_{1x} - \beta_{2y})z}.\end{aligned}\quad (2.57)$$

On a donc une équation de type B.1, avec

- $G_p = \frac{4}{3} \gamma P$  ;
- $G_{12} = \frac{1}{3} \gamma P$  ;
- $\Delta\beta = \frac{5}{3} \gamma P + \beta_{px} + \beta_{py} - \beta_{1x} - \beta_{2y}$ .

La condition de croissance est donc

$$\frac{1}{6} \gamma P \leq \frac{\beta_{px} + \beta_{py}}{2} - \frac{\beta_{1x} + \beta_{2y}}{2} \leq \frac{5}{6} \gamma P, \quad (2.58)$$

et la condition de gain maximal

$$\frac{\beta_{px} + \beta_{py}}{2} - \frac{\beta_{1x} + \beta_{2y}}{2} = \frac{1}{2} \gamma P. \quad (2.59)$$

### Instabilités de modulation vectorielles circulaires

Lorsqu'on fait subir à une fibre effilée une torsion constante sur une certaine longueur, les modes de propagation propres sont les états de polarisation circulaire. C'est l'équivalent de l'activité optique de certains cristaux biréfringents (voir par exemple Saleh et Teich (2007)). On peut se demander quels processus non-linéaires sont alors présents.

Les relations entre modes linéaires et circulaires sont

$$\begin{aligned}a_+ &= \frac{a_x + i a_y}{\sqrt{2}} & a_- &= \frac{a_x - i a_y}{\sqrt{2}} \\ a_x &= \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}} & a_y &= i \frac{a_- - a_+}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\quad (2.60)$$

On suppose maintenant qu'on injecte une pompe polarisée circulairement (+) dans une fibre torsadée sans biréfringence linéaire. On a donc  $a_{px} = \sqrt{\frac{P}{2}} e^{i \frac{5}{6} \gamma P z}$  et  $a_{py} = -i \sqrt{\frac{P}{2}} e^{i \frac{5}{6} \gamma P z}$ . On vérifie alors que l'équation 2.50 mène à

$$\begin{aligned}\frac{da_{1+}}{dz} &= i \frac{4}{3} \gamma P a_{1+} + i \frac{2}{3} \gamma P a_{2+}^* e^{i(\frac{5}{3} \gamma P + 2\beta_p - \beta_1 - \beta_2)z}, \\ \frac{da_{1-}}{dz} &= i \frac{4}{3} \gamma P a_{1-}.\end{aligned}\quad (2.61)$$

De même, si on injecte une pompe polarisée circulairement (–), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{da_{1+}}{dz} &= i \frac{4}{3} \gamma P a_{1+}, \\ \frac{da_{1-}}{dz} &= i \frac{4}{3} \gamma P a_{1-} + i \frac{2}{3} \gamma P a_{2-}^* e^{i(\frac{5}{3} \gamma P + 2\beta_p - \beta_1 - \beta_2)z}.\end{aligned}\quad (2.62)$$

Certains termes disparaissent donc naturellement des équations. On peut se demander pourquoi, et la réponse est simple : il y a conservation du spin total. Le problème ne se posait pas avec la polarisation linéaire, qui est toujours une combinaison linéaire de spin +1 et de spin –1. La Fig. 2.8 montre quels processus sont acceptables, et lesquels ne le sont pas.

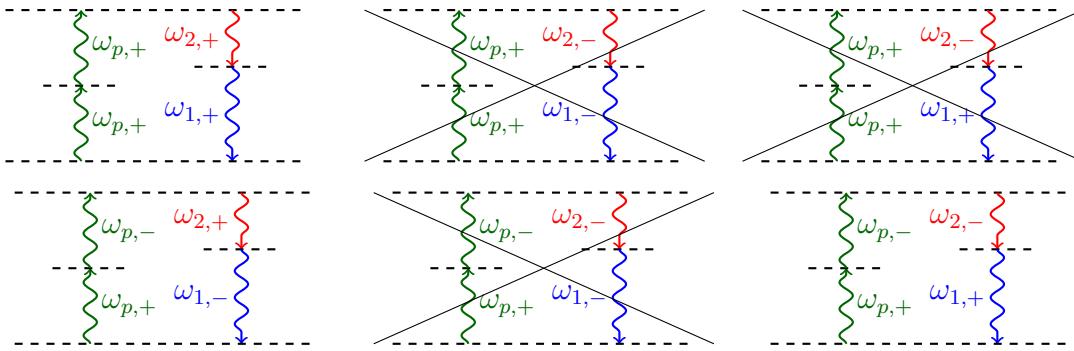


Figure 2.8 Processus non-linéaires possibles et impossibles en polarisation circulaire.

Un exemple de réalisation de fibre torsadée et de mélange non-linéaire avec polarisation circulaire est présenté dans la section 6.1.

## 2.4 Accords de phase

Le calcul des accords de phase est important pour le design d'une expérience visant à produire une instabilité de modulation. Cette section montre la méthode approchée traditionnellement utilisée, et compare ses résultats à ceux de la méthode de "force brute" exacte.

### 2.4.1 Méthode approchée

En règle générale, les calculs sont faits en utilisant des formules approchées utilisant un développement des constantes de propagation  $\beta$ , autour de la fréquence de pompe. Les développements jusqu'à l'ordre 4 sont effectués dans Virally *et al.* (2010a). Nous donnons ici les premières solutions non triviales (à  $P = 0$ ), c'est-à-dire les solutions à l'ordre 4 pour le type C et à l'ordre 2 pour les types O et M.

On pose donc

$$\begin{aligned}\beta_{1x} &= \beta_x(\omega_p + \delta\omega) = \beta_{px} + \beta_{px}^{(1)} \delta\omega + \frac{\beta_{px}^{(2)}}{2} \delta\omega^2 + \frac{\beta_{px}^{(3)}}{6} \delta\omega^3 + \frac{\beta_{px}^{(4)}}{24} \delta\omega^4 + o(\delta\omega^4), \\ \beta_{2x} &= \beta_x(\omega_p - \delta\omega) = \beta_{px} - \beta_{px}^{(1)} \delta\omega + \frac{\beta_{px}^{(2)}}{2} \delta\omega^2 - \frac{\beta_{px}^{(3)}}{6} \delta\omega^3 + \frac{\beta_{px}^{(4)}}{24} \delta\omega^4 + o(\delta\omega^4),\end{aligned}\quad (2.63)$$

avec  $\beta^{(n)} \equiv \frac{d^n \beta}{d\omega_n}(\omega_p)$ . On a les équations équivalentes pour l'axe  $y$ .

Notons que dans le cas d'une biréfringence constante ( $n_y - n_x = \delta n = \text{cste}$ ), on a

- $\beta_{py} - \beta_{px} = \delta n \frac{\omega_p}{c}$ ;
- $\beta_{py}^{(1)} - \beta_{px}^{(1)} = \frac{\delta n}{c}$ ;
- $\beta_{py}^{(k)} = \beta_{px}^{(k)} \equiv \beta_p^{(k)}$  pour  $k \geq 2$ .

Pour la suite, nous considérerons cette condition remplie. Elle est en général respectée pour une biréfringence induite par contrainte (voir par exemple Chen (2007)).

### Type copolarisé (type C)

Pour le type C, l'équation 2.53 donne alors, après développement au quatrième ordre,

$$\delta\omega = \sqrt{-6 \frac{\beta_p^{(2)}}{\beta_p^{(4)}} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2 \gamma P \beta_p^{(4)}}{3 [\beta_p^{(2)}]^2}} \right\}}. \quad (2.64)$$

Il n'existe donc *a priori* de solutions que lorsque  $\beta_p^{(2)} \beta_p^{(4)} < 0$ , et la première solution non triviale pour  $P = 0$  est

$$\delta\omega = 2 \sqrt{-\frac{3 \beta_p^{(2)}}{\beta_p^{(4)}}}. \quad (2.65)$$

Les choses sont en fait un peu plus compliquées, car si  $\frac{\gamma P \beta_p^{(4)}}{[\beta_p^{(2)}]^2} \ll 1$ , un développement limité de l'équation 2.64 sous la seconde racine donne

$$\delta\omega \simeq \sqrt{-\frac{2 \gamma P}{\beta_p^{(2)}}}. \quad (2.66)$$

Cette expression ne contient pas de terme en  $\beta_p^{(4)}$ , et seul le signe de  $\beta_p^{(2)}$  est important. Cette solution s'obtient directement lorsqu'on s'arrête au second ordre. Il existe donc tou-

jours des solutions près de la pompe pour de faibles puissances injectées, en dispersion anormale ( $\beta_p^{(2)} < 0$ ). Ces solutions sont connues dans la littérature sous le terme d'instabilités de modulation scalaires.

### Type orthogonal (type O)

Pour le type O, l'équation 2.56 donne, après développement au second ordre,

$$\delta\omega = \sqrt{\frac{2}{\beta_p^{(2)}} \left[ -\delta n \frac{\omega_p}{c} + \frac{1}{3} \gamma P \right]}. \quad (2.67)$$

Pour une biréfringence suffisamment forte, on a  $|\gamma P| \ll \left| \delta n \frac{\omega_p}{c} \right|$ , et il existe toujours une solution. Il suffit de placer la pompe sur le bon axe en fonction du signe du terme de dispersion  $\beta_p^{(2)}$ . Plus précisément, il faut injecter la pompe sur l'axe lent en dispersion normale ( $\beta_p^{(2)} > 0$ ), et sur l'axe rapide en dispersion anormale ( $\beta_p^{(2)} < 0$ ).

Pour  $P = 0$ , la première solution est alors

$$\delta\omega = \sqrt{\frac{-2 \delta n \omega_p}{\beta_p^{(2)} c}}. \quad (2.68)$$

### Type mixte (type M)

Pour le type M, l'équation 2.59 donne, après développement au second ordre,

$$\delta\omega = \pm \frac{\delta n}{2 \beta_p^{(2)} c} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \gamma P c^2 \beta_p^{(2)}}{\delta n^2}} \right]. \quad (2.69)$$

Pour  $P = 0$ , la première solution non triviale est

$$\delta\omega = \left| \frac{\delta n}{\beta_p^{(2)} c} \right|. \quad (2.70)$$

Notons cependant que si  $\left| \frac{\gamma P c^2 \beta_p^{(2)}}{\delta n^2} \right| \gg 1$ , il n'existe de solution que pour  $\beta_p^{(2)} < 0$ , c'est-à-dire en dispersion anormale. Plus précisément, on a

$$\delta\omega \simeq \sqrt{-\frac{\gamma P}{\beta_p^{(2)}}}. \quad (2.71)$$

Le rapport entre l'amplitude de la pompe et la biréfringence (valeur de  $\delta n$ ) joue donc ici un

rôle important.

Si, au contraire, on a  $\left| \frac{\gamma P c^2 \beta_p^{(2)}}{\delta n^2} \right| \ll 1$ , la première solution non triviale à  $\gamma P$  non nul est

$$\delta\omega \simeq \frac{\gamma P c}{|\delta n|}. \quad (2.72)$$

On remarque qu'il s'agit d'une solution constante.

#### 2.4.2 Force brute

Plus les fréquences des signaux sont éloignées de la fréquence de pompe, plus les calculs utilisant des formules approchées donnent des réponses erronées. Mais il est en fait relativement facile de résoudre la condition d'accord de phase numériquement à partir de la courbe de dispersion  $[n_{\text{eff}}(\omega)]$  mesurée ou calculée. Les méthodes de calcul des indices effectifs vont des formules exactes pour les fibres à couches d'indices constants aux méthodes de type éléments finis pour les fibres plus complexes, y compris les fibres microstructurées.

La méthode de force brute donne de meilleurs résultats que les formules approchées sans pour autant nécessiter un temps de calcul particulièrement long. Elle est utilisée avec succès pour prédire des effets non-linéaires éloignés de la pompe dans Kudlinski *et al.* (2013).

L'annexe G contient les programmes Matlab® permettant de calculer les accords de phase par force brute.

La Fig. 2.9 montre les résultats des calculs de condition d'accord de phase par force brute pour le type C dans la fibre SMF-28<sup>TM</sup> de Corning®. Le zéro de dispersion (longueur d'onde pour laquelle  $\beta_p^{(2)} = 0$ ) est situé vers 1300 nm. L'accord de phase pour la partie située à gauche de cette longueur d'onde est due à un  $\beta_p^{(4)}$  négatif associé à un  $\beta_p^{(2)}$  positif (voir l'équation 2.64). L'accord de phase pour la partie située à droite du zéro de dispersion est dû à un  $\beta_p^{(2)}$  négatif (voir l'équation 2.66).

La Fig. 2.10 montre les résultats des calculs de condition d'accord de phase par force brute pour le type O dans la fibre SMF-28<sup>TM</sup> (dans laquelle on suppose une biréfringence induite, la fibre SMF-28<sup>TM</sup> étant nominalement non-biréfringente). À gauche du zéro de dispersion, l'accord de phase est réalisé en pompant sur l'axe lent, et à droite sur l'axe rapide (voir l'équation 2.67).

Les Fig. 2.11 et 2.12 montrent les résultats des calculs de condition d'accord de phase par force brute pour le type M dans la fibre SMF-28<sup>TM</sup> (toujours en supposant une biréfringence induite). Le comportement varie de manière importante en fonction de la valeur de la biréfringence. Pour une faible biréfringence, il n'existe pas de solution en dispersion normale.

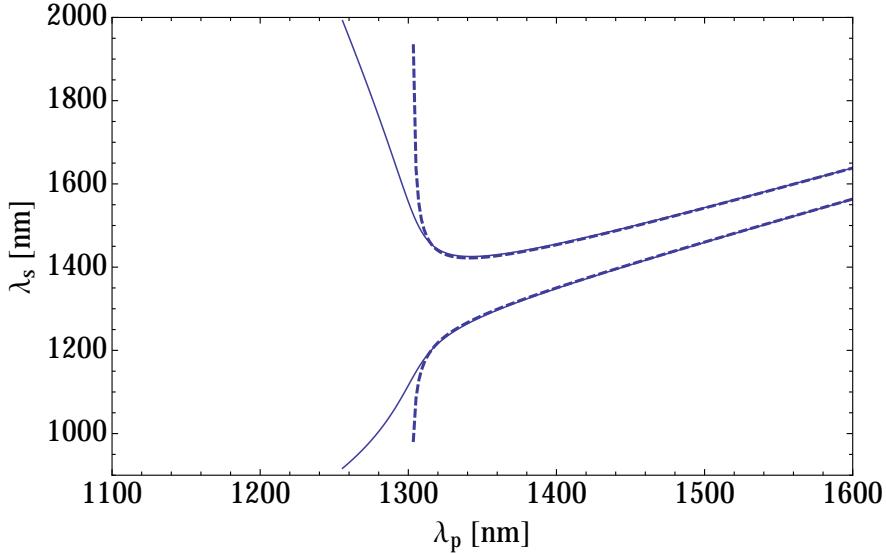


Figure 2.9 Calcul d'accords de phase pour une instabilité de modulation de type C dans la SMF-28<sup>TM</sup>. Pour ce calcul,  $\gamma P = 10 \text{ m}^{-1}$ . Les lignes solides représentent le calcul “force brute”. Les lignes pointillées grasses représentent le calcul utilisant la formule approchée 2.66.

## 2.5 Résumé

Parmi les effets non-linéaires utiles à la réalisation de sources non-classiques dans les fibres, on recense les générations d'harmoniques et les instabilités de modulation. Ces dernières existent sous trois formes principales :

- le type copolarisé (type C), qui ne met en jeu que des photons de même état de polarisation ;
- le type orthogonal (type O), pour lequel les photons générés sont polarisés orthogonalement aux photons de pompe (équivalent du type I des cristaux biréfringents) ;
- le type mixte (type M) pour lequel les photons générés sont polarisés orthogonalement entre eux (équivalent du type II des cristaux biréfringents).

Tous les effets non-linéaires dans les fibres respectent la condition de conservation d'énergie et la condition de conservation de la quantité de mouvement (également appelée accord de phase), qui restreint les pulsations (ou longueurs d'onde) pouvant être générées. Il est possible d'obtenir des formules approchées simples pour déterminer l'accord de phase. La méthode de calcul de type “force brute” donne cependant de meilleurs résultats, sans pour autant requérir une puissance de calcul trop importante.

Les équations dérivées dans ce chapitre ont fait l'objet de nombreuses expériences ces dernières années dans notre laboratoire. Ces expériences sont développées au chapitre 6. En particulier,

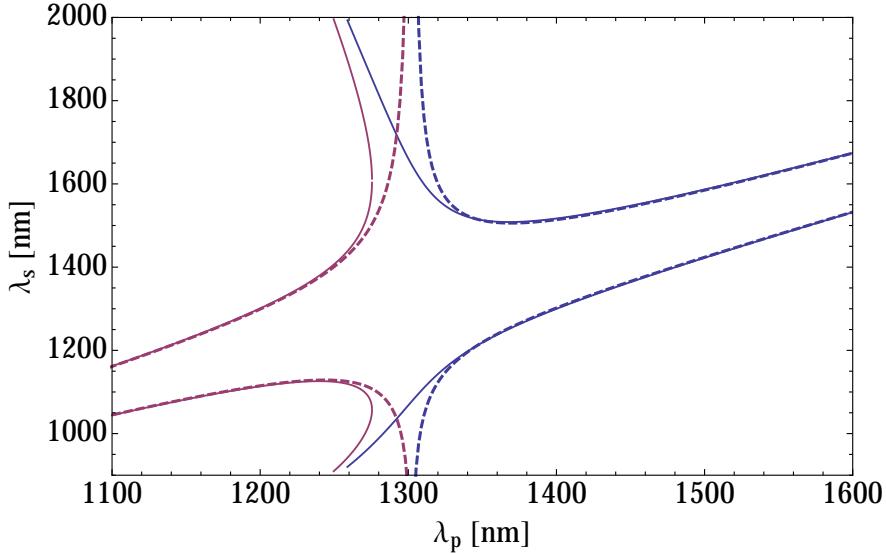


Figure 2.10 Calcul d'accords de phase pour une instabilité de modulation de type O dans la SMF-28™. Pour ce calcul,  $\gamma P = 10 \text{ m}^{-1}$  et  $\delta n = 10^{-5}$ . La courbe rouge correspond à une pompe sur l'axe lent, et la courbe bleue à une pompe sur l'axe rapide. Les lignes solides représentent le calcul “force brute”. Les lignes pointillées grasses représentent le calcul utilisant la formule approchée 2.67.

- la section 2.3.1 a fait l'objet de démonstrations de générations harmoniques dans les fibres effilées (voir la section 6.2) ;
- la section 2.3.3 a été mise en application pour la génération de signaux dans des fibres effilées torsadées (voir la section 6.1) ;
- les résultats de la section 2.3.3 sont au cœur de la source de photons intriqués en polarisation présentée à la section 6.4 ; cette réalisation exploite également les résultats de la section 2.4.2 pour la détermination des longueurs d'onde des signaux attendus.

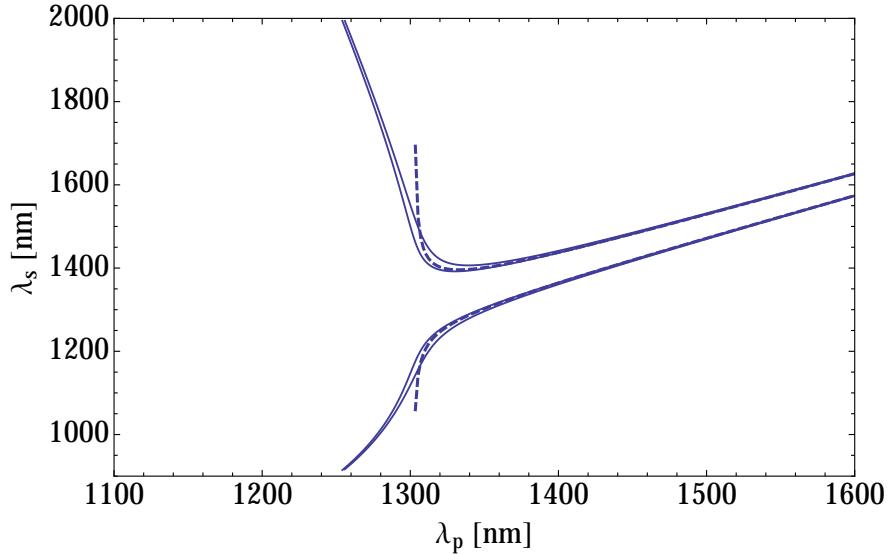


Figure 2.11 Calcul d'accords de phase pour une instabilité de modulation de type M dans la SMF-28<sup>TM</sup>. Pour ce calcul,  $\gamma P = 10 \text{ m}^{-1}$  et  $\delta n = 10^{-5}$  (faible biréfringence). Les lignes solides représentent le calcul “force brute”. Les lignes pointillées grasses représentent le calcul utilisant la formule approchée 2.71.

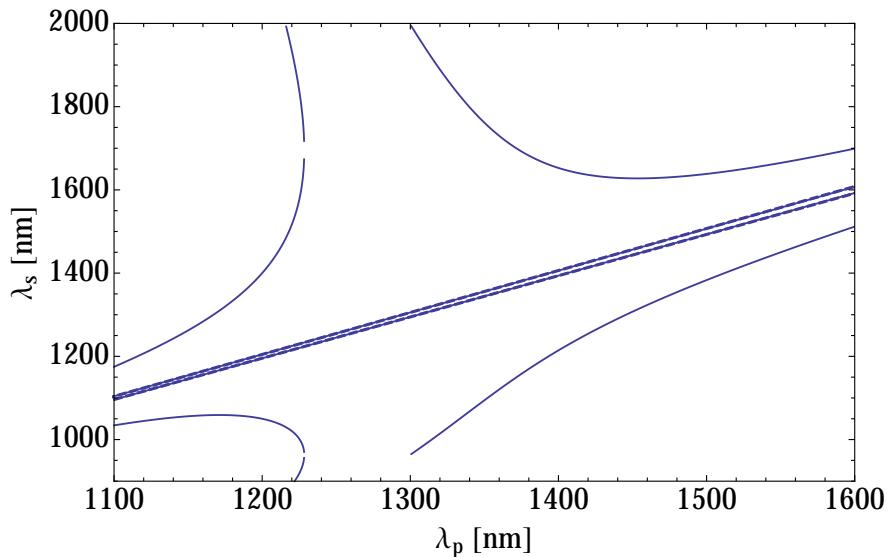


Figure 2.12 Calcul d'accords de phase pour une instabilité de modulation de type M dans la SMF-28<sup>TM</sup>. Pour ce calcul,  $\gamma P = 10 \text{ m}^{-1}$  et  $\delta n = 5 \times 10^{-4}$  (forte biréfringence). Les lignes solides représentent le calcul “force brute”. Les lignes pointillées grasses représentent le calcul utilisant la formule approchée 2.72. Elles se confondent avec la solution force brute pour la solution constante proche des longueurs d'onde de pompe.

## CHAPITRE 3

### LUMIÈRE QUANTIFIÉE

On ne peut aborder les sources non-classiques sans parler de quantification du flux lumineux. Les sources non-classiques sont avant tout des sources de photons, c'est-à-dire de quanta lumineux. Elles sont en général utilisées dans le régime de détection photon à photon. Il est donc nécessaire de les aborder dans le cadre général de l'optique quantique.

Il n'est pas question ici de reprendre l'ensemble des démonstrations canoniques de l'optique quantique. La littérature sur le sujet est à la fois vaste et variée. Elle comprend des ouvrages très théoriques comme Cohen-Tannoudji *et al.* (2001), très abordables comme Grynberg *et al.* (1997), et d'autres très spécialisés comme Hanamura *et al.* (2007). Certains ouvrages permettent d'aborder le sujet de manière très pratique (voir par exemple Walls et Milburn (2008), Bachor et Ralph (2004) et Loudon (2000)).

Ce chapitre aborde le sujet d'une manière différente de ce qui est en général présenté dans la littérature. Dans un premier temps, la théorie quantique est traitée de manière un peu originale. Dans une seconde partie, l'aspect purement statistique des expériences fondées sur des sources non-classiques et des détecteurs réalistes est abordé en minimisant le formalisme quantique, qui n'est pas toujours nécessaire à l'établissement des résultats importants.

### 3.1 Optique quantique

D'éminents physiciens comme Bohm n'accordent pas au photon le même statut que les particules massives en raison du fait “qu'il n'est pas possible de les détecter sans les détruire” (voir Bohm (1979)). Pour cette raison, ils arguent qu'il n'existe pas d'équation de Schrödinger du photon. Une expérience récente (Reiserer *et al.* (2013)) remet cependant en cause la prémissse de la destructivité de la détection. De plus, la théorie quantique des champs (voir par exemple Schwartz (2014)) met sur un pied d'égalité toutes les particules fondamentales, massives ou non. Il n'y a donc pas d'obstacle philosophique important à l'existence d'une équation de Schrödinger pour le photon.

Même si les équations de Maxwell ont déjà été considérées par certains comme l'équivalent de l'équation de Schrödinger, il n'existe pas, à notre connaissance, de preuve formelle publiée de cette identité. Nous montrons dans cette partie qu'elle est pourtant vérifiée de manière rigoureuse.

### 3.1.1 Équation de Schrödinger du photon

#### Dualités de représentation

La physique quantique est bâtie sur une double dualité : la dualité temps/énergie, et la dualité position/quantité de mouvement. On peut illustrer cet aspect de la physique en partant simplement des équations de la mécanique classique, soit la seconde loi de Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (3.1)$$

et l'équation d'évolution de l'énergie lors du mouvement d'une particule

$$dE = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.2)$$

En éliminant la force, on obtient simplement

$$dE dt = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.3)$$

qui suggère un lien commun entre énergie et temps d'une part, position et quantité de mouvement de l'autre.

La physique s'exprime au travers de fonctions de ces variables, qu'on peut donc voir comme des indices continus. Ces indices sont à leur tour associés à des vecteurs de bases. En effet, de la même manière qu'on peut caractériser un vecteur  $\mathbf{v}$  dans un espace doté d'une base discrète  $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}_i$  par ses projections sur les vecteurs de base, soit

$$\mathbf{v} = \sum_i a_i \bar{\mathbf{e}}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \equiv \{a_i\}_i, \quad (3.4)$$

on peut utiliser le même formalisme pour des fonctions de variables continues, soit

$$f \equiv \{f(x)\}_x, \quad (3.5)$$

Ces dualités sont une conséquence du fait que la même réalité physique peut être représentée dans des bases (ou “représentations”) différentes. La représentation physique la plus courante est  $\{\mathbf{r}, t\}$ , mais il en existe trois autres,  $\{\mathbf{r}, E\}$ ,  $\{\mathbf{p}, t\}$  et  $\{\mathbf{p}, E\}$ . Les changements de représentation sont formellement identifiés aux transformées

$$F(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{i \frac{E}{\hbar} t} \text{ et} \quad (3.6)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dE F(E) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (3.7)$$

d'une part, et

$$F(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \text{ et} \quad (3.8)$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{p} F(\mathbf{p}) e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \quad (3.9)$$

d'autre part. Les exponentielles complexes sont donc équivalentes aux éléments des matrices de changement de base. L'utilisation du même coefficient  $\hbar$  dans les deux changements de variable est justifiée par l'égalité 3.3. Ce coefficient a une dimension d'action (*J.s*). Nous avons le bénéfice du recul historique et pouvons donc l'identifier formellement à la constante de Planck réduite  $\hbar$ . Les changements de base ci-dessus sont donc les transformées de Fourier classiques reliant  $t$  et  $\omega$  d'une part,  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{k}$  d'autre part, avec  $E = \hbar\omega$  et  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . C'est bien sûr Louis de Broglie qui a le premier identifié ces relations dans sa thèse (de Broglie (1925)).

Les propriétés des transformées de Fourier permettent de donner des correspondances immédiates entre certaines opérations élémentaires. Ainsi,

- l'opérateur de différentiation  $\partial_t$  en représentation  $\{t\}$  devient la multiplication par  $-\frac{i}{\hbar} E$  en représentation  $\{E\}$  ;
- à l'inverse, l'opérateur de différentiation  $\partial_E$  en représentation  $\{E\}$  devient la multiplication par  $\frac{i}{\hbar} t$  en représentation  $\{t\}$  ;
- les opérateurs de différentiation  $\partial_{r_k}$  en représentation  $\{\mathbf{r}\}$  deviennent des multiplications par  $\frac{i}{\hbar} p_k$  en représentation  $\{\mathbf{p}\}$  ;
- à l'inverse, les opérateurs de différentiation  $\partial_{p_k}$  en représentation  $\{\mathbf{p}\}$  deviennent des multiplications par  $-\frac{i}{\hbar} r_k$  en représentation  $\{\mathbf{r}\}$ .

## Équations de dispersion

La description de la nature d'une particule en représentation  $\{\mathbf{r}, E\}$  peut se faire par l'intermédiaire de la relation de dispersion, qui relie l'énergie et la quantité de mouvement. C'est donc une relation qui s'écrit naturellement en représentation  $\{\mathbf{p}, E\}$ . Par exemple, une particule libre de masse  $m$  a pour relation de dispersion (non-relativiste)

$$E = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.10)$$

On peut très bien considérer les variables  $E$  et  $p^2$  de l'équation comme des opérateurs, et appliquer cette relation à une fonction  $\Psi$  quelconque en écrivant

$$E \Psi = \frac{p^2}{2m} \Psi. \quad (3.11)$$

Si on passe de la représentation  $\{\mathbf{p}, E\}$  à la représentation  $\{\mathbf{r}, t\}$ , la relation de dispersion devient

$$i\hbar \partial_t \Psi = -\frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2}{2m} \Psi, \quad (3.12)$$

qui n'est autre que l'équation de Schrödinger de la particule.

Pour un photon, la relation de dispersion s'écrit

$$E = p c. \quad (3.13)$$

On a tout de suite un petit problème, car  $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$  semble difficile à traduire en représentation  $\{\mathbf{r}\}$ . Nous verrons sous peu que le passage d'une représentation à l'autre est en fait possible, mais on peut commencer par essayer de se débarrasser du problème en écrivant

$$E^2 = p^2 c^2, \quad (3.14)$$

En représentation  $\{\mathbf{r}, t\}$ , cette relation appliquée à une fonction  $\Psi$  devient

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \Psi = -\hbar^2 c^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2 \Psi. \quad (3.15)$$

Rien n'empêche de considérer une fonction  $\Psi$  vectorielle, et on reconnaît alors l'équation d'onde dans le vide. Les  $\hbar$  s'éliminent en raison de la linéarité de la relation de dispersion.

De même, en représentation  $\{\mathbf{r}, E\}$ , on reconnaît l'équation de Helmholtz

$$E^2 \Psi = -\hbar^2 c^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2 \Psi, \quad (3.16)$$

après avoir identifié  $k^2 \equiv \frac{E^2}{\hbar^2 c^2}$ .

Ces relations sont intéressantes, mais il serait plus agréable de trouver un équivalent linéaire de l'équation 3.13 en représentation  $\{\mathbf{r}, t\}$ .

*A priori*, l'opérateur  $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$  en représentation  $\{\mathbf{p}\}$  devrait se traduire par l'opérateur  $\sqrt{-\hbar^2 (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)}$  en représentation  $\{\mathbf{r}\}$ . Malheureusement, la signification d'un tel opérateur est difficile à cerner.

En s'inspirant de Dirac (1928a) et Dirac (1928b), on cherche alors 3 opérateurs  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et

$\sigma_z$  tels que

$$(\sigma_x \partial_x + \sigma_y \partial_y + \sigma_z \partial_z)^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2. \quad (3.17)$$

Pour que l'égalité soit respectée, on vérifie que les opérateurs doivent vérifier les conditions d'anticommuation

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 \delta_{i,j}. \quad (3.18)$$

Sans surprise, les matrices de Pauli vérifient ces relations. Bialynicki-Birula (1994) les rejette comme candidates, car elles sont associées à des particules de spin  $1/2$  comme les neutrinos. Il cherche plutôt des opérateurs  $3 \times 3$  pour une particule de spin 1. Cependant, le photon est une particule de spin 1 particulière, sans masse. Il est généralement accepté que les deux seules projections du spin du photon sur un axe sont  $S_k = -\hbar$  et  $S_k = +\hbar$ , correspondant aux états de polarisation circulaires. La projection  $S_k = 0$  est interdite. En ce sens, il est plus naturel de considérer des matrices  $2 \times 2$  comme pour les particules de spin  $1/2$  qui ne possèdent que deux valeurs de projections du spin sur un axe.

L'équation de dispersion du photon en représentation  $\{\mathbf{r}, t\}$ , donc l'équation de Schrödinger du photon, s'écrit donc

$$i \hbar \partial_t \Psi = \pm i \hbar c (\sigma_x \partial_x + \sigma_y \partial_y + \sigma_z \partial_z) \Psi, \quad (3.19)$$

avec

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

les deux composantes représentant les amplitudes dans les deux polarisations circulaires.

En privilégiant la direction de propagation  $z$ , on écrit les matrices de Pauli sous la forme

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

l'équation 3.19 donne

$$\begin{aligned} \left( \partial_z \pm \frac{1}{c} \partial_t \right) \psi_1 &= (i \partial_y - \partial_x) \psi_2, \\ \left( \partial_z \pm \frac{1}{c} \partial_t \right) \psi_2 &= (\partial_x + i \partial_y) \psi_1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Les composantes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  doivent être indépendantes. Comme chaque équation comprend

de part et d'autre une fois  $\psi_1$  et une fois  $\psi_2$ , les équations deviennent

$$\left( \partial_z \pm \frac{1}{c} \partial_t \right) \psi_1 = (i \partial_y - \partial_x) \psi_2 = A, \quad (3.23a)$$

$$\left( \partial_z \pm \frac{1}{c} \partial_t \right) \psi_2 = (\partial_x + i \partial_y) \psi_1 = B. \quad (3.23b)$$

où  $A$  et  $B$  ne dépendent ni de  $\psi_1$ , ni de  $\psi_2$ . On peut sans doute interpréter ces constantes comme des termes de source.

Nous passons maintenant à un cadre moins général en posant  $A = B = 0$ . Si les constantes sont interprétées comme des termes de source, c'est l'équivalent de se placer dans le vide. Les équations 3.23 deviennent alors

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c} \partial_t \pm \partial_z \right) \psi_1 &= (\partial_x + i \partial_y) \psi_1 = 0, \\ \left( \frac{1}{c} \partial_t \pm \partial_z \right) \psi_2 &= (\partial_x - i \partial_y) \psi_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pour passer à une représentation plus classique, on considère les états de polarisation circulaires droit et gauche définis dans l'espace réel  $(x, y, z)$  par les vecteurs

$$\mathcal{E}_D = \frac{\psi_1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_D = \pm \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\psi_1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

et

$$\mathcal{E}_G = \frac{\psi_2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_G = \pm \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\psi_2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$\epsilon_0$  étant la permittivité du vide, et  $\mu_0$  sa perméabilité. Les signes  $\pm$  représentent la direction de propagation (dans les directions respectives  $\pm z$ ).

Les équations 3.24 sont alors équivalentes à la forme condensée bien connue

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathcal{E} &= -\mu_0 \partial_t \mathcal{H} \\ \nabla \times \mathcal{H} &= \epsilon_0 \partial_t \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

après utilisation de l'identité  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ .

L'équation de Schrödinger du photon (équation 3.19), même si elle semble être plus générale, mène bien de manière formelle et rigoureuse à deux des équations de Maxwell.

### 3.1.2 Commutateur fondamental

#### Commutateur RP

La section 3.1.1 rappelle que l'opérateur  $\hat{p}_k$  peut s'écrire en représentation  $\{\mathbf{r}\}$  sous la forme

$$\hat{p}_\kappa \equiv -i \hbar \partial_{r_\kappa}. \quad (3.28)$$

Cette identité découle de l'équation 3.9, elle-même justifiée par la relation 3.3.

De l'identité 3.28, on tire les relations de commutation dites "fondamentales"

$$\begin{aligned} [\hat{r}_\kappa, \hat{r}_\lambda] &= 0, \\ [\hat{p}_\kappa, \hat{p}_\lambda] &= 0, \\ [\hat{r}_\kappa, \hat{p}_\lambda] &= i \hbar \delta_{\kappa, \lambda}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ces commutateurs sont indépendants de la représentation. En effet, en représentation  $\{\mathbf{p}\}$ , la relation  $\hat{r}_\kappa \equiv i \hbar \partial_{p_\kappa}$  mène aux mêmes relations.

Les relations de commutation fondamentales sont donc une conséquence de la relation initiale 3.3, que l'on peut réécrire

$$dE = \dot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{p}, \quad (3.30)$$

ou encore

$$E = \int \dot{\mathbf{r}} \cdot d^3\mathbf{p} + V, \quad (3.31)$$

$V$  étant une constante d'intégration ne dépendant pas de  $\mathbf{p}$ .

