

**Titre:** Estimation d'état des réseaux électriques de distribution maillés  
Title:

**Auteur:** Léon Dario Ramirez  
Author:

**Date:** 2013

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Ramirez, L. D. (2013). Estimation d'état des réseaux électriques de distribution maillés [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/1330/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/1330/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Ilhan Kocar  
Advisors:

**Programme:** génie électrique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ESTIMATION D'ÉTAT DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES DE DISTRIBUTION  
MAILLÉS

LÉON DARIO RAMIREZ

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

DÉCEMBRE 2013

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

**ESTIMATION D'ÉTAT DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES DE  
DISTRIBUTION MAILLÉS**

présenté par : RAMIREZ Léon Dario

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. MAHSEREDJIAN Jean, Ph.D., président

M. KOCAR Ilhan, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. LACROIX Jean-Sébastien, M.Sc.A., membre

## DÉDICACE

*À ma femme SANDRA MARIA et à mes deux filles LAURA CRISTINA et DANIELA  
Vous êtes mon monde, ma pensée et ma vie.*

## REMERCIEMENTS

Je tiens en tout premier lieu à remercier mes parents GUILLERMO LEON et MARIA ELENA, mon frère JAIME ALBERTO et mes sœurs ADRIANA MARIA et ANA CAROLINA, pour tous les sacrifices consentis par tous et chacun pour me permettre d'atteindre cette étape de ma vie.

Je remercie également Docteur ILHAN KOCAR, professeur à l'École Polytechnique de Montréal, pour m'avoir confié ce travail de recherche et m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche et pour les opportunités offertes.

Je tiens à remercier tout particulièrement et à témoigner toute ma reconnaissance à Monsieur JEAN-SEBASTIEN LACROIX pour son aide et ses précieux conseils concernant les missions évoquées dans ce mémoire, qu'il m'a apporté lors des différents suivis.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans une pensée pour mes amis DIEGO, CAMILO, ASSANE et LAURE qui m'auront énormément fait rire, m'auront soutenu dès le début et m'auront aidé dans les périodes de doute.

À l'équipe CYME et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que cette recherche soit possible, je vous dis merci.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente un nouvel algorithme qui a pour objectif d'estimer l'état des réseaux de distribution maillés en utilisant la méthode unifiée d'estimation d'état avec l'analyse-nodale-modifiée-augmentée (DSSE-MANA). L'intérêt principal de cette méthode est l'estimation des valeurs de la charge en utilisant leur mesure ou estimation de puissance et leur facteur de puissance de façon indépendante. De plus, cette méthode peut être appliquée au calcul de la répartition de puissance ou à l'allocation de charge.

La contribution significative de cette recherche est la démonstration que la méthode (DSSE-MANA) peut estimer l'état des réseaux de distribution maillés. De plus, ce document présente l'intégration des équations du facteur de puissance, ce qui permet d'introduire des informations additionnelles de la charge ou des éléments de mesure du facteur de puissance. On propose aussi une amélioration de la stabilité de la méthode en incluant des mesures virtuelles de faible précision lorsque les réseaux ne sont pas 100% observables.

Les modèles et les algorithmes ont été validés en utilisant la répartition de puissance (entrée : la puissance des charges, sorties : les valeurs de tension et de courant) comme le processus inverse de l'estimation d'état (entrée : mesures de tension et de courant, sortie : estimation de la charge). Les résultats démontrent une bonne précision numérique du modèle et une robustesse de l'algorithme. La performance de la résolution et la mesure de l'observabilité du réseau demeurent cependant une recherche importante à poursuivre.

## ABSTRACT

This dissertation presents a new algorithm for the state estimation of meshed distribution networks using the unified approach of Distribution-System-State-Estimation with Modified-Augmented-Nodal-Analysis (DSSE-MANA). The main focus of this method is to estimate the load values, using the power and the power factor measurements separately. However, the proposed method is also applicable to the approaches of Load Flow and Load Allocation.

The main contribution of this research is the demonstration that the method (DSSE-MANA) can estimate the state of meshed distribution networks. It also presents the integration of the power factor equations, which allows using additional information of the load or of the power factor measurement. It presents as well a stability improvement of the unified state estimation approach including virtual measurement of low precision when the networks aren't 100% observable.

The models and algorithms are validated using the Load Flow (input: load power, output: current and voltage values) as the reverse process of state estimation (input: current and voltage measures, output: load power estimation). The tests cases have shown good numerical accuracy and robustness. The performance and the observability measure remain issues for further researches.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE .....	III
REMERCIEMENTS .....	IV
RÉSUMÉ .....	V
ABSTRACT .....	VI
TABLE DES MATIÈRES .....	VII
LISTE DES TABLEAUX .....	X
LISTE DES FIGURES .....	XI
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	XII
INTRODUCTION.....	1
1.1    Description du phénomène étudié et son contexte.....	1
1.2    Problématique .....	2
1.3    Question de recherche .....	3
1.4    Objectif général.....	3
1.5    Aperçu du rapport .....	3
1.6    Contributions .....	3
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE .....	5
2.1    Répartition de puissance.....	5
2.1.1    Analyse: Backward Forward Sweep (BFS).....	6
2.1.2    Analyse : MANA .....	7
2.1.3    Méthode Newton-Raphson .....	12
2.2    Estimation d'état .....	16
2.2.1    Model de mesures et de pseudo-mesures .....	16
2.2.2    Fonction objective .....	17

2.2.3	Formulation de Hachtel .....	17
2.2.4	Estimation d'état avec les matrices augmentées (DSSE-MANA) .....	18
2.3	Calcul des dérivées partielles du facteur de puissance.....	24
CHAPITRE 3    IMPLÉMENTATION DE LA MÉTHODE (DSSE-MANA).....		26
3.1	Introduction .....	26
3.1.1	Objectifs.....	26
3.1.2	Hypothèses scientifiques .....	26
3.2	Activités et méthodologie.....	27
3.2.1	Sélection des réseaux électriques .....	27
3.2.2	Développement de l'algorithme.....	27
3.2.3	Simulation et comparaison des résultats.....	27
3.3	Test 1 : stabilité du système (mesures de courant et mesures de puissance).....	28
3.4	Test 2 : précision des résultats sans mesures de puissance .....	32
3.5	Test 3 : précision des résultats avec mesures de puissance .....	36
3.6	Conclusion.....	38
CHAPITRE 4    FACTEUR DE PUISSANCE .....		39
4.1	Introduction .....	39
4.1.1	Objectifs.....	39
4.1.2	Hypothèses scientifiques .....	39
4.2	Activités et méthodologie.....	39
4.2.1	Modification à l'algorithme .....	39
4.2.2	Simulation et comparaison des résultats.....	40
4.3	Test 4 : estimation de la charge avant et après l'intégration du facteur de puissance ...	40
CHAPITRE 5    OBSERVABILITÉ ET STABILITÉ.....		45

5.1	Introduction .....	45
5.1.1	Objectif .....	45
5.1.2	Hypothèses scientifiques .....	45
5.2	Activités et méthodologie .....	46
5.2.1	Évaluation de la stabilité du système .....	46
5.2.2	Évaluation de la stabilité du système avec les mesures virtuelles .....	46
5.3	Test 5 : stabilité du système lorsque l'observabilité du réseau diminue .....	46
5.4	Test 6 : stabilité du système avec mesures virtuelles .....	48
5.5	Test 7 stabilité du système avec mesures virtuelles .....	49
	CONCLUSION .....	51
	RÉFÉRENCES .....	53

## **LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 3.1 : Analyse des mesures .....	30
Tableau 3.2 : Estimation des charges .....	31
Tableau 3.3 : Pire cas de l'estimation des charges du test 2 .....	35
Tableau 3.4 : Pire cas de l'estimation des charges du test 3 .....	38
Tableau 4.1 : Charges originales du test 4.....	40
Tableau 4.2 : Charges modifiées (perturbation contrôlée) du test 4. ....	40
Tableau 4.3 : Erreur de l'estimation de la charge du test 4 sans facteur de puissance.....	41
Tableau 4.4 : Erreur de l'estimation de la charge du test 4 avec facteur de puissance .....	41
Tableau 5.1 : Erreur de l'estimation de puissance fournis par les sources, test 5.....	47
Tableau 5.2 : Erreur de l'estimation de la charge du test 5 .....	47
Tableau 5.3 : Erreur de l'estimation de puissance fournis par les sources, test 6.....	49
Tableau 5.4 : Erreur de l'estimation de la charge du test 6 .....	49
Tableau 5.5 : Erreur de l'estimation de puissance du test 7. ....	50

