

**Titre:** Modèle de réparation minimale basé sur l'actualisation bayésienne  
Title: du taux de défaillance

**Auteur:** Mohammed Mehdi Boumarafi  
Author:

**Date:** 2014

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Boumarafi, M. M. (2014). Modèle de réparation minimale basé sur l'actualisation bayésienne du taux de défaillance [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/1417/>  
Citation:

## Document en libre accès dans PolyPublie Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/1417/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Mohamed-Salah Ouali  
Advisors:

**Programme:** Génie industriel  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÈLE DE RÉPARATION MINIMALE BASÉ SUR L'ACTUALISATION BAYÉSIENNE  
DU TAUX DE DÉFAILLANCE

MOHAMMED MEHDI BOUMARAFI  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE INDUSTRIEL)

AVRIL 2014

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÈLE DE RÉPARATION MINIMALE BASÉ SUR L'ACTUALISATION  
BAYÉSIENNE DU TAUX DE DÉFAILLANCE

présenté par : BOUMARAFI Mohammed Mehdi

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

CLÉMENT Bernard, Ph.D., président

OUALI Mohamed-Salah, Doct., membre et directeur de recherche

CHINNIAH Yuvan, Ph.D., membre

## **REMERCIEMENTS**

Ce travail a été dirigé par le professeur Mohamed-Salah OUALI, à qui j'adresse toute ma gratitude pour son aide compétente et pour m'avoir soutenu pendant ces deux années. Il a toujours été très ouvert aux idées que j'ai proposées et m'a toujours encouragé à les développer. Son regard critique m'a été très précieux pour structurer le travail et pour améliorer la qualité des différentes parties.

Je remercie vivement les membres de mon jury, messieurs. Bernard CLÉMENT et Yuvin CHINNIAH, professeurs à l'École Polytechnique, pour avoir accepté d'examiner mon travail. Leurs compétences et leur notoriété dans leurs domaines respectifs me font honneur.

Enfin, j'ai une pensée particulière pour les membres de ma famille qui m'ont soutenu tout au long de cette aventure. Ma mère et mon père qui n'ont jamais cessé de me prodiguer leurs encouragements pour aller de l'avant dans mes études et pour l'aboutissement de ce travail.

## RÉSUMÉ

L'estimation des paramètres de fiabilité d'un équipement est toujours conditionnée par la disponibilité des données à savoir les durées de vie et leurs natures complètes ou censurées ce qui rend cette tâche difficile. Les méthodes d'estimation de ces paramètres peuvent varier selon la situation.

Cette estimation est une étape cruciale pour un fiabiliste pour être en mesure de proposer des stratégies de maintenance préventive de l'équipement et ainsi maximiser sa disponibilité et minimiser ses coûts de maintenance

Notre mémoire focalise sur deux principaux objectifs:

1. Établir un modèle d'actualisation des paramètres du taux de défaillance d'un équipement en utilisant l'inférence bayésienne et les méthodes de simulation Chaines de Markov Monte Carlo (MCMC).
2. Proposer une stratégie de remplacement périodique avec réparation minimale (Remplacement du composant défaillant par un composant aussi mauvais que vieux) en cas de défaillance tenant compte du modèle d'actualisation bayésienne du taux de défaillance.

La méthodologie suivie pour atteindre le premier objectif consiste à modéliser le taux de défaillance d'un équipement par une loi exponentielle. Ce taux de défaillance est actualisé par la prise en compte d'une distribution a priori représentant l'avis d'expert. Cette distribution est caractérisée par une loi normale. Comme cette loi est non conjuguée, la simulation MCMC est utilisée pour déterminer l'a posteriori du taux de défaillance. Cet a posteriori représente la valeur actualisée du taux de défaillance.

Pour le second objectif, une modélisation analytique du coût total moyen de la stratégie de remplacement périodique avec réparation minimale en cas de défaillance est proposée. Cette modélisation prend en compte le taux de défaillance actualisé précédemment. Comme le modèle ne s'apprête pas à une dérivation analytique, une approche par simulation est considérée pour déterminer la stratégie optimale.

Un cas d'étude est utilisé tout au long du mémoire pour valider les modèles proposés.

## ABSTRACT

The estimation of equipment reliability Parameters is always conditioned by the availability of its life-time data and the nature of this data such as complete or censored making this task delicate. The methods of estimation of these parameters may vary by situation.

This estimation is a crucial step for a reliability engineer to propose strategies for preventive maintenance of equipment, maximizing availability and minimizing the costs of maintenance

Our work focuses on two main objectives:

1. Establish a model that updates the equipment failure rate parameters by using Bayesian inference and simulation methods of Monte Carlo Markov Chains (MCMC).
2. Develop a minimal repair strategy, taking into account the Bayesian estimation model of updating the failure rate.

The methodology used to achieve the first objective is to model the failure rate of equipment by an exponential law. This failure rate is updated by taking into account a representative expert advice prior. The prior is characterized by a normal distribution. As this law is non-conjugate, the MCMC simulation is used to determine the posterior failure rate. This posterior is the current value of the failure rate.

For the second objective, an analytical model of the average total cost for the periodic replacement with minimal repair strategy in case of failure is proposed. This model takes into account the failure rate previously updated. As the model is not about to analytical derivation, a simulation approach is considered to determine the optimal strategy.

A case study is used throughout the store to validate the proposed models.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	iii
RÉSUMÉ .....	iv
ABSTRACT .....	v
TABLE DES MATIÈRES .....	vi
LISTE DES TABLEAUX .....	viii
LISTE DES FIGURES .....	ix
LISTE DES SIGLES ET DES ABRÉVIATIONS .....	x
LISTE DES ANNEXES .....	xi
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GÉNÉRALE .....	1
1.1    Contexte .....	1
1.2    Objectif de travail .....	3
1.3    Organisation du mémoire .....	4
CHAPITRE 2 : CONCEPTS DE BASE ET REVUE DE LITTÉRATURE .....	6
2.1    Fiabilité des équipements .....	6
2.1.1    Concepts de défaillance, de fiabilité et de durée de vie .....	6
2.1.2    Fonction du taux de défaillance .....	8
2.1.3    Lois usuelles de fiabilité .....	9
2.2    Méthodes d'estimation paramétrique .....	11
2.2.1    Méthode d'estimation par le maximum de vraisemblance .....	12
2.2.2    Méthodes d'estimation bayésienne .....	12
2.2.3    Considérations importantes .....	15
2.2.4    Calcul de la loi a posteriori .....	16
2.3    Stratégies de maintenance .....	19
2.3.1    Stratégie de maintenance de type Age .....	19
2.3.2    Stratégie de maintenance de type Bloc .....	20
2.3.3    Stratégie de remplacement périodique avec réparation minimale après défaillance .....	21
2.3.4    Autres stratégies de maintenance périodique .....	21
CHAPITRE 3 : MODÈLE D'ACTUALISATION DU TAUX DE DÉFAILLANCE .....	23
3.1    Présentation du cas d'étude .....	23

3.2	Éléments de modélisation.....	24
3.2.1	Démarche générale.....	24
3.2.2	Calcul de la vraisemblance .....	25
3.2.3	Modélisation de l'avis de l'expert.....	25
3.3	Algorithme d'actualisation du taux de défaillance.....	28
3.4	Résultats obtenus et discussion .....	29
3.4.1	Effet de la variation des paramètres ( $\alpha, \beta$ ).....	29
3.4.2	Effet de l'incertitude de l'expert .....	31
	CHAPITRE 4 : STRATÉGIE DE MAINTENANCE ET OPTIMISATION .....	34
4.1	Modélisation de la stratégie de maintenance.....	34
4.1.1	Hypothèses et notations .....	35
4.1.2	Formulation mathématique du coût .....	35
	Existence et unicité d'une politique optimale.....	36
4.2	Structure des données.....	37
4.3	Résultats de la simulation.....	38
4.3.1	Cas de la vraisemblance non actualisée .....	38
4.3.2	Cas de la vraisemblance actualisée .....	44
	CHAPITRE 5 : CONCLUSION GÉNÉRALE .....	47
	RÉFÉRENCES .....	49
	ANNEXES .....	53

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2-1 Exemples de lois a priori conjuguées .....	15
Tableau 3-1 Codes utilisés pour modéliser l'a priori .....	26
Tableau 3-2 Différents scénarios a priori selon les avis de l'expert.....	26
Tableau 3-3 Résultats de simulation après 1000 itérations avec $(\alpha, \beta)$ provenant d'une loi uniforme $(0 ; 0.1)$ .....	30
Tableau 3-4 Résultats de simulation après 1000 itérations avec $(\alpha, \beta)$ provenant d'une loi uniforme $(0.1 ; 0.2)$ .....	30
Tableau 3-5 Résultats de simulation après 1000 itérations avec $(\alpha, \beta)$ provenant d'une loi uniforme $(0.2 ; 0.3)$ .....	30
Tableau 3-6 Résumé des résultats du taux de défaillance a posteriori en fonction de $(\alpha, \beta)$ ...	31
Tableau 3-7 Résultats de simulation avec un avis d'augmentation et $(\alpha, \beta)$ entre $(0.2;0.3)$	31
Tableau 4-1 Structure des données de durées de vie .....	37
Tableau 4-2 Données des coûts de maintenance .....	37
Tableau 4-3 Résultats, cas d'augmentation sure du taux de défaillance, vraisemblance non actualisée avec $0.1 < \alpha < 0.2$ .....	39
Tableau 4-4 Résultats en cas d'augmentation moyenne de taux de défaillance, vraisemblance non actualisée, avec $0.1 < \alpha < 0.2$ .....	40
Tableau 4-5 Résultats, cas d'augmentation incertaine de taux de défaillance, vraisemblance non actualisée, avec $0.1 < \alpha < 0.2$ .....	42
Tableau 4-6 Récapitulatif des stratégies optimales en fonction de l'incertitude de l'expert...	43
Tableau 4-7 Résultats de simulation en cas d'augmentation sure de taux de défaillance, vraisemblance non actualisée, avec $0 < \alpha < 0.1$ .....	45
Tableau 4-8 Résultats de simulation en cas d'augmentation sure de taux de défaillance, vraisemblance actualisée, avec $0 < \alpha < 0.1$ .....	45
Tableau 4-9 Récapitulatif des stratégies optimales en fonction l'actualisation de la vraisemblance .....	45

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 La courbe en baignoire (adaptée de Kaffel, 2001) .....	9
Figure 2.2 La fonction $f(t)$ de la loi exponentielle .....	10
Figure 2.3 La fonction $R(t)$ de la loi exponentielle.....	10
Figure 2.4 Exemple d'une inférence hiérarchique avec trois niveaux.....	14
Figure 2.5 Algorithme Metropolis-Hastings.....	18
Figure 2.6 Algorithme de Gibbs .....	18
Figure 2.7 Stratégie de maintenance de type Age (Bagayoko, 2009).....	19
Figure 2.8 Stratégie de maintenance de type Bloc (Bagayoko, 2009).....	21
Figure 3.1 Équipement multi-composants neuf.....	21
Figure 3.2 Démarche générale d'actualisation du taux de défaillance .....	24
Figure 3.3 Algorithme d'actualisation du taux de défaillance.....	28
Figure 3.4 La vraisemblance, l'a priori et le résultat d'échantillonnage dans le cas d'une augmentation certaine avec $(\alpha, \beta)$ provenant d'une loi uniforme (0.2 ; 0.3) .....	32
Figure 3.5 La vraisemblance, l'a priori et le résultat d'échantillonnage dans le cas d'une augmentation moyenne avec $(\alpha, \beta)$ provenant d'une loi uniforme (0.1 ; 0.2) .....	33
Figure 3.6 La vraisemblance, l'a priori et le résultat d'échantillonnage dans le cas d'une augmentation incertaine avec $(\alpha, \beta)$ provenant d'une loi uniforme (0.1 ; 0.2) .....	33
Figure 4.1 Évolution du taux de défaillance, écart-type et coût de maintenance, cas d'augmentation sure avec $0.1 < \alpha < 0.2$ .....	39
Figure 4.2 Évolution du taux de défaillance, écart-type et coût de maintenance, cas d'augmentation moyenne avec $0.1 < \alpha < 0.2$ .....	41
Figure 4.3 Évolution du taux de défaillance, écart-type et coût de maintenance, cas d'augmentation incertaine avec $0.1 < \alpha < 0.2$ .....	42
Figure 4.4 Comparaison du comportement du taux de défaillance suivant trois avis d'expert différents .....	43
Figure 4.5 Comparaison des coûts de maintenance pour trois avis d'experts .....	44
Figure 4.6 Évolution du taux de défaillance avec actualisation ou non de la vraisemblance ..	46
Figure 4.7 Évolution du coût de maintenance dans le cas d'actualisation ou non de la vraisemblance .....	46

## LISTE DES SIGLES ET DES ABRÉVIATIONS

**$C_c$**  : Coût de réparation corrective de l'équipement à la fin d'une période  $j$ .

**$C_i$**  : Coût d'inspection de l'équipement à la fin de chaque période  $j$ .

**$C_P$**  : Coût de réparation préventive de l'équipement

**$C_{RM}$**  : Coût de réparation minimale du produit à chaque panne

**$\tilde{\mu}$**  : Moyenne de la densité a priori

**$\tilde{\sigma}$**  : Écart-type de la densité a priori

**$\lambda_p$**  : Taux de défaillance a posteriori

**MCMC** : Markov Chain Monte Carlo

## **LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE A : PROGRAMME MATLAB.....55

## CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GÉNÉRALE

### 1.1 Contexte

Dans toute analyse probabiliste de fiabilité, les durées de vie aléatoires d'un équipement ou d'un système industriel, sont souvent modélisées par des lois de probabilité paramétriques telle la loi exponentielle, normale ou de Weibull. Cependant, l'estimation des paramètres de ces lois demeure une tâche relativement délicate du fait de la disponibilité des données et de leurs natures c'est-à-dire des durées de vie complètes ou censurées.

En effet, plusieurs approches classiques sont utilisées pour estimer les paramètres d'une distribution de probabilité telle que par exemple, l'estimation du taux de défaillance associé à la loi exponentielle, ainsi que son intervalle de confiance. Parmi les méthodes les plus populaires, nous citons l'estimation par les méthodes de moindres carrés et du maximum de vraisemblance.

Par ailleurs, afin de maximiser la disponibilité d'un équipement ou minimiser ses coûts de maintenance, un ingénieur fiabiliste ou de maintenance étudie des stratégies de maintenance préventive qui cherchent à ordonner les remplacements préventifs d'un équipement de façon à optimiser la disponibilité ou minimiser les coûts de maintenance sur un horizon infini. Ces modèles permettent de déterminer la périodicité ou l'intervalle de remplacements préventifs de manière à satisfaire le critère de disponibilité ou de coût.

Bien que les modèles minimisant les coûts s'apprêtent plus ou moins à l'optimisation analytique, les modèles de maximisation de la disponibilité des équipements sont plus difficiles à résoudre analytiquement du fait qu'ils font intervenir des formes plus complexes de produits de convolution. Toutes ces stratégies sont basées sur la théorie de renouvellement qui suppose que les remplacements préventifs et correctifs remettent l'équipement aussi bon que neuf. Une hypothèse plus ou moins justifiée en pratique. Cependant, une hypothèse de réparation minimale, permettant de remettre l'équipement dans un état « aussi bon que mauvais » est plus réaliste. Ce type de stratégie permet d'effectuer des interventions correctives minimales après une défaillance et effectuer un

remplacement préventif à une périodicité donnée. Ce type de stratégie donne des stratégies optimales si le taux de défaillance est strictement croissant.

D'un point de vue pratique, pour établir de tels modèles, le fiabiliste se base sur plusieurs informations issues des inspections périodiques de l'équipement et données de dégradation ou de défaillance. Les informations concernent l'état de dégradation de l'équipement, ces informations sont collectées pendant les inspections préventives ou après diagnostic de défaillances. Ces informations sont consignées dans les dossiers machines. Elles sont généralement non exploitées à leurs justes valeurs. Les données de dégradation regroupent les relevés de fatigue, d'usure, de corrosion, collectées habituellement lorsque l'équipement est soumis à une stratégie de maintenance conditionnelle. Ces informations peuvent être rares et ne sont disponibles que pour les équipements dont la défaillance cause des accidents graves ou des pertes énormes en termes de coût ou de disponibilité. Les autres données dites de défaillance concernent les durées de vie complètes ou censurées. Les données de vie complètes caractérisent la fin de vie d'un équipement. L'équipement est retiré de la production et sera soumis à une rénovation majeure. Les données de vie censurées caractérisent les durées de fonctionnement sans panne. Bien entendu, toutes les informations et les données disponibles peuvent être entachées d'incertitudes ou d'erreurs.

Lorsque les données de défaillance ne sont pas disponibles en quantité suffisante, cas d'un équipement neuf, l'estimation du taux de défaillance à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance est biaisée et ne peut être considérée pour prédire son évolution à court terme. Pour ce faire, le taux de défaillance estimé ainsi que son écart-type, ceux généralement fournis par le constructeur de l'équipement, peuvent être utilisés pour prédire les défaillances d'un équipement au cours d'une période donnée. Le calcul du taux de défaillance estimé se base sur des essais limités de laboratoire ou du retour d'expériences. Ce taux de défaillance estimé est souvent considéré comme constant au cours de la durée de vie utile de l'équipement selon l'hypothèse du constructeur.

En pratique, comme l'usage d'un équipement pourrait être différent de celui prévu par le constructeur, ou que l'équipement a été modifié pour incorporer d'autres fonctions non prévu par le constructeur, ou bien l'efficacité des interventions de maintenance, toutes ces

raisons et bien d'autres pourraient avoir un effet sur le comportement du taux de défaillance au cours du temps. Ainsi, il peut rester constant, augmenter ou diminuer au cours du temps. A ce sujet, les remarques suivantes peuvent être soulignées :

- Au fur et à mesure que les défaillances s'accumulent, la dégradation de l'équipement augmente au cours du temps même si les interventions de maintenance sont entreprises sur l'équipement. D'ailleurs, ces interventions peuvent être imparfaites, ce qui peut être à l'origine d'autres défaillances. Dans ce cas, le taux de défaillance augmentera. Cependant, il pourra diminuer ou rester constant si des opérations de maintenance ont été entreprises sur l'équipement.
- L'estimation du taux de défaillance utilisant la méthode des moindres carrés ou de maximum de vraisemblance n'intègre pas les informations récoltées et les avis d'experts consignés après la mise en marche de l'équipement, ce qui pourrait améliorer l'estimation de taux de défaillance et la rendre plus représentatif.

Afin de pouvoir prendre en compte les avis d'experts par rapport à l'état de dégradation ou tout simplement par rapport au taux de défaillance à un moment donné, l'inférence bayésienne est souvent proposée dans la littérature. Son objectif est de conjuguer, sur une période donnée, l'avis d'expert, pris sous forme d'une distribution a priori sur la valeur du taux de défaillance, avec les données de défaillances réellement enregistrées dans la même période. Cela permet de mettre à jour le taux de défaillance en considérant non seulement les données de défaillances mais aussi les avis d'experts.