#### Commutateur fonctionnel

Nous généralisons maintenant la formulation de la section précédente à des variables continues, en utilisant le formalisme des fonctionnelles (voir l'annexe A).

Supposons qu'on puisse écrire l'énergie d'un système sous la forme

$$E = \int d^3\mathbf{r} \left[ \int \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \cdot \delta^3 \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) + \mathcal{V} \right], \quad (3.32)$$

avec  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{\Pi}$  des fonctionnelles vectorielles et  $\mathcal{V}$  une fonctionnelle ne dépendant pas explicitement de  $\mathbf{\Pi}$ . Cela impliquerait une relation de la forme

$$dE dt = \langle \delta \mathbf{\Pi}, \delta \mathbf{A} \rangle, \quad (3.33)$$

où on utilise la notation de produit scalaire fonctionnel A.7. Cette relation généralise 3.3.

Cela implique une dualité entre les fonctionnelles  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{\Pi}$ , et des transformations de type Fourier

$$F(\mathbf{\Pi}) = C \int f(\mathbf{A}) e^{-\frac{i}{\hbar} \langle \mathbf{A}, \mathbf{\Pi} \rangle} \delta^3 \mathbf{A}, \quad (3.34)$$

$$f(\mathbf{A}) = C \int F(\mathbf{\Pi}) e^{\frac{i}{\hbar} \langle \mathbf{A}, \mathbf{\Pi} \rangle} \delta^3 \mathbf{\Pi}, \quad (3.35)$$

où  $C$  est une constante que nous ne chercherons pas à expliciter.

Par analogie, on obtient alors des commutateurs associés sous la forme

$$\begin{aligned} [\hat{A}_\kappa(\mathbf{r}), \hat{A}_\lambda(\mathbf{r}')] &= 0, \\ [\hat{\Pi}_\kappa(\mathbf{r}), \hat{\Pi}_\lambda(\mathbf{r}')] &= 0, \\ [\hat{A}_\kappa(\mathbf{r}), \hat{\Pi}_\lambda(\mathbf{r}')] &= i \hbar \delta_{\kappa, \lambda} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'existence de ces commutateurs découle uniquement de la forme 3.32 de l'énergie du système.

### Application au champ électromagnétique

Plaçons-nous dans l'espace vide et libre de sources. C'est l'équivalent, pour le champ électromagnétique, de choisir un potentiel scalaire constant sur tout l'espace, et cela fixe la jauge. Il s'agit bien sûr d'une construction de l'esprit, mais qui peut être obtenue approximativement dans l'espace réel si on considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide, loin de toute source.

On peut alors écrire les composantes du champ électromagnétique sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{A}}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

où  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur.

L'énergie du champ électromagnétique s'écrit (voir par exemple Jackson (2001))

$$E = \int d^3 \mathbf{r} \left( \frac{\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2 \mu_0} \right), \quad (3.38)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme 3.32 à condition de définir

$$\mathbf{\Pi} = -\epsilon_0 \mathbf{E} \quad (3.39)$$

et

$$\mathcal{V} = \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2 \mu_0}, \quad (3.40)$$

$\mathcal{V}$  ne dépendant donc pas de  $\mathbf{\Pi}$ .

On obtient alors les relations de commutation canoniques du champ électromagnétique sous la forme 3.36.

On peut aussi passer dans l'espace dual (espace des  $\mathbf{k}$ , plutôt que l'espace des  $\mathbf{r}$ ). Le théorème de Parseval assure qu'on a une relation de type 3.38 dans cet espace, soit

$$E = \int d^3 \mathbf{k} \left( \frac{\epsilon_0 |\mathcal{E}|^2}{2} + \frac{|\mathcal{B}|^2}{2 \mu_0} \right), \quad (3.41)$$

ce qui permet d'obtenir les relations de commutation

$$\begin{aligned} [\hat{A}_\kappa(\mathbf{k}), \hat{A}_\lambda(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [\hat{\Pi}_\kappa(\mathbf{k}), \hat{\Pi}_\lambda(\mathbf{k}')] &= 0, \\ [\hat{A}_\kappa(\mathbf{k}), \hat{\Pi}_\lambda(\mathbf{k}')] &= i \hbar \delta_{\kappa, \lambda} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ces commutateurs sont obtenus par une approche lagrangienne dans Cohen-Tannoudji *et al.* (2001). La suite du développement ne contient aucun résultat nouveau et est une reprise de ce même ouvrage.

La première quantification consiste à discréteriser l'espace des quantités de mouvement. On intègre alors la valeur de  $\mathbf{k}$  discréterisé dans l'indice  $\kappa$ , et on pose

$$\hat{a}_\kappa = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2 \hbar \omega_\kappa}} \left[ \omega_\kappa \hat{A}_\kappa + \frac{i}{\epsilon_0} \hat{\Pi}_\kappa \right], \quad (3.43a)$$

$$\hat{a}_\kappa^\dagger = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2 \hbar \omega_\kappa}} \left[ \omega_\kappa \hat{A}_\kappa^\dagger - \frac{i}{\epsilon_0} \hat{\Pi}_\kappa^\dagger \right], \quad (3.43b)$$

$\omega_\kappa = |\mathbf{k}| c$  étant la pulsation associée au mode  $\kappa$ .

Les relations de commutation 3.42 mènent alors directement aux commutateurs plus généralement utilisés, à savoir

$$\begin{aligned} [\hat{a}_\kappa, \hat{a}_\lambda] &= 0, \\ [\hat{a}_\kappa^\dagger, \hat{a}_\lambda^\dagger] &= 0, \\ [\hat{a}_\kappa, \hat{a}_\lambda^\dagger] &= \delta_{\kappa, \lambda}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

L'Hamiltonien du champ s'écrit alors sous la forme

$$H = \sum_{\kappa} \frac{\hbar\omega_{\kappa}}{2} (\hat{a}_{\kappa}^{\dagger} \hat{a}_{\kappa} + \hat{a}_{\kappa} \hat{a}_{\kappa}^{\dagger}) = \sum_{\kappa} \hbar\omega_{\kappa} \left( \hat{a}_{\kappa}^{\dagger} \hat{a}_{\kappa} + \frac{1}{2} \right). \quad (3.45)$$

## Seconde quantification

La seconde quantification découle directement des commutateurs 3.44. Nous donnons ici un aperçu rapide du raisonnement classique qui y mène (voir par exemple Basdevant et Dalibard (2005)). Cette partie ne contient aucun résultat neuf, mais il est utile de rappeler qu'il suffit de justifier les relations de commutation, ce que nous avons fait dans la partie précédente, pour obtenir la quantification en énergie du champ, et donc les photons.

On définit l'opérateur “nombre de photons”  $\hat{N}_k = \hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_k$  qui intervient dans l'Hamiltonien du champ. On considère  $n_k$  une valeur propre de  $\hat{N}_k$ , associée au vecteur propre normalisé  $|n_k\rangle$ . On a alors

1.  $n_k = n_k \langle n_k | n_k \rangle = \langle n_k | \hat{N}_k | n_k \rangle = \langle n_k | \hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_k | n_k \rangle = |\hat{a}_k |n_k\rangle|^2$ . Les valeurs propres de  $\hat{N}_k$  sont donc des réels positifs. De plus, 0 est une valeur propre associée au vecteur propre  $|0_k\rangle$  si et seulement si  $\hat{a}_k |0_k\rangle$  est le vecteur nul.
2.  $\hat{N}_k (\hat{a}_k |n_k\rangle) = (\hat{a} \hat{N} - \hat{a}) |n_k\rangle = (n_k - 1) (\hat{a}_k |n_k\rangle)$ , en utilisant les relations de commutation 3.44. Donc  $\hat{a}_k |n_k\rangle$  est soit un vecteur propre de  $\hat{N}_k$  associé à la valeur propre  $(n_k - 1)$ , soit le vecteur nul.

Ces deux propriétés sont suffisantes pour montrer que les valeurs propres de  $\hat{N}_k$  sont les entiers naturels. En effet, la suite des  $\{\hat{a}_k^i |n_k\rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de vecteurs propres de  $\hat{N}$  associés aux valeurs propres  $\{n_k - i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Cette suite doit s'arrêter quelque part puisque les valeurs propres de  $\hat{N}$  sont positives. On définit donc  $i_{\max}$  la plus grande valeur de  $i$ , associée à la valeur propre  $n_k - i_{\max}$  et au vecteur propre  $|n_k - i_{\max}\rangle$ . Mais on sait que  $\hat{a}_k |n_k - i_{\max}\rangle$  n'est pas un vecteur propre de  $\hat{N}$ . C'est donc le vecteur nul, ce qui implique que  $n_k - i_{\max} = 0$ .

## 3.2 Traitement statistique de la lumière quantifiée

La section 3.1 justifie l'existence de quanta de lumière, les photons. Dans cette partie, nous nous intéressons aux statistiques de détection des photons un par un. Ce traitement constitue le cœur des méthodes d'évaluation des sources non-classiques.

Le cadre de cette section est celui du monde imparfait dans lequel nous vivons. Nous devons donc prendre en compte toutes les imperfections de l'expérience, à savoir les pertes et les sources de bruit.

Le processus de détection classique lui-même est une source d'imperfections. Il consiste à utiliser l'énergie des photons incidents pour faire passer des électrons d'un état lié (la bande de valence dans les semi-conducteurs) à un état libre (par l'effet photo-électrique dans un métal) ou délocalisé (la bande de conduction dans les semi-conducteurs). Les électrons ainsi libérés sont en général multipliés par un mécanisme d'amplification, et le courant ainsi généré est détecté par un circuit approprié. Ce processus à étapes multiples souffre bien entendu d'imperfections. On note en particulier

- une efficacité quantique (nombre d'électrons “primaires” générés par photon) inférieure à l'unité, ce qui revient à une perte supplémentaire ;
- la possibilité de déclencher un courant macroscopique, au travers du mécanisme d'amplification, à partir de fluctuations thermiques dans le matériau ; il est donc possible d'observer un courant en l'absence de photons ; on utilise le terme de “comptes sombres” pour cette source de bruit supplémentaire.

Dans cette section, nous traitons deux cas de sources non-classiques : les sources de photons annoncés et les sources de photons intriqués en polarisation. Pour chaque cas, nous présentons un outil de caractérisation qui peut être estimé *a priori* en fonction des paramètres physiques du système, et qui permet de déterminer le caractère non-classique de la source. Pour les sources de photons annoncés (section 3.2.2), il s'agit du coefficient de cohérence d'ordre 2, le  $g^{(2)}(0)$  ; pour les sources de photons intriqués en polarisation (section 3.2.3), il s'agit du paramètre  $S$  des inégalités de Bell-CHSH.

### 3.2.1 Statistique de la génération de photons simultanés

Avant de parler de sources réalistes, nous développons un modèle extrêmement simple de l'interaction non-linéaire dans le cadre quantique. Ce modèle est fondé sur une expression phénoménologique de l'Hamiltonien d'interaction et sur le principe de correspondance de Bohr. On considère donc une instabilité de modulation (voir le chapitre 2) dont les processus quantiques sont illustrés sur la Fig. 3.1.

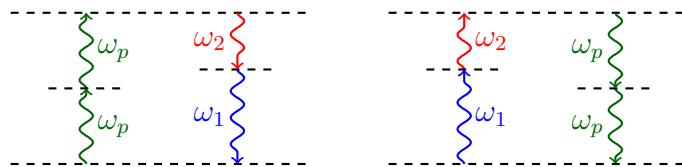


Figure 3.1 Représentation quantique d'une instabilité de modulation à pompe dégénérée. Sur la figure de gauche est représenté le processus consistant en la disparition de deux photons de pompe au profit de deux photons signaux situés de part et d'autre de la pompe. Sur la figure de droite, le processus inverse.

La pompe est considérée classique. On la représente donc par son amplitude complexe  $a_p = \sqrt{P} e^{-i\omega_p t}$  et on postule un Hamiltonien d'interaction de la forme

$$\hat{H}_i = \kappa a_p^2 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \kappa^* a_p^{*2} \hat{a}_1 \hat{a}_2, \quad (3.46)$$

l'opérateur  $\hat{a}^\dagger$  étant associé à la création d'un photon, et l'opérateur  $\hat{a}$  à sa destruction. Dans cette expression,  $\kappa$  est une constante de couplage. L'Hamiltonien exprime le fait que les deux modes de signaux sont créés ou annihilés simultanément. La présence du carré de l'amplitude de pompe montre que deux photons de pompe sont impliqués dans l'opération.

L'Hamiltonien total du système est donc

$$\hat{H} = \hbar\omega_1 \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left( \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{1}{2} \right) + \kappa P e^{-2i\omega_p t} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \kappa^* P e^{2i\omega_p t} \hat{a}_1 \hat{a}_2. \quad (3.47)$$

Du point de vue d'Heisenberg, ce sont les opérateurs qui varient dans le temps (voir par exemple Cohen-Tannoudji *et al.* (1998)). L'évolution des opérateurs  $\hat{a}_1$  et  $\hat{a}_2^\dagger$  est alors

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{a}_1 &= [\hat{a}_1, \hat{H}] = \hbar\omega_1 \hat{a}_1 + \kappa P e^{-2i\omega_p t} \hat{a}_2^\dagger, \\ i\hbar \frac{d}{dt} \hat{a}_2^\dagger &= [\hat{a}_2^\dagger, \hat{H}] = -\hbar\omega_2 \hat{a}_2^\dagger - \kappa^* P e^{+2i\omega_p t} \hat{a}_1, \end{aligned} \quad (3.48)$$

après avoir utilisé les relations de commutation canoniques. Dans ces équations, on a la conservation d'énergie  $2\omega_p = \omega_1 + \omega_2$ .

En posant  $\hat{b}_1 = \hat{a}_1 e^{i\omega_1 t}$  et  $\hat{b}_2^\dagger = \hat{a}_2^\dagger e^{-i\omega_2 t}$ , le système se simplifie pour devenir

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\frac{\kappa}{\hbar} P \\ i\frac{\kappa^*}{\hbar} P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2^\dagger \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

dont les solutions sont

$$\begin{aligned} \hat{b}_1(t) &= \hat{b}_1(0) \cosh \left( \frac{|\kappa| P t}{\hbar} \right) - i \frac{\kappa}{|\kappa|} \hat{b}_2^\dagger(0) \sinh \left( \frac{|\kappa| P t}{\hbar} \right), \\ \hat{b}_2^\dagger(t) &= \hat{b}_2^\dagger(0) \cosh \left( \frac{|\kappa| P t}{\hbar} \right) + i \frac{\kappa^*}{|\kappa|} \hat{b}_1(0) \sinh \left( \frac{|\kappa| P t}{\hbar} \right). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Si l'état initial du premier mode est le vide, le nombre moyen de photons au temps  $t$  est

donné par

$$\begin{aligned}\langle N_1(t) \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_1^\dagger(t) \hat{a}_1(t) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2 \left( \frac{|\kappa| P t}{\hbar} \right),\end{aligned}\tag{3.51}$$

après avoir utilisé les relations de commutation canoniques.

Le principe de correspondance implique que cette expression doit correspondre, pour  $N_1$  grand, au résultat classique. Il est donc nécessaire d'avoir

$$\frac{|\kappa| P t}{\hbar} \equiv \Gamma P z,\tag{3.52}$$

pour  $z = v_g t$ , où  $v_g$  est la vitesse de groupe dans la fibre. On doit donc avoir

$$|\kappa| = \hbar \Gamma v_g,\tag{3.53}$$

ce qui permet d'écrire

$$\langle N_1(z) \rangle = \sinh^2 (\Gamma P z),\tag{3.54}$$

la même équation pouvant être dérivée pour  $\langle N_2(z) \rangle$ .

Notons au passage que ce sont les relations de commutation canoniques qui permettent d'obtenir un nombre de photons moyen non nul à partir du vide. La dérivation classique ne permet pas d'obtenir ce résultat. Ce sont donc les fluctuations quantiques du vide qui permettent aux signaux d'émerger.

L'espérance du carré du nombre de photons à  $z$  donné est alors

$$\begin{aligned}\langle N_1^2(z) \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_1^\dagger(z) \hat{a}_1(z) \hat{a}_1^\dagger(z) \hat{a}_1(z) | 0 \rangle \\ &= \sinh^2 (\Gamma P z) \cosh^2 (\Gamma P z) + \sinh^4 (\Gamma P z),\end{aligned}\tag{3.55}$$

après utilisation des relations de commutation canoniques.

On a donc

$$\begin{aligned}(\Delta N_1(z))^2 &\equiv \langle N_1^2(z) \rangle - \langle N_1(z) \rangle^2 \\ &= \sinh^2 (\Gamma P z) \cosh^2 (\Gamma P z) \\ &= \langle N_1(z) \rangle + \langle N_1(z) \rangle^2,\end{aligned}\tag{3.56}$$

résultat caractéristique de la distribution statistique dite “thermique” (voir par exemple Lou-

don (2000)), définie par

$$p(N) = \frac{1}{\langle N \rangle + 1} \left( \frac{\langle N \rangle}{\langle N \rangle + 1} \right)^N. \quad (3.57)$$

La statistique des paires de photons est donc *a priori* différente de la statistique poissonienne d'une source laser classique, définie par

$$p(N) = e^{-\langle N \rangle} \frac{\langle N \rangle^N}{N!}, \quad (3.58)$$

pour laquelle on a

$$(\Delta N)^2 = \langle N \rangle. \quad (3.59)$$

La statistique poissonienne est la statistique de référence. Les distributions vérifiant  $(\Delta N)^2 > \langle N \rangle$ , comme la distribution thermique, sont dites "surpoissonniennes", alors que les distributions qui vérifient  $(\Delta N)^2 < \langle N \rangle$  sont dites sous-poissonniennes.

Dans un certain nombre de cas pratiques, le nombre de modes accessibles aux signaux est relativement important. La statistique globale correspond alors à la somme d'un grand nombre de processus thermiques, et elle redevient poissonienne (voir l'annexe C).

Il existe donc principalement deux types de sources :

- les sources modalement très filtrées qui possèdent une statistique thermique ;
- les sources modalement peu filtrées qui possèdent une statistique poissonienne.

Les probabilités associées aux statistiques thermique et poissonienne sont cependant très proches à faible nombre de photons moyens. Les différences sur le plan expérimental sont alors négligeables.

### 3.2.2 Sources de photons annoncés

#### Statistiques d'arrivées de photons

Le nombre de photons détectés dans un intervalle de temps donné par un détecteur approprié est une variable aléatoire. Comme nous l'avons vu à la section précédente, la statistique associée peut être de différentes natures. Les sources classiques de type laser ont une statistique poissonienne. On classe en général les statistiques en trois catégories, soit

- la statistique poissonienne, pour laquelle la variance est égale à la moyenne ;
- les statistiques sur-poissonniennes, pour lesquelles la variance est supérieure à la moyenne ;
- les statistiques sous-poissonniennes, pour lesquelles la variance est inférieure à la moyenne.

Ces trois catégories correspondent à des niveaux de coalescence ("bunching" en anglais) variés pour les photons. Les photons possédant une statistique sur-poissonienne ont tendance à coalescer, c'est-à-dire à arriver par paquets, alors que les photons suivant une statistique

sous-poissonienne ont tendance à arriver à intervalles plus réguliers, voire un par un (voir par exemple Loudon (2000)).

La statistique thermique vue à la section précédente est un exemple de statistique sur-poissonienne. Ce type de statistique favorisant l'arrivée des photons par paquets est rencontrée régulièrement dans la nature (c'est le cas par exemple des photons issus d'ampoules à incandescence classiques). Par contre, les sources sous-poissonniennes n'existent pas naturellement. Il est pourtant facile d'imaginer qu'elles puissent avoir un intérêt, par exemple dans la transmission d'information. Un ordinateur, par exemple, est construit sur un flot de données binaires constant, rythmé par une horloge interne. La prédictibilité d'arrivée d'un bit est indispensable à la bonne gestion des données.

### Source de photons annoncés

Il est possible de créer une source sous-poissonienne à partir d'un processus de génération de paires de photons simultanés (par exemple les instabilités de modulation étudiées à la section 2.3.3). L'idée est d'utiliser un des photons comme un signal d'annonce pour le second photon, suivant le schéma de la Fig. 3.2.

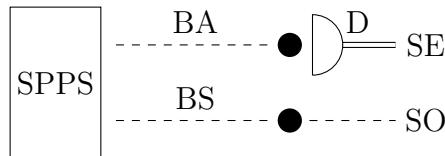


Figure 3.2 Schéma de principe d'une source de photons annoncés. SPPS : source de paires de photons simultanés ; BA : branche d'annonce ; BS : branche du signal ; D : détecteur de photons ; SE : signal de sortie électrique ; SO : signal de sortie optique. D'après Virally *et al.* (2010b).

Même si une source de photons annoncés ne permet pas de générer des photons à un rythme constant, elle possède un caractère sous-poissonien, comme nous le montrerons par la suite. Elle est potentiellement utile dans la transmission d'information quantique grâce au fait que l'arrivée des photons est prédictible.

### Mesure de $g^{(2)}$

Le caractère sous-poissonien d'une source peut être mesuré par une expérience relativement simple, décrite initialement dans Hanbury Brown et Twiss (1957) et Hanbury Brown et Twiss (1958). L'expérience consiste à placer une lame séparatrice 50/50 dans le flux lumineux. Une telle lame sépare le flux en deux parties de même intensité. Deux détecteurs mesurent

ensuite l'arrivée du flux de photon dans chaque branche après la lame. La quantité mesurée finalement est la probabilité de coïncidence entre les “clics” des deux détecteurs. Pour une source sub-poissonienne, dans un intervalle de temps suffisamment court, il doit y avoir une probabilité importante de n'avoir au plus qu'un photon à l'entrée de la lame. La vision classique des choses, qui ne reconnaît pas le caractère quantifié de la lumière, autorise ce photon à être scindé en deux parties sur la lame, ce qui permet aux deux détecteurs d'enregistrer des “clics” simultanés. Dans le cadre quantique, le photon ne peut être détecté que sur une seule branche, ce qui réduit la mesure de coïncidences.

Il est également possible de mesurer des coïncidences entre les deux branches à des temps décalés. Le taux de coïncidence est donc représenté par une fonction du décalage temporel  $\tau$  choisi et de la durée  $T$  des fenêtres de détection, sous la forme

$$g^{(2)}(\tau, T) = \frac{p_c(\tau, T)}{p_1(\tau, T) p_2(\tau, T)}, \quad (3.60)$$

où  $p_1(T)$  est la probabilité d'observer un “clic” sur le détecteur 1 dans un intervalle de temps de durée  $T$ ,  $p_2(T)$  la probabilité d'observer un “clic” sur le détecteur 2 dans un intervalle de temps de durée  $T$ , et  $p_c(\tau, T)$  la probabilité d'observer une coïncidence, c'est-à-dire à la fois un “clic” sur le détecteur 1 et un “clic” sur le détecteur 2, dans deux intervalles de temps de durée  $T$  séparés par le temps  $\tau$ .

Dans une expérience réelle, les probabilités sont remplacées par leurs estimateurs, c'est-à-dire le nombre moyen d'événements enregistrés dans chaque catégorie. On a donc

$$g^{(2)}(\tau, T) = \frac{\langle N_c(\tau) \rangle_T}{\langle N_1(\tau) \rangle_T \langle N_2(\tau) \rangle_T}, \quad (3.61)$$

où  $\langle \square \rangle_T$  représente le nombre moyen d'événements par intervalle, mesuré sur un grand nombre d'intervalles de temps  $T$ .

Il est tentant de penser que si le temps  $T$  tend vers 0, le  $g^{(2)}$  diminue naturellement, quelle que soit la nature de la source. Il n'en est rien. La coalescence des photons est un phénomène têtu. Pour les sources poissonniennes, on peut montrer que  $g^{(2)}(0, T) = 1$  pour tout  $T$ . De même  $g^{(2)}(0, T) > 1$  pour tout  $T$  pour les sources sur-poissonniennes (voir par exemple Loudon (2000)). Seules les sources sous-poissonniennes ont un  $g^{(2)}(0, T)$  inférieur à l'unité. La mesure de  $g^{(2)}(0, T)$  est donc un bon moyen de déterminer le caractère sous-poissonien (et donc non-classique) d'une source.

## Prise en compte des imperfections expérimentales

Nous développons dans cette partie le formalisme qui permet de prédire le caractère sous-poissonien d'une source de photons annoncés en fonction de ses paramètres physiques (pertes et bruit). Nous évitons tout recours au formalisme quantique pour ne fonder l'analyse que sur des considérations statistiques. Ces dernières sont suffisantes pour modéliser toutes les mesures physiques utiles.

La source de photons annoncés et son montage de caractérisation sont illustrés sur la Fig. 3.3. Ensemble, ils comprennent :

1. Une source de paires de photons simultanés, associée à la probabilité  $P_n$  de produire  $n$  paires dans une fenêtre de détection de longueur  $T$ .
2. Une branche d'annonce, d'efficacité quantique totale  $\eta_a$ , incluant l'efficacité du détecteur. Le bruit total dans la branche est caractérisé par la probabilité  $d_a$  d'observer, dans une fenêtre de détection de la branche, un "clic" dû au bruit ou aux comptes sombres du détecteur.
3. Une branche signal dans laquelle est placée un montage de caractérisation de type Hanbury Brown et Twiss (HBT). Ce montage comprend une lame séparatrice associée à la probabilité  $t$  de voir un photon incident transmis, et la probabilité  $r$  de voir un photon réfléchi (avec  $t + r = 1$ ). La branche signal est donc scindée en deux parties, soit
  - (a) la branche de transmission de la lame séparatrice, dans laquelle on place un premier détecteur. L'efficacité quantique totale de cette branche (incluant l'efficacité du détecteur) est notée  $\eta_t$  (la probabilité  $t$  définie ci-dessus est absorbée dans  $\eta_t$ ). Le bruit total dans la branche est caractérisé par la probabilité  $d_t$  d'observer, dans une fenêtre de détection de la branche, un "clic" dû au bruit ou aux comptes sombres du détecteur.
  - (b) la branche de réflexion de la lame séparatrice, dans laquelle on place un second détecteur. L'efficacité quantique totale de cette branche (incluant l'efficacité du détecteur) est notée  $\eta_r$  (la probabilité  $r$  définie ci-dessus est absorbée dans  $\eta_r$ ). Le bruit total dans la branche est caractérisé par la probabilité  $d_r$  d'observer, dans une fenêtre de détection de la branche, un "clic" dû au bruit ou aux comptes sombres du détecteur.

Afin d'éviter d'alourdir les calculs, on note par ailleurs dans toute la suite de ce chapitre  $\bar{x} = 1 - x$  pour toute probabilité. Cette notation est également utilisée pour noter le caractère orthonormé d'une série de vecteurs, mais il ne peut ici y avoir aucune ambiguïté sur sa signification.

Toutes les quantités physiques énumérées ci-dessus sont en principe mesurables indépendamment de l'expérience elle-même.

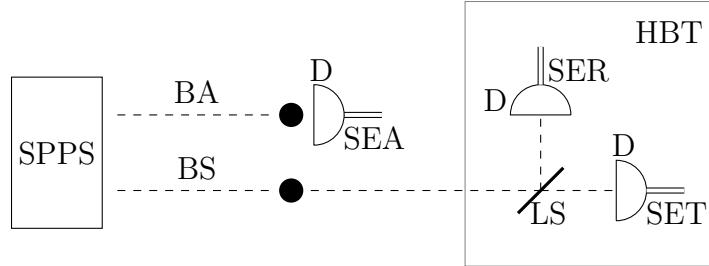


Figure 3.3 Schéma de principe d'une source de photons annoncés couplée à un montage de caractérisation de type Hanbury Brown et Twiss (HBT). SPPS : source de paires de photons simultanés ; BA : branche d'annonce ; BS : branche du signal ; D : détecteur de photons ; SEA : signal de sortie électrique d'annonce ; LS : lame séparatrice ; SET : signal de sortie électrique de la branche de transmission ; SER : signal de sortie électrique de la branche de réflexion.

Les conditions de l'expérience sont les suivantes :

- L'ouverture d'une fenêtre de détection de longueur  $T$  sur les branches de transmission et de réflexion de la lame séparatrice est conditionnée à la présence d'un "clic" sur le détecteur placé dans la branche d'annonce.
- Les détecteurs ne peuvent pas distinguer entre un ou plusieurs "clics" à l'intérieur d'une fenêtre de détection.
- L'expérience se déroule sur  $N$  fenêtres de détection de la branche d'annonce.
- On se place à  $\tau = 0$ , c'est-à-dire que les délais électriques et optiques sont tels qu'on observe des détections de photons provenant des mêmes paires.

L'espérance du nombre de "clics" enregistrés sur le détecteur de la branche d'annonce est

$$\begin{aligned} \langle N_a \rangle &= N \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} P_n (1 - \bar{\eta}_a^n) \bar{d}_a + d_a \right] \\ &= N \sum_{n=0}^{+\infty} P_n (1 - \bar{d}_a \bar{\eta}_a^n). \end{aligned} \tag{3.62}$$

L'espérance du nombre de "clics" enregistrés sur le détecteur de la branche de transmission

de la lame séparatrice est

$$\begin{aligned}\langle N_t \rangle &= N \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} P_n \left[ (1 - \bar{\eta}_a^n) \bar{d}_a + d_a \right] \left[ (1 - \bar{\eta}_t^n) \bar{d}_t + d_t \right] \right\} \\ &= N \sum_{n=0}^{+\infty} P_n (1 - \bar{d}_a \bar{\eta}_a^n) (1 - \bar{d}_t \bar{\eta}_t^n).\end{aligned}\quad (3.63)$$

De même, l'espérance du nombre de “clics” enregistrés sur le détecteur de la branche de réflexion de la lame séparatrice est

$$\langle N_r \rangle = N \sum_{n=0}^{+\infty} P_n (1 - \bar{d}_a \bar{\eta}_a^n) (1 - \bar{d}_r \bar{\eta}_r^n), \quad (3.64)$$

et l'espérance du nombre de coïncidences enregistrées entre les deux détecteurs situés en aval de la lame séparatrice est

$$\langle N_c \rangle = N \sum_{n=0}^{+\infty} P_n (1 - \bar{d}_a \bar{\eta}_a^n) [1 - \bar{d}_t \bar{\eta}_t^n - \bar{d}_r \bar{\eta}_r^n - \bar{d}_t \bar{d}_r (1 - \eta_t - \eta_r)^n]. \quad (3.65)$$

L'estimateur de la probabilité d'avoir un “clic” sur la branche de transmission sachant qu'un clic a eu lieu sur la branche d'annonce est  $\frac{\langle N_t \rangle}{\langle N_a \rangle}$ . De même, l'estimateur de la probabilité d'avoir un “clic” sur la branche de réflexion sachant qu'un clic a eu lieu sur la branche d'annonce est  $\frac{\langle N_r \rangle}{\langle N_a \rangle}$ , et l'estimateur de la probabilité de coïncidence sachant qu'un clic a eu lieu sur la branche d'annonce est  $\frac{\langle N_c \rangle}{\langle N_a \rangle}$ .

D'après la formule 3.61, l'estimateur du  $g^{(2)}(0, T)$  est alors

$$g^{(2)}(0, T) = \frac{\langle N_a \rangle \langle N_c \rangle}{\langle N_t \rangle \langle N_r \rangle}. \quad (3.66)$$

Cet estimateur est indépendant de  $N$ , comme on peut s'y attendre.

Si la probabilité  $P_n$  est thermique, de moyenne  $\mu$ , les formules 3.62, 3.63, 3.64 et 3.65 deviennent respectivement

$$\frac{\langle N_a \rangle}{N} = 1 - \frac{\bar{d}_a}{1 + \mu \eta_a}, \quad (3.67)$$

$$\frac{\langle N_t \rangle}{N} = 1 - \frac{\bar{d}_a}{1 + \mu \eta_a} - \frac{\bar{d}_t}{1 + \mu \eta_t} + \frac{\bar{d}_a \bar{d}_t}{1 + \mu (1 - \bar{\eta}_a \bar{\eta}_t)}, \quad (3.68)$$

$$\frac{\langle N_r \rangle}{N} = 1 - \frac{\bar{d}_a}{1 + \mu \eta_a} - \frac{\bar{d}_r}{1 + \mu \eta_r} + \frac{\bar{d}_a \bar{d}_r}{1 + \mu (1 - \bar{\eta}_a \bar{\eta}_r)}, \quad (3.69)$$

$$\frac{\langle N_c \rangle}{N} = 1 - \frac{\bar{d}_a}{1 + \mu \eta_a} - \frac{\bar{d}_t}{1 + \mu \eta_t} - \frac{\bar{d}_r}{1 + \mu \eta_r} + \frac{\bar{d}_a \bar{d}_t}{1 + \mu (1 - \bar{\eta}_a \bar{\eta}_t)} + \frac{\bar{d}_a \bar{d}_r}{1 + \mu (1 - \bar{\eta}_a \bar{\eta}_r)} + \frac{\bar{d}_t \bar{d}_r}{1 + \mu (\eta_t + \eta_r)} - \frac{\bar{d}_a \bar{d}_t \bar{d}_r}{1 + \mu [1 - \bar{\eta}_a (1 - \eta_t - \eta_r)]}. \quad (3.70)$$

Dans le cas où la probabilité  $P_n$  est poissonienne, de moyenne  $\mu$ , les formules deviennent

$$\frac{\langle N_a \rangle}{N} = 1 - \bar{d}_a e^{-\mu \eta_a}, \quad (3.71)$$

$$\frac{\langle N_t \rangle}{N} = 1 - \bar{d}_a e^{-\mu \eta_a} - \bar{d}_t e^{-\mu \eta_t} + \bar{d}_a \bar{d}_t e^{-\mu (1 - \bar{\eta}_a \bar{\eta}_t)}, \quad (3.72)$$

$$\frac{\langle N_r \rangle}{N} = 1 - \bar{d}_a e^{-\mu \eta_a} - \bar{d}_r e^{-\mu \eta_r} + \bar{d}_a \bar{d}_r e^{-\mu (1 - \bar{\eta}_a \bar{\eta}_r)}, \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\langle N_c \rangle}{N} = 1 - \bar{d}_a e^{-\mu \eta_a} - \bar{d}_t e^{-\mu \eta_t} - \bar{d}_r e^{-\mu \eta_r} + \bar{d}_a \bar{d}_t e^{-\mu (1 - \bar{\eta}_a \bar{\eta}_t)} + \bar{d}_a \bar{d}_r e^{-\mu (1 - \bar{\eta}_a \bar{\eta}_r)} \\ + \bar{d}_t \bar{d}_r e^{-\mu (\eta_t + \eta_r)} - \bar{d}_a \bar{d}_t \bar{d}_r e^{-\mu [1 - \bar{\eta}_a (1 - \eta_t - \eta_r)]}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

L'ensemble de ces formules est suffisant pour prédire les caractéristiques d'une source réelle en fonction des paramètres physiques mesurés ou attendus. Slater *et al.* (2010) montrent un exemple de réalisation et de caractérisation d'une source réelle, utilisant les équations ci-dessus. D'autre part, Virally *et al.* (2010b) montrent comment utiliser ces résultats pour améliorer les performances d'une source de photons annoncés. Il y est démontré, en particulier, que le filtrage (spectral, temporel, etc...) de la ligne d'annonce est primordial.

### 3.2.3 Sources de photons intriqués en polarisation

#### Non-localité de la physique

L'intrication est un phénomène qui va au-delà de la simple quantification de l'énergie du champ électromagnétique. Il s'agit d'une corrélation forte entre certains degrés de libertés de ce qui peut apparaître de premier abord comme plusieurs particules. Mais il est plus juste de considérer ces particules intriquées comme un seul système physique, localisable en deux endroits différents. Pour le champ électromagnétique, nous utiliserons donc dans la suite le terme "biphoton".

L'aspect non-local de la physique a été un sujet de débats au cours du XX<sup>ème</sup> siècle, depuis la parution du très célèbre article Einstein *et al.* (1935). Les auteurs de l'article ne pouvant se résoudre à la non-localité, ils plaident plutôt pour l'existence de variables cachées partagées par les particules au moment de leur création commune. Pour eux, les résultats de toutes

les mesures possibles sur les particules sont prédéterminés et codés dans ces variables, inaccessibles à l'expérience. L'existence de telles variables ferait de la mécanique quantique une théorie incomplète. Fort heureusement pour cette dernière, Bell (1964) décrit une expérience permettant de tester l'hypothèse des variables cachées. Il est généralement accepté que la première réalisation concluante de cette expérience est décrite dans Aspect *et al.* (1982). Les résultats montrent que l'hypothèse des variables cachées est à rejeter. Il reste à accepter que la physique n'est pas locale, ce qui tend d'ailleurs plutôt à renforcer les idées de la théorie quantique des champs (voir par exemple Schwartz (2014)), déjà couronnée de succès dans le domaine de la physique des particules.