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 : Circuit unifilaire .....	6
Figure 2.2 : Représentation d'un transformateur par sources dépendantes .....	10
Figure 3.1: Réseau du test 1.....	28
Figure 3.2 : Fonction objective du test 1 .....	29
Figure 3.3 : Delta des variables d'état du test 1 .....	29
Figure 3.4 : Fonction objective en utilisant des mesures de puissance. ....	31
Figure 3.5 : Réseau du test 2.....	32
Figure 3.6 : Matrice Jacobienne du test 1 .....	33
Figure 3.7 : Matrice Jacobienne du test 2 .....	33
Figure 3.8 : Fonction objective du test 2 .....	34
Figure 3.9 : Delta des variables d'état du test 2 .....	35
Figure 3.10 : Fonction objective du test 3 .....	36
Figure 3.11 : Delta des variables d'état du test 3 .....	37
Figure 4.1 : Fonction objective avant l'utilisation du facteur de puissance (Test4) .....	42
Figure 4.2 : Fonction objective après l'utilisation du facteur de puissance (Test4).....	43
Figure 4.3 : Delta des variables d'état avant l'utilisation du facteur de puissance (Test4) .....	43
Figure 4.4 : Delta des variables d'état après l'utilisation du facteur de puissance (Test4) .....	44
Figure 5.1 : Identification des charges par ordre d'erreur accumulé du Tableau 5.2.....	48
Figure 5.2 : Fonction objective lorsque le 89% des éléments de mesure sont remplacés par des éléments virtuels. ....	50

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

BFS	Backward Forward Sweep
DSSE	Distribution System State Estimator
IEEE	Institute of Electrical and Electronic Engineers
LTC	Load Tap Changer
MANA	Modified-Augmented-Nodal Analysis
MNA	Modified-Nodal Analysis
PF	Power Factor
SHGM	Schweppes Huber Generalised Method
WLAV	Weighted Least Absolute Value
WLS	Weighted Least-Squares

<b>Caractère gras</b>	Matrices ou vecteurs.
$V, \mathbf{V}$	Valeur/ <b>vecteur</b> complexe <sup>1</sup>
$V_R, \mathbf{V}_R$	Valeur/ <b>vecteur</b> réelle
$V_x, \mathbf{V}_x$	Valeur/ <b>vecteur</b> imaginaire
$ V ,  \mathbf{V} $	Magnitude/ <b>vecteur des magnitudes</b> <sup>2</sup> .
$\mathbf{V}(x, y)$	Valeur de la matrice ou du vecteur à la position x, y
$X_{(k)}$ où $(k)$ :	Position de $X$ dans un vecteur, le $k$ -ième nœud dans un circuit ou le $k$ -ième élément ou appareil

<sup>1</sup> La représentation en coordonnées polaires ou rectangulaires peut être utilisée indistinctement.

<sup>2</sup> Veuillez ne pas le confondre avec le déterminant de la matrice « $\det(\mathbf{V})$ » .

$\mathbf{X}^{(k)}, X^{(k)}$  Valeur qu'a prise  $\mathbf{X}$  ou  $X$  à la  $k$ -ième itération

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Description du phénomène étudié et son contexte

Actuellement, la plupart des systèmes qui améliorent la qualité de vie au quotidien et qui augmentent l'efficacité dans le travail sont basés sur l'utilisation de l'énergie électrique. À cause de cette dépendance, le système électrique doit fournir au consommateur un flux d'énergie continu, adéquat et suffisant. Cette capacité est appelée « fiabilité du réseau » [1]. Dans les centres urbains une très haute fiabilité est requise, à cause des processus qui ne peuvent pas être interrompus. Par exemple, on peut noter les services de santé et de communications. Dans le but d'augmenter la fiabilité, les réseaux de distribution sont améliorés en ajoutant régulièrement des nouveaux appareils et des nouvelles interconnexions. En conséquence, les réseaux deviennent de plus en plus complexes et difficiles à gérer.

Dans ce contexte, les ingénieurs qui réalisent les activités de conception, de planification, d'opération et d'expansion des systèmes de distribution d'énergie se servent toujours plus des outils informatiques pour connaître en détail le comportement des réseaux modernes. Grâce aux modèles numériques des réseaux électriques et aux logiciels spécialisés dans ce domaine, il est possible de connaître l'état des réseaux sous conditions réelles ou sous conditions hypothétiques.

L'étude des réseaux sous conditions hypothétiques, est basée sur un modèle du réseau à analyser dont les caractéristiques sont modifiables au besoin, afin de tester les modifications du réseau en toute sécurité. Cette étude, appelée répartition de puissance, n'est pas le cœur de ce projet mais elle fait partie de la base. C'est pourquoi elle est analysée en profondeur.

L'étude de l'état des réseaux sous conditions réelles utilise aussi un modèle du réseau, en plus de l'information captée du réseau en temps réel ou en temps différé. Le but de l'analyse est de calculer les variables d'état. Par exemple, on doit calculer les tensions aux nœuds du réseau ou les courants qui circulent à travers les sections du réseau. Puisqu'il n'y a pas assez d'appareillages de mesure installés pour recueillir toute l'information, il faut utiliser une méthode mathématique appelée « Estimation d'État ». Cette méthode, basée sur l'information disponible, trouve la valeur la plus probable des variables sur lesquelles on dispose des informations redondantes et elle estime les variables sur lesquelles on n'a pas assez d'information [2].

## 1.2 Problématique

La théorie d'estimation d'état a été développée initialement pour les réseaux de transport, qui sont généralement maillés (Figure 1.1) et balancés. Ensuite, elle a été développée pour les réseaux de distribution, qui sont généralement radiaux ou arborescentes (Figure 1.1) et débalancés. En conséquence, les méthodes d'estimation d'état les plus développées et les plus robustes ont été conçues pour ces types de réseaux [3-5].

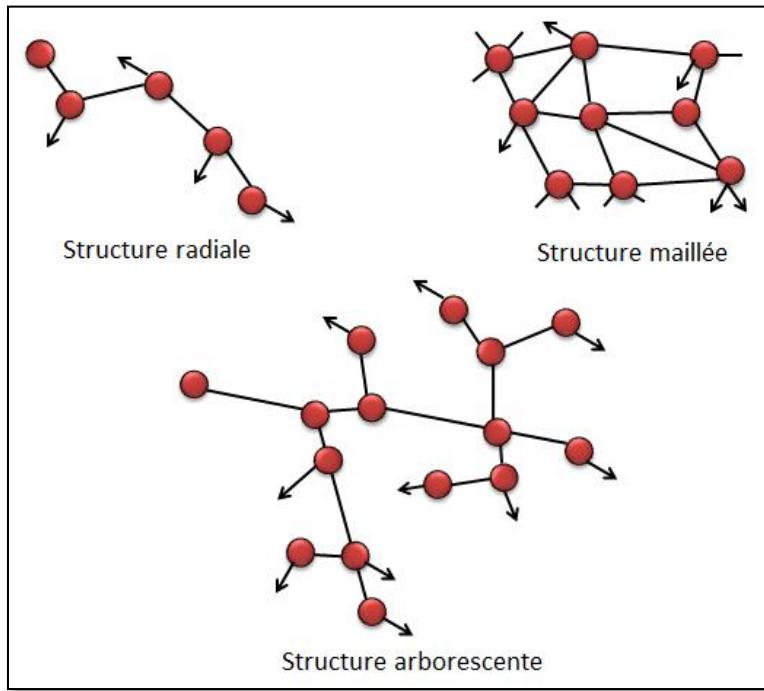


Figure 1.1 : Topologie des réseaux électriques.