## 1.2 Objectif de travail

L'objectif de ce travail est de proposer une stratégie de réparation minimale pour un équipement en se basant sur l'actualisation du taux de défaillance par une inférence bayésienne. La stratégie de réparation minimale consiste à remplacer préventivement l'équipement à une certaine périodicité. Si l'équipement tombe en panne entre deux périodes de remplacement préventif, l'équipement est réparé minimalement (aussi bon que vieux). Son taux de défaillance reste sensiblement le même après la réparation minimale qu'avant la défaillance. Cette stratégie déterminera, à chaque période de mise en marche, l'instant où le remplacement préventif doit être effectué et ce à moindre coût. Ce modèle de réparation minimale permettra de mettre à contribution l'inférence

bayésienne pour estimer le taux de défaillance d'un équipement pour la période suivante (appelé taux de défaillance a postériori) en se basant sur les données de défaillance collectées (appelées données de vraisemblance) et l'avis d'expert de maintenance (appelé l'a priori) durant la période antérieure. Ce modèle de réparation minimale permettra ensuite de déterminer la périodicité optimale des remplacements préventifs de l'équipement.

D'un point de vue modélisation bayésienne du taux de défaillance, celui qui combine les données de vraisemblance avec l'a priori d'experts de maintenance amène à des modèles très complexes lorsque les modèles représentant la loi a priori et la loi a posteriori sont différents (modèles dits non conjugués). Dans ce cas, une expression analytique de la distribution a posteriori n'existe pas. Pour résoudre ce problème, nous faisons appel à une technique d'échantillonnage par simulation dite MCMC « Markov Chain Monte Carlo ». Cette technique nous permettra de déterminer le modèle a posteriori pour n'importe quel modèle a priori. L'estimation du taux de défaillance a posteriori ainsi que son intervalle de confiance seront définitivement déterminés par simulation.

Considérons les coûts de réparation minimale, d'inspection et de remplacement préventif, nous chercherons à déterminer la périodicité optimale de remplacement d'un équipement. Pour une période donnée, les données de défaillance seront combinées avec quatre différents scénarios (avis d'experts) concernant le comportement du taux de défaillance durant la période subséquente: aucun avis, le taux de défaillance reste constant, augmente ou diminue ainsi que l'erreur que l'expert estime à propos de son avis. Ainsi, plusieurs situations seront considérées afin d'examiner le comportement du taux de défaillance a postériori. L'existence ou non d'une périodicité optimale de remplacement préventif dépendra essentiellement du taux de défaillance et des coûts encourus. Un programme MatLab est proposé pour modéliser et résoudre la stratégie de réparation minimale.

### 1.3 Organisation du mémoire

Le mémoire est organisé sur trois chapitres. Le chapitre 2 est consacré aux concepts de bases de fiabilité paramétrique des équipements, de fiabilité et d'inférence bayésienne et des techniques de simulations de type MCMC. Une revue de littérature sur les modèles

de modélisation des taux de défaillance appliquant une inférence bayésienne avec des techniques de simulation MCMC. Ce chapitre présente également une revue de littérature sur les stratégies de maintenance en général et celles basées sur le principe de réparation minimale.

Le chapitre 3 présente la démarche de modélisation d'actualisation du taux de défaillance selon la méthode d'inférence bayésienne, pour ce faire, nous allons prendre comme exemple une densité exponentielle de la vraisemblance et nous allons modéliser l'avis d'un expert à l'aide d'une distribution normale. L'organisation de l'étude statistique permettant de simuler les différents avis d'experts et les combiner avec la vraisemblance choisie, nous intégrons cette démarche dans un algorithme de Metropolis-Hastings pour avoir une actualisation a posteriori du taux de défaillance à chaque période. Enfin du chapitre nous allons présenter et analyser les résultats de cette simulation.

Le chapitre 4 présente le modèle d'optimisation de la stratégie de réparation minimale. Comme le taux de défaillance est actualisé à chaque période, une nouvelle formulation de la stratégie de maintenance est proposée qui tient compte des coûts et du taux de défaillance a posteriori ainsi que les coûts de réparation minimale, d'inspection et de remplacement. L'optimisation de la stratégie proposée sera basée sur de simulation.

Enfin, une conclusion ainsi que les pistes et idées qui peuvent être développées à partir des travaux élaborés seront présentées.

## CHAPITRE 2 : CONCEPTS DE BASE ET REVUE DE LITTÉRATURE

Dans ce chapitre, nous allons présenter les différentes notions de bases et lois de fiabilité, du taux de défaillance habituellement utilisées pour estimer la fiabilité d'un équipement. Ensuite, nous présentons un état de l'art des principaux modèles de fiabilité proposés dans la littérature, en particulier, ceux utilisant les méthodes bayésiennes. Les modèles avec des distributions de densité non conjuguées, ceux nécessitant le recours aux techniques d'échantillonnage MCMC pour estimer les paramètres des densités a posteriori sont également esquissés. En dernière partie, nous présentons une revue des stratégies de maintenance les plus rencontrées, en particulier, les stratégies dites âge et bloc, ainsi que celles utilisant le principe de réparation minimale.

### 2.1 Fiabilité des équipements

#### 2.1.1 Concepts de défaillance, de fiabilité et de durée de vie

La défaillance d'un équipement désigne l'arrêt de réalisation de sa fonction principale ou de l'une de ses fonctions secondaires. Un équipement est déclaré défaillant lorsque une ou plusieurs de ses grandeurs caractéristiques évoluent en dehors des tolérances définies lors de sa conception (Kozlov, Ushakov et al. (1970)).

Plus spécifiquement, l'Union Technique de l'Électricité (UTE), sur recommandation de la Commission électrotechnique internationale, a proposé la définition suivante de la fiabilité : « La fiabilité est l'aptitude d'un dispositif ou un équipement à accomplir une fonction requise dans des conditions données pour une période de temps donnée. En d'autres termes la fiabilité c'est la probabilité de survie d'un équipement » (Laprie 2004).

La fiabilité est une caractéristique d'un système exprimée par *la probabilité* qu'il accomplisse *la fonction* pour laquelle il a été conçu, dans des *conditions* données et pendant une *durée* donnée. *La fiabilité* est une caractéristique du système au même titre que les caractéristiques dimensionnelles (Elsayed 2012). Cette définition véhicule quatre concepts principaux :

- **Concept 1:** La fiabilité s'exprime par une **probabilité** (grandeur comprise entre 0 et 1) et qui rend compte du caractère aléatoire de l'accomplissement de la fonction.
- **Concept 2:** La **fonction** requise (service rendu ou mission accomplie) implique un seuil d'admissibilité en dessous duquel la fonction n'est plus remplie.
- **Concept 3:** Les **conditions d'utilisation** renvoie à l'environnement et ses variations, les contraintes mécaniques, etc.
- **Concept 4:** La période de temps donne la **durée de la mission** en unités d'usage, c'est le temps de bon fonctionnement.

En pratique, la fonction de fiabilité est directement liée à une autre notion qui est la durée de vie d'un équipement qu'on définit comme étant la durée durant laquelle le système est en fonctionnement et elle mesure la quantité de service rendue par le système et qui peut être exprimée en unités de temps, en cycles ou en unités produites par le système.

La durée de vie  $T$  est une variable aléatoire caractérisant le passage aléatoire d'un système d'un état de fonctionnement à un état de défaillance selon une loi de probabilité qui peut être connue ou inconnue.

La fonction de densité de la variable aléatoire associée à la durée de vie  $T$  du système est exprimée par la probabilité que la durée de vie soit comprise entre  $t$  et  $t+dt$  :

$$f(t) = \Pr(t < T \leq t + dt) \quad (2.1)$$

Avec la fonction de densité définie auparavant, une fonction de répartition  $F(t)$  peut être associée à la durée de vie.  $F(t)$  représente la probabilité que la durée de vie  $T$  soit inférieure ou égale à  $t$ :

$$F(t) = \Pr(T \leq t) = \int_0^t f(u)du \quad (2.2)$$

Par conséquent, la fiabilité  $R(t)$  du système qui désigne la probabilité que le système soit fonctionnel au-delà de la durée  $t$ . Elle s'écrit comme suit:

$$R(t) = \Pr(T > t) = \int_t^{\infty} f(u)du \quad (2.3)$$

D'après les deux définitions précédentes, la propriété suivante doit être vérifiée :

$$R(t) + F(t) = \int_0^{\infty} f(u)du = 1 \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Fonction du taux de défaillance

La fonction du taux de défaillance ou d'avarie  $\lambda(t)$  d'un système est donné par  $\lambda(t) = f(t|T > t)$ . Comme  $F(t)$  désigne le risque de défaillance d'un équipement à l'instant  $t$ , la probabilité que l'équipement tombe en panne entre les instants  $t$  et  $t+dt$  est donnée par la dérivé de la fonction  $F(t)$  au cours de l'intervalle  $t$  et  $t+dt$ , notée  $\frac{dF(t)}{dt}$ , sachant que l'équipement est survivant à l'instant  $t$  avec une probabilité  $R(t)$ . Ainsi, la fonction du taux de défaillance  $\lambda(t)$  s'écrit alors comme suit :

$$\lambda(t) = \frac{1}{R(t)} \times \frac{dF(t)}{dt} = \frac{-1}{R(t)} \times \frac{dR(t)}{dt} \quad (2.5)$$

Il est largement admis en fiabilité classique que l'évolution du taux de panne d'un équipement neuf au cours de son cycle de vie suit une courbe spéciale, appelée « courbe en baignoire » (Figure 2.1). Selon cette courbe, le taux de défaillance décroît pendant la première période de vie de l'équipement. Les défaillances qui surviennent dans cette période sont appelées « défaillances infantiles ». Ensuite, le taux de défaillance devient constant dans le temps. Cette période caractérise les défaillances aléatoires. Il s'agit de la période de vie utile de l'équipement. Enfin, durant la dernière période, le taux de défaillance croit avec le temps. L'équipement subit des défaillances d'usure ou de vieillesse.

Connaissant une des quatre fonctions de fiabilité, les relations suivantes permettent d'en déduire les autres fonctions. Ces fonctions sont générales et ne dépendent pas de la loi de probabilité.

$$R(t) = \int_T^{\infty} f(t)dt = \exp \left[ - \int_0^t \lambda(u)du \right] \quad (2.6)$$

Il en découle de cette relation, les relations suivantes :

$$F(t) = 1 - \exp \left[ - \int_0^t \lambda(u)du \right] \quad (2.7)$$

$$f(t) = \lambda(t) \exp \left[ - \int_0^t \lambda(u) du \right] \quad (2.8)$$

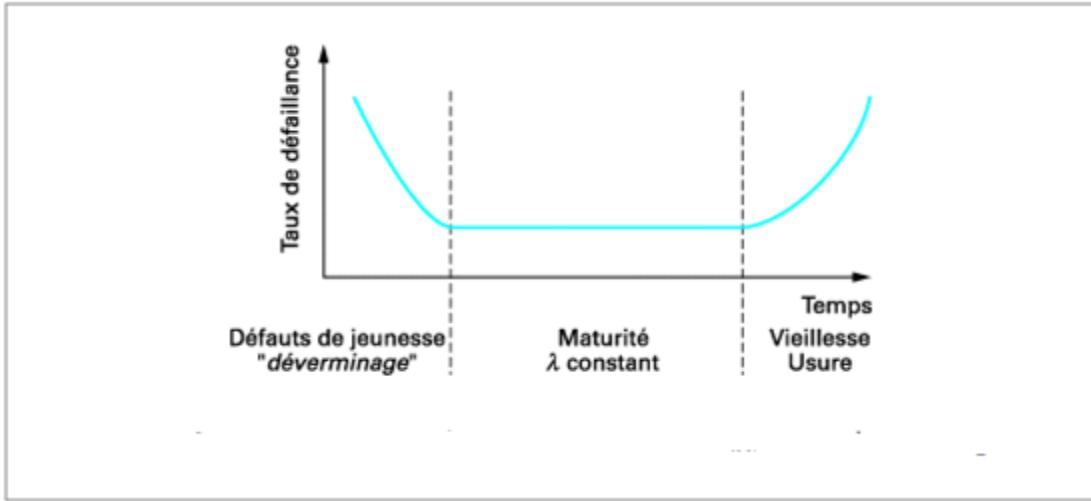


Figure 2.1 La courbe en baignoire (adaptée de Kaffel, 2001)

### 2.1.3 Lois usuelles de fiabilité

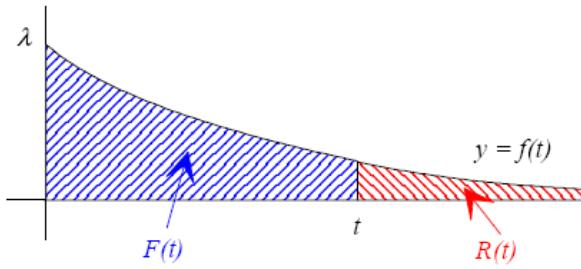
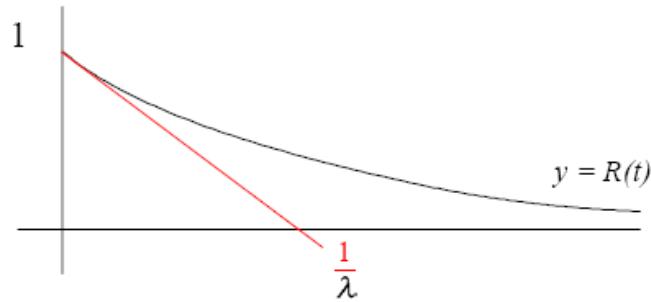
L'évaluation de la fiabilité d'un équipement passe obligatoirement par la connaissance déterministe ou plus ou moins approximative, soit de la distribution de probabilité des durées de vie de cet équipement, soit des paramètres de son taux de défaillance. Cela est généralement déterminé à travers des essais de fiabilité, ou des données de retour d'expérience. Plusieurs distributions paramétriques peuvent être utilisées. Nous présentons celles les plus utilisées en pratique.

- **Loi exponentielle**

La loi exponentielle est une loi qui est parfaitement définie dès que son unique paramètre Lambda est connu. Elle est la loi suivie par la variable aléatoire  $T$  lorsque le taux de défaillance est constant. Pour tout  $t \geq 0$  nous avons  $\lambda(t) = \lambda$ , une constante strictement positive ( $\lambda > 0$ ). Cette loi caractérise généralement la durée de vie utile d'un équipement. Cette loi est très utilisée en fiabilité à raison de sa simplicité analytique. Donc pour tout  $t \geq 0$ , la fonction de densité de défaillance est donnée par  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  (Figure 2.2).

La fonction de distribution (de défaillance) est donnée par :  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

La fonction de fiabilité est donnée par :  $R(t) = e^{-\lambda t}$  (Figure 2.3).

Figure 2.2 La fonction  $f(t)$  de la loi exponentielleFigure 2.3 La fonction  $R(t)$  de la loi exponentielle

- **Loi de Weibull**

Cette distribution est définie dès que les trois paramètres suivants sont déterminés:  $\beta$  (paramètre de forme),  $\varphi$  (paramètre de position) et  $\eta$  (paramètre d'échelle). Elle est connue pour caractériser des phénomènes de fatigue, d'usure ou de dégradation. Ses fonctions de fiabilité sont données par :

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t - \varphi}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left[ - \left( \frac{t - \varphi}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (2.9)$$

$$F(t) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t - \varphi}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (2.10)$$

$$R(t) = \exp \left[ - \left( \frac{t - \varphi}{\eta} \right)^\beta \right] \quad (2.11)$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t - \varphi}{\eta} \right)^{\beta-1} \quad (2.12)$$

- **Loi normale**

La loi normale est la plus usuelle parmi les lois de fiabilité. Elle comporte deux paramètres la moyenne  $\mu$  et l'écart-type  $\sigma$ . La fonction de densité s'écrit, pour  $t \geq 0$ , comme suit :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \sigma > 0 \quad (2.13)$$

La loi normale prend une place particulière dans les études statistiques grâce à la convergence d'une suite de variables aléatoires vers cette loi en utilisant le théorème de la limite centrale. En effet, elle correspond au comportement de la moyenne d'une suite d'expériences aléatoires similaires et indépendantes lorsque le nombre d'expériences est très élevé. Grâce à cette propriété, la loi normale permet de s'approcher d'autres distributions et ainsi de modéliser de nombreuses études scientifiques telles la modélisation d'erreurs de mesure ou d'expériences aléatoires.

Par ailleurs, la loi normale est souvent utilisée pour modéliser des avis d'experts. Ainsi, l'avis d'un expert peut être modélisé par la moyenne d'une loi normale et l'incertitude de l'avais de l'expert par la variance ou l'écart-type de la même loi (Gendre 1977), (Saporta 2006).

Il existe également d'autres lois paramétriques utilisées en fiabilité telles que la loi gamma ou la loi log-normale. Toutes ces lois sont déterminées dès que leurs paramètres sont estimés à partir d'échantillons de données de durées de vie.

## 2.2 Méthodes d'estimation paramétrique

Pour estimer les paramètres d'une distribution de probabilité, nous faisons recours aux méthodes statistiques d'estimation telles que les méthodes graphiques et les méthodes d'inférence statistiques en particulier, la méthode du maximum de vraisemblance et d'estimation bayésienne.

Plus généralement, soit une variable aléatoire  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  qui représente les durées de vie d'un équipement. Le problème consiste à déterminer une fonction de densité  $f(x|\theta)$  où seul le vecteur de paramètres  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  est inconnu.

Une fois le modèle paramétrique construit, l'objectif serait d'effectuer une inférence sur le paramètre inconnu  $\theta$ . Dans la littérature, plusieurs méthodes d'inférence statistique sont possibles, nous examinons les plus connues : la méthode de maximum de vraisemblance et l'estimation bayésienne.

### 2.2.1 Méthode d'estimation par le maximum de vraisemblance

Dans cette méthode dite classique, l'information provenant des données observées est l'unique source d'information utilisée pour estimer les paramètres de la loi de fiabilité. Elles sont des réalisations de la variable aléatoire. Elles servent à faire porter l'inférence sur les paramètres  $\theta$ . Dans cette méthode, une fonction de vraisemblance est utilisée. Elle s'écrit comme suit :

$$l(\theta|x) = f(x|\theta) \quad (2.14)$$

Dans cette méthode, nous cherchons un estimateur de  $\hat{\theta}_{MV}$  qui maximise la fonction de vraisemblance  $l(\theta|x)$ . L'estimateur est donné par :

$$\hat{\theta}_{MV} = \operatorname{Arg}_{\theta} \max \{l(\theta|x)\} \quad (2.15)$$

où  $l(\theta|x)$  est la densité de probabilité conditionnelle suite aux observations.