## Intrication

On trouve une bonne introduction à l'intrication dans Basdevant et Dalibard (2005). Nous nous contentons ici de décrire le phénomène dans le cadre d'un biphoton intriqué en polarisation. La réalité locale du biphoton s'exprime dans la possibilité d'effectuer une mesure de polarisation à deux endroits distincts, simultanément. *A priori*, un système physique dont on peut mesurer la polarisation à deux endroits, *A* et *B* possède une fonction d'onde qu'on peut écrire sous la forme

$$|\Phi\rangle = \alpha_{hh} |H\rangle_A \otimes |H\rangle_B + \alpha_{hv} |H\rangle_A \otimes |V\rangle_B + \alpha_{vh} |V\rangle_A \otimes |H\rangle_B + \alpha_{vv} |V\rangle_A \otimes |V\rangle_B, \quad (3.75)$$

où on a introduit la base  $\{|H\rangle, |V\rangle\}$  des états de polarisation horizontal et vertical.

Dans certains cas, cette fonction d'onde est factorisable sous la forme

$$|\Phi\rangle = (\alpha_{ha} |H\rangle_A + \alpha_{va} |V\rangle_A) \otimes (\alpha_{hb} |H\rangle_B + \alpha_{vb} |V\rangle_B). \quad (3.76)$$

Si c'est le cas, il n'existe pas d'intrication, et le biphoton peut être décrit sans difficulté comme deux photons distincts, localisables respectivement en *A* et *B*.

Par définition, le biphoton est dit intriqué en polarisation lorsqu'il n'existe pas de possibilité de factoriser sa fonction d'onde sous la forme 3.76. C'est le cas par exemple des très

célèbres états de Bell

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_A \otimes |H\rangle_B + |V\rangle_A \otimes |V\rangle_B) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|HH\rangle + |VV\rangle), \quad (3.77)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_A \otimes |H\rangle_B - |V\rangle_A \otimes |V\rangle_B) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|HH\rangle - |VV\rangle), \quad (3.78)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_A \otimes |V\rangle_B + |V\rangle_A \otimes |H\rangle_B) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|HV\rangle + |VH\rangle), \quad (3.79)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle_A \otimes |V\rangle_B - |V\rangle_A \otimes |H\rangle_B) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|HV\rangle - |VH\rangle). \quad (3.80)$$

Les biphotons intriqués en polarisation possèdent de très fortes corrélations. Par exemple, si le résultat d'une mesure en  $A$ , dans la base  $\{H, V\}$ , d'un biphoton de fonction d'onde  $|\Phi^+\rangle$ , est  $H$ , alors le résultat d'une mesure simultanée du même biphoton en  $B$ , dans la base  $\{H, V\}$ , sera également  $H$ . On pourrait penser que l'intrication permet alors de communiquer de l'information instantanément à distance. Il n'en est rien, car les résultats de mesure sont totalement aléatoires. Il n'est pas possible de forcer une mesure à donner un résultat particulier. Deux observateurs situés en  $A$  et  $B$  peuvent donc partager de l'information instantanément, mais ce n'est pas la même chose que de communiquer instantanément.

Il reste que l'intrication est une propriété intéressante, qui peut être utilisée par exemple pour téléporter l'état d'une particule d'un endroit à l'autre (voir Bennett *et al.* (1993a) pour la théorie et Bouwmeester *et al.* (1998) pour la réalisation expérimentale). Mais il faut pour cela que l'état soit inconnu avant la téléportation. De plus, l'état initial est nécessairement détruit au cours de l'opération, conformément au théorème de non-clonage quantique (voir Wootters et Zurek (1982)). Certains protocoles de cryptographie, comme celui proposé par Ekert (1991), requièrent également l'intrication.

### Source de photons intriqués en polarisation

Les instabilités de modulation scalaires et vectorielles présentées dans la section 2.3.3 se prêtent bien à la réalisation de sources de photons intriqués en polarisation, car elles permettent la génération simultanée de photons possédant déjà de fortes corrélations en polarisation. Par exemple, les instabilités de modulation de type  $C$  et  $O$  produisent deux photons copolarisés, et les instabilités de type  $M$  génèrent deux photons polarisés orthogonalement. Pour obtenir une source de photons intriqués en polarisation, il suffit de mélanger les polarisations ainsi obtenues, de manière à faire perdre à la mesure son caractère déterministe. Un exemple de source, que nous avons proposé en 2008 mais qui a été réalisé par un autre groupe avant nous (Lorenz *et al.* (2013)), est décrit sur la Fig. 3.4.

Le principe de fonctionnement de la source est le suivant :

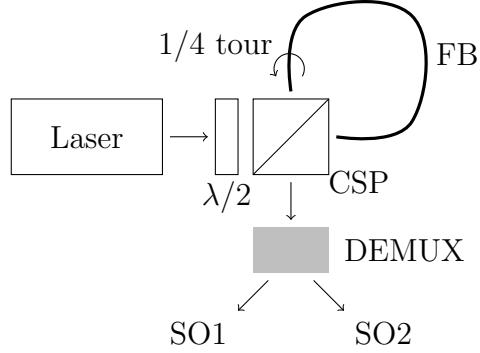


Figure 3.4 Schéma d'une source d'intrication en polarisation fondée sur l'instabilité de modulation de type O.  $\lambda/2$  : lame demi-onde ; CSP : cube séparateur de polarisation ; FB : fibre biréfringente ; DEMUX : démultiplexeur en longueur d'onde ; SO1 : sortie optique 1 ; SO2 : sortie optique 2.

1. Le signal de pompe issu du laser est préparé dans un état de polarisation diagonal  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$  par la lame demi-onde. L'état d'entrée est donc une superposition cohérente de  $|H\rangle$  et  $|V\rangle$ .
2. Le cube séparateur de polarisation transmet la polarisation  $H$  et réfléchit la polarisation  $V$ . Les photons de pompe se trouvent donc dans une superposition cohérente de propagations horaire et antihoraire dans la fibre biréfringente.
3. Un quart de tour de la fibre à l'une des extrémités assure que les photons de pompe se propagent tous sur le même axe biréfringent (par exemple l'axe lent) et subissent tous les mêmes effets non-linéaires.
4. La fibre est faite pour favoriser une instabilité de modulation vectorielle de type O. Deux photons de pompe copropagatifs peuvent donc disparaître et générer deux photons signaux polarisés sur l'axe orthogonal (l'axe rapide dans l'exemple).
5. À la sortie de la fibre, les photons signaux se propagent vers la sortie optique, alors que les photons de pompe retournent vers le laser. Puisque les photons signaux peuvent avoir été générés dans le sens horaire ou antihoraire de la boucle, ils se trouvent dans la superposition cohérente  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle)$ .
6. Puisque les photons sont générés dans des modes fréquentiels distincts (de part et d'autre de la longueur d'onde de pompe), il est ensuite relativement aisé de les séparer dans deux branches optiques distinctes par démultiplexage en longueur d'onde.

La section 6.4 présente les étapes pratiques nécessaires à la réalisation d'une source réaliste de ce type.

D'autres types de sources, fondés principalement sur les instabilités de modulation de type C, ont été proposés et réalisés (voir par exemple Chen *et al.* (2005)).

### Inégalités de Bell-CHSH

Clauser *et al.* (1969) proposent un test du type de celui proposé par Bell (1964) qui utilise la polarisation des biphotons. Ce test permet, par des mesures simples sur les polarisations locales d'un biphoton, de calculer un certain paramètre  $\mathcal{S}$ . Clauser, Horne, Shimony et Holt (CHSH) démontrent que dans toute théorie classique ou à variables cachées, ce paramètre doit vérifier l'inégalité de Bell-CHSH, soit

$$|\mathcal{S}| \leq 2. \quad (3.81)$$

La théorie quantique, quant à elle, permet de violer cette inégalité avec un biphoton intriqué, comme nous le montrons un peu plus loin.

Une très belle et très simple démonstration de l'inégalité est donnée dans Basdevant et Dalibard (2005). Nous ne reprenons pas ici les détails des calculs. L'important est que la caractérisation des sources de photons intriqués en polarisation (incluant donc la mesure de  $\mathcal{S}$ ) requiert toujours le même type de mesure, qui peut être réalisé par un montage universel relativement simple. Le principe de mesure est décrit sur la Fig. 3.5.

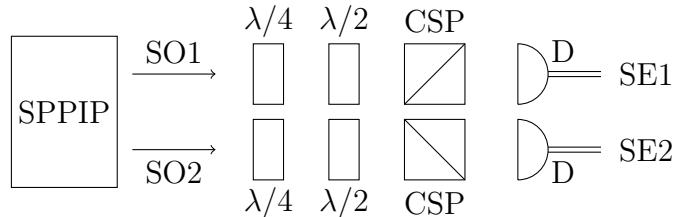


Figure 3.5 Caractérisation d'une source de photons intriqués en polarisation. SPPIP : source de paires de photons intriqués en polarisation ; SO1 : sortie optique 1 ; SO2 : sortie optique 2 ;  $\lambda/4$  : lame quart-d'onde ;  $\lambda/2$  : lame demi-onde ; CSP : cube séparateur de polarisation ; D : détecteur de photons ; SE1 : sortie électrique 1 ; SE2 : sortie électrique 2.

À la sortie de la source, le biphoton est localisé dans les sorties optiques 1 et 2. Dans chaque branche, on place un analyseur de polarisation qui peut prendre la forme simple d'une lame-quart d'onde suivie d'une lame demi-onde et d'un cube séparateur de polarisation. Les lames biréfringentes sont placées sur des montures rotatives. En fonction de l'angle des axes principaux des lames avec la verticale du laboratoire, il est possible d'utiliser le cube séparateur de polarisation comme un projecteur sur n'importe quel état pur de polarisation,

c'est-à-dire un état de type

$$|\psi(\theta, \varphi)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |H\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |V\rangle, \quad (3.82)$$

où on utilise les angles habituels sur la sphère de Bloch (soit  $0 \leq \theta \leq \pi$  la colatitude et  $0 \leq \varphi < 2\pi$  la longitude).

La caractérisation d'une source consiste à réaliser un grand nombre de mesures, dans des bases de polarisation différentes, en comptant à chaque fois le taux de coïncidence entre les signaux électriques de deux détecteurs. Par exemple, le calcul du paramètre  $S$  requiert des mesures dans les bases

- $|\psi\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\rangle, |\psi(0, 0)\rangle, |\psi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\rangle$  et  $|\psi(\pi, 0)\rangle$  pour la branche 1 ;
- $|\psi\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)\rangle, |\psi\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)\rangle, |\psi\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)\rangle$  et  $|\psi\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)\rangle$  pour la branche 2.

Il faut donc réaliser une série de 16 mesures de taux de coïncidences (chaque base de la branche 1 étant mise en paire avec chacune des bases de la branche 2).

Pour un état intriqué de type 3.77, le résultat théorique d'une telle mesure est

$$S = 2\sqrt{2}, \quad (3.83)$$

ce qui viole clairement l'inégalité 3.81 et montre le caractère non-classique de cet état.

### Prise en compte des imperfections expérimentales

Comme pour la section 3.2.2, nous utilisons dans cette partie une méthode statistique pour déterminer *a priori* les caractéristiques d'une source à partir de ses propriétés physiques mesurables (pertes et bruit). Le caractère très quantique de l'intrication ne nous permet cependant pas cette fois-ci de nous affranchir complètement du formalisme de la mécanique quantique.

Nous nous plaçons dans le cadre du montage de caractérisation présenté à la Fig. 3.5. De plus

- la matrice densité de l'état de sortie du biphoton est notée  $\hat{\rho}$ ; par exemple, si la source génère des biphotons dans l'état de Bell pur  $|\Phi^+\rangle$ , la matrice densité est  $\hat{\rho} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ ;
- $\hat{\rho}_1$  est la trace partielle<sup>1</sup> de  $\hat{\rho}$  sur la base 2; cette nouvelle matrice densité représente l'état de la partie du biphoton localisée dans la branche 1, si la partie localisée dans la branche 2 était perdue;

---

1. Voir par exemple Cohen-Tannoudji *et al.* (1998).

- $\hat{\rho}_2$  est la trace partielle de  $\hat{\rho}$  sur la base 1 ;
- $\hat{\rho}_{p1}$  est la matrice densité associée à la projection sur l'état de polarisation 3.82 de la branche 1, soit  $\hat{\rho}_{p1} = |\psi(\theta_1, \varphi_1)\rangle \langle \psi(\theta_1, \varphi_1)|$  ;
- de même,  $\hat{\rho}_{p2} = |\psi(\theta_2, \varphi_2)\rangle \langle \psi(\theta_2, \varphi_2)|$  ;
- $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont les efficacités quantiques totales des branches 1 et 2 respectivement.
- $d_1$  et  $d_2$  sont les probabilités d'observer, dans une fenêtre de détection, un "clic" dû au bruit dans la branche ou à un compte sombre du détecteur, respectivement pour les branches 1 et 2 ;
- $P_n$  est la probabilité de générer  $n$  biphotons dans une fenêtre de détection ;
- les détecteurs ne peuvent pas distinguer entre un ou plusieurs "clics" à l'intérieur d'une fenêtre de détection ;
- l'expérience se déroule sur  $N$  fenêtres de détection.

Dans ces conditions, l'espérance du nombre de coïncidences au cours de l'expérience est donnée par

$$\langle N_c(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2) \rangle = N \sum_{n=0}^{+\infty} P_n \left\{ d_1 d_2 + \bar{d}_1 d_2 [1 - \bar{\zeta}_1^n(\theta_1, \varphi_1)] + d_1 \bar{d}_2 [1 - \bar{\zeta}_2^n(\theta_2, \varphi_2)] + \bar{d}_1 \bar{d}_2 [1 - \bar{\zeta}_c^n(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)] \right\}, \quad (3.84)$$

où on a défini

$$\zeta_1(\theta_1, \varphi_1) = \eta_1 \operatorname{Tr}(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_{p1}), \quad (3.85)$$

$$\zeta_2(\theta_2, \varphi_2) = \eta_2 \operatorname{Tr}(\hat{\rho}_2 \hat{\rho}_{p2}), \quad (3.86)$$

$$\zeta_c(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2) = \eta_1 \eta_2 \operatorname{Tr}[\hat{\rho} (\hat{\rho}_{p1} \otimes \hat{\rho}_{p2})], \quad (3.87)$$

$\operatorname{Tr}$  désignant la trace.

Par exemple, si  $\hat{\rho} = |\Phi^+\rangle \langle \Phi^+|$  et  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , ce qui est le cas pour les mesures CHSH, on a simplement

$$\zeta_1(\theta_1) = \frac{\eta_1}{2} \quad \forall \theta_1, \quad (3.88)$$

$$\zeta_2(\theta_2) = \frac{\eta_2}{2} \quad \forall \theta_2, \quad (3.89)$$

$$\zeta_c(\theta_1, \theta_2) = \frac{\eta_1 \eta_2}{2} \cos^2(\theta_1 - \theta_2). \quad (3.90)$$

Pour une statistique thermique de génération de biphotons, de moyenne  $\mu$ , on a alors

$$\langle N_c \rangle = N \left( 1 - \frac{\bar{d}_1 d_2}{1 + \mu \zeta_1} - \frac{d_1 \bar{d}_2}{1 + \mu \zeta_2} - \frac{\bar{d}_1 \bar{d}_2}{1 + \mu \zeta_c} \right). \quad (3.91)$$

Pour une statistique poissonienne de génération de biphotons, de moyenne  $\mu$ , on a

$$\langle N_c \rangle = N (1 - \bar{d}_1 d_2 e^{-\mu \zeta_1} - d_1 \bar{d}_2 e^{-\mu \zeta_2} - \bar{d}_1 \bar{d}_2 e^{-\mu \zeta_c}). \quad (3.92)$$

Ces espérances peuvent être calculées à l'avance si on connaît les paramètres physiques de la source. Elles permettent non seulement d'estimer le paramètre  $S$ , mais également d'estimer les mesures nécessaires à la reconstruction de la matrice densité, et les paramètres associés qui servent généralement à caractériser la source. Par exemple, le résultat de la méthode de reconstruction de vraisemblance maximale (“maximum likelihood” en anglais), décrite dans James *et al.* (2001) peut être prédit par les équations ci-dessus avant même de commencer l'expérience (voir les programmes Matlab® en annexe G).

La Fig. 3.6 montre l'évolution du paramètre  $S$  en fonction des caractéristiques physiques d'une source de biphotons dans l'état  $|\Phi^+\rangle$ . Ces calculs sont utilisés pour caractériser une source réelle dans la section 6.4.

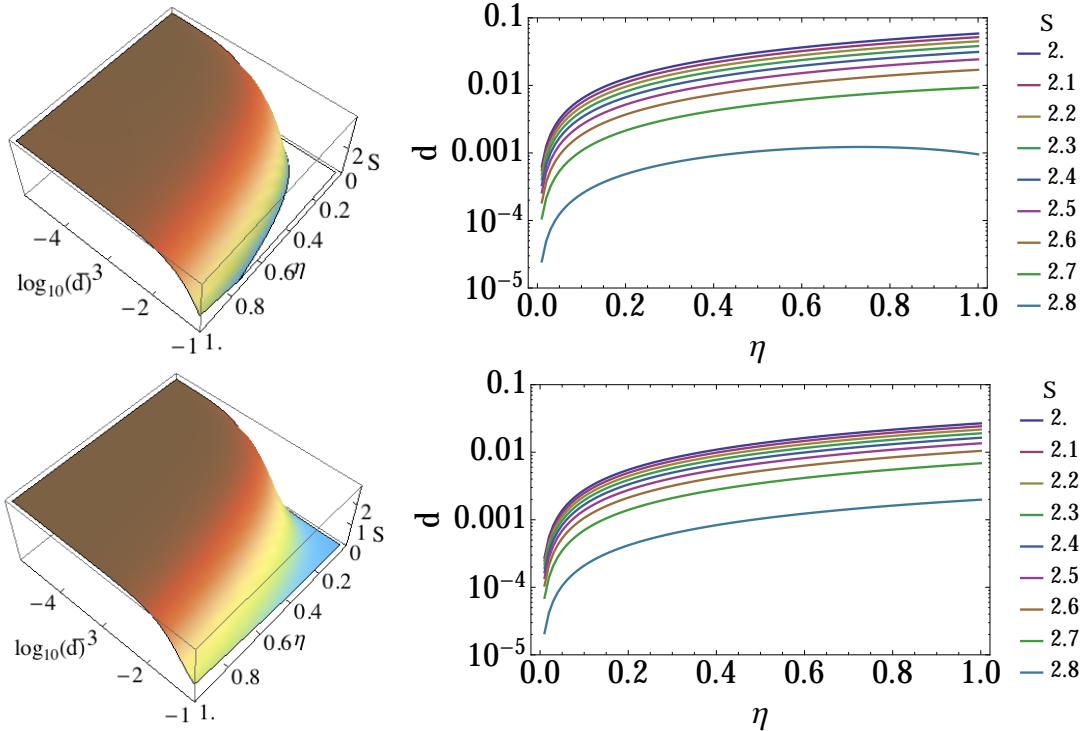


Figure 3.6 Évolution du paramètre  $S$  en fonction des caractéristiques de la source. Pour chaque figure, en abscisses, l'efficacité quantique  $\eta = \eta_1 = \eta_2$  des deux lignes ; en ordonnées, la probabilité  $d = d_1 = d_2$  de mesurer un photon de bruit ou un compte sombre au cours d'une fenêtre de détection. Les deux axes ont des échelles logarithmiques. La figure du haut est calculée pour un nombre moyen de biphotons  $\mu = 0.1$  par fenêtre de détection. La figure du bas est calculée pour  $\mu = 0.01$ . Dans les deux cas, la statistique est supposée poissonienne. Sur la colonne de droite, seuls les contours de  $S = 2$  à  $S = 2.8$  sont représentés.

### 3.3 Résumé

La fameuse dualité onde/corpuscule du photon est mise en exergue par le rapport entre l'équation de dispersion de la "particule" photon et son équivalent dans le domaine opérationnel, son équation de Schrödinger, dont nous avons montré qu'elle peut prendre la forme des équations de Maxwell.

Pour aller plus loin dans l'aspect corpusculaire, le formalisme de la seconde quantification prend sa source dans les relations de commutation fondamentales 3.44. Ces relations sont une conséquence directe de la dualité entre le potentiel scalaire et le champ électrique, dualité équivalente, dans le domaine des champs, à celle qui existe entre la position et la quantité de mouvement d'une particule. Le formalisme du champ quantifié permet d'accéder aux propriétés statistiques de l'arrivée des photons sur un détecteur. Ces propriétés jouent un rôle fondamental dans la conception de sources non-classiques. On montre en particulier que la génération paramétrique de biphotons mène à une statistique sur-poissonienne pour un seul mode, et tend vers une statistique poissonienne pour un grand nombre de modes.

Deux types de sources sont particulièrement adaptées aux fibres optiques : les sources de photons annoncés et les sources de photons intriqués en polarisation. Dans les deux cas, un traitement statistique est suffisant pour faire ressortir le caractère non-classique et l'utilité de la source. Nous avons montré comment, à partir des caractéristiques physiques de la source (pertes et bruit), il est possible de prédire à l'avance son comportement non-classique. En particulier, il est possible de déterminer le coefficient de cohérence d'ordre 2  $[g^{(2)}(0)]$  à l'avance pour une source de photons annoncés. On montre par exemple (voir Virally *et al.* (2010b)) qu'il est préférable de filtrer la ligne d'annonce plutôt que la ligne de sortie optique pour améliorer la qualité de la source. De la même manière, il est possible de calculer à l'avance le résultat d'expériences de mesure d'inégalités de Bell et même la matrice densité de l'état de polarisation final, au travers des relations 3.91 et 3.92. Ces relations seront utilisées à la section 6.4 pour caractériser une source de photons intriqués en polarisation.

## CHAPITRE 4

### POMPE INCOHÉRENTE

La littérature traite abondamment des effets non-linéaires dans le cadre d'une ou plusieurs pompes (temporellement) cohérentes. C'est en effet le cas le plus facile à traiter avec des outils mathématiques bien maîtrisés, comme le concept d'amplitude complexe.

La compétition entre effets non-linéaires (voir par exemple Thompson et Roy (1991)) fait qu'il existe des cas où la cohérence pose problème, car elle favorise des effets indésirables. C'est le cas par exemple de l'automodulation de phase, qui a tendance à empêcher l'apparition d'autres effets se développant près de la fréquence de pompe (voir la section 6.3).

Cette partie développe un cadre théorique permettant le calcul de la propagation d'une pompe incohérente dans une fibre optique et le développement des effets non-linéaires associés. L'outil présenté ici diffère largement des approches jusqu'à présent utilisées dans la littérature (Manassah (1990), Manassah (1991), Araujo *et al.* (1991), da Cruz *et al.* (1992) et Pietralunga *et al.* (2001) étudient spécifiquement l'automodulation de phase dans le cadre incohérent ; Garnier *et al.* (1998) élargissent l'étude tout en utilisant toujours une approche purement statistique ; Cavalcanti *et al.* (1995) modélisent la propagation incohérente par tirages numériques aléatoires) en ce qu'il utilise explicitement le formalisme quantique de la matrice densité.

#### 4.1 Conventions

Avant de commencer, il est utile d'établir quelques conventions pour la suite.

Une impulsion est un paquet d'énergie lumineuse se propageant dans une fibre optique. Un train d'impulsion est une série d'impulsions régulièrement espacées dans le temps.

Une impulsion est caractérisée par deux fonctions réelles positives en principe mesurables,

- $P(t)$ , la puissance instantanée dans le domaine temporel (fonction du temps  $t$ ) ;
- $\tilde{S}(\omega)$ , le spectre de puissance dans le domaine fréquentiel (fonction de la pulsation  $\omega = 2\pi\nu$ , où  $\nu$  est la fréquence optique).

On peut en principe mesurer la puissance instantanée à l'aide d'un détecteur rapide et d'un oscilloscope. De même, on peut en principe mesurer le spectre à l'aide d'un analyseur de spectre optique (OSA, pour Optical Spectrum Analyzer).

On se ramène à une impulsion centrée autour de  $t = 0$  et à un spectre centré autour de  $\omega = 0$  au prix de quelques changements de variables, présentés en annexe D.

La puissance instantanée et le spectre vérifient les conditions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{S}(\omega) = E, \quad (4.1)$$

où  $E$  est l'énergie totale contenue dans une impulsion.

Les fonctions  $p(t) \equiv \frac{P(t)}{E}$  et  $s(\omega) \equiv \frac{\tilde{S}(\omega)}{E}$  sont donc assimilables à des densités de probabilité. Elles permettent de définir les incertitudes

$$(\Delta t)^2 = \langle t^2 \rangle_p - \langle t \rangle_p^2, \quad (4.2)$$

$$(\Delta \omega)^2 = \langle \omega^2 \rangle_s - \langle \omega \rangle_s^2, \quad (4.3)$$

où

$$\langle X(t) \rangle_t \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dt X(t) p(t), \quad (4.4)$$

$$\langle \tilde{X}(\omega) \rangle_s \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{X}(\omega) s(\omega). \quad (4.5)$$

Une impulsion est dite “Fourier limitée” si elle vérifie la condition de produit minimal des incertitudes

$$\Delta \omega \Delta t = \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

Les impulsions “Fourier limitées” sont cohérentes.

On définit enfin les transformées de Fourier respectives de la puissance instantanée et du spectre, soit

$$\tilde{P}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt P(t) e^{i\omega t}. \quad (4.7)$$

et

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{S}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (4.8)$$

## 4.2 Matrice densité à indices continus (fonction densité)

### 4.2.1 Nécessité de la matrice densité

Il existe une manière extrêmement simple de représenter mathématiquement un train cohérent d'impulsions se propageant dans une fibre optique. Il suffit en effet de définir la fonction d'amplitude de l'impulsion en fonction du temps (ou sa transformée de Fourier dans le domaine fréquentiel). Il s'agit d'une fonction complexe du type

$$a(t) = \sqrt{P(t)} e^{i\varphi(t)}, \quad (4.9)$$

$\varphi(t)$  étant la phase instantanée.

Une impulsion est cohérente lorsque  $\varphi$  est bien définie, c'est-à-dire lorsqu'il existe une relation explicite entre les phases de l'impulsion aux différents temps.

Une impulsion incohérente ne peut être caractérisée par une fonction de phase instantanée bien définie, car la différence de phase entre deux temps donnés est alors partiellement ou totalement aléatoire. Pour être plus précis, s'il existe bel et bien une relation de phase entre les composantes temporelles de chaque impulsion individuellement, cette relation change d'impulsion en impulsion, de manière aléatoire.

Il n'est alors plus possible de décrire la phase du train d'impulsions comme une fonction simple. Il est nécessaire d'incorporer le caractère statistique de la physique dans la description. C'est cette nécessité qui pousse à utiliser un outil connu de la mécanique quantique, la matrice densité. Cet outil est en effet conçu sur mesure pour le cas où la description d'un état physique requiert d'utiliser des variables aléatoires.

#### 4.2.2 Rappels sur la matrice densité

La description d'un état quantique  $|\Phi\rangle$  "pur" (ou cohérent), dans un espace de Hilbert  $H$ , se fait de manière simple une fois qu'on a défini une base  $\{|\phi_i\rangle\}$  de  $H$ . Il suffit en effet alors de projeter l'état sur les vecteurs de base pour écrire

$$|\Phi\rangle = \sum_i a_i |\phi_i\rangle. \quad (4.10)$$

Cette équation pourrait formellement être réécrite sous la forme

$$\Phi = \{a_1, a_2, \dots\}, \quad (4.11)$$

car la donnée des  $a_i$  définit l'état  $|\Phi\rangle$  de manière unique, une fois la base imposée.

Notons ici la similitude entre la fonction complexe "amplitude" définie par 4.9 et la collection de nombres complexes définis par 4.11. Il s'agit dans les deux cas de la représentation d'un état physique cohérent par une série de nombres complexes. La seule différence est que l'état  $|\Phi\rangle$  existe dans un espace possédant une base discrète de vecteurs, indexés par des nombres entiers, alors que l'amplitude requiert une base à "indices continus" (le temps, ou la pulsation).

En mécanique quantique, nous savons qu'il existe, outre les états purs, des états "mixtes" (ou mélanges statistiques) qui ne peuvent pas être représentés par une équation de type 4.10 car ils sont issus de situations physiques possédant un caractère aléatoire. C'est le cas par exemple des sources lumineuses incohérentes, qui émettent des photons sans relation de phase

spécifique sur une large plage de longueurs d'onde. Pour évoquer le cas de degrés de liberté discrets plutôt que continus, on peut aussi citer les sources émettant des photons dépolarisés. Un mélange statistique est en général caractérisé par une série d'états purs auxquels on associe une probabilité. Mathématiquement, on définit donc les  $\{|\Phi_\ell\rangle, p_\ell\}$ , avec

$$|\Phi_\ell\rangle = \sum_i a_{i,\ell} |\phi_i\rangle \quad \forall \ell, \text{ et} \quad (4.12)$$

$$0 \leq p_\ell \leq 1 \quad \forall \ell, \quad (4.13)$$

$$\sum_\ell p_\ell = 1, \quad (4.14)$$

le cas pur (ou cohérent) n'étant alors plus qu'un cas particulier de cette description, avec un seul état de probabilité unité.

Pour la suite, nous nous restreignons à un cas qui nous intéresse plus particulièrement : les modules des amplitudes complexes ne varient pas d'un état pur à l'autre ; seules les phases varient. Autrement dit, on a

$$a_{i,\ell} = \sqrt{P_i} e^{\varphi_{i,\ell}}, \quad (4.15)$$

cette expression étant à comparer avec 4.9.

On sait (voir par exemple Basdevant et Dalibard (2005)) que la meilleure représentation d'un état mixte se fait par l'intermédiaire de la matrice densité  $\hat{\rho}$ , définie par

$$\hat{\rho} \equiv \sum_\ell p_\ell |\Phi_\ell\rangle \langle \Phi_\ell|. \quad (4.16)$$

Les coefficients de l'opérateur  $\hat{\rho}$  sont alors définis par

$$\rho_{i,j} = \sum_\ell p_\ell a_{i,\ell} a_{j,\ell}^* \equiv \langle a_{i,\ell} a_{j,\ell}^* \rangle_\ell = \sqrt{P_i P_j} \langle e^{i(\varphi_{i,\ell} - \varphi_{j,\ell})} \rangle_\ell, \quad (4.17)$$

où  $a^*$  est le complexe conjugué de  $a$ , et  $\langle \square \rangle_\ell$  représente la moyenne pondérée par les probabilités  $p_\ell$ .

Notons que dans le cas cohérent, on a simplement

$$\rho_{i,j} = a_i a_j^* = \sqrt{P_i P_j} e^{i(\varphi_i - \varphi_j)}. \quad (4.18)$$

Parmi les propriétés importantes de la matrice densité, notons que les termes diagonaux

s'écrivent simplement

$$\rho_{i,i} = P_i, \quad (4.19)$$

et sont des valeurs réelles qui représentent les populations moyennes associées aux vecteurs de base ((Cohen-Tannoudji *et al.*, 1998, p.302-303)). Si la base de  $\mathcal{H}$  est choisie judicieusement, ces populations sont des valeurs mesurables de l'état physique. Dans les cas des impulsions qui nous concernent, les termes diagonaux représenteront la puissance instantanée dans le domaine temporel, et le spectre dans le domaine fréquentiel.

Les termes non-diagonaux sont eux appelés “cohérences”, car ils représentent les relations de phase entre les différentes composantes de l'état. On remarque en particulier que dans un cas totalement incohérent (relations de phases totalement aléatoires), l'expression 4.17 montre que ces termes disparaissent, car la valeur  $\langle e^{i(\varphi_{i,\ell} - \varphi_{j,\ell})} \rangle_\ell$  est nulle.

Les deux dernières remarques (caractère mesurable des populations et extinction des cohérences dans le cas complètement incohérent) nous montrent qu'il est possible de construire *a priori* la matrice densité d'un état totalement incohérent sans connaître le détail des états purs le constituant, ni les probabilités associées. Il suffit de mesurer physiquement les populations, de les placer sur la diagonale, et de prendre tous les termes non-diagonaux égaux à zéro<sup>1</sup>. Une autre manière de voir les choses est de considérer que le passage d'un état cohérent à un état cohérent se fait par “compression” de la matrice densité sur sa diagonale, les termes non-diagonaux disparaissant au fur et à mesure. Cette situation est illustrée ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} P_1 & \cdots & a_1 a_i^* & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^* a_i & \cdots & P_i & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & P_i & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}$$

#### 4.2.3 Fonction densité, fonction de cohérence

Il est facile d'adapter le modèle de la matrice densité au cas d'indices continus. Restant dans le cadre d'une impulsion cohérente se propageant dans une fibre optique, on introduit donc la fonction densité

$$\rho(t_1, t_2) \equiv a(t_1) a^*(-t_2), \quad (4.20)$$

le signe “-” provenant du fait que le second terme du produit est une amplitude complexe conjuguée. Il se justifie immédiatement si on prend en compte la double transformée de

1. Cette idée est utilisée dans d'autres domaines. Par exemple, on impose des termes de cohérence nuls dans les matrices densités représentant les systèmes à deux niveaux, pour tenir compte de la relaxation collisionnelle (voir par exemple Grynberg *et al.* (1997)).

Fourier de la fonction densité, soit

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 a(t_1) a^*(-t_2) e^{i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2} \\ &= \tilde{a}(\omega_1) \tilde{a}^*(\omega_2).\end{aligned}\quad (4.21)$$

Notons immédiatement que les termes “diagonaux” représentent des quantités mesurables classiquement, soit

$$\rho(t, -t) = P(t), \text{ et} \quad (4.22)$$

$$\tilde{\rho}(\omega, \omega) = \tilde{S}(\omega). \quad (4.23)$$

Ces propriétés sont représentées schématiquement sur la Fig. 4.1.

Notons que la longueur d’impulsion  $\tau$  est une caractéristique mesurable sur l’antidiagonale de la matrice densité dans le domaine temporel. Dans le domaine fréquentiel, on peut mesurer le temps de cohérence de l’impulsion,  $\tau_c$ , par l’intermédiaire du théorème de Wiener-Khintchine (voir par exemple Born et Wolf (1999)). Pour une pompe “Fourier limitée”, donc cohérente, ces deux valeurs coïncident.

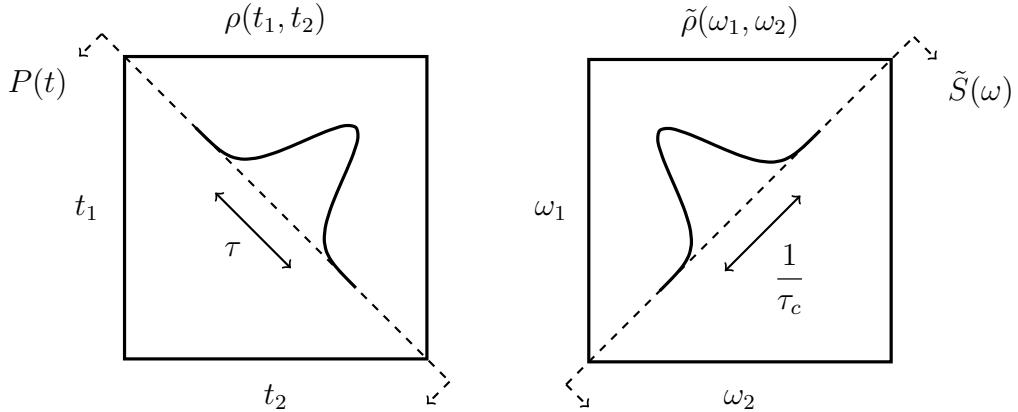


Figure 4.1 Les diagonales de la fonction densité représentent des fonctions mesurables (puissance instantanée et spectre) caractéristiques de l’impulsion. Sur cette figure, les courbes représentent une mesure de puissance instantanée (à gauche) et de spectre (à droite), telles qu’elles pourraient être observées à l’aide d’une coupe de la surface sur les diagonales.

La matrice densité n’est pas utile dans le cas cohérent, puisque ce cas est parfaitement représenté par l’amplitude complexe 4.9. Il est donc plus important de généraliser la définition 4.20 au cas incohérent, sous la forme

$$\rho(t_1, t_2) \equiv \langle a_\ell(t_1) a_\ell^*(-t_2) \rangle_\ell, \quad (4.24)$$

où  $\ell$  est un indice permettant de prendre en compte toutes les possibilités de relations de phase entre les composantes temporelles des impulsions.

On reconnaît ici une forme très voisine de celle de la fonction de cohérence de premier ordre (voir par exemple Loudon (2000)), ou facteur complexe d'autocohérence,

$$g^{(1)}(t, \tau) \equiv \langle a(t) a^*(t - \tau) \rangle, \quad (4.25)$$

le moyennage se faisant sur un grand nombre d'observations (autrement dit sur un temps d'intégration au détecteur long devant la période des impulsions).