Cependant, quelques centres urbains, où la densité de population est assez élevée, utilisent des réseaux débalancés et fortement maillés pour répondre à la demande croissante de fiabilité du système de distribution. Par exemple, au centre-ville de New York, un réseau complexe à basse tension est utilisé [6]. L'inconvénient est que les méthodes implementées dans les logiciels commerciaux ne supportent pas toujours les réseaux maillés débalancés, sujet qui se trouve en plein développement. Cependant, il y a une méthode d'estimation d'état de type matriciel (DSSE-MANA) qui pourrait permettre le calcul des variables d'état des réseaux fortement maillés, grâce au traitement simultané des équations [7].

### **1.3 Question de recherche**

La méthode DSSE-MANA peut-elle être appliquée aux modèles des réseaux de distribution fortement maillés, avec une précision de calcul supérieure à 95% ?

### **1.4 Objectif général**

Ce projet vise à implementer l'estimation d'état DSSE-MANA pour la solution d'un réseau de distribution maillé, tel que les réseaux urbains.

**Justification de l'originalité :** La méthode DSSE-MANA est une théorie très récente et elle n'a pas été testée avec des réseaux maillés.

### **1.5 Aperçu du rapport**

Le chapitre un présente une brève description de l'estimation d'état et sa problématique par rapport aux structures maillées.

Le chapitre deux présente la revue de la littérature pour les méthodes de la répartition de puissance, de l'estimation d'état et finalement, de son unification.

Le chapitre trois se concentre sur l'implémentation de la méthode DSSE-MANA dans un réseau maillé et évalue sa stabilité et sa précision.

Le chapitre quatre présente les équations du facteur de puissance dans la méthode DSSE-MANA afin d'évaluer son impact sur la précision de l'approche.

Le chapitre cinq présente les bénéfices des mesures virtuelles de faible précision dans la stabilité du système.

### **1.6 Contributions**

La principale contribution de cette recherche est d'avoir démontré que la méthode unifiée d'estimation d'état avec l'analyse-nodale-modifiée-augmentée (DSSE-MANA) peut être utilisée dans les réseaux de distribution maillés. Ceci permet de trouver les conditions de sous-tension/surtension ou de surcharge présentes au fur et à mesure que l'information des appareils de mesure est captée (en temps réel ou différé).

Les autres contributions sont :

- L'intégration des équations du facteur de puissance pour la méthode DSSE-MANA, ce qui permet d'améliorer l'estimation de la charge en utilisant de façon indépendante la précision du facteur de puissance et la précision de la puissance demandée. Cela permet aussi d'améliorer la stabilité de la méthode DSSE-MANA en présentant l'information des mesures de puissance sous forme de magnitude de courant et du facteur de puissance et avec l'aide de mesures virtuelles [8].
- L'introduction des mesures virtuelles de faible précision pour améliorer la stabilité du système lorsqu'il y a des problèmes de convergence à cause de la faible observabilité.
- L'évaluation de l'apport de chaque type de mesure à la précision et à la stabilité de la méthode.

Le résultat final est une méthode plus stable, qui est capable de supporter des réseaux maillés faiblement observables et qui utilise un modèle de charge plus précis.

## CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre présente le développement et les équations de la répartition de puissance et de l'estimation d'état en soulignant les ressemblances entre les méthodes. Ceci a pour objectif d'introduire plus facilement au lecteur la méthode unifiée DSSE-MANA.

### 2.1 Répartition de puissance

L'outil par excellence dans le domaine pour l'analyse des réseaux électriques en régime permanent est la répartition de puissance. Cette analyse permet de simuler le comportement du système sous différentes conditions. Par exemple, il est possible d'analyser l'impact qu'aurait l'installation d'un nouvel appareil dans un réseau, la modification des paramètres des appareils qui y sont branchés, ou encore l'impact d'un changement de la topologie, etc.

En général, les variables analysées dans les réseaux de distribution sont les tensions des nœuds, les puissances et/ou les courants qui circulent à travers les sections, les puissances et/ou les courants injectés dans les nœuds, la position des prises des régulateurs et des LTC. Ces valeurs sont appelées « variables d'état ». Elles permettent d'identifier les conditions de surtension, sous-tension et surcharge au niveau des appareils ainsi qu'aux points de service.

Les variables d'état sont calculées à partir des paramètres du réseau. Ces paramètres peuvent être les tensions aux sources, la topologie du réseau et les caractéristiques des éléments branchés en série ou en shunt comme par exemple : l'impédance des lignes, le rapport de transformation des transformateurs et la charge (puissance installée ou valeur estimée à partir du profil de charge).

En utilisant les équations de Kirchhoff de sommation des courants dans un nœud, un système d'équations du type  $Ax = b$  peut être formulé si les équations sont linéaires. Cependant, dans les réseaux électriques, il existe des éléments dont le modèle (ou le comportement) est non linéaire, ce qui empêche le calcul direct des variables d'état. Par exemple, dans le circuit de la Figure 2.1, si la loi du Kirchhoff est utilisée pour calculer la tension aux bornes de la charge, l'équation résultante est non linéaire si la charge est modélisée comme une puissance constante (2.1).

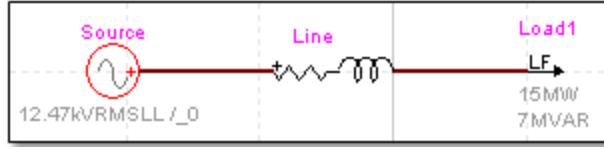


Figure 2.1 : Circuit unifilaire

$$\left\{ \begin{array}{l} P = P_o \left[ \frac{V_{bornes}}{V_o} \right]^{N_p} \\ Q = Q_o \left[ \frac{V_{bornes}}{V_o} \right]^{N_q} \end{array} \right. \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} P, Q : puissances de sortie active et réactive \\ P_o, Q_o : puissances nominales active et réactive \\ V_o : tension nominale \\ N_p, N_q : facteurs qui déterminent comment les puissances de sortie varient selon la tension du noeud \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Si  $N_p$  et  $N_q$  sont égaux à zéro, la charge consomme une puissance constante indépendante de la tension. Dans ce cas, il faut utiliser des méthodes itératives afin de trouver la valeur des variables d'état. Par exemple, pour calculer la tension aux bornes de la charge du réseau de la Figure 2.1 on pourrait utiliser une méthode série appelée Backward Forward Sweep (BFS).

### 2.1.1 Analyse: Backward Forward Sweep (BFS)

Cette méthode prend une valeur initiale aux bornes de la (des) charge(s) pour calculer le courant demandé (cette valeur est habituellement la tension nominale du réseau). Ensuite, les autres courants sont calculés vers la source (Forward Sweep). Avec ces courants et la tension à la source, la méthode calcule les tensions en aval jusqu'à la (les) charge(s) (Backward Sweep). Cet algorithme est répété jusqu'à ce que la variation des tensions entre une itération et la suivante se trouve dans une plage prédéfinie, appelée précision de la convergence. L'information des itérations postérieures est considérée négligeable [9].

Afin de faire les calculs du « Forward Sweep » et du « Backward Sweep » au long du réseau, chaque élément branché qui modifie la tension ou le courant doit être modélisé avec des matrices qui calculent la variation de la tension ou le courant entre deux nœuds à cause de ces éléments.

Cette méthode est fiable et très répandue dans les calculs approximatifs de variables d'état des réseaux radiaux ou faiblement maillés. Par contre, pour les réseaux maillés le parcours « Forward & Backward » n'est pas aussi évident. Dans ce cas, une solution matricielle est préférable. Par exemple l'analyse MANA.

### 2.1.2 Analyse : MANA

Les analyses de type nodal ont pour but de représenter les réseaux électriques comme un système matriciel afin de calculer simultanément les variables d'état. L'analyse nodale modifiée augmentée (MANA) [10, 11] est un ensemble d'équations matricielles du type  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ .  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  contient l'information des paramètres du réseau et  $\mathbf{x}$  représente les variables d'état (des inconnues). Si la matrice  $\mathbf{A}$  et le vecteur  $\mathbf{b}$  sont indépendantes de  $\mathbf{x}$  les variables d'état peuvent être calculées directement (méthode de point fixe) [12].