### 2.2.2 Méthodes d'estimation bayésienne

L'estimation bayésienne se base sur le théorème de Bayes (Miller, Freund et al. 1965).

Pour deux événements aléatoires A et B, ce théorème s'écrit comme suit :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \quad (2.16)$$

Où  $P(A)$  représente la probabilité a priori, et  $P(A|B)$  représente la probabilité a posteriori.

Par opposition à l'estimation paramétrique basée sur le maximum de vraisemblance, l'estimation bayésienne suppose que les paramètres d'intérêts  $\theta$  sont considérés comme des variables aléatoires caractérisées par des densités de probabilité  $\pi(\theta)$ . Ces densités s'appellent les densités a priori. Afin d'estimer les paramètres a posteriori, la formule précédente de Bayes est utilisée. Elle donne le résultat suivant :

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\theta}^{\infty} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta} \quad (2.17)$$

Où  $f(x|\theta)$  caractérise la vraisemblance des données connaissant les paramètres  $\theta$ .

Les bases de l'estimation bayésienne sont mises en place dans les années 40. Cependant, elles seront réellement développées dans les années 70 à travers plusieurs travaux comme ceux de (Efron and Morris 1972), (Casella 1985), (Deely and Lindley 1981), (Kass and Steffey 1989) et (Morris 1983). Dans ces travaux, les auteurs expliquent la théorie de modélisation bayésienne et sa relation avec les autres méthodes statistiques.

L'un des premiers auteurs à avoir utilisé l'estimation bayésienne du taux de défaillance de composants électroniques est (Ringler 1981). Ce travail a mené à des changements sur la courbe classique en baignoire du taux de défaillance. D'autres auteurs ont utilisé cette méthode pour combiner les informations issues des observations (vraisemblance) avec les connaissances des experts tels que l'estimation de la fiabilité des équipements en aérospatial à la NASA (Pérez, Martín et al. 2006).

En général, dans la modélisation bayésienne, les paramètres de la distribution *a priori* (appelés les hyperparamètres) sont déterminés par inférence bayésienne dite « hiérarchique ». Cette inférence permet de modéliser en plusieurs niveaux hiérarchiques les paramètres de la densité *a priori* jusqu'au dernier niveau qui consiste à estimer le paramètre visé par l'inférence. Dans la plupart des cas, la loi de premier niveau sera conjuguée, par souci de simplification et aussi, parce que la modélisation sur les niveaux supérieurs permet de corriger éventuellement cette erreur de spécification de l'information *a priori*. L'idée principale de la modélisation bayésienne hiérarchique consiste à considérer les hyperparamètres de la densité *a priori* comme des variables aléatoires dépendantes d'autres hyperparamètres. Donc, un modèle bayésien hiérarchique est un modèle tel que la loi *a priori* est composée de plusieurs distributions conditionnelles (Robinson 2001). La figure 2.4 illustre un cas d'une inférence bayésienne avec trois niveaux hiérarchiques des paramètres à estimer.

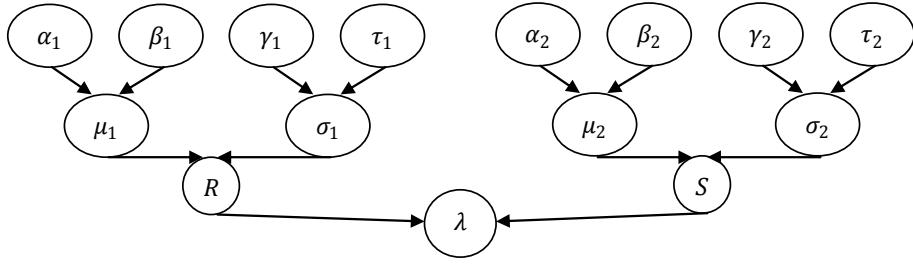


Figure 2.4 Exemple d'une inférence hiérarchique avec trois niveaux

Un résumé des méthodes bayésiennes est présenté dans (Berger 2000). Cependant, il est très difficile d'appliquer une inférence bayésienne analytiquement dans le cas où nous avons des distributions de probabilité non conjuguées (la distribution a priori et la distribution a posteriori n'ont pas la même forme). Donc l'utilisation de ces méthodes, est restée restreinte jusqu'à l'introduction de méthodes numériques de chaines de Markov Monte Carlo (MCMC)(Brooks 1998). Ces méthodes sont basées sur des techniques de simulation qui permettent d'obtenir des solutions numériques des problèmes basés sur des modèles très complexes (Pérez, Martín et al. 2006).

À ce sujet, plusieurs algorithmes sont proposés dans la littérature. Les algorithmes Metropolis, Hastings et Gibbs sont parmi les dix algorithmes les plus utilisés en ingénierie dans le dernier siècle (Beichel et Sullivan 2000). L'algorithme Metropolis de base (Metropolis, Rosenbluth et al. 1953), (Hastings 1970) est adapté dans plusieurs travaux consacrés à des différents domaines tels que en biologique (Liu and Logvinenko 2003) et en intelligence artificielle (Andrieu, De Freitas et al. 2003). Ces algorithmes offrent des méthodes d'échantillonnage à partir de distributions de probabilité complexes.

Enfin, Kelly & Smith (2008) constatent aussi le large champ d'application des méthodes bayésiennes avec les méthodes MCMC. Nous pouvons citer les applications dans les sciences sociales (Gill 2002), l'ingénierie financière (Geweke 2005), la science de santé (Lawson 2006) et le contrôle des processus (Enrique 2006).

### 2.2.3 Considérations importantes

L'estimation bayésienne est très sensible aux aspects suivant :

- **Choix de la loi a priori**

Le choix de la loi a priori est une étape fondamentale dans l'analyse bayésienne. L'information a priori est défini sur le paramètre  $\theta$ . Cette information n'est pas apportée par les observations, c'est-à-dire la vraisemblance, mais plutôt par la mise à contribution des expériences du passé, les intuitions ou l'expérience des spécialistes des modes de défaillance. Cette information est incertaine, donc il est naturel de la modéliser au travers d'une loi de probabilité  $\pi(\theta)$ . En pratique,  $\pi(\theta)$  peut-être une loi normale, Beta, Gamma, ou autres. Les paramètres d'une loi a priori sont appelés Hyperparamètres.

- **Loi a priori conjuguée**

Étant donné une loi paramétrique sur les observations collectées, si la loi a priori sur le paramètre à estimer donne une loi a posteriori de même famille, alors la loi a priori est dite conjuguée. Ceci bien entendu simplifie considérablement le calcul de la densité a posteriori sur le même paramètre d'intérêt. Le tableau 2.1 présente des exemples de lois a priori conjuguées. À remarquer qu'il n'existe pas de loi a priori conjuguée si la loi  $\pi(x|\theta)$  caractérisant la vraisemblance est exponentielle.

Tableau 2-1 Exemples de lois a priori conjuguées

$\pi(x \theta)$	$\pi(\theta)$	$\pi(\theta x)$
$Normale(\theta, \sigma^2)$	$Normale(\mu, \tau^2)$	$Normale(\rho(\sigma^2\mu + \tau^2x), \rho\sigma^2\tau^2)$ ou $\rho^{-1} = \sigma^2 - \tau^2$
$Poisson(\theta)$	$Gamma(\alpha, \beta)$	$Gamma(\alpha + x, \beta + 1)$
$Binomiale(n, \theta)$	$Beta(\alpha, \beta)$	$Beta(\alpha + x, \beta + n - x)$
$Gamma(\nu, \theta)$	$Gamma(\alpha, \beta)$	$Gamma(\alpha + \nu, \beta - x)$

- **Lois a priori non informatives**

Une loi a priori non informative est une loi qui porte une information sur le paramètre à estimer dont le poids dans l'inférence bayésienne est réduit. Certains auteurs la définissent également comme une loi a priori qui ne contient aucune information sur  $\theta$ , ou encore, comme une loi qui ne donne pas davantage de poids à telle ou telle valeur du

paramètre. Par exemple, supposons  $\Theta$  un ensemble fini de taille  $q$  une loi a priori non informative pourra être une loi de la forme :

$$P(\theta_i) = 1/q \quad (2.18)$$

Donc, les valeurs possibles de  $\theta$  se voient attribuer le même poids.

Les lois a priori non informatives peuvent être construites à partir de la distribution d'échantillonnage. Une deuxième méthode est celle proposée par Jeffreys (1961) en utilisant l'information de Fischer :  $I(\theta)$  qui représente une mesure de la quantité d'information sur  $\theta$  contenue dans l'observation. Plus  $I(\theta)$  est grande, plus l'observation apporte de l'information. Il semble alors naturel de favoriser les valeurs de  $\theta$  pour lesquels  $I(\theta)$  est grande. Ce qui minimise l'influence de la loi a priori au profit des observations (la vraisemblance).

#### 2.2.4 Calcul de la loi a posteriori

Tel que énoncé précédemment, si la loi a priori n'est pas conjuguée, la résolution analytique de  $\pi(\theta|x)$  devienne très complexe. La méthode MCMC est alors utilisée. Nous présentons dans ce qui suit, le principe de simulation Monte Carlo ainsi que les algorithmes d'échantillonnage les plus connus.

- **Principe des méthodes MCMC**

L'idée général des méthodes MCMC est d'utiliser des échantillons pour approximer les moyenne des distributions complexes en remplaçant les intégrations complexes par des simulations d'un large ensemble d'échantillons. La précision de ces approches se base sur le nombre d'itérations ou d'échantillonnages et le degré d'indépendance entre les échantillons. De ce fait apparait l'importance des chaines de Markov qui permettent d'échantillonner des échantillons indépendants à partir d'une distribution stationnaire.

Comme la distribution a posteriori  $\pi(\theta|x)$  est une fonction proportionnelle au produit de la distribution a priori  $\pi(\theta)$  et de la vraisemblance  $f(\theta, x)$ ,  $\pi(\theta|x) \propto \pi(\theta) \times f(\theta, x)$ , alors les méthodes MCMC permettent de calculer la moyenne et la variance de la fonction a posteriori en simulant plusieurs fois le produit des deux valeurs aléatoires tirées des loi a priori et de la vraisemblance.

En résumé, les méthodes MCMC permet de générer et résoudre une chaîne de Markov à partir de la distribution stationnaire qui sera exactement la distribution à étudier (distribution a posteriori). Parmi les méthodes MCMC les plus répandues, nous allons présenter les algorithmes de Metropolis-Hastings et de Gibbs.

- **Algorithme de Metropolis-Hastings**

On suppose que l'objectif soit d'échantillonner à partir de la distribution de densité  $P(\theta)$ . L'algorithme de Metropolis-Hastings génère une chaîne de Markov qui produit une séquence de valeurs :

$$\theta^{(1)} \rightarrow \theta^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \theta^{(t)} \rightarrow \dots$$

où  $\theta^{(t)}$  représente l'état de la chaîne de Markov à l'itération  $t$ , et on initialise la chaîne n donnant une certaine valeur initiale à  $\theta^{(1)}$ .

La méthode utilise ensuite une distribution dite instrumentale notée  $q(\theta|\theta^{(t-1)})$  pour générer un nouveau candidat  $\theta^*$ . L'étape prochaine consiste à accepter ou refuser ce nouveau candidat en utilisant une probabilité d'acceptation. Le candidat choisi est accepté comme prochaine état de la chaîne avec la probabilité suivante :

$$\alpha(\theta^{(t-1)}|\theta^*) = \min \left[ 1, \frac{\pi(\theta^*)g(\theta^{(t-1)}|\theta^*)}{\pi(\theta^{(t-1)})g(\theta^*|\theta^{(t-1)})} \right] \quad (2.19)$$

Enfin pour prendre la décision d'accepter ou de refuser le nouveau candidat proposé on génère une valeur à partir d'une distribution uniforme et on la compare avec la probabilité d'acceptation. La figure 2.5 décrit l'algorithme Metropolis-Hastings.

- **Algorithme de Gibbs**

Du fait de la difficulté de trouver une distribution instrumentale, l'échantillonnage de Gibbs est un cas particulier de la méthode Metropolis-Hastings. La différence est que l'algorithme de Gibbs permet d'échantillonner seulement dans le cas où la distribution conditionnelle a posteriori est parfaitement connue. C'est-à-dire nous connaissons toutes les distributions de ses paramètres avec précision. En d'autres termes les lois a priori sont conjuguées. La figure 2.6 présente l'algorithme de Gibbs.

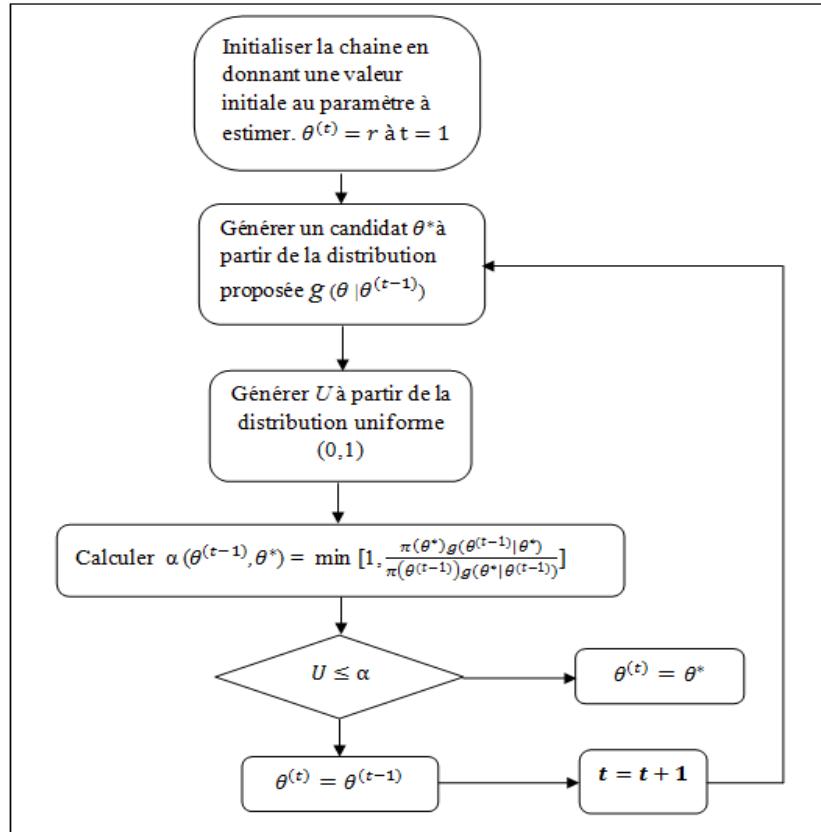


Figure 2.5 Algorithme Metropolis-Hastings

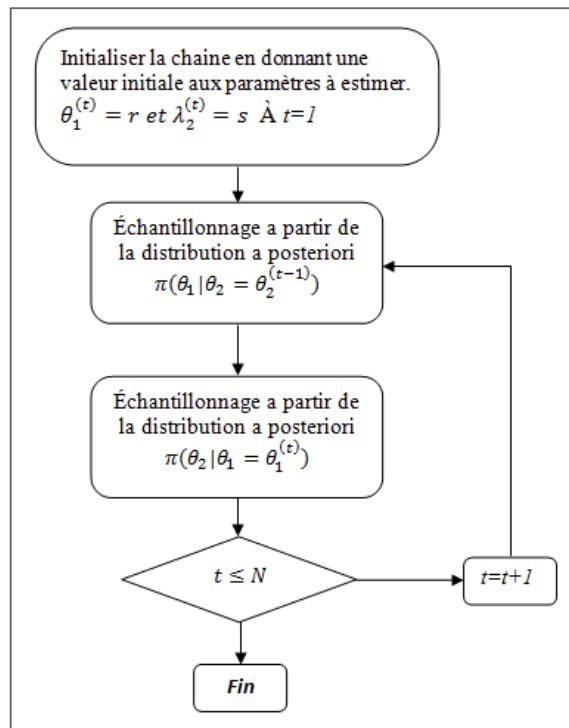


Figure 2.6 Algorithme de Gibbs

## 2.3 Stratégies de maintenance

### 2.3.1 Stratégie de maintenance de type Age

Une stratégie de maintenance de type âge consiste à effectuer un remplacement correctif en cas de défaillance de l'équipement ou effectuer un remplacement préventif seulement si ce dernier atteint un âge  $T$  sans défaillance. L'âge  $T$  représente la période de remplacement préventif. L'idée de cette stratégie est de remplacer préventivement l'équipement le plus proche possible de l'instant où il risque de tomber en défaillance. Par ailleurs, si l'équipement tombe en défaillance avant l'instant  $T$ , il fera objet d'une maintenance corrective. Comme les remplacements préventifs et correctifs utilisent des équipements neufs, l'âge réel de l'équipement est remis à zéro.

Pour définir la stratégie optimale correspondante, il faut déterminer la périodicité optimal  $T^*$  où le remplacement préventif sera effectué. Considérant les coûts de remplacement correctif et préventif de l'équipement la stratégie optimale  $T^*$  garantit un coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini minimum. Un modèle mathématique a été développé par Barlow et Proschan (1965). La (Figure 2.7) présente un schéma simple des séquences des événements dans cette stratégie.

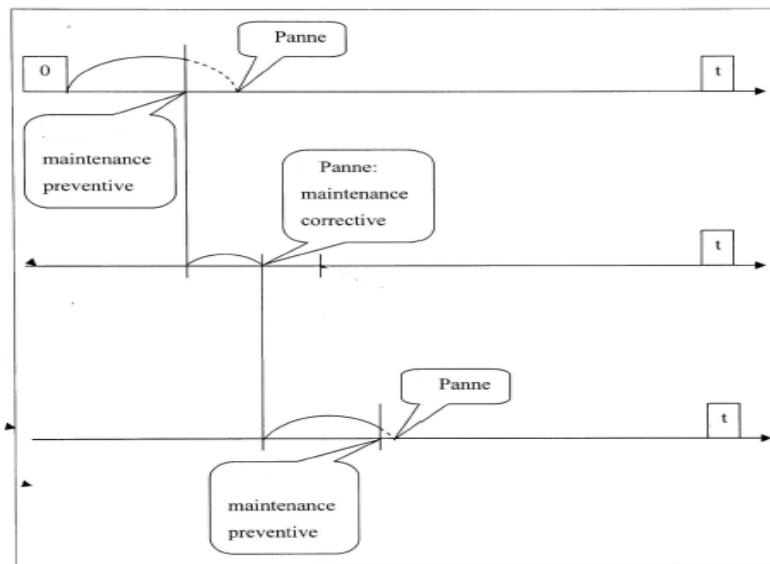


Figure 2.7 Stratégie de maintenance de type Age (Bagayoko, 2009)

Le modèle de Barlow et Proschan (1965) suppose que l'équipement a deux états possibles (en marche ou en panne), la détection des pannes est instantanée, les temps des opérations de maintenance sont négligeables et la remise à neuf de l'équipement par un équipement identique. Les auteurs ont montré qu'un tel modèle est toujours préférable en comparaison à une stratégie de remplacement correctif si le taux de défaillance est strictement croissant. Cette stratégie permet l'utilisation effective de l'équipement, donc ne pas remplacer un équipement neuf après une courte période de fonctionnement.