La coïncidence de forme entre les définitions 4.24 et 4.25 peut être rassurante, à partir du moment où on se raccroche à une définition qui existe dans la littérature, dans le cadre de la cohérence. Mais il ne faut pas en déduire que nous n'apportons ici rien de nouveau. L'équation 4.25 est en effet une fonction introduite pour représenter une quantité mesurée dans certaines expériences d'interférométrie, et pas une fonction construite mathématiquement pour prédire l'évolution d'un état physique. En ce qui nous concerne, nous cherchons vraiment à construire un nouvel objet mathématique (qui remplacera l'amplitude dans le cas incohérent) et à décrire ses équations d'évolution pour faire des prédictions. Cette démarche apporte en fait un éclairage nouveau sur l'utilité de la fonction de cohérence de premier ordre.

#### 4.2.4 Construction de la fonction densité dans le cadre incohérent

##### Cas scalaire

La construction d'une fonction densité dans le cadre incohérent semble poser problème *a priori*, car les relations de phase d'une impulsion à l'autre ne sont pas mesurables directement dans le cadre incohérent<sup>2</sup>.

Il est cependant possible de construire une telle matrice, en se fondant sur les remarques faites à la fin de la section 4.2.2. Pour ce faire, il suffit de vérifier deux critères simples, à savoir :

**critère 1** : la construction doit se faire à partir des seules quantités mesurables, soit la courbe de puissance instantanée dans le domaine temporel et le spectre dans le domaine fréquentiel ; ces quantités doivent par ailleurs se retrouver sur les diagonales, comme illustré sur la Fig. 4.1 ;

**critère 2** : les cohérences (termes non diagonaux) doivent disparaître au fur et à mesure de la perte de cohérence ; les fonctions doivent alors se resserrer sur les diagonales.

---

2. Même si elles peuvent l'être indirectement sur des interférogrammes dans le cas cohérent.

Définissons donc la fonction densité, dans le cadre incohérent, par

$$\boxed{\rho(t_1, t_2) \equiv \frac{1}{S(0)} P\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) S(t_1 + t_2).} \quad (4.26)$$

Le Jacobien de la transformation définie par  $\tau_1 \equiv \frac{t_1 - t_2}{2}$  et  $\tau_2 = t_1 + t_2$  vaut 1. On vérifie donc que

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \rho(t_1, t_2) e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} \\ &= \frac{1}{2\pi S(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 P(t_1) S(t_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)t_1} e^{i\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t_2}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

soit

$$\boxed{\tilde{\rho}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{S(0)} \tilde{P}(\omega_1 - \omega_2) \tilde{S}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right).} \quad (4.28)$$

On a alors

$$P(t) = \rho(t, -t), \text{ et} \quad (4.29)$$

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{S(0)}{\tilde{P}(0)} \tilde{\rho}(\omega, \omega), \quad (4.30)$$

ce qui permet de vérifier le **critère 1**.

La vérification du **critère 2** est assurée par la forme imposée à la fonction densité par 4.26 et par le théorème de Wiener-Khintchine. Dans le cas incohérent, le temps de cohérence  $\tau_c$  est en effet plus court que la longueur d'impulsion  $\tau$ , et la fonction densité se trouve comprimée le long de la diagonale définissant  $P$  dans le domaine temporel. Dans le domaine fréquentiel, les propriétés des transformée de Fourier assurent que la fonction densité se trouve également comprimée, cette fois sur la diagonale définissant  $\tilde{S}$ . Ces compressions sont illustrées sur la Fig. 4.2, pour le cas gaussien (voir l'annexe E). Dans ce cas, on a

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{E}{\sqrt{\pi} \tau} e^{-\frac{(t_1 - t_2)^2}{4\tau^2}} e^{-\frac{(t_1 + t_2)^2}{4\tau_c^2}}$$

et

$$\tilde{\rho}(\omega_1, \omega_2) = \frac{E \tau_c}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2 \tau^2}{4}} e^{-\frac{(\omega_1 + \omega_2)^2 \tau_c^2}{4}}.$$

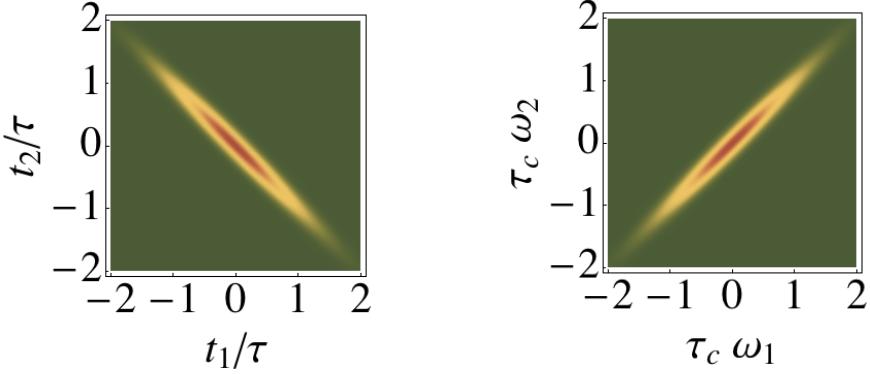


Figure 4.2 Effets de compression le long des diagonales pour les fonctions densité d’impulsions incohérentes. Ces effets sont assurés par le théorème de Wiener-Khintchine. Sur la surface de gauche, en particulier, l’étendue le long de la diagonale est de l’ordre de grandeur de la longueur de l’impulsion,  $\tau$ , alors que la largeur du signal est de l’ordre de grandeur du temps de cohérence  $\tau_c$ . Une impulsion très incohérente a pour caractéristique la relation  $\tau \gg \tau_c$ .

### Cas vectoriel

Il est possible, enfin, de généraliser la définition de fonction densité au cas vectoriel. Il suffit pour cela de considérer un espace des états plus grand, produit tensoriel de l’espace scalaire par un espace à deux dimensions discrètes pour la polarisation. En se plaçant, dans le cas le plus général, dans la base des polarisations orthogonales  $\sigma$  et  $\pi$ , on définit alors quatre fonctions densité,  $\rho_{\sigma\sigma}$ ,  $\rho_{\sigma\pi}$ ,  $\rho_{\pi\sigma}$  et  $\rho_{\pi\pi}$ .

Dans le cas, probable, où on utilise une pompe unique polarisée et un ensemble de lames biréfringentes pour créer un état de polarisation quelconque de la forme  $\alpha_\sigma |\sigma\rangle + \alpha_\pi |\pi\rangle$  à l’entrée de la fibre, on initialise les fonctions densité à partir de la fonction densité initiale  $\rho$  de la pompe comme un simple produit tensoriel, soit

$$\begin{bmatrix} \rho_{\sigma\sigma} & \rho_{\sigma\pi} \\ \rho_{\pi\sigma} & \rho_{\pi\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\alpha_\sigma|^2 & \alpha_\sigma \alpha_\pi^* \\ \alpha_\sigma^* \alpha_\pi & |\alpha_\pi|^2 \end{bmatrix} \rho. \quad (4.31)$$

### 4.3 Propagation de la fonction densité

Nous savons donc désormais modéliser une impulsion incohérente à l’aide d’une fonction densité, qui généralise la notion d’amplitude du cas cohérent. Dans cette section, nous montrons comment généraliser la méthode dite “split-step Fourier”, qui permet de faire se propager numériquement des amplitudes, pour l’adapter à la fonction densité.

### 4.3.1 Rappels sur la méthode “split-step Fourier”

La méthode dite “split-step Fourier” a été largement développée dans la littérature (voir par exemple Agrawal (2013)). Elle est par ailleurs utilisée couramment pour faire des prédictions qualitatives sur les effets non-linéaires attendus expérimentalement (voir par exemple Kudlinski *et al.* (2013)). Nous en rappelons ici les grandes lignes.

Cette méthode est fondée sur le fait qu'il est facile de décrire la propagation des effets non-linéaires dans le domaine temporel, où ils prennent une forme simple, alors que les effets de dispersion sont plus aisés à traiter dans le domaine fréquentiel.

Si on ne tient compte que des effets non-linéaires, on a en effet

$$\frac{\partial a}{\partial z}(z, t) = i \gamma P(z, t) a(z, t). \quad (4.32)$$

Dans le domaine fréquentiel, si on ne tient compte que des effets de dispersion, on a par ailleurs

$$\frac{\partial \tilde{a}}{\partial z}(z, \omega) = i \beta(\omega) \tilde{a}(z, \omega). \quad (4.33)$$

La méthode “split-step Fourier” consiste alors à séparer ces deux effets au sein d'une même étape. On commence donc par appliquer la partie non-linéaire (sous la forme  $\delta a(z, t) = i \gamma P(z, t) a(z, t) \delta z$ ), puis on effectue une transformée de Fourier avant d'appliquer la partie dispersive (sous la forme  $\delta \tilde{a}(z, \omega) = i \beta(\omega) \tilde{a}(z, \omega) \delta z$ ). Une transformée de Fourier inverse permet de se ramener au domaine temporel, avant de recommencer. Cette méthode numérique mène à des résultats satisfaisants dès lors que la discrétisation en  $z$  est suffisamment petite. Elle est illustrée sur la Fig. 4.3.

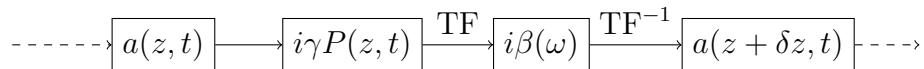


Figure 4.3 Schéma de principe d'une étape de la méthode “split-step Fourier”.

### 4.3.2 Propagateurs

#### Cas scalaire

Il est possible de généraliser les équations 4.32 et 4.33 pour la propagation de la fonction densité, en repartant de la définition 4.24 de cette dernière.

On doit en effet avoir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial z}(z, t_1, t_2) &= \left\langle \frac{\partial a}{\partial z}(z, t_1) a^*(z, -t_2) + a(z, t_1) \frac{\partial a^*}{\partial z}(z, -t_2) \right\rangle_\ell \\
&= \langle i \gamma [P(z, t_1) - P(z, -t_2)] a(z, t_1) a^*(z, t_2) \rangle_\ell \\
&= i \gamma [P(z, t_1) - P(z, -t_2)] \rho(z, t_1, t_2) \\
&= i \gamma [\rho(z, t_1, -t_1) - \rho(z, -t_2, t_2)] \rho(z, t_1, t_2),
\end{aligned} \tag{4.34}$$

où on a tenu compte de la relation 4.29, et où l'avant-dernière étape se justifie par le fait qu'on a pris la puissance comme indépendante de  $\ell$  : seules les relations de phases entre les différents constituants de l'amplitude varient avec  $\ell$ , pas les modules, comme pour l'équation 4.15.

Dans le domaine fréquentiel, un raisonnement analogue donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z}(z, \omega_1, \omega_2) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{a}}{\partial z}(z, \omega_1) \tilde{a}^*(z, \omega_2) + \tilde{a}(z, \omega_1) \frac{\partial \tilde{a}^*}{\partial z}(z, \omega_2) \right\rangle_\ell \\
&= \langle i [\beta(\omega_1) - \beta^*(\omega_2)] \tilde{a}(z, \omega_1) \tilde{a}^*(z, \omega_2) \rangle_\ell \\
&= i [\beta(\omega_1) - \beta^*(\omega_2)] \tilde{\rho}(z, \omega_1, \omega_2).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

### Cas vectoriel

La généralisation au cas vectoriel se fait en considérant les amplitudes  $a_\sigma$  et  $a_\pi$  associées à deux états de polarisation rectilignes orthogonaux. Les équations de propagation sont alors

$$\frac{\partial a_\sigma}{\partial z}(z, t) = i \gamma \left[ P_\sigma(z, t) + \frac{1}{3} P_\pi(z, t) \right] a_\sigma(z, t) + i \frac{\gamma}{3} P_\sigma(z, t) a_\pi(z, t), \text{ et} \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial \tilde{a}_\sigma}{\partial z}(z, \omega) = i \beta_\sigma(\omega) \tilde{a}_\sigma(z, \omega), \tag{4.37}$$

avec l'équivalent pour la polarisation orthogonale en intervertissant les indices  $\sigma$  et  $\pi$ .

Les équations de propagation des fonctions densité sont alors, par un raisonnement analogue aux précédents,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_{\sigma\sigma}}{\partial z}(z, t_1, t_2) &= \\
i \gamma &\left[ \rho_{\sigma\sigma}(z, t_1, -t_1) - \rho_{\sigma\sigma}(z, -t_2, t_2) + \frac{1}{3} \rho_{\pi\pi}(z, t_1, -t_1) - \frac{1}{3} \rho_{\pi\pi}(z, -t_2, t_2) \right] \rho_{\sigma\sigma}(z, t_1, t_2) \\
&+ i \frac{\gamma}{3} \rho_{\sigma\sigma}(z, t_1, -t_1) \rho_{\pi\sigma}(z, t_1, t_2) - i \frac{\gamma}{3} \rho_{\sigma\sigma}(z, -t_2, t_2) \rho_{\sigma\pi}(z, t_1, t_2), \tag{4.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{\sigma\pi}}{\partial z}(z, t_1, t_2) = & \\ & i\gamma \left[ \rho_{\sigma\sigma}(z, t_1, -t_1) - \rho_{\pi\pi}(z, -t_2, t_2) + \frac{1}{3}\rho_{\pi\pi}(z, t_1, -t_1) - \frac{1}{3}\rho_{\sigma\sigma}(z, -t_2, t_2) \right] \rho_{\sigma\pi}(z, t_1, t_2) \\ & + i\frac{\gamma}{3} \rho_{\sigma\sigma}(z, t_1, -t_1) \rho_{\pi\pi}(z, t_1, t_2) - i\frac{\gamma}{3} \rho_{\pi\pi}(z, -t_2, t_2) \rho_{\sigma\sigma}(z, t_1, t_2), \quad (4.39) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_{\sigma\sigma}}{\partial z}(z, \omega_1, \omega_2) = i[\beta_\sigma(\omega_1) - \beta_\sigma^*(\omega_2)] \tilde{\rho}_{\sigma\sigma}(z, \omega_1, \omega_2), \text{ et} \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_{\sigma\pi}}{\partial z}(z, \omega_1, \omega_2) = i[\beta_\sigma(\omega_1) - \beta_\pi^*(\omega_2)] \tilde{\rho}_{\sigma\pi}(z, \omega_1, \omega_2), \quad (4.41)$$

avec, encore une fois, des expressions analogues en intervertissant les indices.

### 4.3.3 Méthode “split-step Fourier” généralisée

Les équations développées ci-dessus permettent de faire se propager la fonction densité à l'aide d'une méthode “split-step Fourier” généralisée, qui reprend les mêmes principes que la méthode initiale appliquée aux amplitudes. On suit donc le schéma illustré sur la Fig. 4.4.

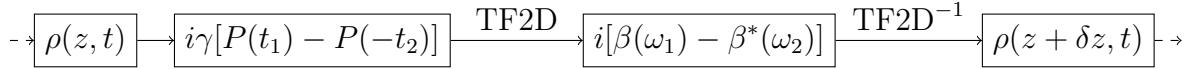


Figure 4.4 Schéma de principe d'une étape de la méthode “split-step Fourier” généralisée.

Du point de vue numérique, la plus grosse différence entre la propagation de l'amplitude et celle de la matrice densité est qu'on fait se propager une matrice plutôt qu'un vecteur. Il y a donc, schématiquement,  $N^2$  termes à faire se propager plutôt que  $N$ .

Le théorème de Nyquist impose également des limites minimales précises sur les discrétisations en temps et en fréquence. Ces limites sont d'autant plus drastiques que l'impulsion est incohérente. On peut comprendre l'argument de manière simple en se référant à la Fig. 4.2. En effet, la discrétisation en temps doit vérifier  $\delta t < \tau_c$ , alors que la plage temporelle doit vérifier  $\Delta t > \tau$ . De la même manière, on doit avoir des relations du type  $\delta\omega < \frac{1}{\tau}$  et  $\Delta\omega > \frac{1}{\tau_c}$ . Toutes ces formules peuvent être résumées par la relation  $N > \frac{\tau}{\tau_c}$ . Le nombre de quantités à propager peut donc devenir rapidement très grand, ce qui a pour effet un allongement important du temps de calcul par rapport au cas cohérent.

Nous appliquons la méthode “split-step Fourier” généralisée à l'étude de la suppression de l'effet d'automodulation de phase (dans le cas scalaire) dans la section 6.3.

#### 4.4 Résumé

La cohérence d'un signal optique est l'équivalent de la "pureté" d'un état quantique. Cohérence et pureté représentent en effet des relations de phase bien déterminées entre les coefficients du développement d'un état sur une base donnée. Lorsque ces relations de phase sont aléatoires, c'est-à-dire dans le cas d'un mélange statistique ou d'une pompe incohérente, la représentation adaptée est celle de la matrice densité, ou de la fonction densité dans le cas d'une base fonctionnelle continue.

Ce chapitre développe le formalisme associé à la propagation d'un signal incohérent dans une fibre optique, au travers de la représentation par une fonction densité plutôt qu'une fonction d'amplitude complexe. Un outil de modélisation numérique adapté, sous la forme d'une généralisation de la méthode dite "split-step Fourier", est également présenté en détail. Cet outil permet de faire se propager numériquement un signal incohérent, et de déterminer son comportement en fonction des caractéristiques dispersives et non-linéaire d'une fibre donnée.

La cohérence temporelle de la pompe joue un rôle très important dans la génération paramétrique de biphotons par effets non-linéaires dans une fibre optique. Il existe en effet une compétition pour la puissance de pompe entre processus non-linéaires, et une superposition possible de certains processus, par exemple l'automodulation de phase et les instabilités de modulation proches de la longueur d'onde de pompe. Une pompe très cohérente favorise l'automodulation de phase (affectée d'un coefficient non-linéaire plus important) au détriment des instabilités. Ces dernières peuvent être révélées par la suppression de l'automodulation de phase associée à l'utilisation d'une pompe incohérente. La section 6.3 utilise les calculs développés dans ce chapitre pour montrer comment l'utilisation d'une pompe incohérente supprime l'automodulation de phase pour faire apparaître des instabilités de modulation proches de la pompe. Ce résultat est à l'origine de l'utilisation d'une source laser incohérente pour la réalisation d'une source de photons intriqués en polarisation, décrite dans la section 6.4.

## CHAPITRE 5

### CONSIDÉRATIONS PRATIQUES

Dans ce chapitre, nous abordons les aspects pratiques de la conception d'une source non classique de photons dans une fibre optique. Il existe en effet plusieurs paramètres importants à considérer dans le choix de la fibre, comme la biréfringence, la non-linéarité et la dispersion. Il est possible, dans une certaine mesure, de jouer sur ces trois paramètres pour générer les effets non-linéaires désirés. Mais la plage de valeurs possibles est toujours limitée, et il est facile de se heurter à des limites fondamentales pour ces trois effets.

La prise en compte du bruit et le filtrage constituent certainement un des aspects les plus fondamentaux de l'élaboration d'une source de photons. Les solutions de filtrage commerciales en fibres optiques sont relativement peu nombreuses, ce qui fait que la plupart des sources citées dans la littérature sont plutôt filtrées dans l'espace libre (voir par exemple Lee *et al.* (2006) ou Lorenz *et al.* (2013)). Pourtant, l'efficacité de certaines techniques de filtrage en fibres proposées dans ce chapitre, en particulier les coupleurs  $2 \times 2$ , devrait inciter à leur utilisation plus fréquente.

#### 5.1 Non-linéarité

Comme tous les matériaux amorphes, la silice possède une symétrie d'inversion qui annule sa susceptibilité électrique d'ordre 2 (voir le chapitre 2). Comme la susceptibilité résulte d'un développement de Taylor autour du champ nul, les termes d'ordre supérieur sont en général plus faibles, et la susceptibilité électrique d'ordre 3 de la silice ne peut pas rivaliser avec la susceptibilité d'ordre 2 de certains cristaux. À titre d'exemple, la susceptibilité d'ordre 2 du cristal BBO (bêta borate de baryum) est de l'ordre de  $4,4 \times 10^{-12} \text{ m.V}^{-1}$  (d'après Boyd (1992)), alors que la susceptibilité d'ordre 3 de la silice est de l'ordre de quelques  $10^{-23} \text{ m}^2.\text{V}^{-2}$  (voir par exemple Buchalter et Meredith (1982)). Il faudrait donc appliquer un champ électrique de l'ordre de  $10^{11} \text{ V.m}^{-1}$  pour obtenir une interaction non-linéaire du même ordre de grandeur dans ces deux matériaux.

Il existe des verres avec de meilleurs rendements non-linéaires. De nombreuses équipes travaillent par exemple en ce moment sur des verres de chalcogénures qui possèdent des susceptibilités quelques centaines de fois plus élevées (voir par exemple Zakery et Elliott (2003)). Cependant, ces verres sont surtout transparents à des longueurs d'onde plus grandes et sont généralement plus délicats à manipuler en raison de leur teneur élevée en éléments

dopants et de leur toxicité. De plus, malgré leurs meilleurs coefficients non-linéaires, les verres de chalcogénures possèdent des facteurs de qualité (rapport entre l'efficacité non-linéaire et l'absorption) moins élevés que ceux de la silice. En fait, la silice est le matériau connu à ce jour comme possédant le meilleur facteur de qualité dans le domaine visible et proche infrarouge.

L'utilisation de fibres optiques en silice permet d'obtenir des effets non-linéaires exploitables grâce à deux propriétés importantes : le confinement de la lumière sur des surfaces transverses très restreintes et la grande longueur d'interaction. Il est possible de jouer sur ces deux paramètres pour augmenter l'efficacité totale du processus non-linéaire. Cependant, il existe des limites à cette optimisation. Par exemple, l'aire transverse ne peut être réduite plus qu'une surface de l'ordre de la longueur d'onde au carré, en raison de la limite de diffraction. En ce qui concerne la longueur d'interaction, le dégroupement ("walkoff" en anglais), dû aux différences de vitesses de groupe entre la pompe et les signaux générés, est le facteur limitant (voir la section 5.4 ci-après).

## 5.2 Biréfringence

Les sources d'intrication en polarisation requièrent l'utilisation d'effets vectoriels dans les fibres (voir le chapitre 2). La condition d'accord de phase dépend alors de la biréfringence de la fibre, et l'étude de ce paramètre est essentielle dans la phase de conception de la source.

### 5.2.1 Biréfringence et accord de phase

L'ordre de grandeur de la biréfringence nécessaire à un accord de phase pour une instabilité de modulation de type orthogonal (type O, voir la section 2.3.3) peut être estimé par la formule 2.68. De même, la formule 2.70 permet d'estimer la biréfringence nécessaire à un accord de phase pour une instabilité de modulation de type mixte (type M).

Prenons l'exemple d'un accord de phase de type O pour une fibre SMF-28<sup>TM</sup> (fibre typique des télécommunications). Supposons qu'on veuille garder les signaux dans la plage étendue des télécommunications (de 1460 à 1625 nm). En pompant au milieu de la plage, vers 1540 nm, il faut donc que les signaux ne soient pas éloignés de plus de 80 nm de la pompe. Cette condition équivaut à  $\delta n \simeq 10^{-6}$  pour  $\beta^{(2)} \simeq -20 \text{ ps}^2 \cdot \text{km}^{-1}$ . Cette valeur est à comparer à la biréfringence typique des fibres commerciales dites à maintien de polarisation, de l'ordre de quelques  $10^{-4}$ , soit au moins deux ordres de grandeur plus importante.

Il faut également tenir compte de la biréfringence accidentelle dans les fibres. Cette biréfringence, due à de très faibles variations géométriques, implique une variation de temps de parcours aléatoire entre deux impulsions de polarisations orthogonales. L'écart-type de

cette variation augmente comme la racine carrée de la longueur parcourue, en raison de caractère aléatoire des inhomogénéités géométriques et des propriétés des marches au hasard. Cet écart-type est une mesure caractéristique des fibres commerciales, connue sous le terme de PMD (“polarization mode dispersion” en anglais, soit dispersion des modes de polarisation). La valeur de la PMD de la fibre SMF-28<sup>TM</sup> est inférieure à  $0,1 \text{ ps} \cdot \text{km}^{-1/2}$  d'après les spécifications du manufacturier. Cela correspond à un écart de 0,01 ps pour une longueur de 10 m, soit une différence d'indices de groupe d'environ  $3 \times 10^{-7}$ . La différence d'indices de phase ne peut pas être très différente de cette valeur, à moins qu'on se trouve dans un milieu extrêmement dispersif, c'est-à-dire près d'une résonance, ce qui n'est pas le cas pour la silice à 1550 nm.

### 5.2.2 Biréfringence par courbure

Les valeurs de biréfringence recherchées sont donc à la fois très faibles et à peine plus importantes que celles de la biréfringence accidentelle des fibres commerciales. C'est sans doute la raison pour laquelle il n'existe à ce jour dans la littérature aucune réalisation de source fondée sur un accord de phase de type O dans le domaine des télécommunications. Nous avons cependant pu ces dernières années largement avancer vers la réalisation d'une telle source, en développant une technique qui nous a permis d'obtenir des biréfringences faibles et contrôlées sur une longueur d'environ 10 m (les résultats obtenus à ce jour dans le but de réaliser cette source sont détaillés dans la partie 6.4).

La photoélasticité est la propriété d'un matériau d'acquérir de la biréfringence sous l'effet des déformations interatomiques générées par une contrainte mécanique. Il est possible d'utiliser cette propriété pour créer de la biréfringence dans les fibres optiques. C'est d'ailleurs l'une des méthodes les plus utilisées commercialement. En général, les contraintes sont imposées par l'inclusion, dans la préforme utilisée pour fabriquer la fibre, de barreaux faits de matériaux ayant des coefficients de dilatation thermique différents de ceux de la silice. Mais il est bien entendu possible de générer des contraintes mécaniques par une autre méthode. En particulier, la flexion permet de générer de la biréfringence sur deux axes principaux bien définis, dans une fibre par ailleurs non-biréfringente (à l'exception près de la biréfringence accidentelle décrite plus haut). Cet effet est bien étudié dans la littérature. Toute courbure impartie à une fibre provoque une biréfringence proportionnelle au carré du rapport entre le rayon externe de la gaine et le rayon de courbure (voir par exemple le chapitre 11 de Chen (2007)). Le coefficient de proportionnalité dépend du matériau. Pour la silice, on a

$$\delta n \simeq 0,11 \frac{r_g^2}{R^2}, \quad (5.1)$$

$r_g$  étant le rayon externe de la gaine de silice et  $R$  le rayon de courbure.

Pour obtenir une biréfringence de l'ordre de  $10^{-6}$ , il faut donc un rapport entre le rayon de la gaine et le rayon de courbure de l'ordre de  $3 \times 10^{-3}$ . Pour un rayon de gaine externe égal à  $62,5 \mu\text{m}$ , le rayon de courbure correspondant est d'environ 2 cm, ce qui est à la limite de causer d'importantes pertes de guidage pour les fibres commerciales.

Afin de permettre l'utilisation de rayons de courbure plus élevés, il est donc judicieux d'essayer d'augmenter le rayon de la gaine externe. Il n'est bien sûr pas possible d'augmenter ce dernier de manière trop importante, car la fibre deviendrait alors trop rigide. Nous avons conçu et fait fabriquer une fibre de rayon de gaine externe égal à  $125 \mu\text{m}$ , soit le double des gaines standard, et avons pu observer que la rigidité d'une telle fibre est tout à fait acceptable. En fait, la rigidité légèrement plus importante est un avantage pour contrôler le rayon de courbure impari en limitant la tendance de la fibre à se tordre.

Afin d'imposer une contrainte de flexion constante sur une grande longueur, nous avons fabriqué un mandrin fileté, en prenant soin d'imposer un profil de filetage adéquat pour le maintien de la fibre en place (voir la Fig. 5.1). L'enroulement de la fibre autour du mandrin constitue une étape délicate. Il est nécessaire d'imposer une légère tension à la fibre pour éviter toute torsion. Nous avons réalisé que le meilleur moyen est d'ajouter environ 10 m de fibre supplémentaires sous la longueur à enrouler. Le poids de la fibre elle-même est alors suffisant pour limiter la torsion de manière adéquate sans imposer de contrainte tensile trop importante (qui aurait pour effet de modifier la biréfringence).

### 5.3 Dispersion

Les accords de phase des effets non-linéaires dans les fibres dépendent fortement de la dispersion, comme le montre le chapitre 2. Il se trouve que la dispersion est un paramètre qui peut être modifié de manière radicale lors de la conception d'une fibre optique. En effet, en plus de la dispersion du matériau, sur laquelle il est difficile de jouer, il existe une dispersion de guidage qui dépend de la géométrie de la fibre et qui joue un rôle très important (voir par exemple Agrawal (2013) ou Chen (2007)).

L'instabilité de modulation scalaire (de type C) ne se développe qu'en dispersion anormale, c'est-à-dire pour  $\beta^{(2)} < 0$  (voir par exemple l'équation 2.66). Dans ces conditions, il est possible d'avoir des conditions d'accord de phase proches pour une instabilité de type C et une instabilité de type O. Il suffit en effet de comparer les équations 2.66 et 2.67 pour s'en rendre compte. La condition d'égalité des accords de phase est alors

$$\delta n = \frac{2 \gamma P \lambda_p}{3\pi}. \quad (5.2)$$

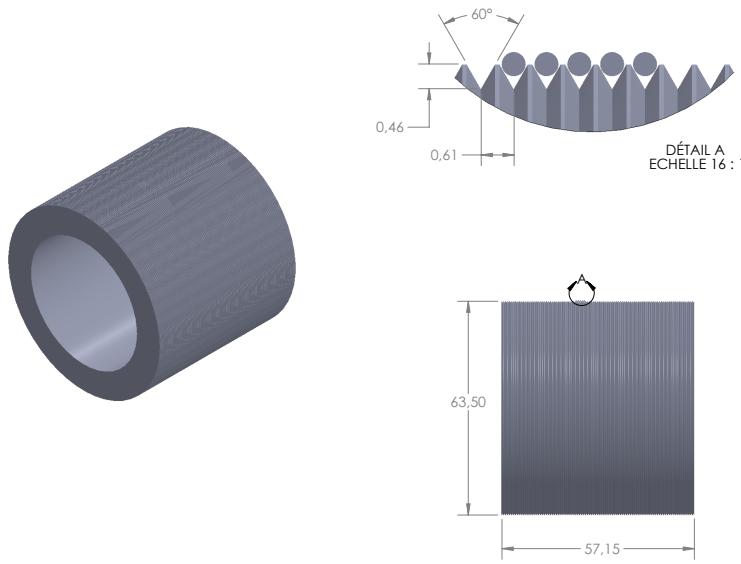


Figure 5.1 Mandrin conçu pour l'enroulement d'une fibre de diamètre externe  $450\ \mu\text{m}$  (diamètre de la gaine acrylique ; le diamètre externe de la silice est  $230\ \mu\text{m}$ ). Toutes les dimensions sont en millimètres. Dessin réalisé (et mandrin usiné) par Mikaël Leduc.

Mais cette condition est proche d'être remplie pour des valeurs de  $\delta n$  de l'ordre de  $10^{-6}$  et des valeurs de  $\gamma P$  de l'ordre de l'unité (condition imposée par la nécessité d'observer les signaux à l'OSA). On se heurte alors à la possibilité de voir se développer une compétition entre différents effets non-linéaires, ce qui peut avoir comme conséquence une suppression de ces mêmes effets, comme nous le montrons maintenant.

On suppose donc que la condition d'accord de phase est remplie pour les instabilités de modulation de type C et de type O. On pompe sur l'axe rapide de la fibre, supposée légèrement biréfringente. Nous notons  $x$  l'axe rapide et  $y$  l'axe lent. *A priori*, les signaux de type C ne se développent que sur l'axe rapide, et les signaux de type O que sur l'axe lent. Mais il est quasiment impossible, dans la réalité, de ne pomper que sur un seul axe. Il existe toujours un peu de pompe, et donc de signal de type C, sur l'axe lent. On suppose donc que la puissance de pompe sur l'axe rapide est  $(1 - \varepsilon^2)P$ , et sur l'axe lent  $\varepsilon^2P$ , avec  $\varepsilon \ll 1$ . En tenant compte des accords de phase, de l'automodulation de phase et de la modulation de

phase croisée, et en posant

$$\begin{aligned}\alpha_{1x} &= a_{1x} e^{-2i\gamma Pz}, \\ \alpha_{1y} &= a_{1y} e^{-i\frac{2}{3}\gamma Pz}, \\ \alpha_{2x}^* &= a_{2x}^* e^{+2i\gamma Pz}, \\ \alpha_{2y}^* &= a_{2y}^* e^{+i\frac{2}{3}\gamma Pz},\end{aligned}\tag{5.3}$$

l'équation 2.50 donne, au premier ordre en  $\varepsilon$

$$\frac{d\alpha_{1x}}{dz} \simeq 2i\gamma P \alpha_{2x}^* + i\varepsilon \left[ \frac{4\gamma P}{3} \cos(\gamma Pz) e^{2i\gamma Pz} \alpha_{1y} + \frac{2\gamma P}{3} e^{i\gamma Pz} \alpha_{2y}^* \right].\tag{5.4}$$

On obtient des équations similaires pour  $\alpha_{1y}$ ,  $\alpha_{2x}^*$  et  $\alpha_{2y}^*$ . Le système complet est résolu en annexe F, en empruntant la technique des perturbations à la mécanique quantique. La résolution est un peu longue, mais sans difficulté particulière. Le terme normalement croissant du signal de type O (correspondant à la valeur propre  $+\gamma P/3$ ) devient alors

$$\begin{aligned}\alpha_{1y}(z) &= \frac{e^{\frac{\gamma Pz}{3}}}{\sqrt{2}} \left\{ \left( A_{y+} - i\varepsilon \frac{43}{65} A_{x+} \right) \right. \\ &+ i\varepsilon A_{x+} e^{\frac{5\gamma Pz}{3}} \left[ \frac{6}{13} \cos\left(\frac{\gamma Pz}{3}\right) - \frac{4}{13} \sin\left(\frac{\gamma Pz}{3}\right) + \frac{1}{25} \cos\left(\frac{5\gamma Pz}{3}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\gamma Pz}{3}\right) \right] \\ &\left. + \text{termes décroissants avec } z \right\}.\tag{5.5}\end{aligned}$$

Malgré la présence du  $\varepsilon$ , les termes oscillants peuvent devenir rapidement dominants en raison de la présence de l'exponentielle croissante. Le signal est alors oscillant plutôt que croissant, comme si on se trouvait en dehors de la plage de gain. Autrement dit, la compétition entre processus non-linéaires a pour effet d'éliminer le signal de type O. Il existe un effet similaire pour le signal de type C, mais il est moins important en raison du gain plus élevé de ce dernier.

En tout cas, il est nettement préférable de chercher à opérer dans un domaine où cet effet de compétition n'existe pas. Pour faire croître une instabilité de modulation vectorielle de type O, il vaut donc mieux se placer en régime de dispersion normale, c'est-à-dire à  $\beta^{(2)} > 0$ . Malheureusement, le domaine standard des télécommunications, autour de 1550 nm, se trouve être dans une plage de dispersion anormale de la SMF-28<sup>TM</sup>. Il est donc nécessaire de concevoir une fibre dont la dispersion de guidage est modifiée pour permettre la génération d'instabilités de modulation vectorielles de type O dans le domaine des télécommunications (voir la section 6.4.2 pour une application).

## 5.4 Dégrouppement (“walkoff”)

La réalisation efficace de mélanges non-linéaires requiert un recouvrement temporel entre les impulsions contenant les photons de pompe et celles contenant les photons générés. En raison des différences entre ces photons (longueur d’onde et état de polarisation en particulier), cette condition n’est en général pas respectée sur une longueur infinie. La séparation temporelle entre les impulsions peut s’écrire sous la forme générale

$$\delta t(L) = \delta \left( \frac{1}{v_g} \right) L, \quad (5.6)$$

où  $L$  est la distance parcourue le long de la fibre, et  $v_g$  est la vitesse de groupe associée à un type de photon particulier. La différence de vitesses de groupes s’entend entre photons de pompe et photons signaux, ou entre les deux photons signaux de part et d’autre de la pompe (c’est la plus grande différence qui compte).

On rappelle que  $\frac{1}{v_g} = \beta^{(1)}$ , où  $\beta^{(1)} \equiv \frac{d\beta}{d\omega}$ .

Il ne peut plus y avoir de croissance des signaux dès que la séparation temporelle dépasse le temps de cohérence des impulsions. On définit donc une longueur non-linéaire maximale  $L_{\max}$  vérifiant

$$\delta t(L_{\max}) = [\delta\beta^{(1)}] L_{\max} = \tau_c \simeq \frac{\lambda_p^2}{c(\delta\lambda_p)}, \quad (5.7)$$

où  $\lambda_p$  est la longueur d’onde moyenne de la pompe et  $\delta\lambda_p$  sa largeur spectrale.