L'équation (2.2) montre les matrices qui composent le système  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n & \mathbf{V}_c^T & \mathbf{D}_c^T & \mathbf{S}_c^T \\ \mathbf{V}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n \\ \mathbf{I}_v \\ \mathbf{I}_d \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{V}_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La première équation du système représente le bilan des courants des nœuds par la loi de Kirchhoff (2.3) :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Admittances} & \text{Sources } V & \text{Transformateurs} & \text{Interrupteurs} & \text{Sources } I \\ \mathbf{Y}_n \mathbf{V}_n + \mathbf{V}_c^T \mathbf{I}_v + \mathbf{D}_c^T \mathbf{I}_d + \mathbf{S}_c^T \mathbf{I}_s & = & \mathbf{I}_n \end{array} \quad (2.3)$$

Le premier terme ( $\mathbf{Y}_n \mathbf{V}_n$ ) correspond aux courants dans les admittances constantes du réseau, le deuxième terme ( $\mathbf{V}_c^T \mathbf{I}_v$ ) aux courants des sources indépendantes de tension, ( $\mathbf{D}_c^T \mathbf{I}_d$ ) correspond aux courants secondaires des éléments modélisés comme des sources dépendantes de tension et de courant (transformateurs ou régulateurs), ( $\mathbf{S}_c^T \mathbf{I}_s$ ) représente les interrupteurs et finalement ( $\mathbf{I}_n$ ) les sources indépendantes de courant.

### 2.1.2.1 Admittances constantes du réseau:

En partant de la loi d'Ohm en termes de l'admittance (2.4) et en utilisant la loi de Kirchhoff de sommation des courants (2.5) pour tous les nœuds du réseau, on peut trouver une équation matricielle équivalente à la loi d'Ohm (2.6) :

$$YV = I \quad \text{où} \quad \begin{cases} Y = g + jb \\ Y : \text{admittance} \\ g : \text{conductance} \\ b : \text{susceptance} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=0}^n Y_{(jk)} (V_{(j)} - V_{(k)}) = \sum_{k=0}^n I_{(jk)} = 0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} I_{(jk)} : \text{courant du nœud } j \text{ vers le nœud } k \\ Y_{(jk)} : \text{admittance entre les nœuds } j \text{ et } k \\ V_{(j)} : \text{Tension au nœud } j \\ n : \text{nombre de nœuds du réseau} \\ k = 0 : \text{Nœud de référence (la terre)} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{Y} \mathbf{V}_n = \mathbf{I}_{\text{Tot}} = \mathbf{0} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{Y} : \text{matrice d'admittances} \\ \mathbf{V}_n : \text{vecteur de tensions des nœuds} \\ \mathbf{I}_{\text{Tot}} : \text{vecteur de bilan des courants par noeud} \end{cases} \quad (2.6)$$

La partie gauche de l'équation (2.6) est similaire au premier terme de l'équation (2.3). Autrement dit, la matrice  $\mathbf{Y}_n$  du système est analogue à la matrice  $\mathbf{Y}$ , mais le bilan de courant par nœud est zéro seulement si la contribution en courant de tous les appareils est considérée. Étant donné que la méthode MANA ne modélise pas tous les appareils comme des admittances série ou mises à la terre,  $\mathbf{Y}_n$  ne tient pas compte de tous les appareils du réseau, en conséquence  $\mathbf{Y}_n \mathbf{V}_n$  n'est pas forcément  $\mathbf{0}$ .

Afin de respecter la loi de Kirchhoff, les courants des autres appareils sont introduits dans le bilan à l'aide des autres termes de l'équation (2.3). Ces courants sont calculés par les trois dernières équations du système.

Dans le but de conserver la linéarité du système (2.2),  $\mathbf{Y}_n$  contient seulement les éléments du réseau modélisés comme des admittances constantes. Par exemple, les impédances des lignes ou

des transformateurs ou les charges du type impédance constante. Les valeurs de la diagonale principale sont les sommes (par nœud) des admittances mises à la terre (2.7). Les valeurs hors de la diagonale sont la valeur des admittances en série fois -1 (2.8). Les équations suivantes montrent comment placer les impédances reliées aux nœuds arbitraires  $j$  et  $k$ .

$$\mathbf{Y}_n(k,k) = \sum Y_{shunt(k)} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{Y}_n(j,k) = \mathbf{Y}_n(k,j) = -Y_{série(jk)} \quad (2.8)$$

Pour un réseau de  $\eta$  nœuds, la dimension de  $\mathbf{Y}_n$  est  $\eta \times \eta$  et la dimension de  $\mathbf{V}_n$  est  $\eta \times 1$

### 2.1.2.2 Les sources de tension indépendantes

Étant donné qu'il y a des éléments dans les réseaux dont le modèle est complexe à écrire en termes des admittances, l'analyse nodale modifiée (MNA) [13, 14] propose d'introduire l'équation (2.9) au système. Cette équation montre les tensions des sources ( $\mathbf{V}_s$ ) en termes des tensions des nœuds ( $\mathbf{V}_n$ ), en utilisant une matrice creuse adjointe ( $\mathbf{V}_c$ ).

$$\mathbf{V}_c \mathbf{V}_n = \mathbf{V}_s \quad \text{où} \begin{cases} \mathbf{V}_c : \text{Matrice adjointe} \\ \mathbf{V}_s : \text{Vecteur de la tension nominal des sources} \end{cases} \quad (2.9)$$

Dans un cas arbitraire, si la source monophasée idéale  $p$  a une tension nominale  $V_{source(p)}$ , donc :

$$\mathbf{V}_s(p,1) = V_{source(p)} \quad (2.10)$$

Si la source est branchée entre les nœuds  $j$  et  $k$ , la tension entre ces nœuds est égale à la tension de la source, en conséquence  $\mathbf{V}_n(k,1) - \mathbf{V}_n(j,1) = \mathbf{V}_s(p,1)$ . Cette équation peut être écrite sous la forme matricielle (2.9) à l'aide d'une matrice creuse ( $\mathbf{V}_c$ ) qui relie les sources aux nœuds où elles sont branchées. Par exemple pour la source  $p$ , les valeurs de  $\mathbf{V}_c$  doivent être :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_c(p,k) &= 1 \\ \mathbf{V}_c(p,j) &= -1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Afin d'ajouter la contribution de courant des sources de tension à la sommation des courants injectés par nœud, l'équation (2.3) utilise la transposée de la matrice adjointe  $\mathbf{V}_c$  multipliée par le vecteur de courant des sources de tension  $\mathbf{I}_v$ . La fonction de  $\mathbf{V}_c^T$  est de placer les courants au bilan du nœud respectif.

Pour un réseau de  $\eta$  nœuds et de  $s$  sources de tension, la dimension de  $\mathbf{V}_c$  est  $s \times \eta$  et la dimension de  $\mathbf{I}_v$  est  $s \times 1$

### 2.1.2.3 Les sources dépendantes de tension et de courant

L'analyse nodale modifiée augmentée (MANA) propose d'inclure des matrices additionnelles pour modaliser d'autre type d'éléments. Par exemple un transformateur idéale peut être modélisé comme un ensemble de sources dépendantes [12].

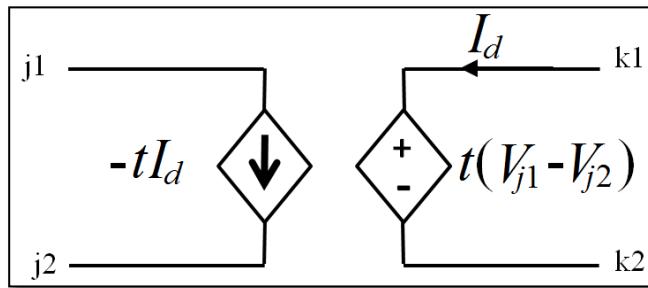


Figure 2.2 : Représentation d'un transformateur par sources dépendantes.

Soit  $t$  le rapport de transformation du transformateur de la Figure 2.2, l'équation en termes de tension des nœuds (variables d'état) est :

$$V_{k1} - V_{k2} - tV_{j1} + tV_{j2} = 0 \quad (2.12)$$

Sa forme matricielle est:

$$\mathbf{D}_c \mathbf{V}_n = \mathbf{0} \quad \text{où } \{\mathbf{D}_c : \text{Matrice des rapports de transformation} \quad (2.13)$$

La matrice creuse  $\mathbf{D}_c$  a une fonction similaire à celle de  $\mathbf{V}_c$ , elle relie les tension primaires et secondaires du transformateur. De plus, elle porte l'information du rapport de transformation. Par

exemple si un transformateur est branché aux nœuds  $j1, j2, k1$  et  $k2$  (Figure 2.2) les valeurs de  $\mathbf{D}_c$  (déduites de l'équation (2.12)) sont :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_c(p, k1) &= 1 \\ \mathbf{D}_c(p, k2) &= -1 \\ \mathbf{D}_c(p, j1) &= -t \\ \mathbf{D}_c(p, j2) &= t\end{aligned}\tag{2.14}$$

Afin d'ajouter le vecteur de courant secondaire des transformateurs  $\mathbf{I}_D$  au bilan des courants (équation (2.3)), il faut utiliser la matrice des rapports de transformation  $\mathbf{D}_c$  transposée.