Cependant, cette stratégie nécessite une surveillance continue et un suivi de l'utilisation de l'équipement. Elle présente quelques inconvénients tels que l'impossibilité d'effectuer les remplacements préventifs à l'âge optimal  $T^*$  à cause de la non concordance de cette période optimale avec le calendrier de production.

### 2.3.2 Stratégie de maintenance de type Bloc

Cette stratégie consiste à faire des remplacements préventifs à des intervalles de temps fixes et prédéterminés. En cas de défaillance, un remplacement correctif de l'équipement est encouru. L'un des premiers modèles de cette méthode est le modèle de Barlow et Hunter (1960) (Figure 2.8) dans lequel, ils utilisent la fonction de renouvellement de l'équipement. Ils déterminent la période optimale  $T^*$  qui minimise le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Un deuxième modèle proposé par Ait-Kadi et Chelbi (1995) qui constitue une extension du dernier modèle en tenant compte des stocks disponibles de pièces de rechange.

Par opposition à la maintenance de type âge, la stratégie de type bloc peut avoir un effet de gaspillage des équipements neufs. Car, il arrive de remplacer un équipement qui vient d'être mis en marche. Pour remédier à cette lacune, des modèles étendus de type Bloc ont été proposés en effectuant des réparations minimales ou remplacer par des équipements usagés (Tango 1978).

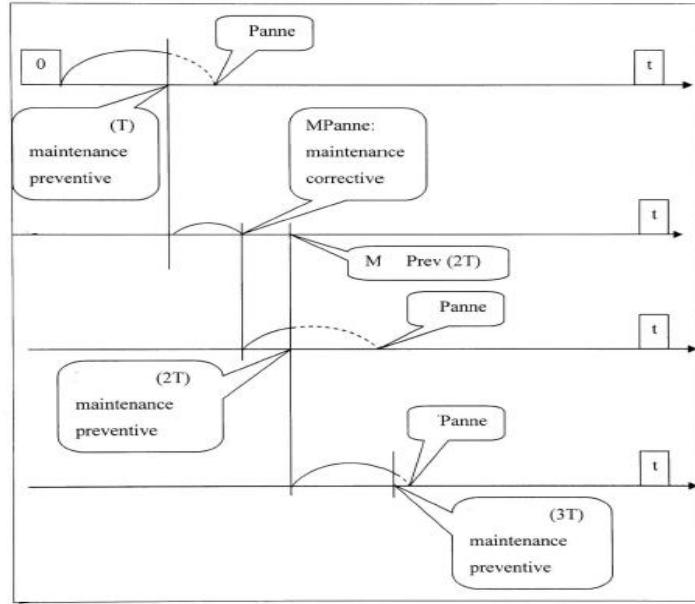


Figure 2.8 Stratégie de maintenance de type Bloc (Bagayoko, 2009)

### 2.3.3 Stratégie de remplacement périodique avec réparation minimale après défaillance

Cette stratégie consiste à remplacer périodiquement l'équipement avec un équipement identique neuf. En cas de défaillance, une réparation minimale est entreprise. Cette réparation n'a pas d'effet sur le taux de défaillance de l'équipement. L'équipement est dans un état aussi mauvais qu'avant l'occurrence de la défaillance. Cette stratégie est introduite par (Barlow and Hunter 1960) avec l'établissement des conditions d'existence et d'unicité d'une stratégie optimale. Ensuite, Barlow et Proschan (1965) ont établi un modèle en minimisant le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Un autre modèle de remplacement périodique considérant des coûts croissant de réparation minimale a été proposé par (Boland and Proschan 1982).

### 2.3.4 Autres stratégies de maintenance périodique

À partir des deux politiques de base cités au-dessus, d'autres modèles ont été développés, nous présentons quelques-uns ci-après :

- **Stratégie de remplacement avec période d'inactivité.** Cette stratégie propose d'arrêter l'équipement suite à une panne jusqu'au moment déterminé de la maintenance préventive. Mais le modèle suppose que la défaillance est survenue à un

petit moment avant l'arrêt programmé de l'équipement. Le modèle de base a été développé par Cox (1962) en déterminant le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini et en établissant les conditions d'existence d'une stratégie optimale (i.e. taux de défaillance croissant).

- **Stratégie de maintenance imparfaite.** Cette stratégie propose de remplacer des composants défaillants par des composants en meilleurs états sans être neufs. Donc, le but est seulement d'améliorer les performances de l'équipement. Des modèles dans la littérature ont été développés comme les modèles de maintenance préventive imparfaite de (Nakagawa 1986), le modèle de (Brown et Proschan 1983) ou le modèle de (Pham and Wang 1996).
- **Stratégie de maintenance séquentielle.** Cette stratégie suppose un horizon de temps fini. Une stratégie optimale qui minimise le coût total moyen sur cet horizon a été établie par (BARLOW and Proschan 1965). De même, un autre modèle de remplacement périodique avec des coûts de réparation minimale croissant a été développé par les mêmes auteurs précédents.

En résumé, la stratégie qui correspond mieux à la situation observée par les équipements réparables est celle de remplacement périodique avec réparation minimale après défaillance. C'est cette stratégie qui nous intéresse. Elle sera détaillée et exploitée ultérieurement dans le chapitre 4.

## CHAPITRE 3 : MODÈLE D'ACTUALISATION DU TAUX DE DÉFAILLANCE

Le chapitre précédent nous a permis d'avoir une revue de littérature sur les notions de modélisation du taux de défaillance et des stratégies de maintenance. Dans ce chapitre nous allons présenter une étude de cas, l'expérimentation de plusieurs modélisations de la distribution a priori, le modèle d'actualisation du taux de défaillance et nous analyserons les résultats obtenus selon les différents scénarios pris sur l'information a priori.

### 3.1 Présentation du cas d'étude

Dans le cas d'étude, nous considérons un équipement neuf schématisé dans la figure 3.1, mis en exploitation à un instant  $t = 0$ . Le fournisseur de l'équipement dispose d'un taux de défaillance estimé  $\theta_e$  et d'un écart-type estimé  $\sigma_e$ .



Figure 3.1: Équipement multi-composants neuf

Cet équipement sera mis en marche pendant plusieurs périodes et nous allons enregistrer le nombre de défaillances et les durées de vie pour chaque période. Ce qui constituera la vraisemblance de l'équipement.

Ensuite, un avis d'un expert sur le taux de défaillance sera modélisé en début de chaque période, cet avis est défini par les trois éléments suivants :

- La tendance du taux de défaillance (augmente, stable, diminue),
- le pourcentage caractérisant la tendance du taux de défaillance

- l'incertitude de l'expert vis-à-vis de la tendance du taux de défaillance.

Ces trois éléments vont permettre la construction de la loi a priori sur le taux de défaillance. La vraisemblance, modélisée par une loi exponentielle, jumelée avec la loi a priori, modélisée par une loi normale, va permettre d'effectuer une inférence bayésienne sur le taux de défaillance ( $\lambda$ ).

L'inférence dans ce cas se fera en utilisant un échantillonnage de Metropolis-Hastings et qui donnera la moyenne et l'écart-type de la loi a posteriori représentant ainsi l'actualisation du taux de défaillance estimé du constructeur de l'équipement, une période après une autre. La loi conditionnelle a posteriori de taux de défaillance  $\lambda$  sera le produit de la vraisemblance exponentielle et la distribution a priori normale.

### 3.2 Éléments de modélisation

#### 3.2.1 Démarche générale

Dans notre cas, la figure 3.2 représente la démarche générale pour actualiser le taux de défaillance. L'information a priori consiste en une estimation d'une moyenne et d'une variance. Le choix de deux paramètres sera détaillé dans section 3.2.3. Nous disposons également des observations  $x_i$  qui représentent les données de défaillance de notre équipement. Ces observations sont utilisées pour construire la fonction de vraisemblance. La fonction a posteriori permet d'actualiser le taux de défaillance observé considérant la distribution a priori de l'expert.

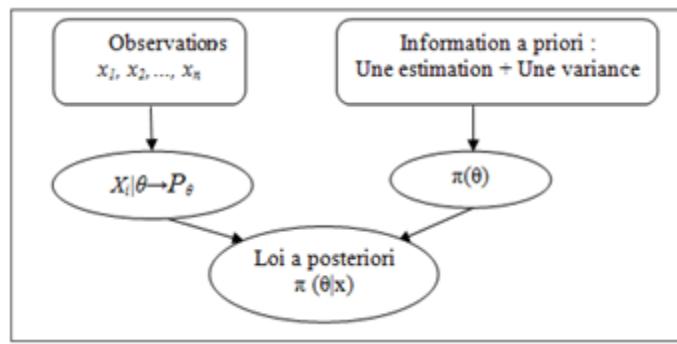


Figure 3.2 Démarche générale d'actualisation du taux de défaillance

### 3.2.2 Calcul de la vraisemblance

La distribution de la vraisemblance est tirée des observations tout au long de la période d'étude. La vraisemblance est donnée par la relation suivante:

$$L(x; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (3.1)$$

Dans le cas étudié, nous supposons que les durées de vie suivent une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , sachant la densité  $f(t, \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$ , nous pouvons en déduire la vraisemblance  $L(t; \lambda)$  qui s'écrit comme suit :

$$L(t; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda t_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i} \quad (3.2)$$

### 3.2.3 Modélisation de l'avis de l'expert

L'expert devrait donner un avis sur le taux de défaillance. Quatre possibilités pourraient être obtenues :

- L'expert n'a pas d'avis. Cet avis pourrait se produire au début de l'exploitation d'un équipement ou que l'expert ne peut pas se référer à un équipement similaire.
- L'expert pense que le taux de défaillance est resté stable par rapport à la valeur du taux de défaillance estimé par le constructeur.
- L'expert pense que le taux de défaillance a augmenté. Cet avis pourrait représenter par exemple une augmentation de nombre de défaillances enregistré plus grand que celui estimé par le constructeur à cause d'une mauvaise maintenance ou d'une sollicitation plus importante de l'équipement.
- L'expert pense que le taux a diminué. Cet avis pourrait représenter le cas où une maintenance préventive accrue a été effectuée sur l'équipement réduisant ainsi son taux de défaillance.

Pour les trois derniers avis, l'expert pourrait spécifier son incertitude en choisissant une des situations suivantes :

- L'expert est certain.
- L'expert est moyennement certain.

- L'expert est incertain.

Le tableau 3.1 résume les avis, les incertitudes et les codes utilisés pour notre étude. Nous avons choisi la loi normale pour modéliser l'avis d'expert ainsi que son incertitude. Les paramètres de cette loi normale ( $\mu$  et  $\sigma$ ) sont calibrés par les choix de l'expert.

**Tableau 3-1 Codes utilisés pour modéliser l'a priori**

Avis : $\mu$	Code	Incertitude : $\sigma$	Code
Sans avis	0		0
Augmente	1		1
Diminue	-1		2
Stable	2		

Plus précisément, les paramètres de la loi normale sont les hyperparamètres caractérisant le taux de défaillance  $\lambda$ . Le choix de ces hyperparamètres sont déterminés comme suit :

- Si l'expert est sans avis dans la période  $(i)$ , la moyenne de la loi a priori sera égale au  $\lambda$  a posteriori de la période  $(i-1)$ . Pour la première période la moyenne sera égale au  $\lambda$  estimé du constructeur. Dans ce cas, nous n'aurons aucune précision de l'expert. L'écart-type sera égal à l'écart-type de la période précédente  $(i-1)$ .
- Si l'expert prévoit une augmentation ou une diminution, deux valeurs aléatoires  $(\alpha, \beta)$  seront tirées à partir d'une loi uniforme  $[0,1]$ . Ces valeurs définiront le pourcentage d'augmentation ou de diminution du taux de défaillance ainsi que son incertitude. Dans le cas où l'expert prévoit une stabilité du taux de défaillance, seulement la valeur  $(\beta)$  sera utilisée pour déterminer l'incertitude de l'expert.
  - En cas de prévision d'une augmentation dans une période  $(i)$  la moyenne de la loi a priori sera toujours égale à  $(1 + \alpha)$  fois le  $\lambda$  a posteriori de la période  $(i-1)$ . L'écart-type sera déterminé selon l'incertitude de l'expert :
    - Expert certain : écart-type  $(i)$  sera égal à  $(1 - \beta)$  fois l'écart-type  $(i-1)$
    - Expert moyen : écart-type  $(i)$  sera égal à l'écart-type  $(i-1)$
    - Expert incertain : écart-type  $(i)$  sera égal à  $(1 + \beta)$  fois l'écart-type  $(i-1)$
  - En cas de prévision d'une diminution dans une période  $(i)$  la moyenne de la loi a priori sera toujours égale à  $(1 - \alpha)$  fois le  $\lambda$  a posteriori de la période  $(i-1)$ .

1). L'écart-type sera déterminé selon l'incertitude de l'expert, tel exprimé en  $a$ ).

- Si l'expert prévoit une stabilité du taux de défaillance dans une période  $(i)$ , la moyenne de la loi a priori sera toujours égale au  $\lambda$  a posteriori de la période  $(i-1)$  et l'écart-type est donné avec l'écart-type tel que exprimé en  $a$ ).

En combinant les différents avis de l'expert avec les différentes incertitudes nous obtenons les scénarios suivants :

Tableau 3-2 Différents scénarios a priori selon les avis de l'expert

Numéro	Scénario	Incertaine	Moyenne( $\mu$ )	Écart-type( $\sigma$ )
1	Sans Avis	/	$\mu = \lambda(j-1)$	$\sigma = \sigma(j-1)$
2	Augmentation	Certaine	$\mu = (1+\alpha) \lambda(j-1)$	$\sigma = (1-\beta)\sigma(j-1)$
3	Augmentation	Moyenne	$\mu = (1+\alpha) \lambda(j-1)$	$\sigma = \sigma(j-1)$
4	Augmentation	Incertaine	$\mu = (1+\alpha) \lambda(j-1)$	$\sigma = (1+\beta)\sigma(j-1)$
5	Diminution	Certaine	$\mu = (1-\alpha) \lambda(j-1)$	$\sigma = (1-\beta)\sigma(j-1)$
6	Diminution	Moyenne	$\mu = (1-\alpha) \lambda(j-1)$	$\sigma = \sigma(j-1)$
7	Diminution	Incertaine	$\mu = (1-\alpha) \lambda(j-1)$	$\sigma = (1+\beta)\sigma(j-1)$
8	Stabilité	Certaine	$\mu = \lambda(j-1)$	$\sigma = (1-\beta)\sigma(j-1)$
9	Stabilité	Moyenne	$\mu = \lambda(j-1)$	$\sigma = \sigma(j-1)$
10	Stabilité	Incertaine	$\mu = \lambda(j-1)$	$\sigma = (1+\beta)\sigma(j-1)$

### 3.3 Algorithme d'actualisation du taux de défaillance

La figure 3.3 présente l'algorithme d'actualisation du taux de défaillance d'un équipement. Ce taux de défaillance est supposé constant pendant une période ( $i$ ).

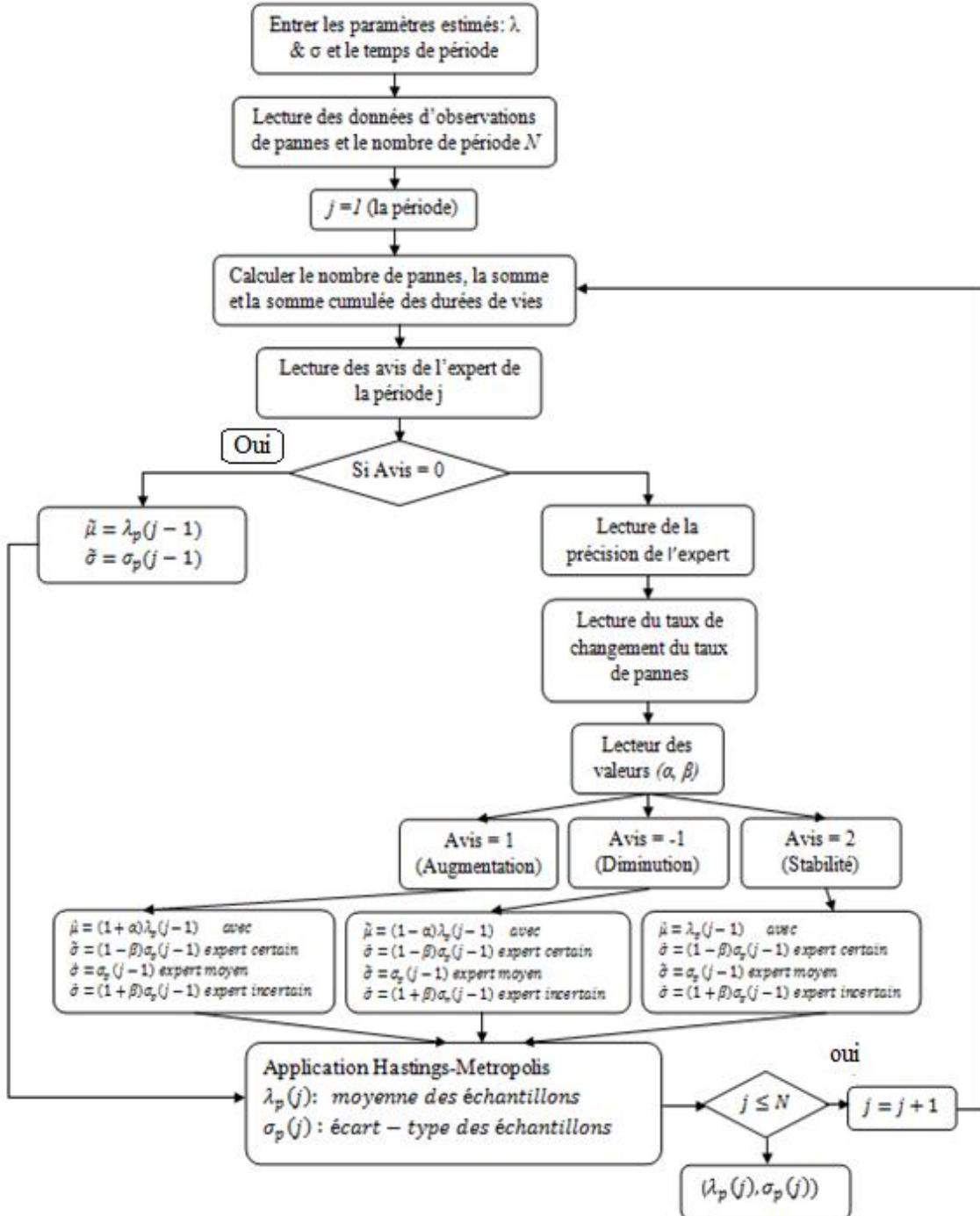


Figure 3.3 Algorithme d'actualisation du taux de défaillance

Dans notre cas, la vraisemblance est calculée à partir d'une distribution exponentielle. L'avis de l'expert est modélisé en une loi normale avec une moyenne et écart-type connu. Ces deux lois ne sont pas conjuguées, donc la méthode MCMC approprié. Dans ce cas, l'algorithme de Metropolis-Hastings est utilisé. Les paramètres d'initialisation sont :

- Le lambda estimé du constructeur est de  $5 \cdot 10^{-3}$  défaillance/heure.
- L'écart-type estimé du constructeur est de  $5 \cdot 10^{-4}$  défaillance/heure.
- L'étendue d'une période ( $i$ ) est de  $10^4$  heures.
- Le nombre d'échantillonnages de la méthode Metropolis-Hastings est fixé à 1000 itérations.
- L'écart-type de la loi instrumentale utilisée par la méthode Metropolis-Hastings est de  $10^{-3}$ .