Il vient donc finalement

$$L_{\max} = \frac{\lambda_p^2}{c[\delta\beta^{(1)}](\delta\lambda_p)}. \quad (5.8)$$

### 5.4.1 Dégrouppement dû à la dispersion

La dispersion définit les changements de vitesse de groupe en fonction de la séparation des photons en impulsion. Autrement dit, comme la séparation en impulsion entre les deux filles (de part et d’autre de la pompe) est par définition  $2\delta\omega$ , on a

$$\delta\beta^{(1)} \simeq 2(\delta\omega) |\beta^{(2)}|, \quad (5.9)$$

ce qui donne immédiatement

$$L_{\max} \simeq \frac{\lambda_p^2}{2(\delta\omega) c |\beta^{(2)}| (\delta\lambda_p)}. \quad (5.10)$$

### 5.4.2 Dégroupement dû à la biréfringence

Dans le cadre des mélanges vectoriels, il faut tenir compte du dégroupement dû à la biréfringence. Si celle-ci est due à une contrainte, comme c'est souvent le cas dans les fibres, la différence d'indices de phase est constante sur une large plage de longueurs d'ondes, et elle est alors égale à la différence d'indices de groupe, ce qui permet d'écrire

$$\delta\beta^{(1)} = \delta \left( \frac{1}{v_g} \right) = \frac{\delta n_g}{c}, \quad (5.11)$$

où  $n_g$  est l'indice de groupe, soit

$$L_{\max} = \frac{\lambda_p^2}{(\delta n_g)(\delta\lambda_p)}. \quad (5.12)$$

Notons que lorsque la biréfringence est due à une contrainte mécanique, elle est relativement constante sur une grande plage de longueurs d'onde (voir par exemple Chen (2007)), et on a alors égalité entre biréfringence de phase et biréfringence de groupe ( $\delta n \simeq \delta n_g$ ).

### 5.4.3 Facteur limitant

Au vu des équations 5.10 et 5.12, il est facile de comparer les longueurs maximales. Elles sont égales dès lors que

$$\delta n_g = 2(\delta\omega) |\beta^{(2)}| c. \quad (5.13)$$

Si  $\delta n_g > 2(\delta\omega) |\beta^{(2)}| c$ , le facteur limitant est la biréfringence. Si  $|\beta^{(2)}| > \frac{\delta n_g}{2(\delta\omega) c}$ , la limite est imposée par la dispersion.

## 5.5 Résumé

La conception d'une source non-classique dans les fibres optiques requiert la prise en compte de nombreux paramètres, et en particulier :

- la non-linéarité optique du matériau de la fibre ;
- le confinement de la lumière ;
- la dispersion ;
- la biréfringence ;
- les différences de vitesses de groupe des signaux qui se propagent, à l'origine du dégroupement.

La silice offre le meilleur facteur de qualité (ratio entre la non-linéarité et l'absorption). Une longueur d'interaction de l'ordre de la dizaine de mètres permet d'obtenir de bons effets

non-linéaires dans ce matériau, sans être affecté par le dégroupement.

La dispersion influence la compétition entre effets non-linéaires, et plus spécifiquement entre instabilités de modulation de type C et O. Il est possible de supprimer le type C en dispersion dite normale [ $\beta^{(2)} > 0$ ], afin de privilégier le type O.

Il est difficile de générer des photons proches de la pompe avec une biréfringence élevée. La présence de biréfringence résiduelle accidentelle, même dans une fibre de très grande qualité, fait qu'il n'existe qu'une petite fenêtre de biréfringence, aux alentours de  $\delta n \simeq 10^{-6}$ , permettant de générer des photons sur une plage restreinte de longueurs d'onde.

Ces résultats nous ont menés à la conception d'une nouvelle fibre, que nous avons enroulée pour atteindre la fenêtre étroite de biréfringence visée et réaliser une source de photons intriqués en polarisation dans la plage de longueurs d'onde des télécommunications (voir la section 6.4).

## CHAPITRE 6

### APPLICATIONS

Ce chapitre présente les résultats expérimentaux ayant trait aux sources non-classiques, obtenus au Laboratoire des fibres optiques de l'École Polytechnique de Montréal au cours de ces dernières années. La plupart des expériences mettent en exergue nos travaux sur les effets non-linéaires dans les fibres optiques, avec de nombreuses expériences uniques au monde.

Les démonstrations de génération d'harmoniques et d'instabilités de modulation présentées dans ce chapitre n'auraient pas pu être réalisées sans l'expérience du Laboratoire dans le domaine de la réalisation de fibres effilées et de coupleurs en fibres optiques. Mais cette expérience n'aurait pas été suffisante sans notre compréhension nouvelle de l'utilité des sources laser incohérentes (voir le chapitre 4) pour la mise en pratique de certains effets non-linéaires.

#### 6.1 Fibres effilées torsadées

Nous présentons ici ce que nous croyons être les premiers résultats d'instabilités de modulation vectorielles dans une fibre à biréfringence circulaire (voir la section 2.3.3). Pour obtenir cette condition, des étudiants du laboratoire<sup>1</sup> ont réalisé une torsade d'environ 200 tours sur une fibre SMF-28<sup>TM</sup> effilée jusqu'à un diamètre externe de 3  $\mu\text{m}$ . Un laser "microchip" (modèle SNP-08E-100 de Teem Photonics<sup>®</sup>) a ensuite été injecté dans la torsade. La longueur d'onde de référence du laser est 1064 nm, le taux de répétition 6,5 kHz, la longueur d'impulsion 0,7 ns et la puissance moyenne maximale 60 mW.

Une partie des résultats est présentée sur la Fig. 6.1. Des résultats plus complets ont été publiés dans Singh *et al.* (2010).

#### 6.2 Génération d'harmoniques dans les fibres effilées

Les conditions d'accord de phase de génération d'harmoniques 2.32 et 2.36 sont difficiles à obtenir. Dans un matériau sans absorption, l'indice de réfraction varie de manière monotone avec la longueur d'onde. Il n'est donc pas possible de réaliser ces conditions d'accord de phase avec un seul mode dans une seule polarisation, à moins d'avoir un pic d'absorption entre les longueurs d'onde considérées. La silice ne possédant pas de pic d'absorption dans le visible ou le très proche infrarouge, cette solution n'est pas envisageable dans les fibres classiques.

---

1. Vishal Singh, Anthony Di Salvio et Maxime Tousignant.

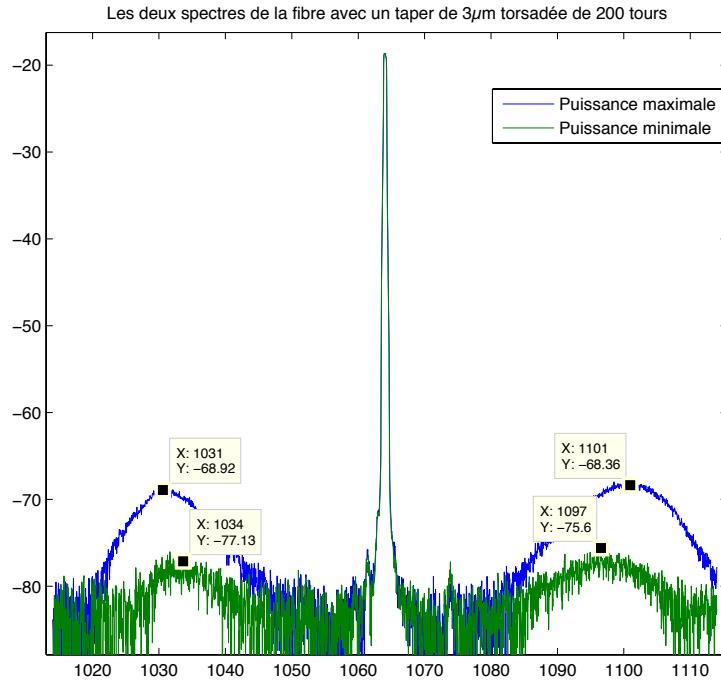


Figure 6.1 Instabilité de modulation vectorielle dans une fibre à biréfringence circulaire.

Dans les cristaux, on peut réaliser l'accord de phase par le biais de la biréfringence. Cette méthode, introduite par Maker *et al.* (1962), est particulièrement adaptée dans ce cas, car il suffit de modifier la direction de propagation dans les cristaux pour faire varier la biréfringence effective.

Dans les fibres, l'utilisation de la biréfringence est plus compliquée. Les fibres à maintien de polarisation utilisent la plupart du temps des contraintes mécaniques pour définir deux axes privilégiés dans le plan transverse. La biréfringence est alors fixée. Contrairement aux cristaux, il n'est pas possible de modifier la direction de propagation. De plus, la biréfringence ainsi obtenue est souvent insuffisante pour obtenir l'accord de phase désiré. À titre d'exemple, la différence d'indice entre les deux axes de polarisation dans la fibre Panda PM de Corning® est de l'ordre de  $\delta n = 4 \times 10^{-4}$ , alors que la différence d'indice entre les modes fondamentaux à 1550 nm et 517 nm (pour la GTH) est de l'ordre de  $2 \times 10^{-2}$ .

Les fibres offrent cependant des possibilités uniques. En particulier, il est possible de faire de l'ingénierie de dispersion dans les fibres microstructurées, dites "à cristaux photoniques" (voir par exemple Knight (2003)). Une autre possibilité est l'utilisation de mélanges intermodaux. Chaque mode possède en effet son propre indice effectif, et il est possible d'obtenir des conditions dans lesquelles les indices effectifs entre deux modes à différentes longueurs d'onde

sont égaux. Nous montrons ici qu'il est possible de contrôler l'accord de phase en utilisant comme degré de liberté le diamètre d'effilage d'une fibre SMF-28<sup>TM</sup>. La Fig. 6.2 (à gauche) montre les indices effectifs des modes  $HE_{11}$  à  $\lambda_p = 1064$  nm et  $HE_{12}$  à  $\lambda_p/3 = 355$  nm. Il existe un accord de phase pour un diamètre d'effilage d'environ  $0,5 \mu\text{m}$ . Il se trouve qu'il existe également un accord de phase entre les modes  $HE_{11}$  à  $\lambda_p = 1064$  nm et  $HE_{21}$  à  $\lambda_p/2 = 532$  nm respectivement, pour un diamètre d'effilage quasi identique, comme le montre la figure de droite. À ce diamètre, une intégration numérique effectuée par le Dr Xavier Daxhelet montre que le coefficient  $\Gamma^Q$  (équation 2.42) atteint la valeur non négligeable de  $4 \times 10^{-2} \text{ W}^{-1/2} \cdot \text{m}^{-1}$  pour le mélange intermodal considéré.

La Fig. 6.3 montre le résultat de l'expérience<sup>2</sup> d'injection d'un laser "microchip" (modèle SNP-08E-100 de Teem Photonics<sup>®</sup>; voir la section 6.1) dans une fibre effilée de diamètre  $0,5 \mu\text{m}$ . Le signal de sortie est récupéré par un spectromètre d'Ocean Optics<sup>®</sup>.

Les résultats des différentes expériences réalisées par notre laboratoire ont été publiés dans Girard *et al.* (2010), Tousignant *et al.* (2010) et Tousignant *et al.* (2011).

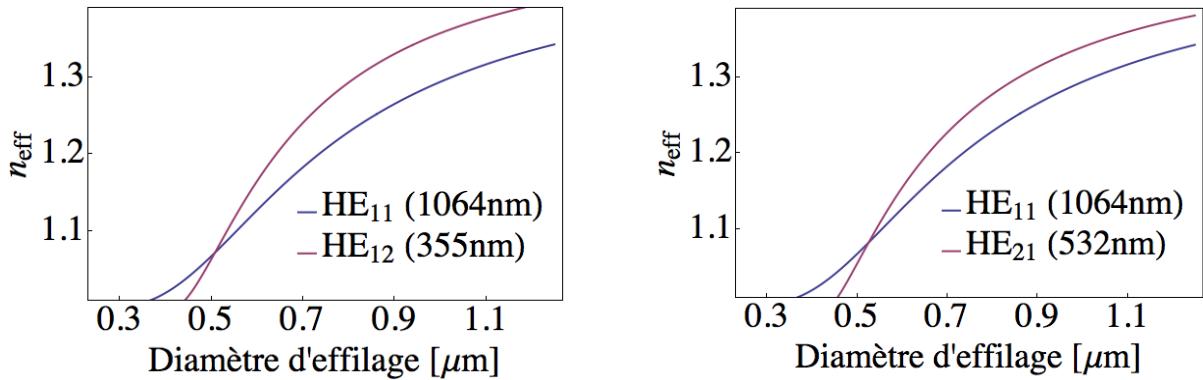


Figure 6.2 À gauche : indices effectifs des modes  $HE_{11}$  à  $\lambda_p = 1064$  nm et  $HE_{12}$  à  $\lambda_p/3 = 355$  nm. À droite : indices effectifs des modes  $HE_{11}$  à  $\lambda_p = 1064$  nm et  $HE_{21}$  à  $\lambda_p/2 = 532$  nm. Il existe un accord de phase pour le second et troisième harmoniques à un diamètre d'effilage de  $0,5 \mu\text{m}$ .

### 6.3 Atténuation de l'automodulation de phase par l'utilisation d'une pompe incohérente

Pour observer un effet non-linéaire particulier, il est nécessaire, comme nous l'avons vu, de s'affranchir de tous les effets parasites qui pourraient faire concurrence au processus qu'on cherche à favoriser. L'un des effets les plus fréquemment rencontrés dans les fibres est l'au-

2. réalisée par un étudiant du laboratoire, Maxime Tousignant.

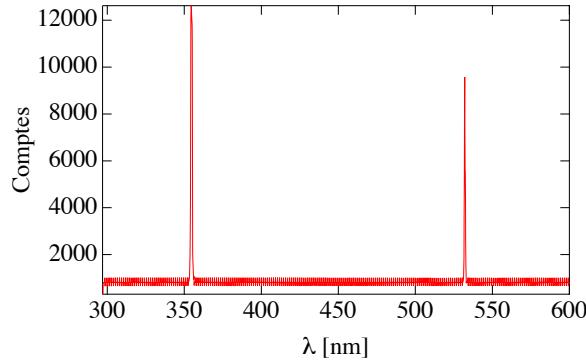


Figure 6.3 Comptes sur le spectromètre d’Ocean Optics® à la sortie d’une fibre effilée de diamètre externe  $0,5\text{ }\mu\text{m}$ . Les signaux de second (532 nm) et troisième (355 nm) harmoniques de la pompe à 1064 nm sont clairement visibles.

tomodulation de phase. Il est impératif d’atténuer cet effet pour faire apparaître d’autres processus non-linéaires proches de la pompe.

Nous montrons dans cette section qu’il est possible de supprimer l’automodulation de phase, tout en conservant d’autres effets non-linéaires, en utilisant une pompe incohérente. Cette démonstration permet également de comparer la théorie développée au chapitre 4 aux résultats de l’expérience.

Dans un premier temps, nous avons utilisé la méthode “split-step Fourier” généralisée décrite dans la section 4.3, pour faire se propager deux pompes gaussiennes (voir les équations exactes dans l’annexe E), l’une étant cohérente, et l’autre non. Les conditions de calcul sont les suivantes :

- Les deux spectres initiaux sont identiques ; ainsi, les deux pompes ont le même temps de cohérence  $\tau_c$ , grâce au théorème de Wiener-Khintchine.
- Les deux pompes ont la même puissance crête. C’est en effet le critère usuel utilisé pour comparer des effets non-linéaires associés à des pompes distinctes. Il est à noter que cela implique une énergie totale plus grande dans l’impulsion incohérente, car elle est plus longue (voir ci-dessous).
- Les conditions de propagation (coefficients non-linéaires  $\gamma$ , dispersion  $\beta(\omega)$ , longueur de fibre) sont identiques et correspondent à la SMF-28<sup>TM</sup> de Corning.
- Seule la longueur d’impulsion change. Plus précisément,
  - $\tau = \tau_c$  pour le cas cohérent (impulsion “Fourier limitée”) ;
  - $\tau = 10\tau_c$  pour le cas incohérent.

Les résultats sont illustrés sur la Fig. 6.4 (propagation des spectres linéaires) et sur la Fig. 6.5 (spectres finaux en dB, comparés aux spectres expérimentaux).

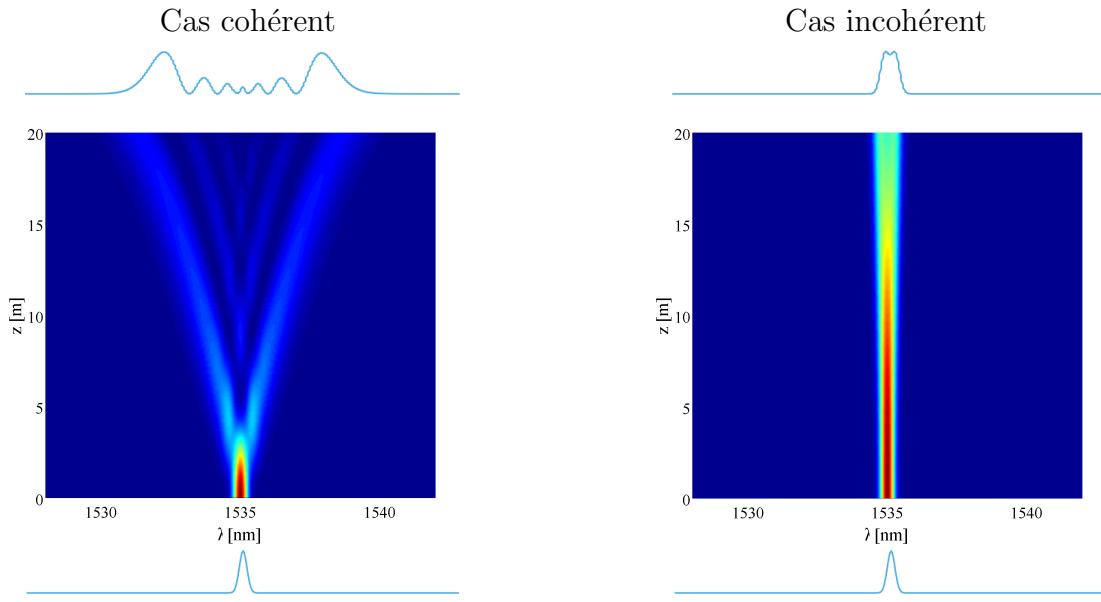


Figure 6.4 Propagation d'une pompe cohérente (figures de gauche) et incohérente (figures de droite) le long d'une fibre de type SMF-28<sup>TM</sup>. Les résultats calculés montrent clairement le développement de l'automodulation de phase dans le cadre cohérent. Cette dernière est largement amortie dans le cas incohérent, alors même que l'impulsion est plus énergétique. Les spectres initiaux sont identiques, gaussiens et représentés en bas des surfaces (en échelle linéaire). Les spectres finaux sont représentés en haut des surfaces (toujours en échelle linéaire).

Afin de confronter ces calculs à l'expérience, nous avons injecté deux pompes (l'une cohérente, l'autre pas) dans de la fibre SMF-28<sup>TM</sup>. Les conditions expérimentales vérifient :

- Les deux spectres initiaux sont quasiment identiques ; de plus, nous avons ajouté un filtre de Bragg en volume avant l'injection pour purifier les spectres.
- Les deux pompes ont quasiment la même puissance crête mesurée (à un facteur 1.2 près).
- Les conditions de propagation sont identiques, puisque les pompes ont été injectées dans la même fibre (environ 100 m de SMF-28<sup>TM</sup>).
- Seule la longueur d'impulsion change. Plus précisément,
  - $\tau \simeq 20$  ps pour le laser cohérent (impulsion quasi “Fourier limitée”) ; le laser est laser à fibre (modèle WPA01-1545 de Genia Photonics<sup>®</sup>), accordable en longueur d'onde sur la plage 1525 – 1565 nm, avec un taux de répétition d'environ 17 MHz et une puissance moyenne maximale de 50 mW ;
  - $\tau \simeq 5$  ns pour le cas incohérent (donc  $\tau \simeq 250\tau_c$ ) ; le laser est de type “micro-chip” (modèle MNE-06E-0P1 de Teem Photonics<sup>®</sup>), émettant à la longueur d'onde 1535 nm, avec un taux de répétition d'environ 3,2 kHz et une puissance moyenne

maximale de 21 mW.

Les calculs effectués plus haut ne sont pas réalisés avec les valeurs expérimentales exactes, essentiellement pour des raisons de temps de calcul. Il a fallu imposer des puissances crêtes plus importantes dans les calculs que dans les expériences, pour compenser l'effet dû à une longueur de propagation plus faible. De plus, il n'est pas possible, avec les ordinateurs dont nous disposons, de traiter le cas  $\tau \simeq 250\tau_c$  (voir la discussion de la section 4.3.3). Nous avons dû nous contenter de  $\tau = 10\tau_c$ . Mais les résultats montrent quand même l'effet essentiel, à savoir l'atténuation de l'automodulation de phase, à la fois sur les courbes calculées et sur les courbes mesurées, comme on peut le constater sur la Fig. 6.5.

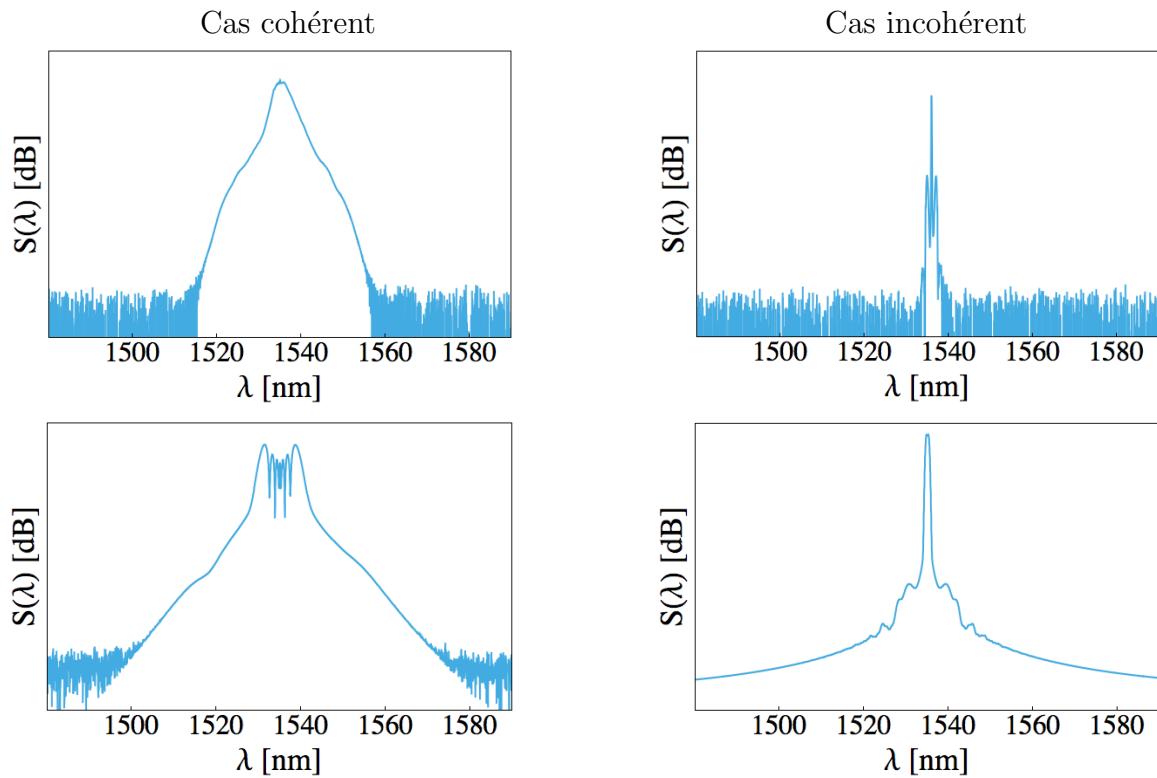


Figure 6.5 Spectres finaux, expérimentaux (en haut), et calculés (en bas). Les spectres de gauche représentent le cas cohérent, et les spectres de droite le cas incohérent.

On note quelques différences entre les courbes expérimentales et calculées, et en particulier un élargissement plus important sur ces dernières. Cet effet est dû à un coefficient  $\gamma P L$  total plus élevé, mais aussi, dans le cas incohérent, au fait que le rapport entre la longueur d'impulsion et le temps de cohérence est moins élevé dans le calcul. L'automodulation de phase est donc moins supprimée que dans l'expérience, et cet effet se fait sentir.

Cependant, on constate clairement que l'automodulation de phase disparaît en même temps que la cohérence, et que d'autres effets non-linéaires peuvent apparaître près de la

pompe. Dans ce cas-ci, il s'agit de l'instabilité de modulation scalaire, qui ne peut être observée avec une pompe cohérente, mais qui apparaît clairement lorsqu'une pompe incohérente est utilisée. On la devine aussi sur la courbe calculée avec une pompe incohérente.

L'atténuation de l'automodulation de phase est due au fait que la cohérence est caractérisée par des relations de phase bien définies entre les différentes composantes temporelles de l'impulsion. Comme son nom l'indique, l'automodulation de phase module la phase, ce qui affecte ces relations bien définies. Dans le cas incohérent, ces relations de phase sont, dès le départ, aléatoires. L'ajout d'une fonction bien définie à une fonction aléatoire donne un résultat qui reste aléatoire, et l'automodulation de phase n'a donc pas d'effet sur une pompe totalement incohérente.

Ce résultat était loin d'être évident lorsque nous avons commencé l'exploration des instabilités vectorielles. Nous avons passé plusieurs années à explorer ces instabilités à l'aide d'une pompe cohérente, sans jamais pouvoir obtenir de résultat positif. C'est ce qui nous a amené à considérer les pompes incohérentes et à développer le formalisme du chapitre 4. Les résultats obtenus ici expliquent non seulement nos échecs initiaux, mais également *a posteriori* d'autres résultats négatifs de tentatives de génération d'effets non-linéaires avec des pompes cohérentes, observés dans le passé par le Laboratoire mais qui n'avaient jusqu'ici pas pu être expliqués.

Ces résultats nous ont finalement amené à changer la pompe, ce qui a permis de débloquer les expériences. En particulier, la section 6.4 montre comment nous avons pu obtenir les premiers résultats d'instabilités de modulation vectorielles de type orthogonal dans le domaine des télécommunications, avec une pompe incohérente. Les résultats des sections 6.1 et 6.2 ont également été obtenus avec des pompes incohérentes.

Par ailleurs, une discussion avec Alexandre Kudlinski, de l'Université des Sciences et Technologies de Lille 1, nous a permis de rapprocher ces observations de résultats intéressants obtenus par son équipe lors de la génération de supercontinua. Ces derniers semblent en effet préférentiellement se fonder sur l'automodulation de phase lorsqu'une pompe cohérente est utilisée, et sur d'autres effets, telles les instabilités de modulation, avec une pompe incohérente.

## 6.4 Génération d'intrication par instabilité de modulation vectorielle

Dans cette section, nous présentons une expérience de génération d'intrication dans une source entièrement fibrée, au travers d'une instabilité de modulation vectorielle de type orthogonal, à des longueurs d'onde appartenant au domaine des télécommunications. Il est à noter que cette expérience est nouvelle, même si des sources de photons intriqués en polarisation

ont déjà été réalisées dans le domaine des télécommunications, mais par le biais d'instabilités de modulation scalaires (voir par exemple Li *et al.* (2005) et Lee *et al.* (2006)). Une source de photons intriqués fondée sur une instabilité de modulation vectorielle de type orthogonal a également été réalisée récemment (voir Lorenz *et al.* (2013)), mais la pompe et les signaux étaient dans le visible ou le très proche infrarouge (entre 600 et 800 nm). L'avantage d'utiliser le type orthogonal est qu'il est possible d'utiliser le schéma en boucle décrit sur la Fig. 3.4. Le cube séparateur de polarisation joue alors le rôle d'un premier filtre pour le signal de pompe et tous les signaux copolarisés avec la pompe, y compris la majorité du signal Raman.

Comme nous l'avons remarqué en début de chapitre, les sources décrites dans la littérature sont toujours filtrées dans l'espace libre. Nous proposons ici une génération et un filtrage entièrement fibrés. Parmi les avantages qu'on peut attendre d'un tel système figurent la très grande stabilité dans le temps et l'absence d'alignement optique. Ces avantages sont décisifs pour la conception de sources potentiellement déployables en-dehors du laboratoire.

#### 6.4.1 Description de la source

Le principe de la source et du filtrage entièrement fibrés est décrit à la Fig. 6.6.

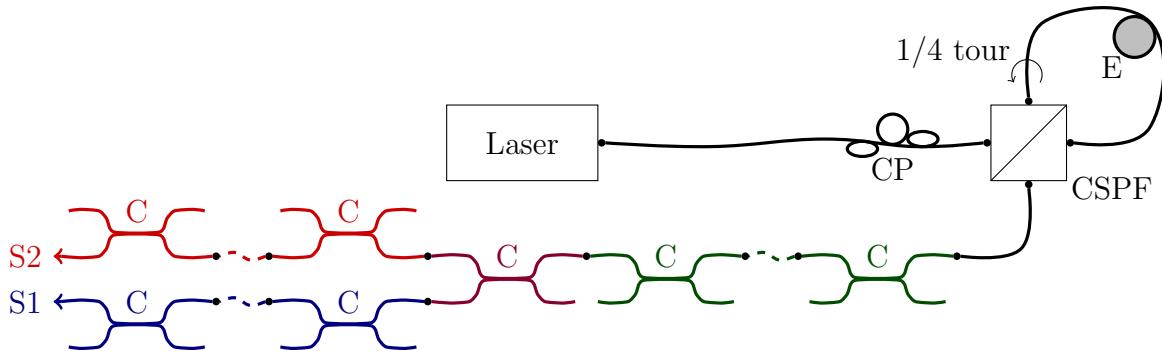


Figure 6.6 Schéma d'une source d'intrication en polarisation dans le domaine des télécommunications. Cette source est fondée sur l'instabilité de modulation de type O. CP : contrôleur de polarisation ; CSPF : cube séparateur de polarisation fibré ; E : enroulement destiné à rendre la fibre biréfringente ; C : coupleur ; S1 : sortie optique du signal 1 ; S2 : sortie optique du signal 2.

Les étapes de la génération d'intrication et de filtrage sont les suivantes :

1. Un laser pulsé est injecté dans une fibre ; son état de polarisation est préparé dans l'état "diagonal"  $|D\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$  grâce à un contrôleur de polarisation (CP sur la figure). Il peut s'agir par exemple de boucles de Lefèvre (voir Lefèvre (1980)).
2. L'état diagonal est injecté dans un cube séparateur de polarisation fibré (CSPF sur la figure).

3. Les deux sorties du cube séparateur de polarisation forment les deux extrémités d'une boucle de fibre optique.
4. Dans la boucle, la fibre est enroulée (E sur la figure) sur une longueur d'environ 10 m, afin de lui procurer une faible biréfringence (de l'ordre de quelques  $10^{-6}$ ). On fait subir un quart de tour à l'une des extrémités de la fibre pour s'assurer que les photons de pompe sont injectés sur le même axe de la fibre (axe lent).
5. La biréfringence de l'enroulement, ainsi que la dispersion normale de la fibre enroulée, favorisent une instabilité de modulation vectorielle de type O. Dans ce processus, deux photons de pompe disparaissent au profit d'un photon de plus petite longueur d'onde et d'un photon de plus grande longueur d'onde. Les deux photons signaux sont copolarisés et polarisés orthogonalement aux photons de pompe.
6. L'intrication est causée par l'indétermination du sens de parcours des photons de pompe, imposée par l'état de polarisation "diagonal" à l'entrée du cube séparateur de polarisation.
7. Les photons signaux sortent par le quatrième port du cube séparateur de polarisation ; les photons de pompe, ainsi que tous les photons copolarisés avec ceux-ci (comme la majorité des photons issus de l'effet Raman stimulé ; voir à ce sujet la thèse de Kang (2002)), ressortent par le port d'entrée. Un circulateur optique (non montré sur la figure) peut les récolter pour éviter un retour vers le laser. Ainsi, le cube séparateur de polarisation assure un premier filtrage des photons de pompe (environ 20 dB).
8. Plusieurs coupleurs (en vert sur la figure) forment une seconde étape de filtrage. Les coupleurs permettent la séparation de longueurs d'ondes dans les fibres optiques (voir par exemple Bures (2009)). Ils sont l'une des spécialités de notre laboratoire. Les coupleurs placés directement en sortie du cube séparateur de polarisation sont chargés de rejeter les photons de pompe résiduels, tout en transmettant dans la même branche les deux photons signaux (la réjection de pompe est d'environ 15 dB par coupleur).
9. Un coupleur (en violet sur la figure) sépare les deux photons signaux et les envoie dans deux branches distinctes.
10. Dans chaque branche, des coupleurs additionnels (en bleu et rouge sur la figure) rejettent les photons d'éventuels signaux additionnels observés dans le spectre, et en particulier du signal Raman stimulé (environ 15 dB de réjection par coupleur).

### 6.4.2 Instabilité de modulation vectorielle de type O dans le domaine des télécommunications

Nous décrivons ici ce que nous pensons être la première expérience de génération d'instabilité de modulation vectorielle de type orthogonal dans le domaine des longueurs d'onde associées aux télécommunications dans les fibres optiques. Pour parvenir à ce résultat, nous avons dû concevoir et faire fabriquer une fibre spéciale. L'objectif de la conception était double :

1. obtenir une dispersion normale dans le domaine des télécommunications ;
2. réaliser une fibre dont le diamètre externe est d'environ  $250 \mu\text{m}$ , afin de faciliter l'enroulement et l'obtention d'une biréfringence de l'ordre de quelques  $10^{-6}$ .

#### Conception de fibre

Nous avons conçu (et fait fabriquer par le groupe du Professeur Younès Messaddeq du Centre Optique Photonique et Lasers de l'Université Laval à Québec) une fibre spécifiquement destinée à être enroulée autour du mandrin de la Fig. 5.1. Cette fibre possède une dispersion normale autour de 1550 nm et un diamètre externe de silice de  $230 \mu\text{m}$ . Le profil d'indice théorique est illustré sur la Fig. 6.7, avec le profil d'indice réel de la préforme. Afin d'obtenir la dispersion voulue, il a fallu largement réduire le diamètre du cœur et augmenter le contraste d'indice entre cœur et gaine par rapport à la fibre commerciale SMF-28<sup>TM</sup>. Cette diminution du diamètre du cœur s'accompagne d'une diminution du diamètre du mode, d'un facteur 2,4 environ, ce qui réduit l'aire effective de ce dernier d'un facteur 5,7, et augmente d'autant le coefficient non-linéaire effectif.

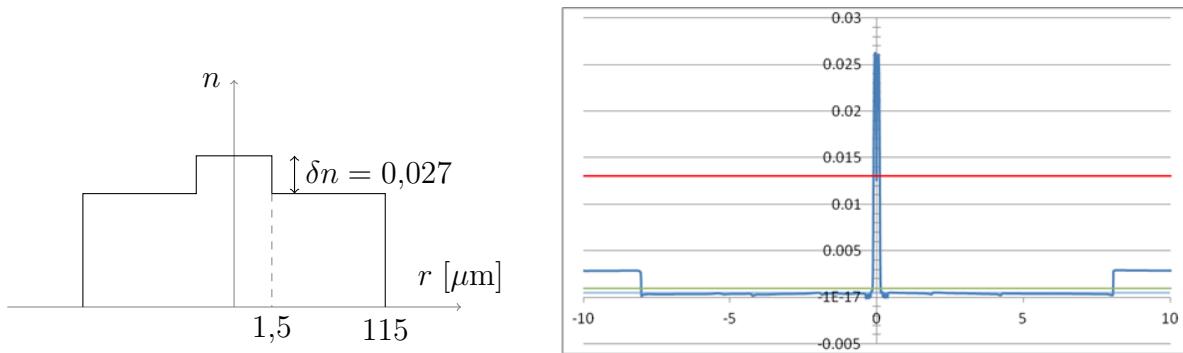


Figure 6.7 Profil d'indice de la fibre conçue pour l'enroulement. À gauche, le profil théorique de la fibre (afin de montrer les détails, le profil n'est pas à l'échelle). À droite, le profil réel de la préforme (l'axe des abscisses montre des dimensions en millimètres).