Si le réseau a  $\eta$  nœuds et  $t$  transformateurs, la dimension de  $\mathbf{D}_c$  est  $s \times \eta$  et la dimension de  $\mathbf{I}_D$  est  $s \times 1$ .

#### 2.1.2.4 Interrupteurs

Les interrupteurs ont deux états possibles : fermés ou ouverts. Si par exemple un interrupteur  $p$ , qui se trouve entre les nœuds  $j$  et  $k$ , est fermé, la tension entre les nœuds est égale, en conséquence:

$$V_j - V_k = 0\tag{2.15}$$

L'équation (2.16) montre cette relation sous la forme matricielle en utilisant la matrice adjointe  $\mathbf{S}_c$  avec l'information de la position des interrupteurs fermés :

$$\mathbf{S}_c \mathbf{V}_n = \mathbf{0} \quad \text{où } \{\mathbf{S}_c : \text{Matrice adjointe à la tension}\}\tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_c(p, j) &= 1 \\ \mathbf{S}_c(p, k) &= -1\end{aligned}\tag{2.17}$$

De façon analogue à  $\mathbf{V}_c^T$ , la transposée de  $\mathbf{S}_c$  est utilisée dans l'équation (2.3) pour placer les courants au bilan du nœud respectif.

Si l'interrupteur  $p$  se trouve ouvert, les tensions des nœuds  $j$  et  $k$  sont différentes  $V_j \neq V_k$ , d'autre côté le courant qui traverse l'interrupteur est nulle  $I_{j \rightarrow k} = 0$ . L'équation (2.16) doit être donc

modifiée pour modéliser les interrupteurs ouverts et fermés en ajoutant le vecteur des courants des interrupteurs  $\mathbf{I}_S$  avec sa respective matrice adjointe :

$$\mathbf{S}_c \mathbf{V}_n + \mathbf{S}_z \mathbf{I}_S = \mathbf{0} \quad \text{où } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_z : \text{Matrice adjointe au courant} \\ \mathbf{S}_c : \text{Matrice adjointe au potentiel} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Par exemple, si l'interrupteur  $p$ , qui se trouve entre les nœuds  $j$  et  $k$ , est fermé:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_c(p, j) &= 0 \\ \mathbf{S}_c(p, k) &= 0 \\ \mathbf{S}_z(p, p) &= 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pour un réseau de  $\eta$  nœuds et  $s$  interrupteurs, la dimension de  $\mathbf{S}_c$  est  $s \times \eta$ , la dimension de  $\mathbf{S}_z$  est  $s \times s$  et la dimension de  $\mathbf{I}_S$  est  $s \times 1$ .

### 2.1.2.5 Sources de courant

Dans le cas des sources de courant, le vecteur  $\mathbf{I}_n$  a l'information à apporter au bilan des courants. Au contraire des autres vecteurs de courant,  $\mathbf{I}_n$  n'est pas multiplié par une matrice adjointe, donc les données doivent être placées directement au nœud respectif. La dimension de  $\mathbf{I}_n$  est donc  $\eta \times 1$

### 2.1.3 Méthode Newton-Raphson

Dans le bilan de courants (2.3), les contributions des charges à puissance constante (comme celle du circuit unifilaire de la Figure 2.1) et des sources à puissance constante peuvent être incluses avec l'aide du vecteur  $\mathbf{I}_{LG}$  et de la matrice adjacente  $\mathbf{A}_I$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_n \mathbf{V}_n + \mathbf{V}_c^T \mathbf{I}_V + \mathbf{D}_c^T \mathbf{I}_D + \mathbf{S}_c^T \mathbf{I}_S + \mathbf{A}_I \mathbf{I}_{LG} &= \mathbf{I}_n \\ \text{où } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_I : \text{Matrice adjacente} \\ \mathbf{I}_{LG} : \text{Vecteur des courants injectés aux charges ou des génératrices} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Comme les courants injectés aux charges et des génératrices ( $\mathbf{I}_{LG}$ ) sont des variables d'état, on vient d'augmenter la quantité des inconnues. Afin d'avoir un système avec une solution unique, il faut augmenter la quantité d'équations dans la même mesure. L'équation de puissance (2.21) doit être donc ajoutée.

Cette équation se trouve en fonction de deux variables d'état : la tension au nœud et le courant injecté au nœud. En conséquence, l'équation ne peut pas être ajoutée au système linéaire formulé à l'équation (2.2).

$$V_{LG(k)} * I_{LG(k)}^* = S_{LG(k)} \quad \text{où} \quad \begin{cases} V_{LG} : \text{Tension au nœud} \\ V_{LG} \in \mathbf{V}_n \\ I_{LG}^* : \text{conjugée de } I_{LG} \end{cases} \quad (2.21)$$

Dans ce cas, il faut reformuler le système en utilisant une méthode itérative, ce qui permet de calculer une approximation des variables d'état. Newton-Raphson est possiblement la méthode itérative la plus utilisée pour résoudre ce type de systèmes non-linéaires [15] grâce à sa vitesse de convergence et à sa précision.

Afin d'implémenter la méthode de Newton-Raphson au système d'équations matricielles (2.2), on écrit les équations du type  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  de la forme  $g(x) = 0$  ( $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ). Ensuite, on prend les deux premiers termes de la série de Taylor de la fonction  $g(x)$  au point  $a$  (2.22). La méthode de Newton prend  $a$  comme la valeur de  $x$  de l'itération actuelle «  $x^{(i)}$  » et  $x$  comme la valeur de l'itération suivante «  $x^{(i+1)}$  » ce qui donne l'équation de Newton (2.23).

$$g(x) \equiv g(a) + \frac{g'(a)*(x-a)}{1!} \equiv 0 \quad (2.22)$$

$$g(x^{(i+1)}) \equiv g(x^{(i)}) + g'(x^{(i)})*(x^{(i+1)} - x^{(i)}) \quad \text{où } \{(i)\} : \text{itération actuelle} \quad (2.23)$$

Sa forme matricielle est:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{(i+1)}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(i)}) + \mathbf{J}^{(i)} \Delta \mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{0} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}) : \text{matrice des équations du système} \\ \mathbf{J}^{(i)} : \text{matrice Jacobienne} \\ \mathbf{x}^{(i)} := (\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}) \end{cases} \quad (2.24)$$

Ensuite, le système est divisé en deux blocs d'équations. Le premier est le bloc des contraintes  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  (2.25) qui est composé par les équations : (2.9), (2.13), (2.20) et (2.18). Le deuxième est le bloc  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  (2.26) qui sera appelé ultérieurement le bloc des mesures et des pseudo-mesures (2.35).

Celui-ci est composé, pour l'instant, par l'équation des charges (2.21).  $\mathbf{S}_{LG}$  est la valeur nominale de la puissance de la charge ou la valeur mesurée si la charge peut être télémesurée (voir  $z$  dans le modèle de mesures et de pseudo-mesures (2.35)).