### 3.4 Résultats obtenus et discussion

#### 3.4.1 Effet de la variation des paramètres ( $\alpha, \beta$ )

Nous avons appliqué différents scénarios des avis et des incertitudes qu'un expert pourrait formuler. Nous obtenons 10 scénarios possibles (Tableau 3.2) en combinant les avis d'expert (4 avis) et sa précision (3 niveaux) (Tableau 3.1), sachant que le scénario du sans avis n'a pas de précision. Pour tous les scénarios, nous avons considéré une seule période mais avec plusieurs valeurs des paramètres ( $\alpha, \beta$ ) de la loi uniforme. Rappelons que ces paramètres définissent le pourcentage d'augmentation ou de diminution désiré par l'expert. Les tableaux 3.3, 3.4 et 3.5 présentent les résultats pour les couples ( $\alpha, \beta$ ) suivant une loi uniforme respectivement entre  $(0;0,1)$ ,  $(0,1;0,2)$  et  $(0,2;0,3)$ .

Les tableaux 3.3, 3.4 et 3.5 montrent que si les valeurs de  $(\alpha, \beta)$  changent, les 2 premiers scénarios donnent des résultats identiques. Ces scénarios sont : l'expert sans avis et l'expert prévoit une stabilité du taux de défaillance avec ses trois niveaux de précision. Ceci est parfaitement normal, car l'avis de l'expert est non information. C'est la vraisemblance qui prend le dessus. Par contre en cas d'un avis d'augmentation ou de diminution du taux de défaillance, l'augmentation ou la diminution du taux a posteriori est proportionnelle aux valeurs de  $(\alpha, \beta)$ . Ainsi, si  $(\alpha, \beta)$  augmentent, le taux de défaillance a posteriori augmente et inversement. Ceci traduit le fait que l'augmentation

ou la diminution des valeurs de  $(\alpha, \beta)$ , dans ces scénarios, rend la distribution a priori plus informative et devient plus influente que la vraisemblance. Ce qui explique la croissance ou décroissance du taux de défaillance a posteriori.

**Tableau 3-3 Résultats de simulation après 1000 itérations avec  $(\alpha, \beta)$  provenant d'une loi uniforme (0 ; 0.1)**

(alpha, beta) tirées d'une loi uniforme(0;0,1)							
Année	Taux de panne Vrais	Avis Expert	Precision Expert	AugDim	Taux de panne	Ecart-type	observation
0	0,0050	SO	SO	SO	SO	SO	
1	0,00540	0	5	10	0,00510	0,000410	sans avis
1	0,00540	2	0	0	0,00510	0,000389	stable certain
1	0,00540	2	1	0	0,00510	0,000410	stable moyen
1	0,00540	2	2	0	0,00511	0,000416	stable incertain
1	0,00540	1	0	0	0,00517	0,000377	augmente certain
1	0,00540	1	1	0	0,00517	0,000410	augmente moyen
1	0,00540	1	2	0	0,00518	0,000426	augmente incertain
1	0,00540	-1	0	0	0,00501	0,000380	diminue certain
1	0,00540	-1	1	0	0,00502	0,000409	diminue moyen
1	0,00540	-1	2	0	0,00504	0,000418	diminue incertain

**Tableau 3-4 Résultats de simulation après 1000 itérations avec  $(\alpha, \beta)$  provenant d'une loi uniforme (0.1 ; 0.2)**

(alpha, beta) tirées d'une loi uniforme(0,1;0,2)							
Année	Taux de panne Vrais	Avis Expert	Precision Expert	AugDim	Taux de panne	Ecart-type	Observation
0	0,0050	SO	SO	SO	SO	SO	
1	0,00540	0	5	10	0,00510	0,000410	sans avis
1	0,00540	2	0	1	0,00508	0,000360	stable certain
1	0,00540	2	1	1	0,00510	0,000410	stable moyen
1	0,00540	2	2	1	0,00512	0,000452	stable incertain
1	0,00540	1	0	1	0,00552	0,000374	augmente certain
1	0,00540	1	1	1	0,00551	0,000408	augmente moyen
1	0,00540	1	2	1	0,00551	0,000463	augmente incertain
1	0,00540	-1	0	1	0,00464	0,000355	diminue certain
1	0,00540	-1	1	1	0,00471	0,000389	diminue moyen
1	0,00540	-1	2	1	0,00478	0,000433	diminue incertain

**Tableau 3-5 Résultats de simulation après 1000 itérations avec  $(\alpha, \beta)$  provenant d'une loi uniforme (0.2 ; 0.3)**

(alpha, beta) tirées d'une loi uniforme(0,2;0,3)							
Année	Taux de panne Vrais	Avis Expert	Precision Expert	AugDim	Taux de panne	Ecart-type	Observation
0	0,0050	SO	SO	SO	SO	SO	
1	0,00540	0	5	10	0,00510	0,000410	sans avis
1	0,00540	2	0	2	0,00508	0,000327	stable certain
1	0,00540	2	1	2	0,00510	0,000410	stable moyen
1	0,00540	2	2	2	0,00514	0,000457	stable incertain
1	0,00540	1	0	2	0,00596	0,000351	augmente certain
1	0,00540	1	1	2	0,00587	0,000433	augmente moyen
1	0,00540	1	2	2	0,00578	0,000475	augmente incertain
1	0,00540	-1	0	2	0,00425	0,000303	diminue certain
1	0,00540	-1	1	2	0,00440	0,000375	diminue moyen
1	0,00540	-1	2	2	0,00459	0,000437	diminue incertain

En résumé, le tableau 3-6 suivant présente le résultat des moyennes et des écart-types en fonction de  $(\alpha, \beta)$ .

Tableau 3-3 Résumé des résultats du taux de défaillance a posteriori en fonction de  $(\alpha, \beta)$

$(\alpha, \beta)$		(0; 0.1)	(0.1; 0.2)	(0.2;0.3)
<b>Sans avis</b>	Moyenne	0,00510	0,00510	0,00510
	écart-type	0,00041	0,00041	0,00041
<b>Stable</b>	Moyenne	0,00510	0,00510	0,00511
	écart-type	0,00041	0,00041	0,00040
<b>Augmente</b>	Moyenne	0,00517	0,00551	0,00587
	écart-type	0,00040	0,00041	0,00042
<b>Diminue</b>	Moyenne	0,00502	0,00471	0,00441
	écart-type	0,00040	0,00039	0,00037

### 3.4.2 Effet de l'incertitude de l'expert

Dans cette expérimentation, nous simulons un cas d'augmentation du taux de défaillance mais avec trois types d'incertitudes de l'expert : certaine, moyenne et incertaine avec  $(\alpha, \beta)$  sont compris dans  $(0.2 ; 0.3)$ . Les résultats de simulation sont présentés dans le tableau 3-7 et les figures suivantes :

Tableau 3-7 Résultats de simulation avec un avis d'augmentation et  $(\alpha, \beta)$  entre  $(0.2;0.3)$

(alpha, beta) tirées d'une loi uniforme(0,2;0,3)							
Année	Taux de panne Vrais	Avis Expert	Precision Expert	AugDim	Taux de panne	Ecart-type	Observation
1	0,00540	1	0	2	0,00610	0,00036	augmente certain
1	0,00540	1	1	2	0,00587	0,00043	augmente moyen
1	0,00540	1	2	2	0,00578	0,00048	augmente incertain

En examinant l'effet de la précision de l'expert, nous remarquons que taux de défaillance a posteriori augmente (respectivement diminue) significativement si l'expert est certain (respectivement incertain). De plus, l'écart-type du taux de défaillance a posteriori augmente lorsque l'expert est incertain. Ce qui est tout à fait logique.

Dans les figures 3.4, 3.5 et 3.6, les graphes de haut en bas présentent respectivement, la loi a posteriori avant échantillonnage, la distribution a priori de l'expert, la densité théorique du modèle après échantillonnage et la séquence d'échantillonnage obtenue par MCMC pour les cas d'une augmentation certaine, moyenne et incertaine respectivement.

Nous remarquons à partir de ces figures, que la méthode de Metropolis-Hastings converge rapidement vers une valeur du taux de défaillance a posteriori qui serait la moyenne de toutes les valeurs du taux de défaillance a posteriori échantillonnées. Cette

moyenne ainsi que l'écart-type de l'échantillonnage sont les paramètres de la densité a posteriori du taux de défaillance.

A première vue, il semble que les 3 figures se ressemblent mais en examinant de plus près, nous constatons que seulement les graphes en haut des trois figures sont identiques (car nous avons la même vraisemblance). Les autres graphes sont différents à cause du changement de la précision de la loi a priori. En effet, la précision de l'expert affecte le nombre des échantillons qui s'approchent de la moyenne a postériori. Une grande précision permet de tirer des échantillons qui se rapprochent le plus de la valeur exacte du taux de défaillance a postériori.

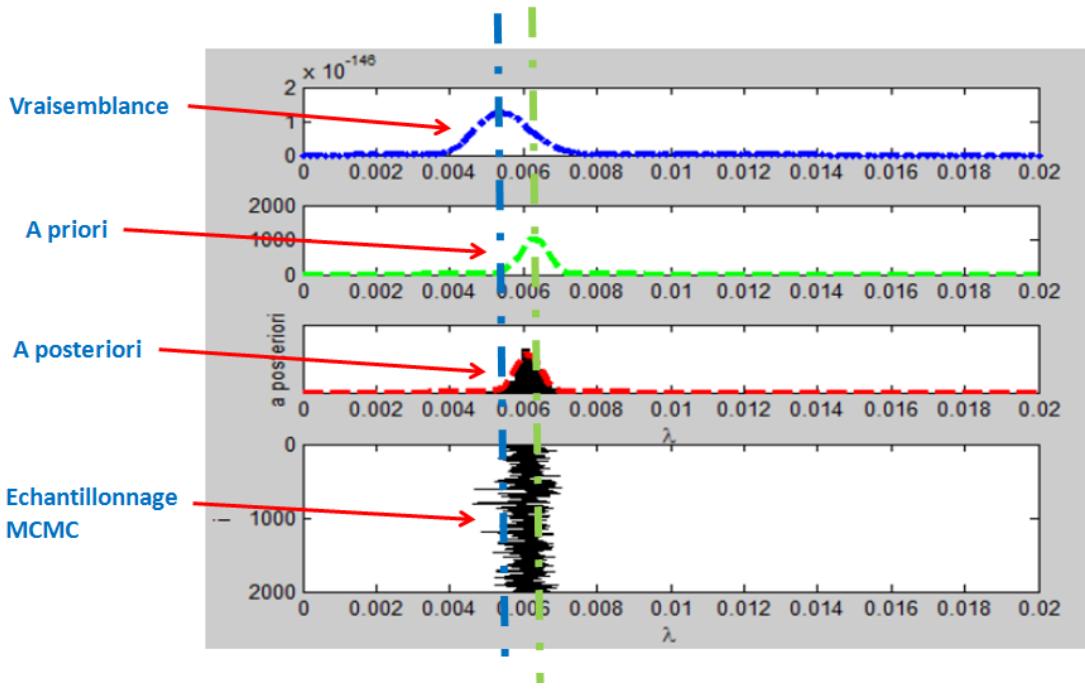
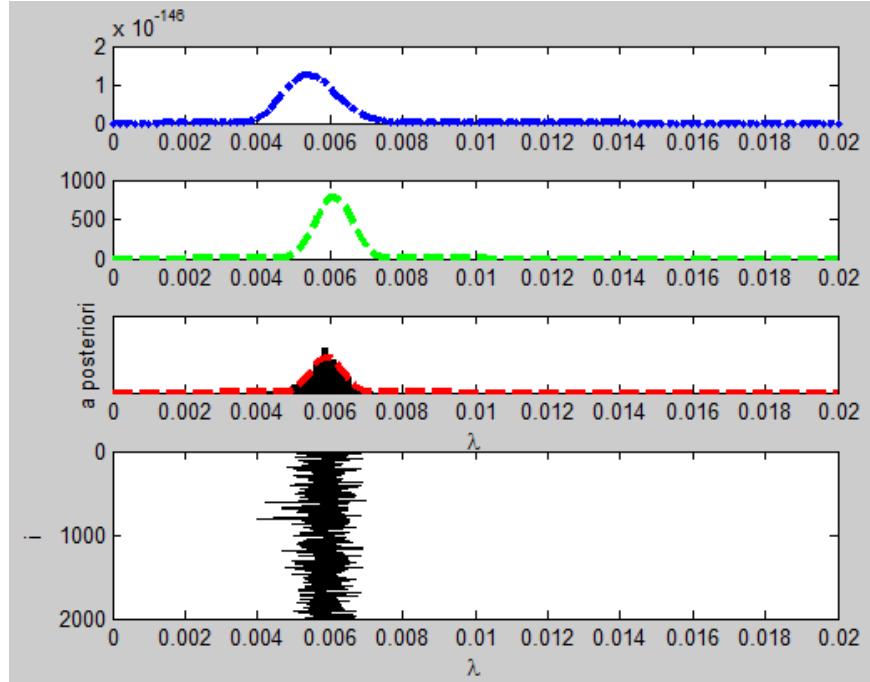
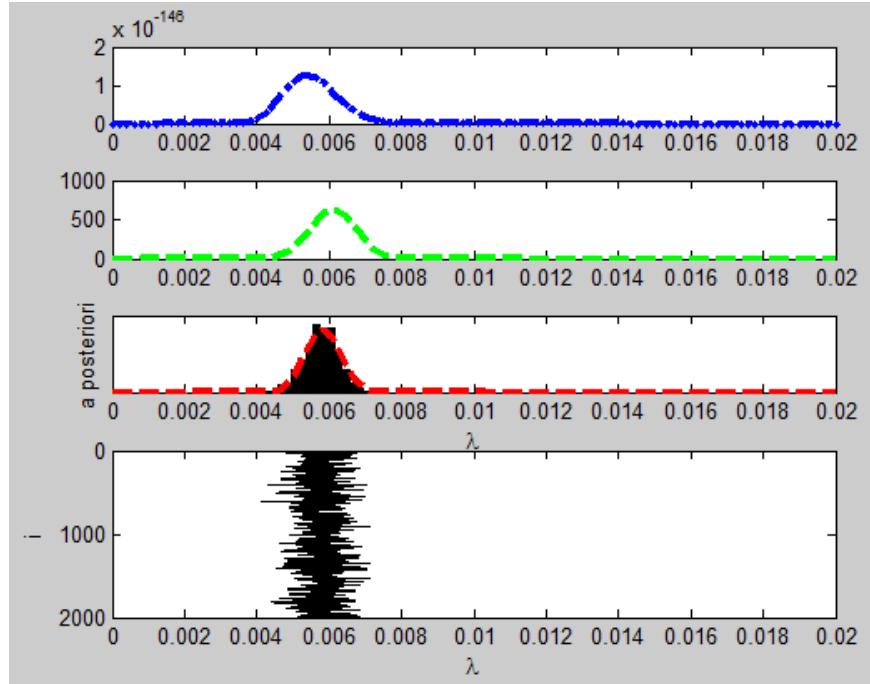


Figure 3.4 La vraisemblance, l'a priori et le résultat d'échantillonnage dans le cas d'une augmentation certaine avec  $(\alpha, \beta)$  provenant d'une loi uniforme (0.2 ; 0.3)



**Figure 3.5** La vraisemblance, l'a priori et le résultat d'échantillonnage dans le cas d'une augmentation moyenne avec  $(\alpha, \beta)$  provenant d'une loi uniforme (0.1 ; 0.2)



**Figure 3.6** La vraisemblance, l'a priori et le résultat d'échantillonnage dans le cas d'une augmentation incertaine avec  $(\alpha, \beta)$  provenant d'une loi uniforme (0.1 ; 0.2)

## CHAPITRE 4 : STRATÉGIE DE MAINTENANCE ET OPTIMISATION

Dans le chapitre précédent, nous avons modélisé et estimé la moyenne du taux de défaillance d'un équipement ainsi que sa variance en utilisant une inférence bayésienne de type MCMC. Nous avons démontré que nous pouvons avoir plusieurs valeurs a posteriori selon l'avis de l'expert. Nous avons considéré un équipement dont le taux de défaillance est constant par intervalle et nous avons modélisé l'avis d'un expert à l'aide d'une loi normale. Dans ce chapitre, le taux défaillance actualisé sera intégré à une stratégie de remplacement périodique de l'équipement avec réparation minimale en cas de défaillance. Nous étudierons cette stratégie sur un horizon fini et déterminerons la stratégie optimale qui minimise le coût total moyen de maintenance dans le cas d'un avis d'augmentation du taux de défaillance. Deux cas de figures sont examinés : le cas où la vraisemblance n'est pas actualisée d'une période d'estimation à l'autre, et le cas où la vraisemblance est actualisée avec le taux de défaillance a posteriori de la période précédente.

### 4.1 Modélisation de la stratégie de maintenance

Pour un équipement assujetti à des défaillances aléatoires, le besoin des stratégies de maintenance est crucial pour éviter les coûts élevés des défaillances et des arrêts de l'équipement. La stratégie de maintenance qui nous intéresse est dite périodique avec réparation minimale en cas de défaillance. Sous cette stratégie, les réparations remettent l'équipement dans un état opérationnel mais sa performance sera la même que celle à l'état juste avant la défaillance. Cette stratégie est très appliquée dans le cas de systèmes complexes ou multi-composants.

La stratégie de remplacement périodique avec réparation minimale en cas de défaillance sera améliorée afin de pouvoir prendre en compte l'actualisation du taux de défaillance sur plusieurs périodes. Cette stratégie sera évaluée et optimisée sur un horizon fini de 20 années. En d'autres termes, dans cette stratégie, nous allons considérer un taux de défaillance discret sur plusieurs périodes.