Après enroulement sur le mandrin décrit dans la section 5.2.2, il est possible de mesurer

sa biréfringence en la plaçant entre deux polariseurs. En effet, si on impose un état de polarisation “diagonal”  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$  en entrée de fibre, l’état de polarisation en sortie de fibre doit être  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + e^{i2\pi\delta n L/\lambda}|V\rangle)$ , à une phase globale près. Si le polariseur en sortie de fibre ne laisse passer que l’état diagonal, la puissance en sortie de polariseur est alors proportionnelle à  $\cos^2(\pi\delta n L/\lambda)$ . À l’aide d’une source spectralement large, on peut alors mesurer la variation de  $\delta n(\lambda)/\lambda$ , et donc la biréfringence de groupe. Comme la biréfringence est induite par une contrainte mécanique, la biréfringence ainsi mesurée est considérée comme identique à la biréfringence de phase. La biréfringence mesurée dans le cas particulier de l’enroulement est  $\delta n \simeq 2,6 \times 10^{-6}$ .

L’une des caractéristiques intéressantes de la fibre ainsi conçue est que, lorsqu’elle est étirée pour faire coïncider son diamètre externe avec celui de la SMF-28<sup>TM</sup> (afin de faciliter l’épissure avec cette dernière), le diamètre de son mode fondamental à 1550 nm est proche de celui de la SMF-28<sup>TM</sup> (voir la Fig. 6.8), ce qui réduit les pertes de couplage.

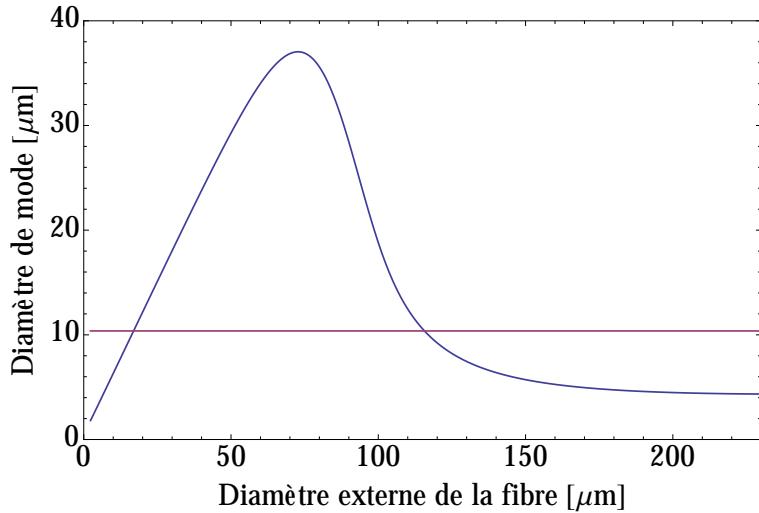


Figure 6.8 Diamètre du mode fondamental (à  $\lambda_p = 1550$  nm) de la fibre conçue pour l’enroulement, en fonction de son diamètre d’étirage. La ligne rouge représente le diamètre du mode fondamental de la SMF-28<sup>TM</sup>. Les diamètres de mode sont proches lorsque le diamètre externe de la fibre conçue pour l’enroulement est égal à 125  $\mu\text{m}$ , le diamètre externe de la SMF-28<sup>TM</sup>.

## Résultats

La Fig. 6.9 montre les résultats obtenus avec la fibre décrite ci-dessus. Nous pensons que ces résultats constituent la première démonstration d’instabilité vectorielle de type orthogonal dans le domaine des longueurs d’onde des télécommunications. La pompe utilisée pour

cette expérience est un laser “microchip” de Teem Photonics<sup>TM</sup>(modèle MNE-06E-0P1), de longueur d’onde  $\lambda_p = 1535$  nm, de durée d’impulsion 5 ns et de taux de répétition 3,2 kHz. La puissance moyenne de pompe est au maximum de 21 mW. Les deux signaux sont obtenus autour des longueurs d’onde  $\lambda_1 \simeq 1497$  nm et  $\lambda_2 \simeq 1577$  nm. Un calcul d’accord de phase de type “force brute” (voir la section 2.4.2) donne ces mêmes valeurs à un nanomètre près.

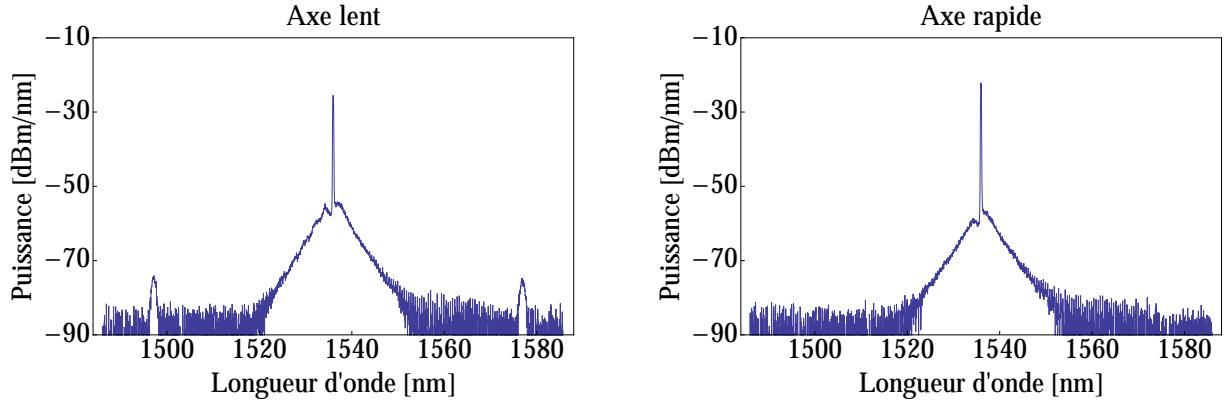


Figure 6.9 Première démonstration d’une instabilité de modulation de type orthogonal dans le domaine des longueurs d’onde des télécommunications. À gauche, le spectre lorsqu’on pompe sur l’axe lent. On distingue très nettement les deux signaux autour de  $\lambda_1 \simeq 1497$  nm et  $\lambda_2 \simeq 1577$  nm. À droite, le spectre lorsqu’on pompe sur l’axe rapide. Les deux signaux ont disparu car l’accord de phase n’existe en dispersion normale que pour une pompe sur l’axe lent. Le signal Raman stimulé, très important, n’est pas représenté ici car il est centré vers 1650 nm (voir Fig. 6.11).

Le résultat ainsi obtenu possède des caractéristiques qui permettent d’envisager son utilisation comme une bonne source de biphotons. On remarque en particulier que les signaux sont relativement étroits (environ 1 nm à 3 dB), et qu’ils se détachent nettement du bruit de fond. La Fig. 6.10 montre l’évolution du spectre de l’un des signaux en fonction de la puissance crête de la pompe.

Notons que nous avons tenté, en vain, d’obtenir des résultats similaires avec une pompe cohérente. Comme montré dans le chapitre 4, l’automodulation de phase empêche dans ce cadre le développement de l’instabilité de modulation recherchée. L’utilisation d’une pompe incohérente est alors indispensable.

#### 6.4.3 Filtrage

Le filtrage des signaux de sortie est une étape extrêmement importante de la réalisation d’une source de photons. En particulier, la puissance de pompe est en général une bonne dizaine d’ordres de grandeur au-dessus de la puissance des signaux. Un calcul rapide d’ordre

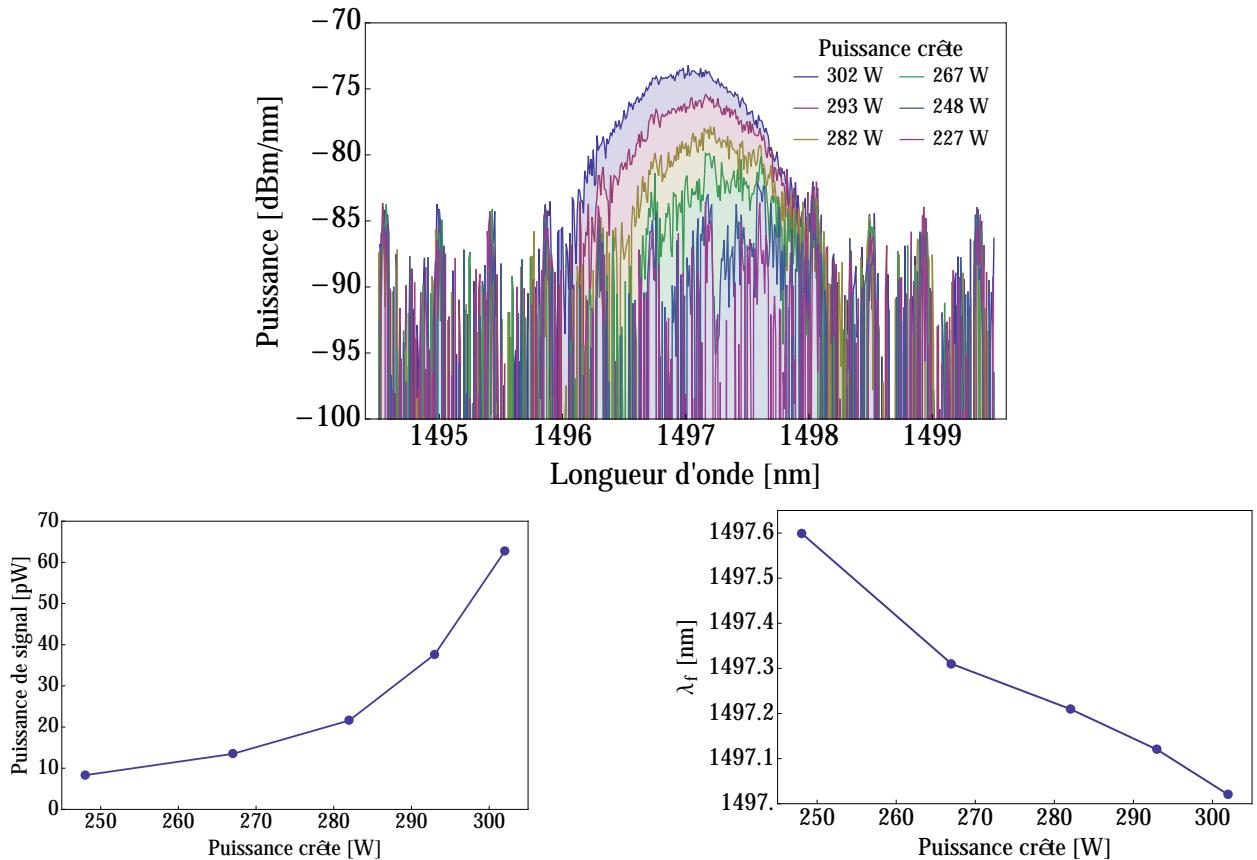


Figure 6.10 Évolution du spectre du signal à  $\lambda_1 \simeq 1497$  nm en fonction de la puissance crête de la pompe. La relation de puissance est exponentielle, comme le prévoit l'équation 3.51. De plus, la longueur d'onde centrale s'éloigne de la pompe lorsque la puissance augmente, comme le prédit la relation 2.67.

de grandeur peut nous en convaincre aisément. La formule 3.54 implique en effet que si on veut un nombre moyen de biphotons par impulsion de l'ordre de  $\mu \simeq 0,1$ , il faut avoir  $\Gamma P L \simeq 0,3$ . L'ordre de grandeur de  $\Gamma$  varie de  $10^{-3}$  à quelques  $10^{-2}$ . La valeur de  $L$  ne peut dépasser quelques dizaines de mètres en raison du dégroupement (voir la section 5.4). Ainsi, la puissance (crête) de pompe ne peut être de beaucoup inférieure à 1 W. Cela correspond à environ  $10^{19}$  photons par seconde dans le domaine des longueurs d'onde des télécommunications. Même avec un taux de répétition de l'ordre de la dizaine de MHz, il y a environ  $10^{12}$  photons dans chacune des impulsions, soit 13 ordres de grandeur au-dessus du signal désiré. Il faut donc imposer un filtrage d'au moins 130 à 140 dB pour ramener le signal de pompe à un niveau raisonnable.

Comme nous l'avons vu plus haut, ce filtrage est généralement réalisé dans l'espace libre pour ce type d'expérience. Nous présentons ici une solution entièrement fibrée, principalement fondée sur l'utilisation de coupleurs, comme le montre la Fig. 6.6.

La première série de coupleurs permet d'éliminer la pompe, tout en conservant les deux signaux. Avec 5 coupleurs, on passe alors de la situation de la Fig 6.9 à celle de la partie gauche de la Fig. 6.11. La pompe a clairement disparu, mais il reste beaucoup de signal Raman stimulé, et beaucoup de signal parasite autour des deux pics recherchés. Ce signal parasite est dû à la pompe utilisée. Il est éliminé en plaçant un coupleur immédiatement en aval de la pompe. Le signal Raman est quant à lui éliminé par l'utilisation de coupleurs spécifiques (en rouge et bleu sur la Fig. 6.6) dans chacune des branches, après séparation des signaux par un coupleur spécial (en violet sur la Fig. 6.6).

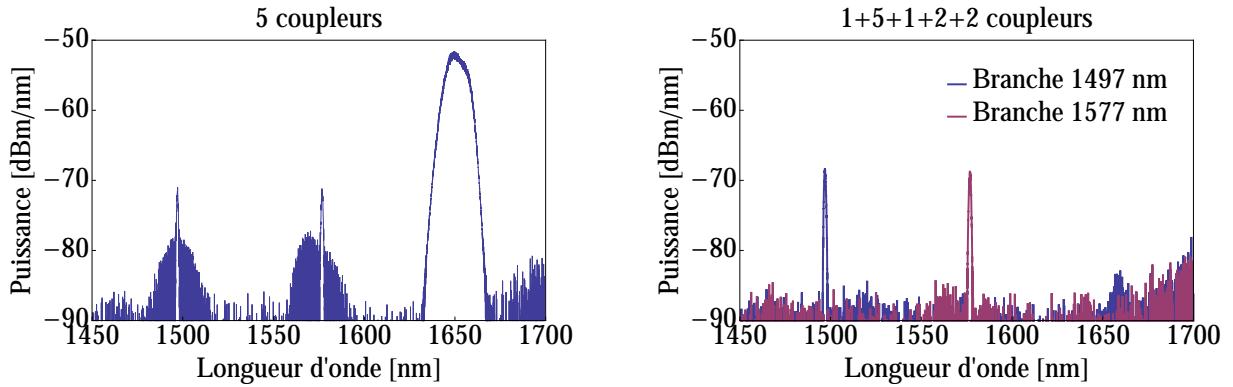


Figure 6.11 À gauche : signal obtenu à l'OSA après 5 coupleurs. Si la pompe a bien disparu, le signal Raman stimulé reste très important. Il reste également du signal parasite (provenant du spectre de la pompe) autour des signaux recherchés. Ce signal parasite est éliminé par un coupleur situé en amont de l'enroulement, comme montré sur la figure de droite. Sur cette même figure, les signaux ont été séparés en deux branches, et le signal Raman stimulé (centré à 1650 nm) a été largement réduit par l'utilisation de coupleurs spécifiques dans chacune des branches.

Tous les coupleurs insérés dans le montage ont été caractérisés individuellement après leur fabrication. Cette caractérisation permet de déterminer le profil de filtrage dans chacune des branches. Ce profil est représenté sur la Fig. 6.12. On remarque que l'extinction peut être très grande et les pertes très faibles, ce qui constitue la force des coupleurs. Le revers de la médaille est que la plage de longueurs d'onde moins filtrées est relativement large. Le filtrage par coupleur se révèle alors insuffisant pour éliminer toutes les sources de bruit. Ce problème ne peut être observé à l'OSA. Il faut attendre les résultats en comptage de photons (voir la section 6.4.4 ci-dessous) pour le remarquer.

#### 6.4.4 Résultats en comptage de photons

La dernière étape de vérification du filtrage, avant de passer à l'expérience elle-même, consiste à vérifier que le nombre d'événements comptés dans chaque branche suit une loi

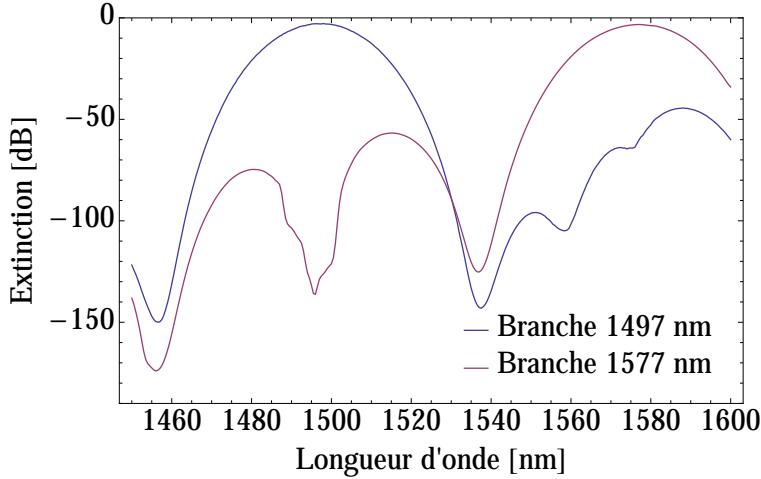


Figure 6.12 Extinction mesurée pour chaque branche après insertion de l'ensemble des coupleurs.

quadratique avec la puissance de pompe, comme le laisse supposer le développement de Taylor de la formule 3.54 à faible  $\Gamma P L$  soit

$$\mu \equiv \langle N_1(L) \rangle \simeq (\Gamma P L)^2 \quad (6.1)$$

$\mu$  étant le nombre de biphotons générés dans chaque impulsion.

Les meilleures mesures obtenues à ce jour montrent cependant une forte composante linéaire associée au signal quadratique, comme le montre la Fig. 6.13. Comme on peut le constater, le bruit linéaire est prépondérant, même dans la meilleure branche. Nous interprétons ce bruit comme le signal Raman spontané présent sur toute la plage qui reste peu filtrée par les coupleurs (car les signaux sont très proches de la pompe). Pour améliorer le signal, il serait nécessaire d'utiliser une solution de filtrage supplémentaire. Par exemple, on peut envisager d'utiliser un circulateur et un réseau de Bragg, comme indiqué sur la Fig. 6.14. En fait, les courbes de la Fig. 6.13 ont été obtenues avec un montage comprenant cette étape de filtrage. Malheureusement, les réseaux de Bragg utilisés étaient encore beaucoup trop larges (environ 10 nm). À l'heure où ces lignes sont écrites, nous n'avons pas pu réaliser de montage avec de meilleurs réseaux. Il serait également envisageable de refroidir la fibre en la baignant dans l'azote liquide. Cela aurait pour effet de réduire la population de phonons, et donc le nombre de photons parasites, d'un facteur

$$\frac{e^{\hbar\delta\omega/k_B T_{\text{amb.}}}-1}{e^{\hbar\delta\omega/k_B T_{\text{Nliq.}}}-1}, \quad (6.2)$$

où  $\delta\omega$  est le décalage en pulsation entre la pompe et le signal,  $k_B$  la constante de Boltzmann,

$T_{\text{amb.}}$  la température ambiante (300 K), et  $T_{\text{Nliq.}}$  la température de l'azote liquide (77 K). Le facteur de réduction du nombre de photons parasites serait alors de l'ordre de 20. Cette manipulation n'a pas non plus encore pu être effectuée dans notre laboratoire.

Au stade actuel des choses, même en imaginant qu'on puisse obtenir le même rapport signal sur bruit dans la branche à  $\lambda = 1577$  nm que dans la branche à  $\lambda = 1497$  nm, les formules développées à la section 3.2.3 permettent de montrer que l'état mesuré en sortie de source serait loin d'être l'état de Bell  $|\Phi^+\rangle$  recherché, comme le montre la reconstitution de la matrice densité de vraisemblance maximale sur la Fig. 6.15. Les paramètres utilisés pour cette reconstitution ont été tirés des résultats expérimentaux illustrés par la Fig. 6.13.

La section 3.2.3 montre qu'on peut également, avec ces mesures, estimer la valeur qu'on obtiendrait dans une expérience de type Bell-CHSH. Les paramètres mesurés de la source donnent une valeur de  $\mathcal{S} \simeq 0,63$ . On se trouve donc très loin de la valeur minimale  $\mathcal{S} = 2$  d'une source non-classique. Ceci est dû à la pente abrupte de la surface de la Fig. 3.6. On se trouve déjà dans une zone où la valeur mesurée du paramètre  $\mathcal{S}$  s'est effondrée. En raison de l'effet de seuil abrupt, il ne faut pas lire dans ce résultat une absence totale de corrélations. Elles existent bel et bien, mais elles sont dominées par le bruit en excès. Nous ne nous situons pas très loin du seuil qui nous permettrait de repasser à un paramètre  $\mathcal{S}$  non-classique. Nos calculs indiquent qu'une réduction du bruit d'un facteur 4 serait suffisante pour obtenir  $\mathcal{S} \simeq 2,27$ .

On peut également calculer une mesure de "proximité" entre la matrice densité calculée  $\hat{\rho}$  et la matrice densité de référence  $\hat{\rho}_{\text{réf.}}$ , au moyen du paramètre de "fidélité" défini par

$$\mathcal{F} \equiv \text{Tr} \left[ \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}_{\text{réf.}}} \hat{\rho} \sqrt{\hat{\rho}_{\text{réf.}}}} \right], \quad (6.3)$$

où l'opérateur  $\sqrt{\hat{\rho}}$  est défini, pour des opérateurs hilbertiens, par

$$\sqrt{\hat{\rho}} = \sum \sqrt{\nu_i} |\phi_i\rangle \langle \phi_i|, \quad (6.4)$$

les  $\{\nu_i\}$  étant les valeurs propres (réelles positives) de l'opérateur  $\hat{\rho}$ , et les  $\{|\phi_i\rangle\}$  les vecteurs propres associés.

La valeur de  $\mathcal{F}$  ainsi défini est comprise entre 0 et 1 pour des matrices densité d'état physiques. Une valeur proche de 1 montre une grande proximité entre  $\hat{\rho}$  et  $\hat{\rho}_{\text{réf.}}$ . La valeur calculée dans notre cas est  $\mathcal{F} \simeq 0,64$ , ce qui est très bas, comme on pouvait le craindre. Une réduction de bruit d'un facteur 4 permettrait d'atteindre  $\mathcal{F} \simeq 0,92$ .

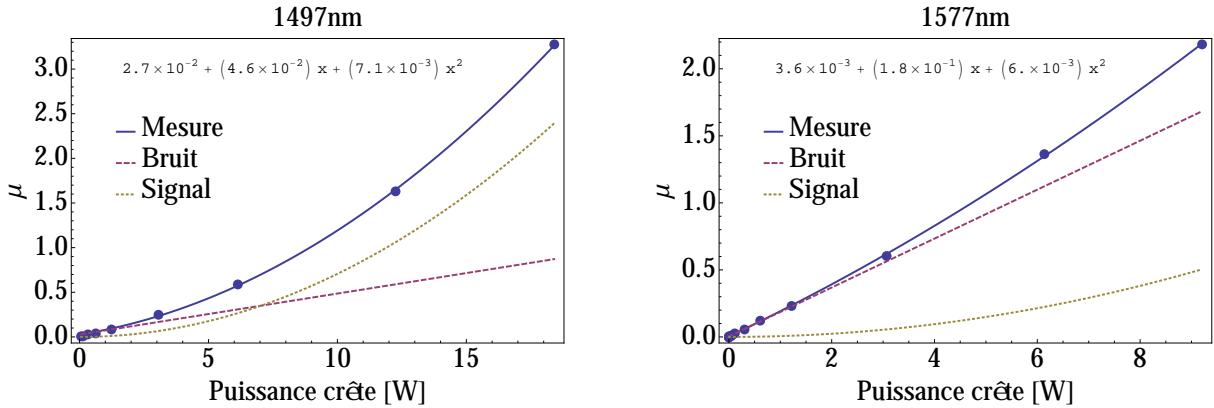


Figure 6.13 À gauche : variation du nombre moyen de photons par impulsion dans la branche à  $\lambda = 1497\text{ nm}$  en fonction de la puissance de pompe. À droite : données de la branche à  $\lambda = 1577\text{ nm}$ . Les équations quadratiques représentent les meilleures valeurs d'interpolation. Les points bleus sont les valeurs mesurées. Les courbes bleues sont les courbes d'interpolation. Les courbes rouges sont les parties linéaires des courbes d'interpolation (bruit). Les courbes beiges sont les parties quadratiques des courbes d'interpolation (signal).

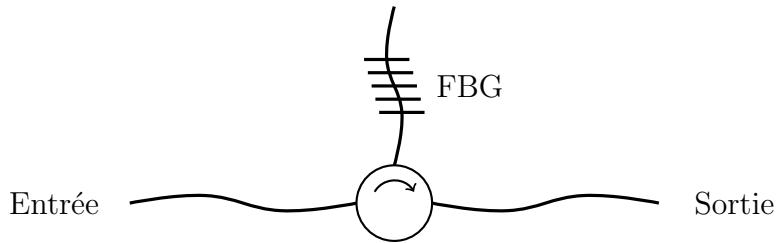


Figure 6.14 Filtrage par circulateur et réseau de Bragg. Le signal entre dans la première branche du circulateur, puis ressort par la seconde branche. Dans cette branche, un réseau de Bragg ne réfléchit qu'une petite plage de longueurs d'onde, qui sont ensuite renvoyées dans le circulateur pour ressortir par la troisième branche.

## 6.5 Résumé

De nombreuses expériences pratiques liées à la conception de sources non-classiques ont été réalisées au Laboratoire des fibres optiques de l'École Polytechnique de Montréal au cours des dernières années.

Nous avons par exemple

- réalisé la génération de second et troisième harmoniques dans les fibres effilées, une première à notre connaissance ;
- démontré qu'il est possible de générer des instabilités de modulation vectorielles avec des photons polarisés circulairement, dans des fibres effilées torsadées ;
- réalisé la première génération (à notre connaissance) d'une instabilité de modulation

de type O dans le domaine des longueurs d'onde des télécommunications, à l'aide d'une fibre possédant une dispersion normale dans ce domaine, et un diamètre externe double de celui des fibres standard, afin de faciliter la génération d'une faible biréfringence par enroulement.

Nous avons également mis en exergue le rôle joué par la cohérence temporelle de la pompe dans la génération de certains effets non-linéaires. Nous avons en particulier démontré qu'une instabilité de modulation vectorielle, que nous n'avons jamais réussi à observer à l'aide d'une pompe cohérente, est plus aisément générée à l'aide d'une pompe incohérente limitant l'automodulation de phase. Ces résultats valident les calculs effectués à l'aide du modèle développé au chapitre 4.

Dans le domaine quantique, nous avons réalisé une source de photons annoncés (qui n'est pas décrite dans ce chapitre, car elle a fait l'objet d'une publication détaillée dans Slater *et al.* (2010)), et posé les premiers jalons d'une source de photons intriqués en polarisation entièrement fibrée, dans le domaine des télécommunications. À cette occasion, nous avons montré l'efficacité de solutions de filtrage entièrement fibrées, même si nous n'avons pas pu encore aller jusqu'au bout de la démarche. Nous pensons cependant qu'il devrait être possible au cours de la prochaine année, à partir des résultats déjà obtenus, d'obtenir une source entièrement fibrée aux caractéristiques non-classiques intéressantes.

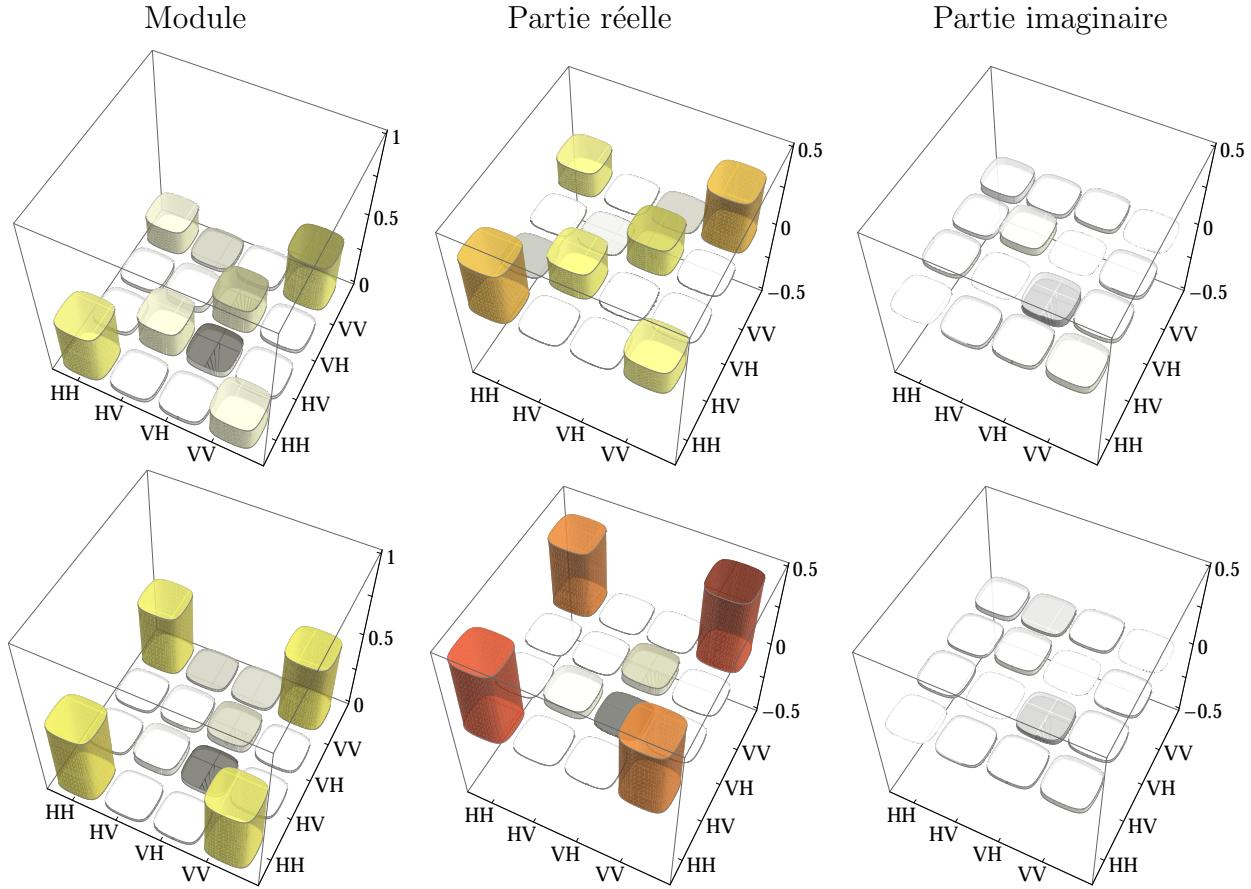


Figure 6.15 Reconstitution de la matrice densité à partir des données expérimentales mesurées sur la courbe (en particulier le rapport signal sur bruit). En haut : Reconstitution à partir des données réelles, y compris le bruit. En bas : Reconstitution avec le bruit diminué d'un facteur 4. À gauche : module des constituants de la matrice densité reconstituée. Au centre : partie réelle des constituants. À droite : partie imaginaire des constituants. Pour cette reconstitution, on imagine qu'on puisse obtenir le même rapport signal sur bruit dans la branche à  $\lambda = 1577$  nm que dans la branche à  $\lambda = 1497$  nm. Les paramètres sont les suivants :  $\mu = 0,06$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0,2$  et  $d_1 = d_2 = 0,03$  (en haut) ou  $d_1 = d_2 = 0,0075$  (en bas).

La matrice du bas se rapproche de la matrice idéale, qui ne devrait avoir de composantes non nulles que sur les quatre “coins” (correspondant aux valeurs associées à  $|HH\rangle\langle HH|$ ,  $|HH\rangle\langle VV|$ ,  $|VV\rangle\langle HH|$ ,  $|VV\rangle\langle VV|$ ). La matrice correspondant à un état complètement mixte (c'est-à-dire complètement incohérent) ne posséderait quant à elle que des éléments (tous identiques) sur la diagonale.

## CHAPITRE 7

### CONCLUSION

Les sources non-classiques fibrées constitueront sans doute un élément important dans l'architecture d'un potentiel réseau de télécommunications sécurisé par la cryptographie quantique. Nous montrons ici que la conception de ces sources requiert un éventail important de connaissances physiques à la fois théoriques et pratiques.

Il est d'abord important d'identifier le processus non-linéaire au cœur de la future source. Si les générations d'harmoniques permettent la réalisation pratique de sources de photons indiscernables, les instabilités de modulation vectorielles semblent particulièrement indiquées dans le cadre de l'élaboration de sources de photons intriqués. Les outils de calcul développés aux chapitres 2 et 5 permettent de déterminer à l'avance les paramètres physiques qui permettront la réalisation de l'effet désiré. Nous montrons en particulier qu'il est possible d'obtenir une faible biréfringence à l'aide d'un enroulement, et de favoriser ainsi un effet d'instabilité de modulation vectorielle relativement proche de la pompe. Cette réalisation permet d'envisager la conception de sources efficaces dans le domaine des longueurs d'onde des télécommunications, autour de 1550 nm.

L'aspect quantifié de la lumière joue un grand rôle dans le caractère non-classique des sources utiles. Le chapitre 3 montre comment cet aspect est compatible avec la vision classique de la lumière en tant qu'onde. Il montre également quels aspects spécifiques de la lumière quantifiée sont importants pour la réalisation de sources non-classiques. L'information la plus pertinente pour ces sources est contenue dans les corrélations entre photons, ou entre localisations d'un même biphoton. Ces corrélations peuvent être étudiées relativement simplement d'un point de vue purement statistique, ce qui permet de prévoir en grande partie le comportement d'une source en fonction de ses caractéristiques physiques, avant même de l'avoir réalisée. Il est ainsi possible de prévoir à l'avance la matrice densité de l'état quantique mesurable en sortie de source, en fonction des paramètres physiques de la source et du système de caractérisation.

La compétition entre processus non-linéaires est un problème pratique assez peu abordé dans la littérature. De ce point de vue, le chapitre 4 constitue une nouveauté. Nous montrons en particulier, en utilisant le formalisme que nous avons développé, qu'il peut être avantageux, dans certains cas, d'utiliser une pompe incohérente plutôt que cohérente pour obtenir certains effets non-linéaires. C'est le cas pour les instabilités de modulation, qui sont en général inhibées par l'automodulation de phase avec une pompe cohérente. Nous espérons avoir

ainsi démontré l'intérêt de recherches plus poussées sur les effets non-linéaires dans le cadre incohérent.

Ces dernières années, le Laboratoire des fibres optiques de l'École polytechnique de Montréal a mis en application les principes mis en avant dans ce travail. Nous avons ainsi observé la génération de second et troisième harmonique dans des fibres effilées, des effets non-linéaires exploitant les états de polarisation circulaire, mais aussi conçu et réalisé une source de photons annoncés.

Pour la première fois, nous avons également obtenu une instabilité de modulation vectorielle de type orthogonal dans la plage de longueurs d'onde des télécommunications. Il a fallu pour cela utiliser tous les enseignements des théories présentées dans notre travail, ce qui nous a permis de faire fabriquer une fibre adaptée aux besoins spécifiques de cette application et de sélectionner la bonne source laser (qui, contrairement à l'intuition, doit être incohérente). L'effet non-linéaire ainsi obtenu nous a permis d'avancer dans la réalisation d'une source tout-fibre de photons intriqués en polarisation. Le savoir-faire de notre laboratoire nous a permis en particulier de montrer l'efficacité du filtrage par coupleurs, même si ce dernier ne peut constituer l'ensemble de la solution. On peut penser par exemple que l'utilisation de réseaux de Bragg ou la cryogénération permettront dans le futur de réduire le bruit résiduel qui semble provenir de l'effet Raman spontané. Il reste donc du travail à effectuer, mais on peut penser qu'une fois ces étapes franchies, cette source tout-fibre possédera les caractéristiques requises pour une exploitation dans un futur réseau quantique de télécommunications.

## RÉFÉRENCES

- AGRAWAL, G. (2013). *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, cinquième édition.
- ARAUJO, M. T. D., DA CRUZ, H. R. et GOUVEIA-NETO, A. S. (1991). Self-phase modulation of incoherent pulses in single-mode optical fibers. *Journal of the Optical Society of America B*, 8, 2094.
- ASPECT, A., GRANGIER, P. et ROGER, G. (1982). Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell's Inequalities. *Physical Review Letters*, 49, 91–94.
- BACHOR, H.-A. et RALPH, T. C. (2004). *A Guide to Experiments in Quantum Optics*. Wiley, seconde édition.
- BASDEVANT, J.-L. et DALIBARD, J. (2005). *Mécanique Quantique*. Les Éditions de l'École Polytechnique.
- BELL, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1, 195–200.
- BENNETT, C., BRASSARD, G., CREPEAU, C., JOZSA, R., PERES, A. et WOOTTERS, W. (1993a). Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, 70, 1895–1899.
- BENNETT, C. H. et BRASSARD, G. (1984). Quantum Cryptography. *Proceedings of the International Conference on Computer Systems and Signal Processing*. Bangalore, 175.
- BENNETT, C. H., BRASSARD, G., CRÉPEAU, C., JOZSA, R., PERES, A. et WOOTTERS, W. K. (1993b). Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, 70, 1895–1899.
- BÉTOURNÉ, A. (2010). *Conception et Caractérisation de Nouvelles Fibres Optiques à Cristal Photonique dites Hybrides et Applications à l'Optique Non Linéaire*. Thèse de doctorat, Université Lille 1.
- BIALYNICKI-BIRULA, I. (1994). On the Wave Function of the Photon. *Acta Physica Polonica A*, 86, 97–116.
- BLOEMBERGEN, N. (1996). *Nonlinear Optics*. World Scientific Publishing Co., quatrième édition.
- BLOEMBERGEN, N., CHANG, R., JHA, S. et LEE, C. (1968). Optical Second-Harmonic Generation in Reflection from Media with Inversion Symmetry. *Physical Review*, 174, 813–822.
- BOHM, D. (1979). *Quantum Theory*. Dover.