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_n \\ \mathbf{c}_v \\ \mathbf{c}_d \\ \mathbf{c}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n & \mathbf{V}_c^T & \mathbf{D}_c^T & \mathbf{S}_c^T & \mathbf{A}_I \\ \mathbf{V}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_z & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n \\ \mathbf{I}_v \\ \mathbf{I}_d \\ \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_{LG} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{V}_s \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}_{LG}(\mathbf{x}) = \text{diag}\{\mathbf{V}_{LG}\} \mathbf{I}_{LG}^* - \mathbf{S}_{LG} = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

Pour calculer les matrices Jacobiennes  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ , il faut dériver les équations des blocs  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  par rapport à chacune des variables d'état.  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  donne comme résultat la même matrice de coefficients des équations de  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \overbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V}_n & \Delta \mathbf{I}_v & \Delta \mathbf{I}_d & \Delta \mathbf{I}_s & \Delta \mathbf{I}_{LG} \end{bmatrix}}^{} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n & \mathbf{V}_c^T & \mathbf{D}_c^T & \mathbf{S}_c^T & \mathbf{A}_I \\ \mathbf{V}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_z & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Par contre, la dérivée partielle de l'équation (2.21) n'obéit pas aux conditions de Cauchy Riemann dans le domaine complexe. Ça veut dire que  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  ne peut pas être écrite en termes de nombres complexes.

**Conditions de Cauchy Riemann :** La puissance de la charge est représentée à l'équation (2.28) en termes des variables d'état:

$$\begin{aligned} S &= (V_R + jV_X)(I_R - jI_X) \\ P &= V_R I_R + V_X I_X \\ Q &= V_X I_R - V_R I_X \end{aligned} \quad (2.28)$$

Les conditions de Cauchy Riemann par rapport à la tension sont vérifiées :

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial P}{\partial V_R} &= \frac{\partial Q}{\partial V_X} = I_R \\ 2) \frac{\partial P}{\partial V_X} &= -\frac{\partial Q}{\partial V_R} = I_X \end{aligned} \quad (2.29)$$

Par contre, les conditions ne sont pas vérifiées par rapport au courant, à cause du conjugué de cette variable dans le calcul de puissance :

$$\begin{aligned} 1) \frac{\partial P}{\partial I_R} &= V_R \neq \frac{\partial Q}{\partial I_X} = -V_R \\ 2) \frac{\partial P}{\partial I_X} &= V_X \neq -\frac{\partial Q}{\partial I_R} = -V_X \end{aligned} \quad (2.30)$$

En conséquence, l'équation (2.26) doit être divisée en puissance active et en puissance réactive (2.31). La Jacobienne de  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  peut être calculée (2.32) et ajoutée au système (2.34).

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{m}_{LG}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} diag\{\mathbf{V}_{R,LG}\}\mathbf{I}_{R,LG} + diag\{\mathbf{V}_{X,LG}\}\mathbf{I}_{X,LG} \\ diag\{\mathbf{V}_{X,LG}\}\mathbf{I}_{R,LG} - diag\{\mathbf{V}_{R,LG}\}\mathbf{I}_{X,LG} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{LG}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{q}_{LG}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Delta V_{R,n} & \Delta I_{R,V} & \Delta I_{R,D} & \Delta I_{R,S} & \Delta I_{R,LG} & \Delta V_{X,n} & \Delta I_{X,V} & \Delta I_{X,D} & \Delta I_{X,S} & \Delta I_{X,LG} \\ \mathbf{C}_{R,LG} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{R,LG} & \mathbf{C}_{X,LG} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{X,LG} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{R,LG} = \begin{bmatrix} \dots & \Delta V_{R,LG} & \dots \\ \dots & \mathbf{I}_{R,LG} & \dots \\ \dots & -\mathbf{I}_{X,LG} & \dots \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{X,LG} = \begin{bmatrix} \dots & \Delta V_{X,LG} & \dots \\ \dots & \mathbf{I}_{X,LG} & \dots \\ \dots & \mathbf{I}_{R,LG} & \dots \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{R,LG} = \begin{bmatrix} \dots & \Delta I_{R,LG} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{R,LG} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{X,LG} & \dots \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{X,LG} = \begin{bmatrix} \dots & \Delta I_{X,LG} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{X,LG} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{R,LG} & \dots \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.32)$$

Il faut séparer aussi la partie réelle et la partie imaginaire de la Jacobienne des contraintes  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  et de  $\Delta\mathbf{x}$  comme suit :

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_R & -\mathbf{C}_X \\ \mathbf{C}_X & \mathbf{C}_R \end{bmatrix}, \Delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x}_R \\ \Delta\mathbf{x}_X \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Le système est montré dans l'équation (2.34).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}^{(i)} \\ \mathbf{C}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{M}^{(i)}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \end{bmatrix} = \mathbf{0} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \mathbf{c}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{m}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{(2.34)}$$

## 2.2 Estimation d'état

L'état d'un réseau électrique est décrit par ses variables d'état. Comme par exemple, la tension aux nœuds du réseau ou les courants qui circulent à travers les sections du réseau. Puisqu'il n'y a pas assez d'appareils installés pour mesurer toutes les variables d'état, il faut les calculer avec une méthode mathématique appelée « estimation d'état ». Cette méthode, basée sur l'information disponible, trouve le meilleur compromis pour les variables sur lesquelles l'information est redondante et elle estime les variables sur lesquelles il n'y a pas assez d'informations.

Plusieurs formulations d'estimation d'état, comme par exemple WLAV (Weighted Least Absolute Value), SHGM (Schweppe Huber Generalised Method) ont été comparés avec WLS (Weighted Least-Squares) en [16] et ce sont les résultats de l'estimation d'état des réseaux de distribution avec la méthode de WLS qui sont les meilleurs.

### 2.2.1 Model de mesures et de pseudo-mesures

Tout comme la répartition de puissance, l'estimation d'état calcule la valeur des variables d'état  $\mathbf{x}$ , en utilisant un modèle du réseau et une estimation de la charge. La différence est que l'estimation d'état utilise aussi des éléments de mesure afin de connaître l'état du réseau à un moment donné (au moment où les mesures ont été prises).

Le modèle de charge utilisé en (2.35) est composé par :

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{z} + \mathbf{r} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

- $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  : ensemble d'équations qui relient les variables d'état et les mesures (valeur attendue de la mesure).
- $\mathbf{z}$  : vecteur des valeurs mesurées simultanément pour les éléments de mesure du réseau plus les pseudo-mesures.

- $\mathbf{r}$  : différence entre les valeurs attendues et les valeurs mesurées (correspond au résidu ou à l'erreur).

### 2.2.2 Fonction objective

En considérant que les résidus de mesure sont indépendants les uns des autres et qu'ils ont une distribution normale, la fonction de densité de probabilité de chaque mesure doit être standardisée afin de comparer les probabilités [2]:

$$f(u_{(k)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u_{(k)}^2}{2}} \quad \text{où} \quad u_{(k)} = \frac{z_{(k)} - h_{(k)}(x)}{\sigma_{(k)}} = \frac{-m_{(k)}(x)}{\sigma_{(k)}} \quad (2.36)$$

La probabilité d'occurrence de l'ensemble de mesures  $\mathbf{z}$  est le produit de leur fonction de densité (à des fins pratiques, le logarithme de cette probabilité est utilisé) :

$$\mathbf{l}(\mathbf{u}) = \log \left( \prod_{j=1}^m f(u_{(j)}) \right) = \sum_{j=0}^m \log \left( f(u_{(j)}) \right) = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^m \left( \frac{-m_{(j)}(x)}{\sigma_{(j)}} \right)^2 - \text{const.} \quad (2.37)$$

Dans le but de trouver une combinaison des valeurs des variables d'état ( $\mathbf{x}$ ) qui se rapproche le plus possible des mesures, il faut maximiser  $\mathbf{l}$  ou ce qui est équivalent, il faut minimiser (2.38)

$$\sum_{j=0}^m \left( \frac{-m_{(j)}(x)}{\sigma_{(j)}} \right)^2 \quad (2.38)$$

La fonction de probabilité à minimiser est appelée fonction objective [2] qui peut être écrite de façon matricielle comme :

$$\mathbf{f}_{\text{obj}}(\mathbf{x}) = [-\mathbf{m}(\mathbf{x})]^T \mathbf{R}^{-1} [-\mathbf{m}(\mathbf{x})] \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{R} : \text{matrice de covariance de l'erreur} \\ \mathbf{R} = \text{diag} \{ \sigma_{(1)}^2, \sigma_{(2)}^2, \dots, \sigma_{(m)}^2 \} \end{cases} \quad (2.39)$$

### 2.2.3 Formulation de Hachtel

La fonction objective  $\mathbf{f}_{\text{obj}}(\mathbf{x})$  est sujette à des contraintes du type  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  e.g. (2.25) et des mesures ou des pseudo-mesures du type  $\mathbf{r} + \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  e.g. (2.31). En combinant tout dans une

seule fonction avec l'aide des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  et  $\mu$ , le système peut être écrit comme suit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{r} + \mathbf{m}(\mathbf{x})) \quad (2.40)$$

La condition optimale a lieu si les dérivés partielles de  $\mathcal{L}$  sont égaux à zéro

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{M}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.41)$$

La linéarisation de l'équation (2.41), est appelée la formulation de Hachtel [2]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}(\mathbf{x}^{(i)})^T & \mathbf{M}(\mathbf{x}^{(i)})^T \\ \mathbf{C}(\mathbf{x}^{(i)}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}^{(i)}) & \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}^{-1} \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^{(i)} \\ \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\lambda}^{(i)} \\ \boldsymbol{\alpha} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ -\mathbf{m}(\mathbf{x}^{(i)}) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

La matrice  $\boldsymbol{\alpha}$  a été introduite dans le but d'améliorer le conditionnement de la matrice Jacobienne.