Ce taux de défaillance sera actualisé d'une période à une autre selon les données de défaillance enregistrées et les avis des experts sur l'horizon de l'étude. C'est-à-dire, dans chaque période  $j$  nous estimons le taux de défaillance à postériori et son écart-type. Ce taux sera considéré dans la fonction du coût de la stratégie pour la période  $j$  en question.

#### 4.1.1 Hypothèses et notations

Les hypothèses suivantes sont considérées dans le modèle des coûts de la stratégie :

- Les pannes sont détectées instantanément
- Les durées de maintenance corrective ou préventive sont considérées comme négligeables
- Le taux de défaillance est actualisé selon une méthode bayésienne à chaque période ce qui conduit à un taux de défaillance discret.
- Les coûts liés aux opérations de maintenance sont connus et constants.

#### Notation

- $n$  : Nombre total de périodes
- $T$  : Période de remplacement préventif de l'équipement.
- $C_c$  : Coût de réparation corrective de l'équipement à la fin d'une période  $j$ .
- $C_i$  : Coût d'inspection de l'équipement à la fin de chaque période  $j$ .
- $C_p$  : Coût de réparation préventive de l'équipement
- $C_{RM}$  : Coût de réparation minimale du produit à chaque panne
- $\lambda_p$  : Taux de défaillance a postériori
- $C(T)$  : Coût total moyen par unité de temps

#### 4.1.2 Formulation mathématique du coût

D'après le travail de Barlow et Proschan (1996), le coût total espéré durant un cycle de longueur  $T$  s'écrit comme suit :

$$C(T, N) = \frac{C_p + C_{RM} E[N]}{T} = \frac{C_p + C_{RM} \int_0^T \lambda_p(t) dt}{T} \quad (4.1)$$

Ce modèle suppose une fonction du taux de défaillance continue dans le temps. Le coût des réparations minimales  $C_c(T)$  à la fin de la période  $T$  est égal à :

$$C_c(T) = C_{RM} \cdot \int_0^T \lambda_p(t) dt \quad (4.2)$$

Dans le cas de notre étude, les valeurs du taux de défaillance  $\lambda_p(t)$  sont différentes d'une période à l'autre. Il s'agit d'une fonction constante par période. Ainsi, en considérant que le taux de défaillance est discret, le coût de réparation minimale à la période  $(k)$  s'écrit comme suit :

$$C_c(k) = C_{RM} \cdot \Delta \left( \sum_{j=1}^k \lambda_{p(j)} \right) \quad (4.3)$$

où  $\Delta$  est l'intervalle de temps représentant l'étendue d'une période et  $k = 1, \dots, N$ .

Prenant en compte le coût d'inspection  $C_i$ , le coût total moyen par période se définit comme suit :

$$C(k) = \frac{C_p + kC_i + C_{RM} \Delta (\sum_{j=1}^k \lambda_{p(j)})}{k\Delta} \quad (4.4)$$

### ***Existence et unicité d'une politique optimale***

Le problème de vérification de l'existence d'une stratégie optimale revient à trouver un  $k^*$  qui minimise le coût total moyen. Pour ce faire, nous dérivons la fonction du coût total  $C(k)$  par rapport à  $k$ :

$$\frac{dC_{Total}}{dk} = \frac{k\Delta C_i - k(C_p + kC_i + C_{RM} \Delta (\sum_{j=1}^k \lambda_{p(j)}))}{(k\Delta)^2} \quad (4.5)$$

Nous cherchons ensuite la valeur de  $k$  qui annule la dérivée :

$$\Delta C_i - C_p - kC_i - C_{RM} \Delta \left( \sum_{j=1}^k \lambda_{p(j)} \right) = 0 \quad (4.6)$$

$$k + \frac{C_{RM} \Delta}{C_i} \left( \sum_{j=1}^k \lambda_{p(j)} \right) = \Delta - \frac{C_p}{C_i} \quad (4.7)$$

Pour ce faire, nous avons une fonction dont la variable  $k$  ne peut pas être isolée :  $k$  se trouve comme un terme de la sommation du taux de défaillance. Dans ce cas, une résolution numérique est privilégiée. Nous avons choisi de déterminer la solution optimale de l'expression précédente par simulation.

## 4.2 Structure des données

Pour appliquer la méthode de simulation par MatLab, nous avons générée des observations de vraisemblance en utilisant le taux de défaillance estimé par le constructeur. Le tableau 4-1 présente la structure des données exploitées :

Tableau 4-1 Structure des données de durées de vie

Année (j) Nombre de défaillances (i)	Année 1	Année 2	...	Année n
1	$t_{11}$	$t_{12}$	...	$t_{1n}$
2	$t_{21}$	$t_{21}$	...	$t_{2n}$
3	$t_{31}$	$t_{21}$	...	$t_{3n}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$i$	$t_{i1}$	$t_{i2}$	...	$t_{in}$
$i+1$		$t_{(i+1)2}$	...	

Il faut bien noter que la somme des durées de défaillance pour une période donnée ne devrait pas dépasser une année, soit  $10^4$  heures. Ce qui veut dire que nous n'aurons pas un nombre égal d'observations d'une année à l'autre. Pour les besoins de ce cas d'étude, nous avons choisi les coûts suivants (Tableau 4-2).

Tableau 4-2 Données des coûts de maintenance

	$C_{RM}$	$C_p$	$C_i$
Coûts (K\$)	0,5	40	0,1

### 4.3 Résultats de la simulation

Nous avons programmé à l'aide d'un programme MatLAB le calcul du coût total moyen de la stratégie de remplacement périodique avec réparation minimale. Ce programme simule le coût de maintenance sur une période de 20 périodes, chaque période dure  $10^4$  heures. Deux scénarios sont simulés : le scénario où la vraisemblance est non actualisée et le scénario où elle est actualisée. Dans le premier scénario, le taux de défaillance qui a servi pour estimer les durées de vie est correspond à celui proposé par le constructeur. Il ne change pas d'une période à l'autre, donc la vraisemblance reste la même. Dans le second scénario, le taux de défaillance a posteriori est utilisé pour simuler les données de vraisemblance pour la période subséquente. Pour comparer les stratégies optimales pour ces deux scénarios, nous avons choisi de garder la même séquence d'avis d'expert durant les 20 périodes de simulation. Trois avis d'expert sont considérés. Ils concernent tous l'augmentation du taux de défaillance avec trois niveaux d'incertitude : certaine, moyenne, incertaine).

#### 4.3.1 Cas de la vraisemblance non actualisée

Dans les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5, nous présentons le taux de vraisemblance non actualisés, le taux de défaillance a posteriori et son écart-type ainsi que les coûts de maintenance pour chaque période (année) sur un horizon de 20 périodes avec un avis d'expert relatant une augmentation certaine, moyenne et incertaine respectivement.

D'après le tableau 4-3, nous remarquons que lorsque l'expert est sûr quant à l'augmentation du taux défaillance, le taux de défaillance a posteriori croît exponentiellement. L'écart-type diminue si la moyenne a priori ne s'éloigne pas beaucoup de la moyenne de vraisemblance. Sinon, l'écart-type commence à croître aussi.

D'autre part nous remarquons que le coût de maintenance par unité de temps est minimal à la cinquième période. Pour déterminer exactement le  $T^*$ , nous avons utilisé une fonction polynomiale (polyfit) de degré 5 sous MatLab. Cette fonction nous donne un coût minimum 3913 \$ atteint après  $4.97 \cdot 10^4$  heures de fonctionnement. Donc, les remplacements préventifs se feront à chaque  $T^* = 4.97 \cdot 10^4$  heures.

Tableau 4-3 Résultats, cas d'augmentation sure du taux de défaillance, vraisemblance non actualisée avec  $0.1 < \alpha < 0.2$

Année	Taux de panne Vrais $\times 10^{-3}$	Avis Expert	Precision Expert	AugDim	Taux de panne $\times 10^{-3}$	Ecart-type $\times 10^{-3}$	cout Total(K\$)
0	5,00	SO	SO	SO	SO	SO	0,00
1	5,40	1	0	1	5,64	0,42	6,51
2	4,43	1	0	1	6,13	0,35	4,68
3	5,24	1	0	1	6,76	0,29	4,16
4	4,63	1	0	1	7,35	0,23	3,97
5	5,41	1	0	1	8,48	0,19	3,91
6	4,34	1	0	1	9,80	0,17	3,97
7	4,92	1	0	1	10,88	0,15	4,11
8	5,19	1	0	1	12,82	0,14	4,27
9	5,11	1	0	1	14,12	0,12	4,50
10	5,02	1	0	1	16,02	0,14	4,76
11	5,37	1	0	1	17,54	0,13	5,06
12	6,81	1	0	1	19,82	0,15	5,37
13	3,67	1	0	1	23,46	0,27	5,72
14	5,50	1	0	1	26,21	0,25	6,14
15	4,73	1	0	1	29,63	0,29	6,61
16	5,48	1	0	1	34,20	0,44	7,13
17	4,28	1	0	1	37,33	0,45	7,72
18	4,10	1	0	1	42,87	0,66	8,34
19	5,27	1	0	1	45,22	0,54	9,03
20	4,96	1	0	1	51,40	0,80	9,71

Les graphes de la figure 4.1 présentent respectivement de haut vers le bas : le comportement du taux de défaillance; l'évolution de l'écart-type pendant les 20 périodes et l'évolution du coût de la maintenance. Nous remarquons sur le graphe des coûts de la figure 4.1, que ce dernier décroît rapidement pour atteindre le minimum détecté à la fin de la quatrième période puis il présente une tendance d'augmentation rapide.

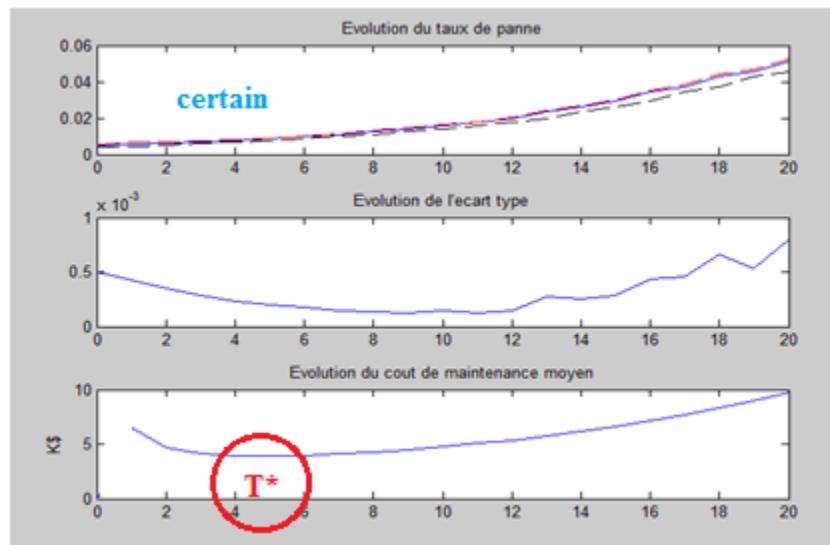


Figure 4.1 Évolution du taux de défaillance, écart-type et coût de maintenance, cas d'augmentation sure avec  $0.1 < \alpha < 0.2$

Dans le tableau 4.3, la précision de l'expert est moyenne pour chaque année avec  $0.1 < \alpha < 0.2$ . De ce fait, nous constatons que le taux de défaillance a posteriori augmente moyennement par rapport au premier cas. Cependant, la bande [min, max] qui désigne la borne supérieure et inférieure du taux a posteriori est plus large justifiant ainsi la l'incertitude moyenne de l'expert.

En appliquant la même fonction polyfit sous MatLab, le coût minimum de maintenance est atteint à  $T^* = 5.94 \cdot 10^4$  heures avec un coût minimum donné par  $C(T^*) = 3738 \$$ . Une fois le coût minimum atteint, l'augmentation du coût se fait lentement à cause de la lente croissance du taux de défaillance a postérieur. Dans ce cas de figure, il serait plus économique d'effectuer le remplacement préventif à la fin de la 5<sup>e</sup> période.

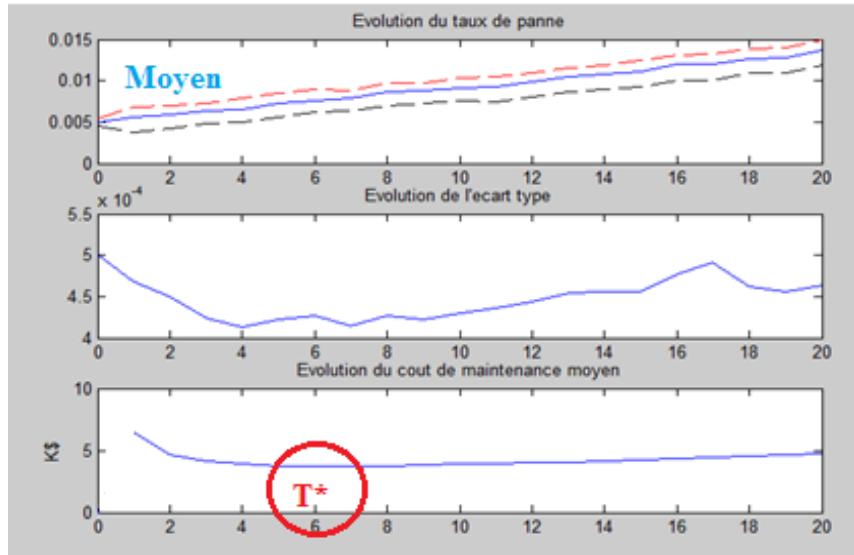
**Tableau 4-4 Résultats en cas d'augmentation moyenne de taux de défaillance, vraisemblance non actualisée, avec  $0.1 < \alpha < 0.2$**

Année	Taux de panne Vrais $\times 10^{-3}$	Avis Expert	Precision Expert	AugDim	Taux de panne $\times 10^{-3}$	Ecart-type $\times 10^{-3}$	cout Total(K\$)
0	5,00	SO	SO	SO	SO	SO	0,00
1	5,40	1	1	1	5,62	0,47	6,51
2	4,43	1	1	1	5,89	0,45	4,67
3	5,24	1	1	1	6,33	0,42	4,12
4	4,63	1	1	1	6,54	0,41	3,89
5	5,41	1	1	1	7,20	0,42	3,76
6	4,34	1	1	1	7,64	0,43	3,74
7	4,92	1	1	1	7,85	0,41	3,75
8	5,19	1	1	1	8,58	0,43	3,77
9	5,11	1	1	1	8,74	0,42	3,83
10	5,02	1	1	1	9,13	0,43	3,89
11	5,37	1	1	1	9,25	0,44	3,95
12	6,81	1	1	1	9,86	0,44	4,01
13	3,67	1	1	1	10,46	0,45	4,08
14	5,50	1	1	1	10,83	0,46	4,16
15	4,73	1	1	1	11,17	0,46	4,24
16	5,48	1	1	1	11,94	0,48	4,33
17	4,28	1	1	1	12,00	0,49	4,43
18	4,10	1	1	1	12,56	0,46	4,52
19	5,27	1	1	1	12,77	0,46	4,61
20	4,96	1	1	1	13,77	0,46	4,70

Dans le graphe de la figure 4.2, nous remarquons que le taux de défaillance croît d'une façon linéaire passant de 0,0056 jusqu'à 0,0137 défaillance/heure avec une précision moyenne. Par contre, l'évolution de l'écart-type n'est pas affectée par la précision de l'expert sauf lorsque la moyenne a priori s'éloigne considérablement de la moyenne de la vraisemblance. L'écart-type devient plus grand.

Le graphe représentant l'évolution du coût de maintenance (courbe en bas de la figure 4.2) a tendance à s'aplatir après atteinte du coût minimum à la fin de la période 5. Ceci

indique qu'en considérant une incertitude moyenne de l'expert, le coût de maintenance, augmentent lentement.



**Figure 4.2** Évolution du taux de défaillance, écart-type et coût de maintenance, cas d'augmentation moyenne avec  $0.1 < \alpha < 0.2$

Dans le cas où l'expert est incertain quant à l'augmentation du taux de défaillance, nous constatons que le taux de défaillance a posteriori est fluctuant. Ce qui est expliqué par l'effet dominant de la vraisemblance sur la densité a posteriori, alors que l'information a priori a un effet mineur. De plus, vu l'incertitude de l'expert la bande [min, max] qui désigne les bornes supérieure et inférieure du taux de défaillance est très large (Tableau 4-5).

Le minimum du coût de maintenance est atteint à  $T^* = 10.41 \times 10^4$  heures, avec  $C(T^*) = 3504 \$$ . Il serait intéressant économiquement de considérer une périodicité de remplacement préventif optimale à chaque  $T^*$ . Cependant, nous encourons le risque de se baser sur un avis d'expert incertain qui peut s'avérer loin de la vraisemblance (figure 4.3).