- BORN, M. et WOLF, E. (1999). *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 7th édition.
- BOUWMEESTER, D., PAN, J.-W., MATTLE, K., EIBL, M., WEINFURTER, H. et ZEILINGER, A. (1998). Experimental quantum teleportation. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 356, 1733–1737.
- BOYD, R. W. (1992). *Nonlinear Optics*. Academic Press.
- BUCHALTER, B. et MEREDITH, G. R. (1982). Third-order optical susceptibility of glasses determined by third harmonic generation. *Applied Optics*, 21, 3221.
- BURES, J. (2009). *Optique Guidée : Fibres Optiques et Composants Passifs Tout-Fibre*. Presses Internationales Polytechnique.
- CAVALCANTI, S., AGRAWAL, G. et YU, M. (1995). Noise amplification in dispersive nonlinear media. *Physical Review A*, 51, 4086–4092.
- CHEN, C.-L. (2007). *Foundations for Guided-Wave Optics*. John Wiley & Sons.
- CHEN, J., LI, X. et KUMAR, P. (2005). Two-photon-state generation via four-wave mixing in optical fibers. *Physical Review A*, 72, 033801.
- CLAUSER, J., HORNE, M., SHIMONY, A. et HOLT, R. (1969). Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories. *Physical Review Letters*, 23, 880–884.
- COHEN-TANNOUDJI, C., DIU, B. et LALOE, F. (1998). *Mécanique quantique I*. Hermann.
- COHEN-TANNOUDJI, C., DUPONT-ROC, J. et GRYNBERG, G. (2001). *Photons et Atomes, Introduction à l'Électrodynamique Quantique*. EDP Sciences.
- DA CRUZ, H., HICKMANN, J. et GOUVEIA-NETO, A. (1992). Self-phase-modulation and induced phase modulation of noisy radiation in single-mode optical fibers. *Physical Review A*, 45, 8268–8276.
- DE BROGLIE, L. (1925). Recherches sur la théorie des quanta. *Annales de Physique*, 10ème série.
- DIRAC, P. A. M. (1928a). The Quantum Theory of the Electron. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 117, 610–624.
- DIRAC, P. A. M. (1928b). The Quantum Theory of the Electron. Part II. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 118, 351–361.
- EINSTEIN, A., PODOLSKY, B. et ROSEN, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47, 777–780.
- EKERT, A. K. (1991). Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Physical Review Letters*, 67, 661–663.

- GARNIER, J., VIDEAU, L., GOUÉDARD, C. et MIGUS, A. (1998). Propagation and amplification of incoherent pulses in dispersive and nonlinear media. *Journal of the Optical Society of America B*, 15, 2773.
- GIRARD, M., DI SALVIO, A., BEN SALAH, F., LEDUC, M., VIRALLY, S., GODBOUT, N., LACROIX, S. et DAXHELET, X. (2010). Génération de troisième harmonique dans les fibres effilées. *78e Congrès de l'ACFAS, Colloque Optique Guidée et Photonique 9*. Montréal, Canada.
- GODBOUT, N. (2000). *Effets non-linéaires de second ordre dans les verres de silice*. Phd, Université de Montréal, École Polytechnique.
- GRYNBERG, G., ASPECT, A. et FABRE, C. (1997). *Introduction aux lasers et à l'optique quantique*. Les Éditions de l'École Polytechnique.
- HANAMURA, E., KAWABE, Y. et YAMANAKA, A. (2007). *Quantum Nonlinear Optics*. Springer Berlin / Heidelberg.
- HANBURY BROWN, R. et TWISS, R. (1957). Interferometry of the intensity fluctuations in light. I. Basic theory : the correlation between photons in coherent beams of radiation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 242, 300–324.
- HANBURY BROWN, R. et TWISS, R. (1958). Interferometry of the intensity fluctuations in light. II. An experimental test of the theory for partially coherent light. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 243, 291–319.
- JACKSON, J. D. (2001). *Électrodynamique Classique*. Dunod.
- JAMES, D., KWIAT, P., MUNRO, W. et WHITE, A. (2001). Measurement of qubits. *Physical Review A*, 64, 052312.
- KANG, Y. (2002). *Calculations and Measurements of Raman Gain Coefficients of Different Fiber Types*. Thèse de doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- KAZANSKY, P. G., DONG, L. et RUSSELL, P. S. (1994). High second-order nonlinearities in poled silicate fibers. *Optics letters*, 19, 701–3.
- KNIGHT, J. C. (2003). Photonic crystal fibres. *Nature*, 424, 847–51.
- KNIGHT, J. C., EFIMOV, A., TAYLOR, A., OMENETTO, F., WADSWORTH, W. J. et RUSSELL, P. (2003). Phase-matched third harmonic generation in microstructured fibers. *Optics Express*, 11, 2567–2576.
- KUDLINSKI, A., BENDAHMANE, A., LABAT, D., VIRALLY, S., MURRAY, R. T., KELLEHER, E. J. R. et MUSSOT, A. (2013). Simultaneous scalar and cross-phase modulation instabilities in highly birefringent photonic crystal fiber. *Optics Express*, 21, 8437.

- LEE, K., CHEN, J., LIANG, C., LI, X., VOSS, P. et KUMAR, P. (2006). Generation of high-purity telecom-band entangled photon pairs in dispersion-shifted fiber. *Optics Letters*, 31, 1905–7.
- LEFÈVRE, H. (1980). Single-mode fibre fractional wave devices and polarisation controllers. *Electronics Letters*, 16, 778.
- LI, X., VOSS, P., SHARPING, J. et KUMAR, P. (2005). Optical-Fiber Source of Polarization-Entangled Photons in the 1550 nm Telecom Band. *Physical Review Letters*, 94.
- LORENZ, V. O., FANG, B. et COHEN, O. (2013). Generation of Polarization-Entangled Photons in a Standard Polarization-Maintaining Fiber. *Journal of Physics : Conference Series*, 414, 012007.
- LOUDON, R. (2000). *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press, Oxford, troisième édition.
- MAKER, P., TERHUNE, R., NISENOFF, M. et SAVAGE, C. (1962). Effects of Dispersion and Focusing on the Production of Optical Harmonics. *Physical Review Letters*, 8, 21–22.
- MANASSAH, J. T. (1990). Self-phase modulation of incoherent light. *Optics letters*, 15, 329.
- MANASSAH, J. T. (1991). Self-phase modulation of incoherent light revisited. *Optics letters*, 16, 1638–40.
- MESSIAH, A. (2003). *Mécanique Quantique, Tome 1*. Dunod.
- OSTERBERG, U. et MARGULIS, W. (1986). Dye laser pumped by Nd :YAG laser pulses frequency doubled in a glass optical fiber. *Optics letters*, 11, 516–8.
- PIETRALUNGA, S., MARTELLI, P., FERRARIO, M. et MARTINELLI, M. (2001). Measurement of self-phase modulation of amplified spontaneous emission : the role of second-order degree of coherence in determining the Kerr effect. *IEEE Photonics Technology Letters*, 13, 1179–1181.
- REISERER, A., RITTER, S. et REMPE, G. (2013). Nondestructive detection of an optical photon. *Science (New York, N.Y.)*, 342, 1349–51.
- SALEH, B. E. et TEICH, M. C. (2007). *Fundamentals of Photonics*. Wiley, seconde édition.
- SCHWARTZ, M. D. (2014). *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press.
- SINGH, V., DI SALVIO, A., TOUSIGNANT, M., VIRALLY, S., GODBOUT, N. et LA-CROIX, S. (2010). Vector modulation instabilities in stress-induced low birefringence fibers. *Photonics 2010*. Guwahati, India.

- SLATER, J. A., CORBEIL, J.-S., VIRALLY, S., BUSSIÈRES, F., KUDLINSKI, A., BOUWMANS, G., LACROIX, S., GODBOUT, N. et TITTEL, W. (2010). Microstructured fiber source of photon pairs at widely separated wavelengths. *Optics Letters*, 35, 499–501.
- SNYDER, A. W. et LOVE, J. D. (1983). *Optical Waveguide Theory*. Chapman and Hall.
- STOLEN, R. H. et TOM, H. W. (1987). Self-organized phase-matched harmonic generation in optical fibers. *Optics letters*, 12, 585–7.
- THOMPSON, J. et ROY, R. (1991). Nonlinear dynamics of multiple four-wave mixing processes in a single-mode fiber. *Physical Review A*, 43, 4987–4996.
- TOUSIGNANT, M., DI SALVIO, A., GIRARD, M., BEN SALAH, F., BEAUDET, F., VIRALLY, S., LEDUC, M., DAXHELET, X., GODBOUT, N. et LACROIX, S. (2010). Facteurs limitant la génération de troisième harmonique dans les fibres effilées. *JNOG*. Besançon, France.
- TOUSIGNANT, M., VIRALLY, S., DAXHELET, X., GODBOUT, N. et LACROIX, S. (2011). Génération de deuxième harmonique dans les fibres effilées. *JNOG*. Marseille, France.
- VIRALLY, S., GODBOUT, N., LACROIX, S. et LABONTÉ, L. (2010a). Two-fold symmetric geometries for tailored phase-matching in birefringent solid-core air-silica microstructured fibers. *Optics Express*, 18, 10731.
- VIRALLY, S., LACROIX, S. et GODBOUT, N. (2010b). Limits of heralded single-photon sources based on parametric photon-pair generation. *Physical Review A*, 81, 013808.
- WALLS, D. et MILBURN, G. J. (2008). *Quantum Optics*. Springer Berlin / Heidelberg, seconde édition.
- WOOTTERS, W. K. et ZUREK, W. H. (1982). A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299, 802–803.
- ZAKERY, A. et ELLIOTT, S. (2003). Optical properties and applications of chalcogenide glasses : a review. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 330, 1–12.

## ANNEXE A

### FONCTIONNELLES

Une fonctionnelle est une fonction d'une infinité continue de variables. On peut également la voir comme une fonction de fonction.

#### A.1 Fonction de variables discrètes

On considère une fonction  $F$  des variables discrètes  $\{x_1, \dots, x_i, \dots\} \equiv \{x\}$ . Le nombre total de ces variables peut être fini ou infini.

Le développement de  $F$  en série de Taylor, autour de la valeur  $\{a\}$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
 F[\{a\} + \{\epsilon\}] &= F[\{a\}] \\
 &+ \sum_j \frac{\partial F}{\partial x_j}[\{a\}] \epsilon_j \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}[\{a\}] \epsilon_j \epsilon_k \\
 &+ \dots \\
 &+ \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}[\{a\}] \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_n} \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Dans ce cadre, la dérivée partielle est définie par

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}[\{a\}] = \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \frac{F[\{a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + \epsilon_j, a_{j+1}, \dots\}] - F[\{a\}]}{\epsilon_j}. \tag{A.2}$$

#### A.2 Fonction d'une infinité continue de variables

On considère maintenant une fonction  $F$  d'une infinité continue de variables (variables repérées par un indice continu,  $t$ ). On peut donc voir  $F$  comme une fonction de fonction,  $F[x(t)]$ .

En généralisant la formule de la section précédente, on définit le développement en série

de Taylor autour de la fonction  $a(t)$  sous la forme

$$\begin{aligned}
 F[a + \epsilon] &= F[a] \\
 &+ \int dt_1 \frac{\delta F}{\delta x(t_1)}[a] \epsilon(t_1) \\
 &+ \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \frac{\delta^2 F}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)}[a] \epsilon(t_1) \epsilon(t_2) \\
 &+ \dots \\
 &+ \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n \frac{\delta^n F}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_n)}[a] \epsilon(t_1) \dots \epsilon(t_n) \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

La dérivée fonctionnelle est définie par la fonctionnelle

$$\frac{\delta F}{\delta x(t_0)}[a(t)] \equiv \lim_{\epsilon(t_0) \rightarrow 0} \frac{F[a(t) + \epsilon(t)] - F[a(t)]}{\epsilon(t_0)} \tag{A.4}$$

où  $\epsilon$  une fonction nulle partout sauf dans un voisinage de  $t = t_0$ .

### A.3 Généralisation du produit scalaire

Le produit scalaire entre vecteurs d'un espace dont la base est discrète indexée par les entiers  $i$  est défini par

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \equiv \sum_i u_i v_i. \tag{A.5}$$

On peut étendre cette définition aux vecteurs d'un espace de base continue indexée par la variable  $x$ , soit

$$\langle u, v \rangle \equiv \int dx u(x) v(x), \tag{A.6}$$

et pour des fonctionnelles vectorielles, on écrit

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &\equiv \sum_i \int dx u_i(x) v_i(x) \\
 &= \int dx \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x).
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

### A.4 Application à la polarisation d'un milieu

La polarisation est *a priori* une fonction du champ électrique dans tout l'espace-temps. C'est donc une fonctionnelle.

En général, on considère des valeurs du champ électrique suffisamment faibles pour qu'on puisse effectuer un développement de Taylor autour du champ nul. On écrit donc (en prenant quelques libertés avec les notations en raison du caractère tensoriel des expressions)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &\equiv \Pi[\mathbf{0} + \mathcal{E}] \\
&= \Pi[\mathbf{0}] \\
&+ \int d\mathbf{r}_1 dt_1 \frac{\delta \Pi}{\delta \mathcal{E}(\mathbf{r}_1, t_1)} [\mathbf{0}] : \mathcal{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \\
&+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_1 dt_1 d\mathbf{r}_2 dt_2 \frac{\delta^2 \Pi}{\delta \mathcal{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \delta \mathcal{E}(\mathbf{r}_2, t_2)} [\mathbf{0}] : \mathcal{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \mathcal{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \\
&+ \dots \\
&+ \frac{1}{n!} \int d\mathbf{r}_1 dt_1 \dots d\mathbf{r}_n dt_n \frac{\delta^n \Pi}{\delta \mathcal{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \delta \mathcal{E}(\mathbf{r}_n, t_n)} [\mathbf{0}] : \mathcal{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \mathcal{E}(\mathbf{r}_n, t_n) \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

On définit alors

$$\chi^{(n)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1, \dots, \mathbf{r} - \mathbf{r}_n, t - t_n) \equiv \frac{\sqrt{2\pi}}{\epsilon_0 n!} \frac{\delta^n \Pi}{\delta \mathcal{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \delta \mathcal{E}(\mathbf{r}_n, t_n)} [\mathbf{0}(\mathbf{r}, t)], \quad (\text{A.8})$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) &\equiv \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \geq 1} \int d\mathbf{r}_1 dt_1 \dots d\mathbf{r}_n dt_n \\
&\chi^{(n)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1, \dots, \mathbf{r} - \mathbf{r}_n, t - t_n) : \mathcal{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \mathcal{E}(\mathbf{r}_n, t_n). \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$

## ANNEXE B

### RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE PROPAGATION

#### B.1 Système à résoudre

On cherche à résoudre une équation générique pour les instabilités de modulation, soit un système de deux équations couplées

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{dz} &= i G_p a_1 + i G_{12} a_2^* e^{i\Delta\beta z}, \\ \frac{da_2}{dz} &= i G_p a_2 + i G_{12} a_1^* e^{i\Delta\beta z}.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Le processus considéré est donc la disparition de deux photons de pompe au profit d'un photon du mode 1 et un photon du mode 2. Dans les équations,  $G_p$  représente les effets de la modulation de phase croisée, et  $G_{12}$  les effets de l'instabilité de modulation proprement dite.

En posant

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a_1 e^{-i\frac{\Delta\beta z}{2}}, \\ \alpha_2 &= a_2 e^{-i\frac{\Delta\beta z}{2}},\end{aligned}\tag{B.2}$$

et en prenant le complexe conjugué de la seconde équation du système, on se ramène à

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i \left( G_p - \frac{\Delta\beta}{2} \right) & i G_{12} \\ -i G_{12} & -i \left( G_p - \frac{\Delta\beta}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2^* \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} i\gamma_p & i G_{12} \\ -i G_{12} & -i\gamma_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2^* \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{B.3}$$

#### B.2 Solution

Les solutions du système B.3 sont

$$\begin{aligned}\alpha_1(z) &= \alpha_1(0) \cosh \left( \sqrt{G_{12}^2 - \gamma_p^2} z \right) + i \frac{\gamma_p \alpha_1(0) + G_{12} \alpha_2^*(0)}{\sqrt{G_{12}^2 - \gamma_p^2}} \sinh \left( \sqrt{G_{12}^2 - \gamma_p^2} z \right), \\ \alpha_2(z) &= \alpha_2(0) \cosh \left( \sqrt{G_{12}^2 - \gamma_p^2} z \right) + i \frac{\gamma_p \alpha_2(0) + G_{12} \alpha_1^*(0)}{\sqrt{G_{12}^2 - \gamma_p^2}} \sinh \left( \sqrt{G_{12}^2 - \gamma_p^2} z \right).\end{aligned}\tag{B.4}$$

Pour qu'il y ait gain, il faut donc respecter la condition  $|\gamma_p| \leq G_{12}$ , soit

$$2(G_p - G_{12}) \leq \Delta\beta \leq 2(G_p + G_{12}), \quad (\text{B.5})$$

et la condition de gain maximal est

$$\Delta\beta = 2G_p, \quad (\text{B.6})$$

et la valeur maximale du gain est  $G_{12}$ .

## ANNEXE C

### TRANSITION THERMIQUE-POISSON

Nous montrons que la statistique thermique associée à un mode unique devient une statistique poissonienne lorsqu'un grand nombre de modes est accessible aux signaux.

#### C.1 Ensemble multi-mode de processus thermiques

Nous supposons qu'un certain processus génère des états quantiques distribués parmi  $K + 1$  modes  $\Psi_0 \cdots \Psi_K$ , accessibles *de manière égale*. Par la suite, nous notons  $|k; \Psi_i\rangle$  un état à  $k$  photons du mode  $\Psi_i$ . À chaque mode est associée une phase  $\varphi_i$  aléatoire.

On veut répartir  $N$  photons sur les  $K$  modes. On définit donc

$$\Lambda_N = \left\{ \lambda \in \mathbb{N}^{K+1} \quad \left| \sum_{i=0}^K \lambda_i = N \right. \right\}. \quad (\text{C.1})$$

La dimension de  $\Lambda_N$  est  $\dim(\Lambda_N) = \binom{N+K}{K}$ , où  $\binom{N}{K}$  est le nombre de combinaisons à  $K$  éléments dans un ensemble à  $N$  éléments.

On suppose que la statistique de chaque mode est thermique. La probabilité d'avoir  $k$  photons dans un mode donné est donc

$$p_{1 \text{ mode}}(k) = \frac{1}{\alpha + 1} \left( \frac{\alpha}{\alpha + 1} \right)^k, \quad (\text{C.2})$$

où  $\alpha = \frac{\mu}{K+1}$  et  $\mu$  est le nombre de photons moyens dans chaque mode (supposés accessibles de la même manière).

L'état quantique total est donc

$$|\Psi\rangle = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\lambda \in \Lambda_N} \psi_\lambda \bigotimes_{i=0}^K |\lambda_i; \Psi_i\rangle, \quad (\text{C.3})$$

avec

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda &= \prod_{i=0}^K e^{i\lambda_i \varphi_i} \sqrt{\frac{1}{\alpha+1}} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\lambda_i/2} \\
&= e^{i\varphi_\lambda} \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{(K+1)/2} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\sum_{i=0}^K \lambda_i/2} \\
&= e^{i\varphi_\lambda} \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{(K+1)/2} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{N/2},
\end{aligned} \tag{C.4}$$

et

$$e^{i\varphi_\lambda} = \prod_{i=0}^K e^{i\lambda_i \varphi_i}. \tag{C.5}$$

On a donc à la fin

$$|\Psi\rangle = \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{(K+1)/2} \sum_{N=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{N/2} \sum_{\lambda \in \Lambda_N} e^{i\varphi_\lambda} \bigotimes_{i=0}^K |\lambda_i; \Psi_i\rangle. \tag{C.6}$$

## C.2 Transition vers une distribution de Poisson

L'équation C.6 implique que la probabilité de mesurer exactement  $N_0$  photons dans tous les modes accessibles est

$$\begin{aligned}
p_{K \text{ modes}}(N = N_0) &= \left\langle \left| \sum_{\sigma \in \Lambda_{N_0}} \bigotimes_{j=0}^K \langle \sigma_j; \Psi_j | \Psi \rangle \right|^2 \right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{K+1} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{N_0} \left\langle \left| \sum_{\sigma \in \Lambda_{N_0}} e^{i\varphi_\sigma} \right|^2 \right\rangle,
\end{aligned} \tag{C.7}$$

où  $\langle \square \rangle$  dénote une moyenne prise sur un grand nombre d'expériences identiques.

Les phases des différents modes étant aléatoires, la somme  $\sum_{\sigma \in \Lambda_{N_0}} e^{i\varphi_\sigma}$  est une marche aléatoire dans le plan complexe. Une telle marche vérifie la condition de variance

$$\left\langle \left| \sum_{\sigma \in \Lambda_{N_0}} e^{i\varphi_\sigma} \right|^2 \right\rangle = \dim(\Lambda_{N_0}) = \binom{N_0 + K}{K}. \tag{C.8}$$

On a donc

$$\begin{aligned} p_{K \text{ modes}}(N = N_0) &= \binom{N_0 + K}{K} \left( \frac{1}{\alpha + 1} \right)^{K+1} \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^{N_0} \\ &= \frac{\mu^{N_0}}{N_0!} \frac{(N_0 + K)!}{K!} \left( \frac{1}{1 + \frac{\mu}{K+1}} \right)^{K+1} \left( \frac{\frac{1}{K+1}}{1 + \frac{\mu}{K+1}} \right)^{N_0}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Si  $K \gg 1$ , on a

- $\frac{1}{1 + \frac{\mu}{K+1}} \simeq 1 - \frac{\mu}{K+1}$  ;
- $\frac{\frac{1}{K+1}}{1 + \frac{\mu}{K+1}} \simeq \frac{1}{K+1}$ .

La probabilité devient donc

$$p_{K \text{ modes}}(N = N_0) \simeq \frac{\mu^{N_0}}{N_0!} \frac{(N_0 + K)!}{K! (K+1)^{N_0}} \left( 1 - \frac{\mu}{K+1} \right)^{K+1}. \quad (\text{C.10})$$

Les relations suivantes sont également vérifiées :

- $\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{(N_0 + K)!}{K! (K+1)^{N_0}} = 1$  ;
- $\lim_{K \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\mu}{K+1} \right)^{K+1} = e^{-\mu}$ .

Finalement, on obtient

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} p_{K \text{ modes}}(N = N_0) = e^{-\mu} \frac{\mu^{N_0}}{N_0!}, \quad (\text{C.11})$$

ce qui montre que l'addition d'un grand nombre de modes fait tendre le processus vers une statistique poissonienne.

## ANNEXE D

### RECENTRAGE DES IMPULSIONS

En se plaçant dans le domaine des pulsations  $\omega$ , on considère l'amplitude complexe d'un mode centré autour de  $\omega_0$ , soit

$$\tilde{a}(z, \omega) = \tilde{A}(z, \omega) e^{i\beta(\omega)z}. \quad (\text{D.1})$$

On considère le développement de  $\beta$  autour de  $\omega_0$  comme

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \beta_{2+}(\omega - \omega_0), \quad (\text{D.2})$$

où on a défini  $\beta_0 \equiv \beta(\omega_0)$  et  $\beta_1 \equiv \frac{d\beta}{d\omega}(\omega_0)$ .

On définit alors

$$\tilde{\alpha}(z, \omega - \omega_0) \equiv \tilde{A}(z, \omega) e^{i\beta_{2+}(\omega - \omega_0)z}, \quad (\text{D.3})$$

ce qui permet d'écrire

$$\tilde{a}(z, \omega) = \tilde{\alpha}(z, \omega - \omega_0) e^{i[\beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1]z}. \quad (\text{D.4})$$

Les amplitudes complexes dans le domaine temporel sont définies par les transformées de Fourier

$$a(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \text{ et} \quad (\text{D.5})$$

$$\alpha(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (\text{D.6})$$

Il existe alors une relation simple entre  $a(z, t)$  et  $\alpha(z, t)$ , soit

$$a(z, t) = \alpha(z, t - \beta_1 z) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)}. \quad (\text{D.7})$$

Autrement dit, on passe de l'amplitude initiale  $a$  à l'amplitude simplifiée  $\alpha$  en :

- recentrant le spectre du mode autour de  $\omega = 0$  ;
- suivant l'impulsion au cours de son déplacement (car  $\beta_1 = 1/v_g$ ), ce qui a pour effet de la recentrer autour de  $t = 0$ .

## ANNEXE E

### FONCTION DENSITÉ DANS LE CAS GAUSSIEN

Nous illustrons ici la fonction densité telle que définie par l'équation 4.26, dans le cas où la puissance instantanée et le spectre ont des formes gaussiennes. C'est un exemple intéressant, car il permet de passer de manière explicite et continue du cas incohérent au cas cohérent.

#### E.1 Cas général

La puissance instantanée est définie par

$$P(t) \equiv \frac{E}{\sqrt{\pi} \tau} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}, \quad (\text{E.1})$$

où  $E$  est l'énergie contenue dans une impulsion et  $\tau$  la longueur d'impulsion.

Le spectre de l'impulsion est défini par

$$\tilde{S}(\omega) \equiv \frac{E \tau_c}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2 \tau_c^2} \quad (\text{E.2})$$

où  $\tau_c$  est le temps de cohérence, conformément au théorème de Wiener-Khintchine.

Les définitions E.1 et E.2 permettent de vérifier l'égalité 4.1.

On a alors

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt P(t) e^{i\omega t} \\ &= \frac{E}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2 \tau^2}{4}}, \text{ et} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{S}(\omega) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{E}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{4\tau_c^2}}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

La définition 4.26 donne alors

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{E}{\sqrt{\pi} \tau} e^{-\frac{(t_1-t_2)^2}{4\tau^2}} e^{-\frac{(t_1+t_2)^2}{4\tau_c^2}}, \quad (\text{E.5})$$

et sa transformée de Fourier 4.28 est

$$\tilde{\rho}(\omega_1, \omega_2) = \frac{E \tau_c}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\omega_1-\omega_2)^2 \tau^2}{4}} e^{-\frac{(\omega_1+\omega_2)^2 \tau_c^2}{4}}, \quad (\text{E.6})$$

ce qui permet de bien comprendre la Fig. 4.2.

On note que dans ce cas, on a directement  $P(t) = \rho(t, -t)$  et  $\tilde{S}(\omega) = \tilde{\rho}(\omega, \omega)$ .

## E.2 Cas cohérent

Le cas cohérent se déduit du cas général en posant  $\tau = \tau_c$ . L'impulsion vérifie alors la condition 4.6. Elle est donc “Fourier limitée” et les équations E.5 et E.6 deviennent

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{E}{\sqrt{\pi} \tau_c} e^{-\frac{t_1^2+t_2^2}{2\tau_c^2}} = a(t_1) a^*(-t_2), \quad (\text{E.7})$$

avec

$$a(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{E}{\tau_c}} e^{-\frac{t^2}{2\tau_c^2}}, \quad (\text{E.8})$$

et

$$\tilde{\rho}(\omega_1, t\omega_2) = \frac{E \tau_c}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)\tau_c^2}{2}} = \tilde{a}(\omega_1) \tilde{a}^*(\omega_2), \quad (\text{E.9})$$

avec

$$\tilde{a}(\omega) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{E \tau_c} e^{-\frac{\omega^2 \tau_c^2}{2}}. \quad (\text{E.10})$$

On retrouve les amplitudes classiques du cas cohérent. Il est donc possible d'utiliser le cas gaussien pour étudier en détails et de manière explicite le passage du cas cohérent au cas incohérent.

## ANNEXE F

### PROPAGATION AVEC PERTURBATION

Dans cette annexe, nous nous inspirons des méthodes de la mécanique quantique pour étudier la propagation d'une amplitude complexe dans des conditions incluant une perturbation dépendant de la position.

#### F.1 Problème à résoudre

On cherche à résoudre le problème de propagation défini par l'équation

$$\frac{d}{dz} \mathbf{X} = [\mathbf{M} + \varepsilon \mathbf{N}(z)] \mathbf{X}, \quad (\text{F.1})$$

où  $\mathbf{X}$  est un vecteur d'amplitudes complexes,  $\mathbf{M}$  une matrice complexe constante,  $\varepsilon$  un nombre petit devant l'unité, et  $\mathbf{N}(z)$  une matrice dont les composantes dépendent de la position.

#### F.2 Résolution

Le problème non perturbé associé est défini par l'équation de propagation

$$\frac{d}{dz} \mathbf{X} = \mathbf{M} \mathbf{X}. \quad (\text{F.2})$$

On suppose qu'il existe une base de vecteurs orthonormés  $\{\mathbf{V}_n\}$ , vecteurs propres de  $\mathbf{M}$  associés aux valeurs propres  $\nu_n$ .

La solution de F.2 est alors

$$\mathbf{X}(z) = \sum_n A_n \mathbf{V}_n e^{\nu_n z}, \quad (\text{F.3})$$

où les  $A_n$  sont des constantes complexes qui dépendent des conditions initiales.

Il est donc naturel de chercher une solution approchée de la forme

$$\mathbf{X}(z) \simeq \sum_n [A_n + \varepsilon B_n(z)] \mathbf{V}_n e^{\nu_n z} \quad (\text{F.4})$$

où les  $B_n$  sont des fonctions de  $z$  à déterminer.

En injectant F.4 dans F.1, en ne gardant que les termes de premier ordre en  $\varepsilon$  et en faisant le produit vectoriel à gauche par le vecteur transposé de  $\mathbf{V}_n$ , soit  $\mathbf{V}_n^t$ , on obtient alors

$$B_n(z) \simeq \int_0^z dz' \sum_m A_m \mathbf{V}_n^t \mathbf{N}(z') \mathbf{V}_m e^{(\nu_m - \nu_n)z'}. \quad (\text{F.5})$$

Si l'intégrale peut être évaluée, on obtient alors une solution approchée du problème sous la forme F.4.

### F.3 Application : compétition entre type C et type O

On cherche à résoudre le système complet d'équations de la forme 5.4. Ce système peut s'écrire comme F.1 avec

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha_{1x} \\ \alpha_{2x}^* \\ \alpha_{1y} \\ \alpha_{2y}^* \end{bmatrix}, \quad (\text{F.6})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 2i\gamma P & 0 & 0 \\ -2i\gamma P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\frac{\gamma P}{3} \\ 0 & 0 & -i\frac{\gamma P}{3} & 0 \end{bmatrix}, \text{ et} \quad (\text{F.7})$$

$$\mathbf{N}(z) = i \frac{2\gamma P}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\cos(\gamma P z) e^{2i\gamma P z} & e^{i\gamma P z} \\ 0 & 0 & -e^{-i\gamma P z} & -2\cos(\gamma P z) e^{-2i\gamma P z} \\ 2\cos(\gamma P z) e^{i\frac{2\gamma P z}{3}} & e^{-i\frac{\gamma P z}{3}} & 0 & 0 \\ -e^{i\frac{\gamma P z}{3}} & -2\cos(\gamma P z) e^{-i\frac{2\gamma P z}{3}} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{F.8})$$

Les valeurs propres et vecteurs propres associés de la matrice  $\mathbf{M}$  sont alors

$$\nu_{x+} = 2\gamma P, \quad \mathbf{V}_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{F.9})$$

$$\nu_{x-} = -2\gamma P, \quad \mathbf{V}_{x-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{F.10})$$

$$\nu_{y+} = \frac{\gamma P}{3}, \quad \mathbf{V}_{y+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad (\text{F.11})$$

$$\nu_{y-} = -\frac{\gamma P}{3}, \quad \mathbf{V}_{y-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ +i \end{bmatrix}. \quad (\text{F.12})$$

Les valeurs des constantes complexes associées au problème non perturbé sont

$$A_{x+} = \frac{\alpha_{1x}(0) + i \alpha_{2x}^*(0)}{\sqrt{2}}, \quad (\text{F.13})$$

$$A_{x-} = \frac{\alpha_{1x}(0) - i \alpha_{2x}^*(0)}{\sqrt{2}}, \quad (\text{F.14})$$

$$A_{y+} = \frac{\alpha_{1y}(0) + i \alpha_{2y}^*(0)}{\sqrt{2}}, \quad (\text{F.15})$$

$$A_{y-} = \frac{\alpha_{1y}(0) - i \alpha_{2y}^*(0)}{\sqrt{2}}. \quad (\text{F.16})$$

Enfin, les valeurs des fonctions complexes perturbatrices sont

$$\begin{aligned}
 B_{x+}(z) = i A_{y+} & \left\{ \frac{1}{17} \left[ e^{-\frac{5\gamma Pz}{3}} [-8 \cos(\gamma Pz) - 2 \sin(\gamma Pz)] + 8 \right] \right. \\
 & + \frac{1}{53} \left[ e^{-\frac{5\gamma Pz}{3}} [-5 \cos(3\gamma Pz) + 9 \sin(3\gamma Pz)] + 5 \right] \Big\} \\
 & + A_{y-} \left\{ \frac{1}{29} \left[ e^{-\frac{7\gamma Pz}{3}} [4 \cos(\gamma Pz) - 10 \sin(\gamma Pz)] - 4 \right] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{65} \left[ e^{-\frac{7\gamma Pz}{3}} [-9 \cos(3\gamma Pz) - 7 \sin(3\gamma Pz)] + 9 \right] \right\}, \quad (\text{F.17})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{x-}(z) = A_{y+} & \left\{ \frac{1}{29} \left[ e^{\frac{7\gamma Pz}{3}} [4 \cos(\gamma Pz) + 10 \sin(\gamma Pz)] - 4 \right] \right. \\
 & + \frac{1}{65} \left[ e^{\frac{7\gamma Pz}{3}} [-9 \cos(3\gamma Pz) + 7 \sin(3\gamma Pz)] + 9 \right] \Big\} \\
 & + i A_{y-} \left\{ \frac{1}{17} \left[ e^{\frac{5\gamma Pz}{3}} [8 \cos(\gamma Pz) - 2 \sin(\gamma Pz)] - 8 \right] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{53} \left[ e^{\frac{5\gamma Pz}{3}} [5 \cos(3\gamma Pz) + 9 \sin(3\gamma Pz)] - 5 \right] \right\}, \quad (\text{F.18})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{y+}(z) = i A_{x+} & \left\{ \frac{1}{13} \left[ e^{\frac{5\gamma Pz}{3}} \left[ 6 \cos\left(\frac{\gamma Pz}{3}\right) - 4 \sin\left(\frac{\gamma Pz}{3}\right) \right] - 6 \right] \right. \\
 & + \frac{1}{25} \left[ e^{\frac{5\gamma Pz}{3}} \left[ 5 \cos\left(\frac{5\gamma Pz}{3}\right) - 5 \sin\left(\frac{5\gamma Pz}{3}\right) \right] - 5 \right] \Big\} \\
 & + A_{x-} \left\{ \frac{1}{25} \left[ e^{-\frac{7\gamma Pz}{3}} \left[ 8 \cos\left(\frac{\gamma Pz}{3}\right) + 6 \sin\left(\frac{\gamma Pz}{3}\right) \right] - 8 \right] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{37} \left[ e^{-\frac{7\gamma Pz}{3}} \left[ -5 \cos\left(\frac{5\gamma Pz}{3}\right) - 7 \sin\left(\frac{5\gamma Pz}{3}\right) \right] + 5 \right] \right\}, \quad (\text{F.19})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{y-}(z) = A_{x+} & \left\{ \frac{1}{25} \left[ e^{\frac{7\gamma Pz}{3}} \left[ 8 \cos\left(\frac{\gamma Pz}{3}\right) - 6 \sin\left(\frac{\gamma Pz}{3}\right) \right] - 8 \right] \right. \\
 & + \frac{1}{37} \left[ e^{\frac{7\gamma Pz}{3}} \left[ -5 \cos\left(\frac{5\gamma Pz}{3}\right) + 7 \sin\left(\frac{5\gamma Pz}{3}\right) \right] + 5 \right] \Big\} \\
 & + i A_{x-} \left\{ \frac{1}{13} \left[ e^{-\frac{5\gamma Pz}{3}} \left[ -6 \cos\left(\frac{\gamma Pz}{3}\right) - 4 \sin\left(\frac{\gamma Pz}{3}\right) \right] + 6 \right] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{25} \left[ e^{-\frac{5\gamma Pz}{3}} \left[ -5 \cos\left(\frac{5\gamma Pz}{3}\right) + 5 \sin\left(\frac{5\gamma Pz}{3}\right) \right] + 5 \right] \right\}. \quad (\text{F.20})
 \end{aligned}$$