## 2.2.4 Estimation d'état avec les matrices augmentées (DSSE-MANA)

La formulation de Hachtel peut être enrichie avec la modélisation matricielle des réseaux faite dans la méthode de MANA [7] afin d'obtenir la capacité de gérer les réseaux fortement maillés. Dans ce contexte, les variables d'état de la formulation de Hachtel sont :

$$\mathbf{x}^{(i)} = \left[ \mathbf{V}_{\mathbf{R},\mathbf{n}}^{(i)} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{R},\mathbf{V}}^{(i)} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{R},\mathbf{D}}^{(i)} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{R},\mathbf{S}}^{(i)} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{R},\mathbf{LG}}^{(i)} \quad \mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{n}}^{(i)} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{X},\mathbf{V}}^{(i)} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{X},\mathbf{D}}^{(i)} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{X},\mathbf{S}}^{(i)} \quad \mathbf{I}_{\mathbf{X},\mathbf{LG}}^{(i)} \right] \quad (2.43)$$

Les matrices  $\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(i)})$  et  $\mathbf{C}(\mathbf{x}^{(i)})$  gardent la forme proposée dans la section de la répartition de puissance (équations(2.25) et (2.27) respectivement) :

$$C(\mathbf{x}^{(i)}) = \begin{bmatrix} \Delta V_{R,n}^{(i)} & \Delta I_{R,V}^{(i)} & \Delta I_{R,D}^{(i)} & \Delta I_{R,S}^{(i)} & \Delta I_{R,LG}^{(i)} & \Delta V_{X,n}^{(i)} & \Delta I_{X,V}^{(i)} & \Delta I_{X,D}^{(i)} & \Delta I_{X,S}^{(i)} & \Delta I_{X,LG}^{(i)} \end{bmatrix}^T \quad (2.45)$$

La matrice  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  a les équations des charges (puisque elles sont considérées comme des pseudo-mesures), plus les équations des mesures :

<sup>3</sup> La partie réelle et la partie imaginaire ont été regroupées par blocs afin de faciliter la programmation de l'algorithme en MATLAB.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{m}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \mathbf{m}_{\text{LG}}^{(i)} \\ \mathbf{m}_{\text{PQ}}^{(i)} \\ \mathbf{m}_{\text{V}}^{(i)} \\ \mathbf{m}_{\text{I}}^{(i)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{m}(\mathbf{x}^{(i)})} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \mathbf{h}_{\text{LG}}^{(i)} \\ \mathbf{h}_{\text{PQ}}^{(i)} \\ \mathbf{h}_{\text{V}}^{(i)} \\ \mathbf{h}_{\text{I}}^{(i)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(i)})} - \begin{bmatrix} \mathbf{z}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \mathbf{z}_{\text{LG}} \\ \mathbf{z}_{\text{PQ}} \\ \mathbf{z}_{\text{V}} \\ \mathbf{z}_{\text{I}} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

où  $\begin{cases} \mathbf{m}_{\text{LG}} : \text{fonction des pseudo-mesures de la charge et des sources PQ} \\ \mathbf{m}_{\text{PQ}} : \text{fonction des mesures de flux de puissance} \\ \mathbf{m}_{\text{V}} : \text{fonction des mesures de magnitude de tension} \\ \mathbf{m}_{\text{I}} : \text{fonction des mesures de magnitude de courant} \end{cases}$

Pour construire la matrice Jacobienne  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  montrée dans l'équation (2.47), il faut dériver la matrice d'équations  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  par rapport à chacune des variables d'état. Si le vecteur des mesures  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$  est indépendant des variables d'état,  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  est égale à la dérivée de  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}^{(i)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{LG}}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \mathbf{M}_{\text{PQ}}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \mathbf{M}_{\text{V}}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \mathbf{M}_{\text{I}}(\mathbf{x}^{(i)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta V_{\text{R,n}}^{(i)} & \Delta I_{\text{R,V}}^{(i)} & \Delta I_{\text{R,D}}^{(i)} & \Delta I_{\text{R,S}}^{(i)} & \Delta I_{\text{R,LG}}^{(i)} & \Delta V_{\text{X,n}}^{(i)} & \Delta I_{\text{X,V}}^{(i)} & \Delta I_{\text{X,D}}^{(i)} & \Delta I_{\text{X,S}}^{(i)} & \Delta I_{\text{X,LG}}^{(i)} \\ \mathbf{C}_{\text{R,LG}}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\text{R,LG}}^{(i)} & \mathbf{C}_{\text{X,LG}}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\text{X,LG}}^{(i)} \\ \mathbf{C}_{\text{R,PQ}}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\text{R,PQ}}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\text{X,PQ}}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\text{X,PQ}}^{(i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\text{R,V}}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\text{X,V}}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\text{R,I}}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\text{X,I}}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Types de mesures et de pseudo-mesures :

- Pseudo-mesures du type PQ constant :** Les équations du vecteur (2.48) peuvent être utilisées pour modéliser, dans la formulation de Hachtel, la puissance injectée par les génératrices ou la puissance demandée par les charges. Les vecteurs  $\mathbf{V}_{\text{R},(\text{LG})}^{(i)}$  et  $\mathbf{V}_{\text{X},(\text{LG})}^{(i)}$  appartiennent respectivement à  $\mathbf{V}_{\text{R,n}}^{(i)}$  et  $\mathbf{V}_{\text{X,n}}^{(i)}$  et représentent les tensions des nœuds où les appareils sont branchés.  $i$  est le numéro de l'itération.

$$\mathbf{m}_{\text{LG}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\text{LG}}^{(i)} \\ \overbrace{\begin{bmatrix} \text{diag}\{\mathbf{V}_{\text{R},(\text{LG})}^{(i)}\} \mathbf{I}_{\text{R,LG}}^{(i)} + \text{diag}\{\mathbf{V}_{\text{X},(\text{LG})}^{(i)}\} \mathbf{I}_{\text{X,LG}}^{(i)} \\ \text{diag}\{\mathbf{V}_{\text{X},(\text{LG})}^{(i)}\} \mathbf{I}_{\text{R,LG}}^{(i)} - \text{diag}\{\mathbf{V}_{\text{R},(\text{LG})}^{(i)}\} \mathbf{I}_{\text{X,LG}}^{(i)} \end{bmatrix}}^{\mathbf{h}_{\text{LG}}^{(i)}} \\ \mathbf{z}_{\text{LG}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{(j)} \\ \mathbf{q}_{(j)} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Les termes de la matrice Jacobienne  $\mathbf{M}_{LG}(\mathbf{x}^{(i)})$  sont calculés à l'aide de l'équation (2.49) qui est l'équation (2.32) à l'itération  $i$  :

$$\mathbf{M}_{LG}(\mathbf{x}^{(i)}): \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}_{R,LG}^{(i)} = \begin{bmatrix} \dots & \overbrace{\Delta \mathbf{V}_{R,(LG)}^{(i)}} & \dots \\ \dots & \mathbf{I}_{R,LG}^{(i)} & \dots \\ \dots & -\mathbf{I}_{X,LG}^{(i)} & \dots \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{X,LG}^{(i)} = \begin{bmatrix} \dots & \overbrace{\Delta \mathbf{V}_{X,(LG)}^{(i)}} & \dots \\ \dots & \mathbf{I}_{X,LG}^{(i)} & \dots \\ \dots & \mathbf{I}_{R,LG}^{(i)} & \dots \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_{R,LG}^{(i)} = \begin{bmatrix} \dots & \overbrace{\Delta \mathbf{I}_{R,LG}} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{R,(LG)}^{(i)} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{X,(LG)}^{(i)} & \dots \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{X,LG}^{(i)} = \begin{bmatrix} \dots & \overbrace{\Delta \mathbf{I}_{X,LG}} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{X,(LG)}^{(i)} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{R,(LG)}^{(i)} & \dots \end{bmatrix} \end{array} \right. , \quad (2.49)$$

où  $\{\Delta \mathbf{V}_{R,(LG)}^{(i)}, \Delta \mathbf{V}_{X,(LG)}^{(i)}\} \in \Delta \mathbf{V}_{R,n}^{(i)}, \Delta \mathbf{V}_{X,n}^{(i)} \in \Delta \mathbf{V}_{X,n}^{(i)}$