Tableau 4-5 Résultats, cas d'augmentation incertaine de taux de défaillance, vraisemblance non actualisée, avec  $0.1 < \alpha < 0.2$

Année	Taux de panne Vrais $\times 10^{-3}$	Avis Expert	Precision Expert	AugDim	Taux de panne $\times 10^{-3}$	Ecart-type $\times 10^{-3}$	cout Total(K\$)
0	5,00	SO	SO	SO	SO	SO	0,00
1	5,40	1	2	1	5,61	0,48	6,51
2	4,43	1	2	1	5,70	0,47	4,67
3	5,24	1	2	1	6,07	0,48	4,09
4	4,63	1	2	1	6,03	0,47	3,83
5	5,41	1	2	1	6,51	0,49	3,67
6	4,34	1	2	1	6,50	0,47	3,60
7	4,92	1	2	1	6,56	0,48	3,55
8	5,19	1	2	1	6,91	0,48	3,52
9	5,11	1	2	1	6,86	0,47	3,51
10	5,02	1	2	1	7,01	0,47	3,51
11	5,37	1	2	1	6,97	0,47	3,51
12	6,81	1	2	1	7,56	0,49	3,52
13	3,67	1	2	1	7,28	0,56	3,53
14	5,50	1	2	1	7,19	0,55	3,54
15	4,73	1	2	1	6,87	0,53	3,54
16	5,48	1	2	1	7,13	0,51	3,53
17	4,28	1	2	1	6,74	0,55	3,54
18	4,10	1	2	1	6,44	0,56	3,53
19	5,27	1	2	1	6,36	0,52	3,51
20	4,96	1	2	1	6,66	0,47	3,52

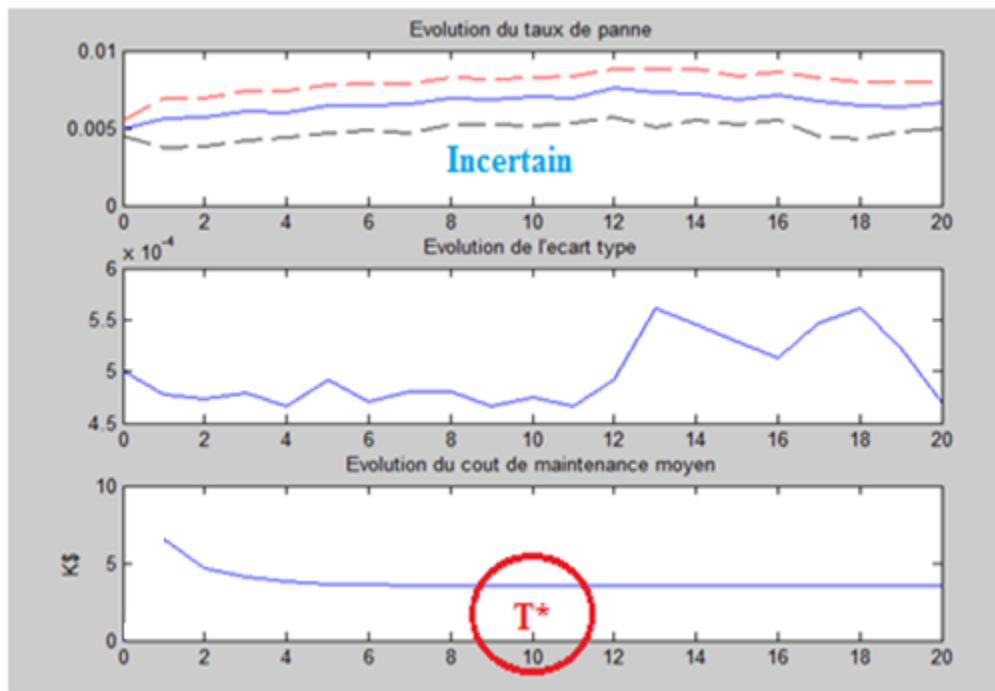


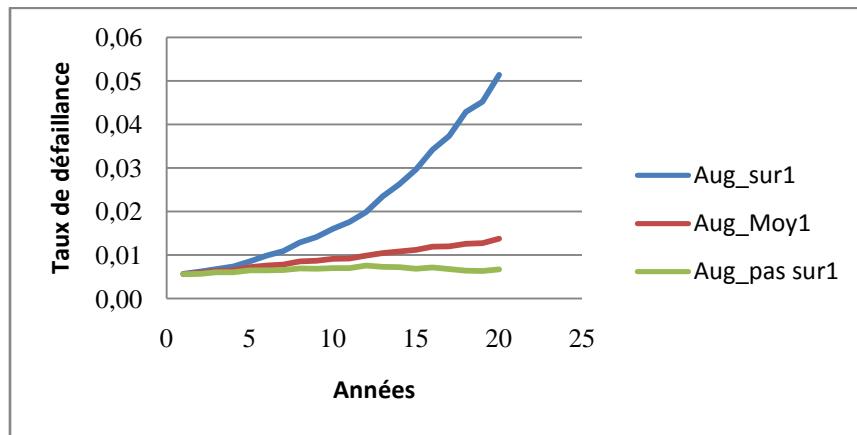
Figure 4.3 Évolution du taux de défaillance, écart-type et coût de maintenance, cas d'augmentation incertaine avec  $0.1 < \alpha < 0.2$

Le tableau 4-6 résume les différentes périodicités optimales ainsi que les coûts de maintenance à cette périodicité en fonction de l'incertitude de l'expert:

**Tableau 4-6 Récapitulatif des stratégies optimales en fonction de l'incertitude de l'expert**

Précision Expert	$T^*(\text{Heures}) \times 10^4$	$C(T^*) (\$)$
Certaine	4.97	3913
Moyenne	5.94	3738
Incertaine	10.41	3504

Dans la figure 4.4, les graphiques servent à comparer les trois cas d'augmentation du taux de défaillance selon les différentes incertitudes de l'expert. Nous remarquons bien que la croissance du taux de défaillance devient plus significative avec l'augmentation de l'incertitude de l'expert.



**Figure 4.4 Comparaison du comportement du taux de défaillance suivant trois avis d'expert différents**

La figure 4.5 montre que le coût de maintenance est en accord avec l'évolution du taux de défaillance. Cependant, le minimum des coûts est atteint plus rapidement lorsque l'expert est certain. La périodicité du remplacement préventif s'éloigne lorsque l'expert est incertain. Nous pouvons conclure que la périodicité optimale de remplacement diminue avec l'augmentation de la précision de l'expert et inversement.

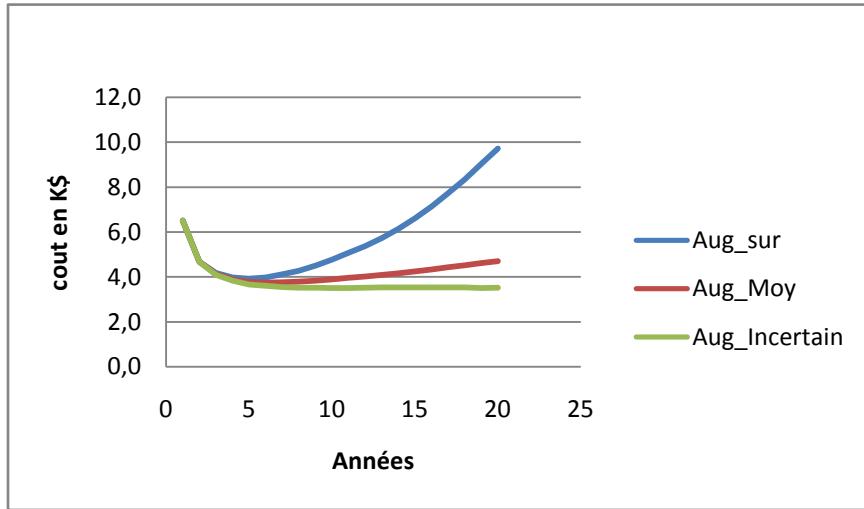


Figure 4.5 Comparaison des coûts de maintenance pour trois avis d'experts

#### 4.3.2 Cas de la vraisemblance actualisée

Dans ce cas, le taux de défaillance a posteriori sert à actualiser la vraisemblance (les observations des durées de vie) dans la période suivante. Nous obtenons les résultats de simulation dans le cas où l'expert est certain d'une augmentation du taux de défaillance à chaque période avec un pourcentage compris  $0 < \alpha < 0.1$ . Ensuite, nous comparons ce cas avec le cas de la vraisemblance constante (sous-section 4.3.2).

Le tableau 4.7, indique que le coût de maintenance minimum si nous nous basons sur les données de vraisemblance du taux estimé par le constructeur, se situe entre les périodes 9 et 10. En approximant les coûts de maintenance par la fonction polyfit de MatLab, nous obtenons une périodicité optimale à  $T^* = 9.75 \cdot 10^4$  heures, avec  $C(T^*) = 3269$  \$. Si l'équipement tombe en défaillance avant  $T^*$ , il sera réparé minimalement.

Dans le cas d'une actualisation de la vraisemblance, le taux de défaillance a une croissance plus rapide par rapport au premier cas. Parce que le nombre de défaillances augmente à chaque période. Cependant, l'écart-type n'est pas très affecté, ce qui est justifié compte tenu de l'avis certain de l'expert à propos de l'augmentation dans les deux cas. Le coût de maintenance par unité de temps est minimum à  $T^* = 5.80 \cdot 10^4$  heures, avec  $C(T^*) = 3557$  \$. Ce coût se situe entre les périodes 5 et 6. Si l'équipement tombe en défaillance avant  $T^*$ , il sera réparé minimalement.

**Tableau 4-7 Résultats de simulation en cas d'augmentation sure de taux de défaillance, vraisemblance non actualisée, avec  $0 < \alpha < 0.1$**

Année	Taux de panne Vrais $\times 10^{-3}$	Avis Expert	Precision Expert	AugDim	Taux de panne $\times 10^{-3}$	Ecart-type $\times 10^{-3}$	cout Total(K\$)
0	5,00	SO	SO	SO	SO	SO	0,00
1	5,40	1	0	0	5,29	0,41	6,51
2	4,43	1	0	0	5,30	0,36	4,59
3	5,24	1	0	0	5,43	0,33	3,97
4	4,63	1	0	0	5,39	0,28	3,66
5	5,41	1	0	0	5,73	0,25	3,47
6	4,34	1	0	0	5,98	0,21	3,37
7	4,92	1	0	0	6,02	0,19	3,31
8	5,19	1	0	0	6,47	0,17	3,28
9	5,11	1	0	0	6,46	0,16	3,27
10	5,02	1	0	0	6,65	0,14	3,27
11	5,37	1	0	0	6,61	0,11	3,28
12	6,81	1	0	0	6,82	0,11	3,28
13	3,67	1	0	0	7,40	0,10	3,29
14	5,50	1	0	0	7,60	0,10	3,32
15	4,73	1	0	0	7,91	0,09	3,35
16	5,48	1	0	0	8,45	0,09	3,39
17	4,28	1	0	0	8,65	0,08	3,44
18	4,10	1	0	0	9,35	0,09	3,49
19	5,27	1	0	0	9,47	0,09	3,55
20	4,96	1	0	0	10,24	0,09	3,61

**Tableau 4-8 Résultats de simulation en cas d'augmentation sure de taux de défaillance, vraisemblance actualisée, avec  $0 < \alpha < 0.1$**

Année	Taux de panne Vrais $\times 10^{-3}$	Avis Expert	Precision Expert	AugDim	Taux de panne $\times 10^{-3}$	Ecart-type $\times 10^{-3}$	cout Total(K\$)
0	5,00	SO	SO	SO	SO	SO	0
1	5,40	1	0	0	5,29	0,41	6,51
2	6,13	1	0	0	5,66	0,38	4,59
3	5,96	1	0	0	5,87	0,34	4,01
4	6,71	1	0	0	6,07	0,30	3,75
5	7,49	1	0	0	6,61	0,26	3,61
6	7,66	1	0	0	7,12	0,25	3,56
7	8,76	1	0	0	7,44	0,24	3,60
8	9,88	1	0	0	8,06	0,18	3,58
9	9,95	1	0	0	8,18	0,16	3,63
10	9,20	1	0	0	8,51	0,16	3,68
11	10,06	1	0	0	8,57	0,14	3,73
12	9,63	1	0	0	8,87	0,12	3,78
13	9,39	1	0	0	9,67	0,11	3,83
14	11,13	1	0	0	10,00	0,11	3,90
15	9,77	1	0	0	10,51	0,09	4,00
16	10,53	1	0	0	11,18	0,11	4,06
17	11,30	1	0	0	11,50	0,12	4,14
18	11,23	1	0	0	12,49	0,11	4,23
19	11,63	1	0	0	12,66	0,11	4,34
20	11,60	1	0	0	13,72	0,11	4,44

Nous résumons les résultats des coûts de maintenance dans le tableau 4-9 suivant :

**Tableau 4-9 Récapitulatif des stratégies optimales en fonction l'actualisation de la vraisemblance**

	$T^* (\text{Heures})$	$C(T^*) (\$)$
Vraisemblance non actualisée	$9.75 \times 10^4$	3269
Vraisemblance actualisée	$5.80 \times 10^4$	3557

Les Figures 4.6 et 4.7 comparent respectivement, l'évolution du taux de défaillance ainsi que l'évolution du coût de maintenance, en supposant que les observations de vraisemblance de l'équipement seront actualisées ou non actualisées dans chaque période. Le coût minimum de maintenance  $C(T^*)$ , est atteint plus rapidement lorsque la vraisemblance est actualisée par le taux de défaillance a posteriori de la période précédente, la croissance du coût est plus significative (Figure 4-7).

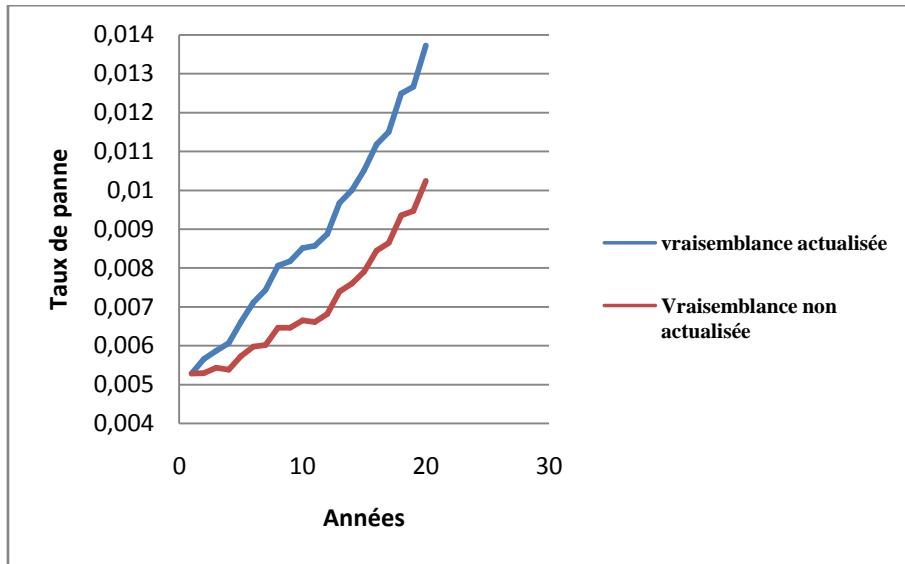


Figure 4.6 Évolution du taux de défaillance avec actualisation ou non de la vraisemblance

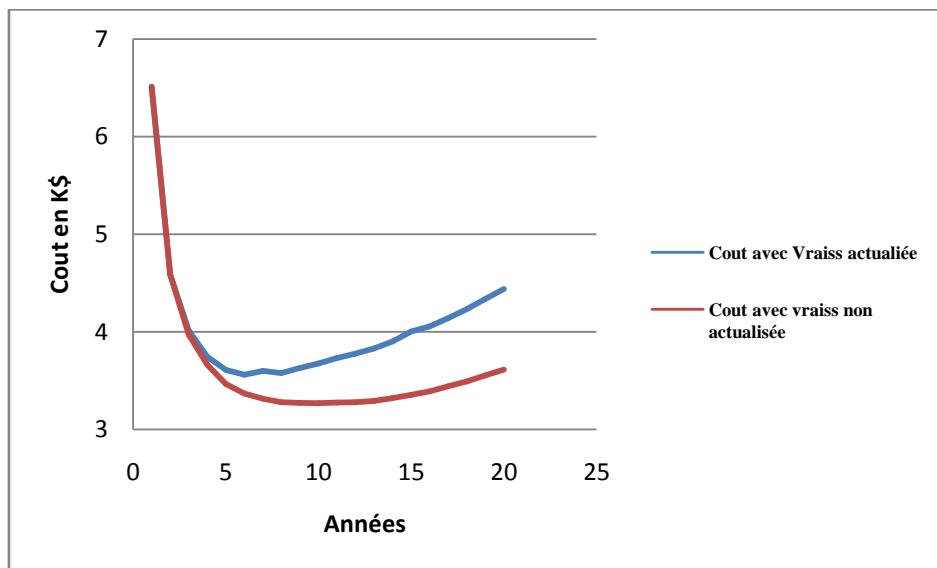


Figure 4.7 Évolution du coût de maintenance dans le cas d'actualisation ou non de la vraisemblance

## CHAPITRE 5 : CONCLUSION GÉNÉRALE

L'utilisation des méthodes bayésiennes présente beaucoup d'avantages. En effet, ces méthodes utilisent des connaissances antérieures, des avis d'experts ou des intuitions, exprimées sous forme de distribution de probabilité, afin de générer une nouvelle information. Les méthodes MCMC ont permis de simplifier les calculs lorsque la loi a priori est non conjuguée.

Dans le cadre de ce mémoire, nous avons proposé une stratégie de réparation minimale pour un équipement. Cette stratégie intègre un taux de défaillance actualisé par une inférence bayésienne à chaque période. La complexité du modèle bayésien déployé nous a amené à appliquer une méthode d'échantillonnage de type MCMC.

Ce projet de recherche, nous a permis de bien appréhender les points suivants :

- Utiliser les statistiques bayésiennes dans le domaine de la fiabilité.
- Avoir recours aux méthodes MCMC pour simuler des modèles statistiques complexes.
- Modéliser une stratégie de maintenance initialement dédiée pour des taux de défaillance continus et non actualisés
- Utiliser la simulation pour optimiser le coût total moyen d'une stratégie de réparation minimal.
- Analyser les résultats de différents scénarios.

Dans ce travail, nous avons pu intégrer le taux de défaillance actualisé pour proposer une stratégie de remplacement périodique avec réparation minimale en cas de défaillance et l'optimiser dans le cas du taux de défaillance croissant.

Un programme écrit avec le code Matlab a été élaboré pour combiner et actualiser le taux de défaillance d'une période à l'autre. Le programme utilise ce taux actualisé pour déterminer la stratégie de remplacement optimale.

Comme développement et complément de ce travail de recherche, nous proposons les perspectives de recherche suivantes :

- Le programme développé utilise un seul expert. C'est-à-dire les avis d'un seul expert sont modélisés selon une seule distribution. Si plusieurs experts sont disponibles, il serait intéressant de modéliser leurs avis avec plusieurs lois a priori et déterminer une seule distribution a posteriori pour une seule vraisemblance.
- L'étude de la sensibilité de l'étude peut être effectuée en changeant les paramètres de modélisation et de simulation.

## RÉFÉRENCES

- Achcar, J. A. and S. Loibel (1998). "Constant hazard function models with a change point: A Bayesian analysis using markov chain Monte Carlo methods." *Biometrical journal* **40**(5): 543-555.
- Andrieu, C., et al. (2003). "An introduction to MCMC for machine learning." *Machine learning* **50**(1-2): 5-43.
- Bagayoko, M. (2009). Stratégie de maintenance optimale du parc de locomotives de Transrail, École de technologie supérieure.
- Barlow, R. and L. Hunter (1960). "Optimum preventive maintenance policies." *Operations Research* **8**(1): 90-100.
- BARLOW, R. E. P. and F. Proschan (1965). F.(1965).-Mathematical theory of reliability, Wiley, New York.
- Berger, J. O. (2000). "Bayesian analysis: A look at today and thoughts of tomorrow." *Journal of the American Statistical Association* **95**(452): 1269-1276.
- Boland, P. J. (1982). "Periodic replacement when minimal repair costs vary with time." *Naval Research Logistics Quarterly* **29**(4): 541-546.
- Boland, P. J. and F. Proschan (1982). "Periodic replacement with increasing minimal repair costs at failure." *Operations Research* **30**(6): 1183-1189.
- Boudali, H. and J. B. Dugan (2006). "A continuous-time Bayesian network reliability modeling, and analysis framework." *Reliability, IEEE Transactions on* **55**(1): 86-97.
- Brooks, S. (1998). "Markov chain Monte Carlo method and its application." *Journal of the royal statistical society: series D (the Statistician)* **47**(1): 69-100.
- Casarini, R. (2011). Monte Carlo Methods using Matlab.
- Casella, G. (1985). "An introduction to empirical Bayes data analysis." *The American Statistician* **39**(2): 83-87.
- Chelbi, A. and D. Ait-Kadi (2004). "Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit submitted to regular preventive maintenance." *European Journal of Operational Research* **156** (3): 712-718.
- Chib, S. and E. Greenberg (1995). "Understanding the metropolis-hastings algorithm." *The American Statistician* **49**(4): 327-335.
- Cox, D. R., et al. (1962). *Renewal theory*, Methuen London.