## ANNEXE G

### PROGRAMMES MATLAB

#### G.1 Accords de phase

##### G.1.1 Programmes principaux

###### Accord de phase de type C (force brute)

```

function [l1,l2] = find_TypeC(lambda, n, lambda_p, gammaP)
% FIND_TYPEC - Find Type C phasematch.

%
% USE
%
% [l1,l2] = find_TypeC(lambda, n, lambda_p, gammaP);
%
% INPUT
%
% .lambda is a vector containing the wavelengths for the dispersion
% curve, in nm.
%
% .n is a vector containing the indices for the dispersion curve.
%
% .lambda_p is a vector containing the pump wavelengths, in nm.
%
% .gammaP is the value of the product between the nonlinear coefficient
% gamma (in W^{-1}.m^{-1}) and the peak power (in W).
%
%
% OUTPUT
%
% .l1 contains the values of the shorter wavelengths daughters, in nm.
%
% .l2 contains the values of the longer wavelengths daughters, in nm.
%
%
% NOTES
%
% .Only the three closest daughters to the pump are computed.
%
% .A plot of the phasematching curves is also provided.
%
lambda = lambda*1e-9;
lambda_p = lambda_p*1e-9;
lambda_max = max(lambda);
lambda1_min = lambda_p*lambda_max./(2*lambda_max-lambda_p);

```

```

lambda1_max = lambda_p;
llp = length(lambda_p);
l1 = NaN*ones(llp,3);
l2 = NaN*ones(llp,3);
for nlp = 1:llp
    lp = lambda_p(nlp);
    np = simple_interp(lambda, n, lp);
    ilambda1 = (lambda >= lambda1_min(nlp)) & ...
                (lambda <= lambda1_max(nlp));
    lambda1 = lambda(ilambda1);
    n1 = n(ilambda1);
    lambda2 = lp*lambda1./(2*lambda1-lp);
    n2 = zeros(size(lambda2));
    for i = 1:length(lambda1)
        n2(i) = simple_interp(lambda,n,lambda2(i));
    end
    fz = n1./lambda1 + n2./lambda2 - 2*np/lp + gammaP/pi;
    l1_prov = find_zeros(lambda1, fz);
    l2_prov = lp*l1_prov./(2*l1_prov-lp);
    l = length(l1_prov);
    if l == 1
        l1(nlp,1) = l1_prov*1e9;
        l2(nlp,1) = l2_prov*1e9;
    elseif l == 2
        l1(nlp,1:2) = l1_prov(1:-1:l-1)*1e9;
        l2(nlp,1:2) = l2_prov(1:-1:l-1)*1e9;
    elseif l >=3
        l1(nlp,:) = l1_prov(1:-1:l-2)*1e9;
        l2(nlp,:) = l2_prov(1:-1:l-2)*1e9;
    end
end
lambda_p = lambda_p*1e9;
plot(lambda_p, l1(:,1), 'b.', lambda_p, l1(:,2), 'b.', ...
      lambda_p, l1(:,3), 'b.', ...
      lambda_p, l2(:,1), 'b.', lambda_p, l2(:,2), 'b.', ...
      lambda_p, l2(:,3), 'b.');

```

### Accord de phase de type O (force brute)

```

function [l1f,l2f,l1s,l2s] = find_Type0(lambda, n, dn, lambda_p, gammaP)
% FIND_TYPE0 - Find Type 0 phasematch.
%
% USE
% [l1f,l2f,l1s,l2s] = find_Type0(lambda, n, dn, lambda_p, gammaP);
%
% INPUT
% .lambda is a vector containing the wavelengths for the dispersion
% curve, in nm.
% .n is a vector containing the indices for the dispersion curve.
% .dn is the birefringent index delta between the fast and slow axes.
% .lambda_p is a vector containing the pump wavelengths, in nm.
% .gammaP is the value of the product between the nonlinear coefficient
% gamma (in W^{-1}.m^{-1}) and the peak power (in W).
%
% OUTPUT
% .l1f contains the values of the shorter wavelength daughters for a pump
% on the fast axis, in nm.
% .l2f contains the values of the longer wavelength daughters for a pump
% on the fast axis, in nm.
% .l1s contains the values of the shorter wavelength daughters for a pump
% on the slow axis, in nm.
% .l2s contains the values of the longer wavelength daughters for a pump
% on the slow axis, in nm.
%
% NOTES
% .Only the three closest daughters to the pump are computed for each pump
% axis.
% .A plot of the phasematching curves is also provided. The red curves
% represent daughters obtained while pumping on the slow axis, and the
% blue curves represent daughters obtained while pumping on the fast axis.
%
lambda = lambda*1e-9;
lambda_p = lambda_p*1e-9;
lambda_max = max(lambda);

```

```

lambda1_min = lambda_p*lambda_max./(2*lambda_max-lambda_p);
lambda1_max = lambda_p;
l1p = length(lambda_p);
l1f = NaN*ones(l1p,3);
l2f = NaN*ones(l1p,3);
l1s = NaN*ones(l1p,3);
l2s = NaN*ones(l1p,3);
for nlp = 1:l1p
    lp = lambda_p(nlp);
    np = simple_interp(lambda, n, lp);
    ilambda1 = (lambda >= lambda1_min(nlp)) & ...
                (lambda <= lambda1_max(nlp));
    lambda1 = lambda(ilambda1);
    n1 = n(ilambda1);
    lambda2 = lp*lambda1./(2*lambda1-lp);
    n2 = zeros(size(lambda2));
    for i = 1:length(lambda1)
        n2(i) = simple_interp(lambda,n,lambda2(i));
    end
    fz = n1./lambda1 + n2./lambda2 - 2*np/lp - gammaP/3/pi;
    l1f_prov = find_zeros(lambda1, fz + 2*dn/lp);
    l1s_prov = find_zeros(lambda1, fz - 2*dn/lp);
    l2f_prov = lp*l1f_prov./(2*l1f_prov-lp);
    l2s_prov = lp*l1s_prov./(2*l1s_prov-lp);
    lf = length(l1f_prov);
    ls = length(l1s_prov);
    if lf == 1
        l1f(nlp,1) = l1f_prov*1e9;
        l2f(nlp,1) = l2f_prov*1e9;
    elseif lf == 2
        l1f(nlp,1:2) = l1f_prov(lf:-1:lf-1)*1e9;
        l2f(nlp,1:2) = l2f_prov(lf:-1:lf-1)*1e9;
    elseif lf >= 3
        l1f(nlp,:) = l1f_prov(lf:-1:lf-2)*1e9;
        l2f(nlp,:) = l2f_prov(lf:-1:lf-2)*1e9;
    end

```

```

if ls == 1
    l1s(nlp,1) = l1s_prov*1e9;
    l2s(nlp,1) = l2s_prov*1e9;
elseif ls == 2
    l1s(nlp,1:2) = l1s_prov(ls:-1:ls-1)*1e9;
    l2s(nlp,1:2) = l2s_prov(ls:-1:ls-1)*1e9;
elseif ls >=3
    l1s(nlp,:) = l1s_prov(ls:-1:ls-2)*1e9;
    l2s(nlp,:) = l2s_prov(ls:-1:ls-2)*1e9;
end
end
lambda_p = lambda_p*1e9;
plot(lambda_p, l1f(:,1), 'b.', lambda_p, l1s(:,1), 'r.', ...
    lambda_p, l1f(:,2), 'b.', lambda_p, l1s(:,2), 'r.', ...
    lambda_p, l1f(:,3), 'b.', lambda_p, l1s(:,3), 'r.', ...
    lambda_p, l2f(:,1), 'b.', lambda_p, l2s(:,1), 'r.', ...
    lambda_p, l2f(:,2), 'b.', lambda_p, l2s(:,2), 'r.', ...
    lambda_p, l2f(:,3), 'b.', lambda_p, l2s(:,3), 'r.');
legend('Pump on fast axis', 'Pump on slow axis', 'Location', 'NorthWest');

```

### Accord de phase de type M (force brute)

```

function [l1a,l2a,l1b,l2b] = find_TypeM(lambda, n, dn, lambda_p, gammaP)
% FIND_TYPEM - Find Type M phasematch.
%
% USE
% [l1a,l2a,l1b,l2b] = find_TypeM(lambda, n, dn, lambda_p, gammaP);
%
% INPUT
% .lambda is a vector containing the wavelengths for the dispersion
% curve, in nm.
% .n is a vector containing the indices for the dispersion curve.
% .dn is the birefringent index delta between the fast and slow axes.
% .lambda_p is a vector containing the pump waveleghths, in nm.
% .gammaP is the value of the product between the nonlinear coefficient
% gamma (in W^{-1}.m^{-1}) and the peak power (in W).
%

```

```

% OUTPUT
% .l1a contains the values of the shorter wavelength daughters for the
% first series of solutions, in nm.
% .l2a contains the values of the longer wavelength daughters for the
% first series of solutions, in nm.
% .l1b contains the values of the shorter wavelength daughters for the
% second series of solutions, in nm.
% .l2b contains the values of the longer wavelength daughters for the
% second series of solutions, in nm.
%
% NOTES
% .Only the three closest daughters to the pump are computed for each
% series of solutions.
% .A plot of the phasematching curves is also provided. The red curves
% represent daughters of the first series, and the blue curves the
% daughters of the second series.
%
lambda = lambda*1e-9;
lambda_p = lambda_p*1e-9;
lambda_max = max(lambda);
lambda1_min = lambda_p*lambda_max./(2*lambda_max-lambda_p);
lambda1_max = lambda_p;
llp = length(lambda_p);
l1a = NaN*ones(llp,3);
l2a = NaN*ones(llp,3);
l1b = NaN*ones(llp,3);
l2b = NaN*ones(llp,3);
for nlp = 1:llp
    lp = lambda_p(nlp);
    np = simple_interp(lambda, n, lp);
    ilambda1 = (lambda >= lambda1_min(nlp)) & ...
               (lambda <= lambda1_max(nlp));
    lambda1 = lambda(ilambda1);
    n1 = n(ilambda1);
    lambda2 = lp*lambda1./(2*lambda1-lp);
    n2 = zeros(size(lambda2));

```

```

for i = 1:length(lambda1)
    n2(i) = simple_interp(lambda,n,lambda2(i));
end

fz = n1./lambda1 + n2./lambda2 - 2*np/lp + gammaP/2/pi;
l1a_prov = find_zeros(lambda1, fz + dn*(1/lp-1./lambda1));
l1b_prov = find_zeros(lambda1, fz + dn*(1/lp-1./lambda2));
l2a_prov = lp*l1a_prov./(2*l1a_prov-lp);
l2b_prov = lp*l1b_prov./(2*l1b_prov-lp);
la = length(l1a_prov);
lb = length(l1b_prov);
if la == 1
    l1a(nlp,1) = l1a_prov*1e9;
    l2a(nlp,1) = l2a_prov*1e9;
elseif la == 2
    l1a(nlp,1:2) = l1a_prov(la:-1:la-1)*1e9;
    l2a(nlp,1:2) = l2a_prov(la:-1:la-1)*1e9;
elseif la >= 3
    l1a(nlp,:) = l1a_prov(la:-1:la-2)*1e9;
    l2a(nlp,:) = l2a_prov(la:-1:la-2)*1e9;
end

if lb == 1
    l1b(nlp,1) = l1b_prov*1e9;
    l2b(nlp,1) = l2b_prov*1e9;
elseif lb == 2
    l1b(nlp,1:2) = l1b_prov(lb:-1:lb-1)*1e9;
    l2b(nlp,1:2) = l2b_prov(lb:-1:lb-1)*1e9;
elseif lb >= 3
    l1b(nlp,:) = l1b_prov(lb:-1:lb-2)*1e9;
    l2b(nlp,:) = l2b_prov(lb:-1:lb-2)*1e9;
end

lambda_p = lambda_p*1e9;
plot(lambda_p, l1a(:,1), 'b.', lambda_p, l1b(:,1), 'r.', ...
    lambda_p, l1a(:,2), 'b.', lambda_p, l1b(:,2), 'r.', ...
    lambda_p, l1a(:,3), 'b.', lambda_p, l1b(:,3), 'r.', ...
    lambda_p, l2a(:,1), 'b.', lambda_p, l2b(:,1), 'r.', ...

```

```

lambda_p, l2a(:,2), 'b.', lambda_p, l2b(:,2), 'r.', ...
lambda_p, l2a(:,3), 'b.', lambda_p, l2b(:,3), 'r.');
legend('First series', 'Second series', 'Location', 'NorthWest');

```

### G.1.2 Programme auxiliaire

#### Fonction d'interpolation

```

function [yo, ypo] = simple_interp(x, y, xo)
%
% SIMPLE_INTERP - Linear interpolation
%
% USE
% [yo, ypo] = simple_interp(x, y, xo);
%
% INPUT
% .x is a vector containing x values.
% .y is a vector containing y values.
% .xo is the x-position where the interpolation will be performed.
%
% OUTPUT
% .yo is the interpolated value.
% .ypo is the derivative at the interpolated value.
%
l = min(length(x), length(y));
x = x(1:l);
y = y(1:l);

[x, ix] = sort(x);
y = y(ix);
if l == 1
    yo = y(1);
    ypo = 0;
else
    is = find(x <= xo);
    if ~isempty(is)
        im = max(is);

```

```

if im == 1
    ypo = (y(1)-y(1-1))/(x(1)-x(1-1));
    yo = y(1)+ypo*(xo-x(1));
else
    ypo = (y(im+1)-y(im))/(x(im+1)-x(im));
    yo = y(im)+ypo*(xo-x(im));
end
else
    ypo = (y(2)-y(1))/(x(2)-x(1));
    yo = y(1)+ypo*(xo-x(1));
end
end

```

## G.2 Tomographie quantique

### G.2.1 Programmes principaux

#### Calcul de S

```

function S = compute_S(a, b, ap, bp, m, eta_11, eta_12, ...
                      eta_d1, eta_d2, d1, d2, theta, phi)
% COMPUTE_S - Compute S parameter for Bell inequality.
%
% USES
%
% S = compute_S(a, b, ap, bp, m, eta_11, eta_12, ...
%                 eta_d1, eta_d2, d1, d2, theta, phi);
%
% S = compute_S(a, b, ap, bp, m, eta_11, eta_12, ...
%                 eta_d1, eta_d2, d1, d2, theta);
%
% S = compute_S(a, b, ap, bp, m, eta_11, eta_12, eta_d1, eta_d2, d1, d2);
%
% S = compute_S(a, b, ap, bp, m, eta_11, eta_12, eta_d1, eta_d2, d1);
%
% S = compute_S(a, b, ap, bp, m, eta_11, eta_12, eta_d1, eta_d2);
%
% INPUT
%
% .a is the first angle of the analyzer in line 1.
% .b is the first angle of the analyzer in line 2.
% .ap is the second angle of the analyzer in line 1.
% .bp is the second angle of the analyzer in line 2.
% .m is the mean number of photon pairs per gate period.

```

```

% .eta_l1 is the quantum efficiency of line 1.
% .eta_l2 is the quantum efficiency of line 2.
% .eta_d1 is the quantum efficiency of detector 1.
% .eta_d2 is the quantum efficiency of detector 2.
% .d1 is the average dark counts on detector 1 for each gate period. The
% default is 0.
% .d1 is the average dark counts on detector 1 for each gate period. The
% default is 0.
% .theta is the polarization angle of the pump. The default is pi/4.
% .phi is the overall phase difference between vertical and horizontal
% components in the detection process. The default is 0.
%
% OUTPUT
% .S is the computed S parameter.
%
if nargin < 13
    phi = 0;
end
if nargin < 12
    theta = pi/4;
end
if nargin < 11
    d2 = 0;
end
if nargin < 10
    d1 = 0;
end
E1 = compute_E(a, b, m, eta_l1, eta_l2, eta_d1, eta_d2, ...
                d1, d2, theta, phi);
E2 = compute_E(a, bp, m, eta_l1, eta_l2, eta_d1, eta_d2, ...
                d1, d2, theta, phi);
E3 = compute_E(ap, b, m, eta_l1, eta_l2, eta_d1, eta_d2, ...
                d1, d2, theta, phi);
E4 = compute_E(ap, bp, m, eta_l1, eta_l2, eta_d1, eta_d2, ...
                d1, d2, theta, phi);
S=abs(E1-E2+E3+E4);

```

## Calcul de E

```

function E = compute_E(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, ...
                      eta_d1, eta_d2, d1, d2, theta, phi)
% COMPUTE_E - Compute correlation parameter E.
%
% USES
% E = compute_E(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, ...
%                 eta_d1, eta_d2, d1, d2, theta, phi);
% E = compute_E(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, ...
%                 eta_d1, eta_d2, d1, d2, theta);
% E = compute_E(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, eta_d1, eta_d2, d1, d2);
% E = compute_E(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, eta_d1, eta_d2, d1);
% E = compute_E(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, eta_d1, eta_d2);
%
% INPUT
% .alpha is the angle of the analyzer in line 1.
% .beta is the angle of the analyzer in line 2.
% .m is the mean number of photon pairs per gate period.
% .eta_l1 is the quantum efficiency of line 1.
% .eta_l2 is the quantum efficiency of line 2.
% .eta_d1 is the quantum efficiency of detector 1.
% .eta_d2 is the quantum efficiency of detector 2.
% .d1 is the average dark counts on detector 1 for each gate period. The
% default is 0.
% .d1 is the average dark counts on detector 1 for each gate period. The
% default is 0.
% .theta is the polarization angle of the pump. The default is pi/4.
% .phi is the overall phase difference between vertical and horizontal
% components in the detection process. The default is 0.
%
% OUTPUT
% .E is the computed correlation parameter.
%
if nargin < 11
    phi = 0;
end

```

```

if nargin < 10
    theta = pi/4;
end
if nargin < 9
    d2 = 0;
end
if nargin < 8
    d1 = 0;
end
alphao = alpha+pi/2;
betao = beta+pi/2;
p1 = compute_pc(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, eta_d1, eta_d2, ...
    d1, d2, theta, phi);
p2 = compute_pc(alphao, betao, m, eta_l1, eta_l2, eta_d1, eta_d2, ...
    d1, d2, theta, phi);
p3 = compute_pc(alpha, betao, m, eta_l1, eta_l2, eta_d1, eta_d2, ...
    d1, d2, theta, phi);
p4 = compute_pc(alphao, beta, m, eta_l1, eta_l2, eta_d1, eta_d2, ...
    d1, d2, theta, phi);
E = (p1+p2-p3-p4)/(p1+p2+p3+p4);

```

### Calcul de probabilité de coïncidence

```

function [pc_t, pc_p] = compute_pc(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, ...
    eta_d1, eta_d2, d1, d2, theta, phi)
% COMPUTE_PC - Compute coincidence probability.
%
% USES
%
% [pc_t, pc_p] = compute_pc(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, ...
%     eta_d1, eta_d2, d1, d2, theta, phi);
%
% [pc_t, pc_p] = compute_pc(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, ...
%     eta_d1, eta_d2, d1, d2, theta);
%
% [pc_t, pc_p] = compute_pc(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, ...
%     eta_d1, eta_d2, d1, d2);
%
% [pc_t, pc_p] = compute_pc(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, ...
%     eta_d1, eta_d2, d1);
%
% [pc_t, pc_p] = compute_pc(alpha, beta, m, eta_l1, eta_l2, ...

```

```

%
% eta_d1, eta_d2);
%
% INPUT
% .alpha is the angle of the analyzer in line 1.
% .beta is the angle of the analyzer in line 2.
% .m is the mean number of photon pairs per gate period.
% .eta_l1 is the quantum efficiency of line 1.
% .eta_l2 is the quantum efficiency of line 2.
% .eta_d1 is the quantum efficiency of detector 1.
% .eta_d2 is the quantum efficiency of detector 2.
% .d1 is the average dark counts on detector 1 for each gate period. The
% default is 0.
% .d1 is the average dark counts on detector 1 for each gate period. The
% default is 0.
% .theta is the polarization angle of the pump. The default is pi/4.
% .phi is the overall phase difference between vertical and horizontal
% components in the detection process. The default is 0.
%
% OUTPUT
% .pc_t is the coincidence probability for a thermal distribution.
% .pc_p is the coincidence probability for a poissonian distribution.
%
if nargin < 11
    phi = 0;
end
if nargin < 10
    theta = pi/4;
end
if nargin < 9
    d2 = 0;
end
if nargin < 8
    d1 = 0;
end
eta1 = eta_l1*eta_d1;
eta1 = max([0 eta1]);

```

```

eta1 = min([eta1 1]);
eta2 = eta_12*eta_d2;
eta2 = max([0 eta2]);
eta2 = min([eta2 1]);
bar1 = 1-eta1;
bar2 = 1-eta2;
ca = cos(alpha);
sa = sin(alpha);
cb = cos(beta);
sb = sin(beta);
ct = cos(theta);
st = sin(theta);
tphase = 0.25*cos(phi)*sin(2*theta)*sin(2*alpha)*sin(2*beta);
PHH = ct^2*ca^2*cb^2+st^2*sa^2*sb^2+tphase;
PHV = ct^2*ca^2*sb^2+st^2*sa^2*cb^2-tphase;
PVH = ct^2*sa^2*cb^2+st^2*ca^2*sb^2-tphase;
PVV = ct^2*sa^2*sb^2+st^2*ca^2*cb^2+tphase;
M_dc = [1 d1 d2 d1*d2; ...
         0 1-d1 0 (1-d1)*d2; ...
         0 0 1-d2 (1-d2)*d1; ...
         0 0 0 (1-d1)*(1-d2)];
M_eta = [1 eta1*(PHH+PHV) ...
          eta2*(PHH+PVH) eta1*eta2*PHH; ...
          0 bar1*(PHH+PHV)+PVH+PVV ...
          0 eta2*(bar1*PHH+PVH); ...
          0 0 ...
          bar2*(PHH+PVH)+PHV+PVV eta1*(bar2*PHH+PHV); ...
          0 0 ...
          0 bar1*bar2*PHH+bar1*PHV+bar2*PVH+PVV];
P0 = [0; 0; 0; 1];
M_t = M_dc*inv(eye(4)-m*M_eta/(m+1))/(m+1);
P_t = M_t*P0;
pc_t = P_t(1);
M_p = exp(-m)*M_dc*expm(m*M_eta);
P_p = M_p*P0;
pc_p = P_p(1);

```

## Tomographie simple

```

function [rho, t, e] = tomography(n, f)
% TOMOGRAPHY - Quantum tomography of polarization coded qubit.
%
% USES
% [rho, t, e] = tomography(n, f);
% [rho, t, e] = tomography(n);
%
% INPUT
% .n is a 16-long vector containing the coincidence results for the
% following bases:
% HH, HV, VV, VH, RH, RV, DV, DH, DR, DD, RD, HD, VD, VL, HL, RL.
% .f is an optional parameter. If f is true, plots will be provided. The
% default value is false.
%
% OUTPUT
% .rho is the tomography matrix.
% .t is the trace of rho*rho. For a physically meaningful density matrix,
% t should be in the interval [0;1].
% .e is a vector containing the eigenvalues of rho. For a physically
% meaningful matrix, all eigenvalues should be in the interval [0;1].
%
if nargin<2
    f = false;
end
N = sum(n(1:4));
n = n/N;
p = 1+1i;
m = 1-1i;
rho = 0.5*n(1)*[2 -m -p 1; -p 0 1i 0; -m -1i 0 0; 1 0 0 0] + ...
    0.5*n(2)*[0 -m 0 1; -p 2 1i -p; 0 -1i 0 0; 1 -m 0 0] + ...
    0.5*n(3)*[0 0 0 1; 0 0 1i -p; 0 -1i 0 -m; 1 -m -p 2] + ...
    0.5*n(4)*[0 0 -p 1; 0 0 1i 0; -m -1i 2 -m; 1 0 -p 0] + ...
    0.5*n(5)*[0 0 2i -p; 0 0 m 0; -2i p 0 0; -m 0 0 0] + ...
    0.5*n(6)*[0 0 0 -p; 0 0 m 2i; 0 p 0 0; -m -2i 0 0] + ...
    0.5*n(7)*[0 0 0 -p; 0 0 -m 2; 0 -p 0 0; -m 2 0 0] + ...

```

```

0.5*n(8)*[0 0 2 -p; 0 0 -m 0; 2 -p 0 0; -m 0 0 0] + ...
n(9)*[0 0 0 1i; 0 0 -1i 0; 0 1i 0 0; -1i 0 0 0] + ...
n(10)*[0 0 0 1; 0 0 1 0; 0 1 0 0; 1 0 0 0] + ...
n(11)*[0 0 0 1i; 0 0 1i 0; 0 -1i 0 0; -1i 0 0 0] + ...
0.5*n(12)*[0 2 0 -p; 2 0 -p 0; 0 -m 0 0; -m 0 0 0] + ...
0.5*n(13)*[0 0 0 -p; 0 0 -p 0; 0 -m 0 2; -m 0 2 0] + ...
0.5*n(14)*[0 0 0 -m; 0 0 m 0; 0 p 0 -2i; -p 0 2i 0] + ...
0.5*n(15)*[0 -2i 0 -m; 2i 0 m 0; 0 p 0 0; -p 0 0 0] + ...
n(16)*[0 0 0 1; 0 0 -1 0; 0 -1 0 0; 1 0 0 0];
rho = resize_complex_m(rho);
t = resize_complex(trace(rho*rho));
e = resize_complex(eig(rho));
if f
    figure(1);
    clf;
    title('Initial density matrix');
    subplot(221);
    bar3(abs(rho));
    title('Module of density matrix');
    axis([0 5 0 5 0 1]);
    set(gca,'XTick', 1:4)
    set(gca,'XTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
    set(gca,'YTick', 1:4)
    set(gca,'YTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
    subplot(223);
    bar3(real(rho));
    title('Real part of density matrix');
    axis([0 5 0 5 -1 1]);
    set(gca,'XTick', 1:4)
    set(gca,'XTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
    set(gca,'YTick', 1:4)
    set(gca,'YTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
    subplot(224);
    bar3(imag(rho));
    title('Imaginary part of density matrix');
    axis([0 5 0 5 -1 1]);

```

```

set(gca,'XTick', 1:4)
set(gca,'XTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
set(gca,'YTick', 1:4)
set(gca,'YTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
end

```

### Tomographie de vraisemblance maximale

```

function [mlrho, mlt, mle] = mltomography(n, f)
% MLTOMOGRAPHY - Maximum likelihood tomography.
%
% USE
% [mlrho, mlt, mle] = mltomography(n, f);
%
% INPUT
% .n is the original 16-long set of coincidence measurements.
% .f is an optional parameter. If f is true, plots will be provided. The
% default value is false.
%
% OUTPUT
% .mlrho is the maximum likelihood physically meaningful density matrix.
% .mlt is the trace of rho*rho. For a physically meaningful density matrix,
% mlt should be in the interval [0;1].
% .mle is a vector containing the eigenvalues of rho. For a physically
% meaningful matrix, all eigenvalues should be in the interval [0;1].
%
if nargin<2
    f = false;
end
rho = tomography(n);
delta = det(rho);
m11 = minor1(rho,1,1);
m12 = minor1(rho,1,2);
m1122 = minor2(rho,[1 2],[1 2]);
m1123 = minor2(rho,[1 2],[1 3]);
m1223 = minor2(rho,[1 2],[2 3]);
t = zeros(1,16);

```

```

z1 = resize_complex(sqrt(delta/m11));
z2 = resize_complex(sqrt(m11/m1122));
z3 = resize_complex(sqrt(m1122/rho(4,4)));
z4 = resize_complex(sqrt(rho(4,4)));
z56 = resize_complex(m12/sqrt(m11*m1122));
z78 = resize_complex(m1123/sqrt(rho(4,4)*m1122));
z910 = resize_complex(rho(4,3)/sqrt(rho(4,4)));
z1112 = resize_complex(m1223/sqrt(rho(4,4)*m1122));
z1314 = resize_complex(rho(4,2)/sqrt(rho(4,4)));
z1516 = resize_complex(rho(4,1)/sqrt(rho(4,4)));
t(1) = real(z1);
t(2) = real(z2);
t(3) = real(z3);
t(4) = real(z4);
t(5) = real(z56);
t(6) = imag(z56);
t(7) = real(z78);
t(8) = imag(z78);
t(9) = real(z910);
t(10) = imag(z910);
t(11) = real(z1112);
t(12) = imag(z1112);
t(13) = real(z1314);
t(14) = imag(z1314);
t(15) = real(z1516);
t(16) = imag(z1516);
bt = fminunc(@(x) tomodistance(x,n),t);
bT = [bt(1) 0 0 0; ...
       bt(5)+1i*bt(6) bt(2) 0 0; ...
       bt(11)+1i*bt(12) bt(7)+1i*bt(8) bt(3) 0; ...
       bt(15)+1i*bt(16) bt(13)+1i*bt(14) bt(9)+1i*bt(10) bt(4)];
mlrho = ctranspose(bT)*bT;
mlrho = resize_complex_m(mlrho/trace(mlrho));
mlt = resize_complex(trace(mlrho*mlrho));
mle = resize_complex(eig(mlrho));
if f

```

```

figure(2);
clf;
subplot(221);
bar3(abs(mlrho));
title('Module of maximum likelihood density matrix');
axis([0 5 0 5 0 1]);
set(gca,'XTick', 1:4)
set(gca,'XTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
set(gca,'YTick', 1:4)
set(gca,'YTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
subplot(223);
bar3(real(mlrho));
title('Real part of maximum likelihood density matrix');
axis([0 5 0 5 -1 1]);
set(gca,'XTick', 1:4)
set(gca,'XTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
set(gca,'YTick', 1:4)
set(gca,'YTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
subplot(224);
bar3(imag(mlrho));
title('Imaginary part of maximum likelihood density matrix');
axis([0 5 0 5 -1 1]);
set(gca,'XTick', 1:4)
set(gca,'XTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
set(gca,'YTick', 1:4)
set(gca,'YTickLabel', {'HH', 'HV', 'VH', 'VV'})
end

```

## G.2.2 Programmes auxiliaires

### Calcul d'efficacité quantique de branche

```

function eta = compute_eta(eta_l, eta_d, alpha, theta, phi)
% COMPUTE_ETA - Compute quantum efficiency given analyzer orientation.
%
% USES
% eta = compute_eta(eta_l, eta_d, alpha, theta, phi);

```

```

% eta = compute_eta(eta_l, eta_d, alpha, theta);
% eta = compute_eta(eta_l, eta_d, alpha);
%
% INPUT
% .eta_l is the efficiency of the line.
% .eta_d iks the efficiency of the detector.
% .alpha is the angle of the analyzer with respect to horizontal.
% .theta is the angle of linear polarization of the input pump beam. The
% default value is pi/4.
% .phi is the phase coefficient of the vertical component of the entangled
% state. The default value is 0.
%
% OUTPUT
% .eta is the computed total quantum efficiency.
%
if nargin < 5
    phi = 0;
end
if nargin < 4
    theta = pi/4;
end
ca = cos(alpha);
sa = sin(alpha);
ct = cos(theta);
st = sin(theta);
cp = cos(phi);
eta = eta_l*eta_d*(ct^2*ca^2+st^2*sa^2+2*cp*ct*st*ca*sa);

```

### Distance dans l'espace des matrices

```

function d = tomodistance(ntest, n)
% TOMODISTANCE - Distance for maximum likelihood tomography.
%
% USE
% d = tomodistance(ntest, n);
%
% INPUT

```

```

% .ntest is a 16-long set of real numbers.
% .n is a 16-long set of coincidence measurements. Alternatively, it is a
% 36-long set of coincidence measurements.
%
% OUTPUT
% .d is the computed distance.
%
% NOTES
% . For the 16-long case, the order of coincidence measurements should be:
%   HH, HV, VV, VH, RH, RV, DV, DH, DR, DD, RD, HD, VD, VL, HL, RL.
% . For the 36-long case, it should be:
%   HH, HV, HD, HA, HR, HL, VH, VV, VD, VA, VR, VL, DH, DV, DD, DA, DR, DL,
%   AH, AV, AD, AA, AR, AL, RH, RV, RD, RA, RR, RL, LH, LV, LD, LA, LR, LL.
%
N = sum(n(1:4));
n = n/N;
nt = real(resize_complex(ntest));
T = [nt(1) 0 0 0; ...
      nt(5)+1i*nt(6) nt(2) 0 0; ...
      nt(11)+1i*nt(12) nt(7)+1i*nt(8) nt(3) 0; ...
      nt(15)+1i*nt(16) nt(13)+1i*nt(14) nt(9)+1i*nt(10) nt(4)];
rho = ctranspose(T)*T;
rho = rho/trace(rho);
a = 1/sqrt(2);
b = -1/sqrt(2);
c = 1i/sqrt(2);
d = -1i/sqrt(2);
e = 1/2;
f = -1/2;
g = 1i/2;
h = -1i/2;
if length(n) == 16
  r = [1 0 0 0 a 0 0 a e e e a 0 0 a e; ...
        0 1 0 0 0 a a 0 g e e e a 0 0 d h; ...
        0 0 0 1 c 0 0 a e e g 0 a a 0 g; ...
        0 0 1 0 0 c a 0 g e g 0 a d 0 e];

```

```

elseif length(n) == 36
    r = [1 0 a a a a 0 0 0 0 0 0 a 0 e e e e ...
          a 0 e e e e a 0 e e e e a 0 e e e e; ...
          0 1 a b c d 0 0 0 0 0 0 0 a e f g h ...
          0 a e f g h 0 a e f g h 0 a e f g h; ...
          0 0 0 0 0 0 1 0 a a a a a 0 e e e e ...
          b 0 f f f f c 0 g g g g d 0 h h h h; ...
          0 0 0 0 0 0 0 1 a b c d 0 a e f g h ...
          0 b f e h g 0 c g h f e 0 d h g e f];
else
    error('Wrong size for n.');
end
d = 0;
for k = 1:length(n)
    p = ctranspose(r(:,k))*rho*r(:,k);
    d = d + (p-n(k))^2/p;
end
d = resize_complex(d);

```

### Première mineure

```

function m1 = minor1(M, r, c)
% MINOR1 - Computes first minor.
%
% USE
% m1 = minor1(M, r, c);
%
% INPUT
% .M is an NxN square matrix. N must be at least 2.
% .r is a row number; it must be lower than N.
% .c is a column number; it must be lower than N.
%
% OUTPUT
% .m1 is the determinant of the (N-1)x(N-1) matrix obtained by removing the
% rth row and cth column of M.
%
s = size(M);

```

```

N = min(s);
if N<2
    m1=0;
    return
end
M = M(1:N,1:N);
if r==1
    kr = 2:N;
elseif r==N
    kr = 1:N-1;
else
    kr = [1:r-1 r+1:N];
end
if c==1
    kc = 2:N;
elseif c==N
    kc = 1:N-1;
else
    kc = [1:c-1 c+1:N];
end
M = M(kr, kc);
m1 = det(M);

```

### Seconde mineure

```

function m2 = minor2(M, r, c)
% MINOR2 - Computes second minor.
%
% USE
% m2 = minor2(M, r, c);
%
% INPUT
% .M is an NxN square matrix. N must be at least 3.
% .r is a 2-long vector containing row numbers that must be different and
% lower than N.
% .c is a 2-long vector containing column numbers that must be different
% and lower than N.

```

```

%
% OUTPUT
% .m1 is the determinant of the (N-2)x(N-2) matrix obtained by removing the
% r(1)th, r(2)th rows and c(1)th, c(2)th columns of M.
%
s = size(M);
N = min(s);
if N<3
    m2=0;
    return
end
M = M(1:N,1:N);
r1 = min(r);
r2 = max(r);
if r1==r2
    m2=0;
    return
end
c1 = min(c);
c2 = max(c);
if c1==c2
    m2=0;
    return
end
if r1==1
    kr = 2:r2-1;
else
    kr = [1:r1-1 r1+1:r2-1];
end
if r2<N
    kr = [kr r2+1:N];
end
if c1==1
    kc = 2:c2-1;
else
    kc = [1:c1-1 c1+1:c2-1];

```

```
end
if c2<N
    kc = [kc c2+1:N];
end
M = M(kr, kc);
m2 = det(M);
```