- Dayanik, S. and Ü. Gürler (2002). "An adaptive Bayesian replacement policy with minimal repair." *Operations Research* **50**(3): 552-558.
- Deely, J. and D. Lindley (1981). "Bayes empirical bayes." *Journal of the American Statistical Association* **76**(376): 833-841.
- Diaconis, P. and D. Ylvisaker (1979). "Conjugate priors for exponential families." *The Annals of statistics* **7**(2): 269-281.
- Ebrahimi, N., et al. (1997). Bayesian analysis of change-point hazard rate models, Citeseer.
- Efron, B. and C. Morris (1972). "Empirical Bayes on vector observations: An extension of Stein's method." *Biometrika* **59**(2): 335-347.
- Elsayed, E. A. (2012). *Reliability engineering*, Wiley Publishing.
- Fink, D. (1997). "A compendium of conjugate priors." See <http://www.people.cornell.edu/pages/df36/CONJINTRnew%20TEX.pdf>: 46.
- Gelfand, A. E. and A. F. Smith (1990). "Sampling-based approaches to calculating marginal densities." *Journal of the American Statistical Association* **85**(410): 398-409.
- Gendre, F. (1977). *L'analyse statistique univariée: introduction à son utilisation pratique*, Librairie Droz.
- Geweke, J. (2005). *Contemporary Bayesian econometrics and statistics*, Wiley. com.
- Gill, J. (2002). *Bayesian methods: A social and behavioral sciences approach*, CRC press.
- Haghatalab, A., et al. (2012). "Bayesian inference along Markov Chain Monte Carlo approach for PWR core loading pattern optimization." *Annals of Nuclear Energy* **50**: 150-157.
- Hastings, W. K. (1970). "Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications." *Biometrika* **57**(1): 97-109.
- Jiang, X., et al. (2012). "Bayesian inference method for stochastic damage accumulation modeling." *Reliability Engineering & System Safety*.
- Karandikar, J. M., et al. (2012). "Prediction of remaining useful life for fatigue-damaged structures using Bayesian inference." *Engineering Fracture Mechanics*.
- Kass, R. E. and D. Steffey (1989). "Approximate Bayesian inference in conditionally independent hierarchical models (parametric empirical Bayes models)." *Journal of the American Statistical Association* **84**(407): 717-726.
- Kozlov, B. A. e., et al. (1970). *Reliability handbook*, Holt, Rinehart and Winston New York.
- Laprie, J.-C. (2004). "Sûreté de fonctionnement des systèmes: concepts de base et terminologie: Sûreté de fonctionnement." *REE. Revue de l'électricité et de l'électronique*(11): 95-105.

- Lawson, A. B. (2006). "Disease cluster detection: a critique and a Bayesian proposal." Statistics in Medicine **25**(5): 897-916.
- Liu, J. S. and T. Logvinenko (2003). "Bayesian methods in biological sequence analysis." Handbook of Statistical Genetics.
- Martinez, W. L. and A. R. Martinez (2001). Computational statistics handbook with MATLAB, CRC press.
- Metropolis, N., et al. (1953). "Equation of state calculations by fast computing machines." The journal of chemical physics **21**: 1087.
- Miller, I., et al. (1965). Probability and statistics for engineers, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Morris, C. N. (1983). "Parametric empirical Bayes inference: theory and applications." Journal of the American Statistical Association **78**(381): 47-55.
- Nakagawa, T. (1986). "Periodic and sequential preventive maintenance policies." Journal of applied Probability: 536-542.
- Parent, É. and J. Bernier (2007). Le raisonnement bayésien: modélisation et inférence, Springer.
- Pérez, C., et al. (2006). "MCMC-based local parametric sensitivity estimations." Computational statistics & data analysis **51**(2): 823-835.
- Pham, H. and H. Wang (1996). "Imperfect maintenance." European journal of operational research **94**(3): 425-438.
- Raftery, A. and V. Akman (1986). "Bayesian analysis of a Poisson process with a change-point." Biometrika: 85-89.
- Ringler, J. (1981). "Une modélisation bayésienne du taux de défaillance en fiabilité." Revue de Statistique Appliquée **29**(1): 43-56.
- Robert, C. P. (2005). Le choix bayésien: Principes et pratique, Springer.
- Roberts, G. O. and A. F. Smith (1994). "Simple conditions for the convergence of the Gibbs sampler and Metropolis-Hastings algorithms." Stochastic processes and their applications **49**(2): 207-216.
- Robinson, D. G. (2001). "A hierarchical Bayes approach to system reliability analysis." Sandia Report Sand 2001 **3513**.
- Rousseau, J. (2009). Statistique Bayésienne Notes de cours, ENSAE-ParisTech.
- Saporta, G. (2006). Probabilités, analyses des données et statistiques, Editions Technip.

Sheu, S.-H., et al. (1999). "A Bayesian perspective on age replacement with minimal repair." Reliability Engineering & System Safety **65**(1): 55-64.

Sheu, S.-H., et al. (2001). "A Bayesian approach to an adaptive preventive maintenance model." Reliability Engineering & System Safety **71**(1): 33-44.

Smith, A. F. and G. O. Roberts (1993). "Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods." Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological): 3-23.

Tango, T. (1978). "Extended block replacement policy with used items." Journal of applied Probability: 560-572.

Wang, H. (2002). "A survey of maintenance policies of deteriorating systems." European journal of operational research **139**(3): 469-489.

Yuan, T. and Y. Kuo (2010). "Bayesian analysis of hazard rate, change point, and cost-optimal burn-in time for electronic devices." Reliability, IEEE Transactions on **59**(1): 132-138.

## ANNEXES

### ANNEXE A: PROGRAMME MATLAB

```

clear
clc
filename = 'TEST.xlsx';
Lambda_estimee = zeros(1,1);
Error_Lambda_estimee = zeros(1,1);
Cout_reparation_Annee = zeros(1,21);
Cout_Reparation_cumulee = zeros(1,21);
cout_maintenance = zeros(1,21);

lambdaMin(1)= 0.0045;
Lambda_estimee(1) = 0.005;
lambdaMax(1) = 0.0055;
Error_Lambda_estimee(1) = 0.0005;
% Ecart-type de lambda estimée
cout_maintenance(1) = 0;
Cout_reparation_Annee(1) = 0;
Temps_estime = 10000;

Couts = xlsread(filename, 2, 'B16:D16');

Crm = Couts(1);
% Cout de la reparation minimale
Crc = Couts(2);
% Cout du remplacement Préventif
Ci = Couts(3);
% Cout d'inspection

Nb_pannes_estime = Lambda_estimee * Temps_estime;
Nb_pannes_estime_min = (Lambda_estimee * (1 - Error_Lambda_estimee)) *
Temps_estime;
Nb_pannes_estime_max = (Lambda_estimee * (1 + Error_Lambda_estimee)) *
Temps_estime;

% Lecture des données a partir du fichier données Excel

Annee1 = xlsread(filename, 1, 'G2:G500');Annee2 = xlsread(filename, 1,
'H2:H500');Annee3 = xlsread(filename, 1, 'I2:I500');
Annee4 = xlsread(filename, 1, 'J2:J500');Annee5 = xlsread(filename, 1,
'K2:K500');Annee6 = xlsread(filename, 1, 'L2:L500');
Annee7 = xlsread(filename, 1, 'M2:M500');Annee8 = xlsread(filename, 1,
'N2:N500');Annee9 = xlsread(filename, 1, 'O2:O500');
Annee10 = xlsread(filename, 1, 'P2:P500');Annee11 = xlsread(filename,
1, 'Q2:Q500');Annee12 = xlsread(filename, 1, 'R2:R500');
Annee13 = xlsread(filename, 1, 'S2:S500');Annee14 = xlsread(filename,
1, 'T2:T500');Annee15 = xlsread(filename, 1, 'U2:U500');
Annee16 = xlsread(filename, 1, 'V2:V500');Annee17 = xlsread(filename,
1, 'W2:W500');Annee18 = xlsread(filename, 1, 'X2:X500');
Annee19 = xlsread(filename, 1, 'Y2:Y500');Annee20 = xlsread(filename,
1, 'Z2:Z500');

```

```

% Calcul du nombre de pannes par année, la somme, la somme carrée et la
somme cumulée des durées de pannes

AN = [size(Annee1,1) size(Annee2,1) size(Annee3,1) size(Annee4,1)
size(Annee5,1) size(Annee6,1) size(Annee7,1) size(Annee8,1)
size(Annee9,1) size(Annee10,1) size(Annee11,1) size(Annee12,1)
size(Annee13,1) size(Annee14,1) size(Annee15,1) size(Annee16,1)
size(Annee17,1) size(Annee18,1) size(Annee19,1) size(Annee20,1)];
Somme = [sum(Annee1) sum(Annee2) sum(Annee3) sum(Annee4) sum(Annee5)
sum(Annee6) sum(Annee7) sum(Annee8) sum(Annee9) sum(Annee10)
sum(Annee11) sum(Annee12) sum(Annee13) sum(Annee14) sum(Annee15)
sum(Annee16) sum(Annee17) sum(Annee18) sum(Annee19) sum(Annee20)];
Somme_Carree = [sum(Annee1.^2) sum(Annee2.^2) sum(Annee3.^2)
sum(Annee4.^2) sum(Annee5.^2) sum(Annee6.^2) sum(Annee7.^2)
sum(Annee8.^2) sum(Annee9.^2) sum(Annee10.^2) sum(Annee11.^2)
sum(Annee12.^2) sum(Annee13.^2) sum(Annee14.^2) sum(Annee15.^2)
sum(Annee16.^2) sum(Annee17.^2) sum(Annee18.^2) sum(Annee19.^2)
sum(Annee20.^2)];
Somme_cumulee = cumsum(Somme);

% Lecture des avis de l'expert de chaque année

AV = xlsread(filename, 2, 'B2:U2');

NA = 20;
j = 1;
for j = 1:NA
Avis = AV(j)

% Avis, Variable représentant l'avis de l'expert: Pas d'avis(0)
% Stabilité(2) Diminution(-1) Augmentation(1)

if Avis ~= 0

% Lecture de la précision de l'expert pour chaque année

PR = xlsread(filename, 2, 'B3:U3');

% Precision, Variable définissant la precision de l'expert: Certain (0)
% Moyennement certain(1) Pas très certain (2)

Precision = PR(j)

% AugDim, Variable définissant le taux d'augmentation ou de diminution
% du taux de panne

Aug_Dim = xlsread(filename, 2, 'B4:U4');
AugDim = Aug_Dim(j)

if AugDim == 0

a = xlsread(filename, 2, 'A10');
b = xlsread(filename, 2, 'B10');

```

```

elseif AugDim == 1

a = xlsread(filename, 2, 'A11');
b = xlsread(filename, 2, 'B11');

else

a = xlsread(filename, 2, 'A12');
b = xlsread(filename, 2, 'B12');
end
end

AL = random('Uniform',a,b,[1,20]);
BE = random('Uniform',a,b,[1,20]);

Alpha = AL(j)
Beta = BE(j)
end

Nb_pannes = AN(j)
t = Somme(j)
s = Somme_Carree(j)
Moy_Vrais = Nb_pannes/t

% Avis de l'expert
if Avis == 0
% Expert n'a pas d'avis
muu = Lambda_estimee(j)
sigmaa = Error_Lambda_estimee(j)
Precision = 5;
AugDim = 10;
elseif Avis == -1
% Expert prévoit une diminution
if Precision == 0
    muu = (1-Alpha)*Lambda_estimee(j)
    sigmaa = (1-Beta)*Error_Lambda_estimee(j)
elseif Precision == 1
    muu = (1-Alpha)*Lambda_estimee(j)
    sigmaa = Error_Lambda_estimee(j)
else
    muu = (1-Alpha)*Lambda_estimee(j)
    sigmaa = (1+Beta)*Error_Lambda_estimee(j)
end
end
elseif Avis == 1
% Expert prévoit une augmentation
if Precision == 0
    muu = (1+Alpha)*Lambda_estimee(j)
    sigmaa = (1-Beta)*Error_Lambda_estimee(j)
elseif Precision == 1
    muu = (1+Alpha)*Lambda_estimee(j)
    sigmaa = Error_Lambda_estimee(j)
else
    muu = (1+Alpha)*Lambda_estimee(j)
    sigmaa = (1+Beta)*Error_Lambda_estimee(j)
end

```

```

end
end
elseif Avis == 2
    Expert prévoit une stabilisation
    if Precision == 0
        muu = Lambda_estimee(j)
        sigmaa = (1-Beta)*Error_Lambda_estimee(j)
    elseif Precision == 1
        muu = Lambda_estimee(j)
        sigmaa = Error_Lambda_estimee(j)
    else
        muu = Lambda_estimee(j)
        sigmaa = (1+Beta)*Error_Lambda_estimee(j)
    end
end
end
end
end
end
end

% Metropolis-Hastings

A = '((lambda.^m))*(exp(-sum(t)*lambda))*(1/(sigmaa*sqrt(2*pi)))*(exp(-
((lambda-muu).^2)/(2*(sigmaa.^2))))';
posteriori = inline(A, 'lambda', 'm', 't', 'muu', 'sigmaa');

% Évaluation avec la distribution normale.

B = '(1/(sigma*sqrt(2*pi)))*exp(-0.5*((lambda-mu)/sigma).^2)';
norm = inline(B, 'lambda', 'mu', 'sigma');

% Génération des observations.

m = AN(j);
% Nombre d'observations m

% Génération de N échantillonnage.

% Les paramètres

N = 2000;
% Nombre d'itération N
sigma = 0.001;
lambda = zeros(1,N);

% génération de la valeur initiale de lambda

lambda_min = 0;
lambda_max = 0.02;
seed = 1; rand('state', seed); randn('state', seed);
lambda(1) = Lambda_estimee(j);

```

```

%% Début de l'échantillonnage
i = 1;
while i < N
    i = i + 1;

% Génération un point a partir de la distribution proposée

theta = lambda(i-1) + sigma*randn(1);

% Calcul du ratio d'acceptation

    alpha = min([1,(posteriori(theta,m,t,muu,sigmaxa)*norm(lambda(i-1),theta,sigma))/((posteriori(lambda(i-1),m,t,muu,sigmaxa)*norm(theta,lambda(i-1),sigma)))]);

% Génération d'une loi uniforme pour la comparaison

u = rand;

if u <= alpha

    lambda(i) = theta;
else
    lambda(i) = lambda(i-1);
end

lambda_Min = min(lambda);
Moy_lambda = mean(lambda);
lambda_Max = max(lambda);
Et_lambda = std(lambda);

end

Cout_Reparation = (Lambda_estimée(j)*Somme(j))*Crm;

Cout_reparation_Annee(j) = Cout_Reparation;

Cout_Reparation_cumulée = cumsum(Cout_reparation_Annee);

Cout_total_Moyen = (Crc +
Cout_Reparation_cumulée(j)+(j*Ci))/Somme_cumulée(j)

%+(Lambda_estimée(j)*(Somme_cumulée(NA)-Somme_cumulée(j))*Crm)
Resultats = {'Année', 'Taux de panne Vrais×10^-3', 'Avis
Expert', 'Precision Expert', 'AugDim', 'Taux de panne×10^-3', 'Ecart-
type×10^-3', 'cout Total(K$)'; j Moy_Vrais*10^3 Avis Precision AugDim
Moy_lambda*10^3 Et_lambda*10^3 Cout_total_Moyen}
Matt(j,:) = [j Moy_Vrais*10^-3 Avis Precision AugDim Moy_lambda*10^-
3 Et_lambda*10^-3 Cout_total_Moyen];

%% Affichage les resultats

```

```

figure(j); clf;
subplot(13,1,7:8);
nbins = 100;
lambdabins = linspace(lambdamin,lambdamax,nbins);
counts = hist(lambda, lambdabins);
bar(lambdabins, counts/sum(counts), 'k');
xlim([lambdamin lambdamax]);
xlabel('\lambda'); ylabel ('a posteriori');

% Affichage de l'a posteriori théorique

D = ((lambdabins.^m)).*(exp(-
sum(t).*lambdabins)).*(1/(sigmam*sqrt(2*pi)).*(exp(-((lambdabins-
muu).^2)/(2*(sigmam.^2))))) ;
hold on;
plot(lambdabins, D/sum(D), 'r--', 'LineWidth', 3);
set(gca, 'Ytick', []);

% Affichage de la vraisemblance

VR = ((lambdabins.^m)).*(exp(-sum(t).*lambdabins));
subplot(13,1,1:2)
plot(lambdabins, VR, '.-.', 'LineWidth', 3)

% Affichage de la loi Normale ( A priori)

R = (1/(sigmam*sqrt(2*pi)).*(exp(-((lambdabins-
muu).^2)/(2*(sigmam.^2))))) ;
subplot(13,1,4:5);
plot(lambdabins, R, 'g--', 'LineWidth', 3)

% Affichage de l'historique d'échantillonnage

subplot(13,1,10:13)
stairs(lambda, 1:N, 'k-');
ylabel ('i'); xlabel('\lambda');
set(gca, 'Ydir' , 'reverse');
xlim([lambdamin lambdamax]);

file = 'C:\Users\Mehdi\Desktop\Resultats';
xlswrite(file, {'Année','Taux de panne Vraisx10^-3','Avis
Expert','Precision Expert','AugDim','Taux de pannex10^-3','Ecart-
typex10^-3','cout Total(K$')}, 1,'A1:H1');
xlswrite(file, {0 Lambda_estimee(1)*10^-3 'SO''SO''SO''SO''SO' 0}, 1,
'A2:H2');
xlswrite(file,Matt, 1, 'A3:H22');
%Pause = inputdlg('Entrer pour continuer:', '1', 1);
j = j + 1;

lambdaMin(j) = lambda_Min
Lambda_estimee(j) = Moy_lambda
lambdaMax(j) = lambda_Max
Error_Lambda_estimee(j) = Et_lambda
cout_maintenance(j) = Cout_total_Moyen

```

```
end

% Tracer l'évolution du taux de panne et de son écart-type et le cout
de maintenance

figure(30);
S(1) = subplot(3,1,1);
x = linspace(0,NA,21);
plot(x,Lambda_estimee)
hold on
plot(x,lambdaMin,'k--')
hold on
plot(x, lambdaMax,'r--')
S(2) = subplot(3,1,2);
plot(x,Error_Lambda_estimee)
S(3)= subplot(3,1,3);
plot(x,cout_maintenance)
ylabel('K$')

title(S(1),'Evolution du taux de panne')
title(S(2),'Evolution de l''ecart type')
title(S(3),'Evolution du cout de maintenance moyen')
```