- Mesures de puissance :**  $\mathbf{h}_{PQ}^{(i)}$  est le vecteur des puissances actives et réactives qui traversent les sections où sont branchés les éléments de mesure de puissance.  $\mathbf{z}_{PQ}$  est le vecteur des mesures. Les vecteurs  $\mathbf{I}_{R,(PQ)}^{(i)}$  et  $\mathbf{I}_{X,(PQ)}^{(i)}$  appartiennent respectivement à  $\mathbf{I}_{R,S}^{(i)}$  et  $\mathbf{I}_{X,S}^{(i)}$  et représentent les courants des sections où les appareils sont installés. Les vecteurs  $\mathbf{V}_{R,(PQfrom)}^{(i)}$  et  $\mathbf{V}_{X,(PQfrom)}^{(i)}$  appartiennent respectivement à  $\mathbf{V}_{R,n}^{(i)}$  et  $\mathbf{V}_{X,n}^{(i)}$  et représentent les tensions des nœuds où les courants sortent vers les appareils de mesure. (équation (2.50))

$$\mathbf{m}_{PQ}(\mathbf{x}^{(i)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{PQ}^{(i)} \\ diag\{\mathbf{V}_{R,(PQfrom)}^{(i)}\}\mathbf{I}_{R,(PQ)}^{(i)} + diag\{\mathbf{V}_{X,(PQfrom)}^{(i)}\}\mathbf{I}_{X,(PQ)}^{(i)} \\ diag\{\mathbf{V}_{X,(PQfrom)}^{(i)}\}\mathbf{I}_{R,(PQ)}^{(i)} - diag\{\mathbf{V}_{R,(PQfrom)}^{(i)}\}\mathbf{I}_{X,(PQ)}^{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{PQ} \\ \mathbf{q}_{PQ} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Le calcul des courants est déjà fait dans les équations de sommation des courants par nœud. On peut ajouter les éléments de mesure de puissance et de courant comme des interrupteurs fermés. Ce qui permettra d'introduire les courants dans la liste de variables d'état. En conséquence, le nombre de nœuds et d'éléments augmenteront. Cependant, si la matrice Jacobienne du système est gérée comme une matrice creuse, la performance de l'algorithme ne sera pas affectée à cause de l'augmentation des dimensions de la matrice. Il y a d'autres avantages comme par exemple le placement des appareils de mesure de courant ou de

puissance dans les sections sans impédances (par exemple pour mesurer le courant des barres dans un poste). De plus, la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{R},\mathbf{PQ}}^{(i)}$  deviendra diagonale.

$$\mathbf{M}_{\mathbf{PQ}}(\mathbf{x}^{(i)}) : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}_{\mathbf{R},\mathbf{PQ}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \dots & \Delta \mathbf{V}_{\mathbf{R},(\mathbf{PQ}from)}^{(i)} & \dots \\ \dots & \mathbf{I}_{\mathbf{R},(\mathbf{PQ})}^{(i)} & \dots \\ \dots & -\mathbf{I}_{\mathbf{X},(\mathbf{PQ})}^{(i)} & \dots \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{\mathbf{X},\mathbf{PQ}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \dots & \Delta \mathbf{V}_{\mathbf{X},(\mathbf{PQ}from)}^{(i)} & \dots \\ \dots & \mathbf{I}_{\mathbf{X},(\mathbf{PQ})}^{(i)} & \dots \\ \dots & \mathbf{I}_{\mathbf{R},(\mathbf{PQ})}^{(i)} & \dots \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_{\mathbf{R},\mathbf{PQ}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \dots & \Delta \mathbf{I}_{\mathbf{R},(\mathbf{PQ})}^{(i)} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{\mathbf{R},(\mathbf{PQ}from)}^{(i)} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{\mathbf{X},(\mathbf{PQ}from)}^{(i)} & \dots \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{\mathbf{X},\mathbf{PQ}}^{(i)} = \begin{bmatrix} \dots & \Delta \mathbf{I}_{\mathbf{X},(\mathbf{PQ})}^{(i)} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{\mathbf{X},(\mathbf{PQ}from)}^{(i)} & \dots \\ \dots & \mathbf{V}_{\mathbf{R},(\mathbf{PQ}from)}^{(i)} & \dots \end{bmatrix}, \\ \text{où } \begin{cases} \Delta \mathbf{V}_{\mathbf{R},(\mathbf{PQ}from)}^{(i)} \in \Delta \mathbf{V}_{\mathbf{R},n}^{(i)}, \Delta \mathbf{V}_{\mathbf{X},(\mathbf{PQ}from)}^{(i)} \in \Delta \mathbf{V}_{\mathbf{X},n}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{I}_{\mathbf{R},(\mathbf{PQ})}^{(i)} \in \Delta \mathbf{I}_{\mathbf{R},S}^{(i)}, \Delta \mathbf{I}_{\mathbf{X},(\mathbf{PQ})}^{(i)} \in \Delta \mathbf{I}_{\mathbf{X},S}^{(i)} \end{cases} \end{array} \right. , \quad (2.51)$$

- Mesure de la magnitude de tension :** la magnitude des tensions où il y a des éléments de mesure de tension est calculée dans l'équation (2.52). Les vecteurs  $\mathbf{V}_{\mathbf{R},|\mathbf{V}|}^{(i)}$  et  $\mathbf{V}_{\mathbf{X},|\mathbf{V}|}^{(i)}$  appartiennent respectivement à  $\mathbf{V}_{\mathbf{R},n}^{(i)}$  et  $\mathbf{V}_{\mathbf{X},n}^{(i)}$  et représentent les tensions des nœuds où les appareils de mesure sont branchés.

$$\mathbf{m}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x}^{(i)}) = \sqrt{\overbrace{\left(\mathbf{V}_{\mathbf{R},|\mathbf{V}|}^{(i)}\right)^2 + \left(\mathbf{V}_{\mathbf{X},|\mathbf{V}|}^{(i)}\right)^2}^{\mathbf{h}_{\mathbf{V}}^{(i)}}} \cdot \mathbf{z}_{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V}_{\text{MEAS}} \quad (2.52)^4$$

Les termes de la matrice Jacobienne  $\mathbf{M}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x}^{(i)})$  sont calculés à l'aide de l'équation (2.53)

---

<sup>4</sup> Les opérations d'exponentiation et de racine sont terme à terme

$$\mathbf{M}_v(\mathbf{x}^{(i)}) : \begin{cases} \mathbf{C}_{R,V}^{(i)} = \overbrace{\begin{bmatrix} \dots & \underbrace{\Delta V_{R,|V|}} & \dots \end{bmatrix}}^{\text{diag } \left\{ \sqrt{\left( V_{R,|V|}^{(i)} \right)^2 + \left( V_{X,|V|}^{(i)} \right)^2} \right\}^{-1} V_{R,|V|}^{(i)}} \\ \mathbf{C}_{X,V}^{(i)} = \overbrace{\begin{bmatrix} \dots & \underbrace{\Delta V_{X,|V|}} & \dots \end{bmatrix}}^{\text{diag } \left\{ \sqrt{\left( V_{R,|V|}^{(i)} \right)^2 + \left( V_{X,|V|}^{(i)} \right)^2} \right\}^{-1} V_{X,|V|}^{(i)}} \end{cases} \quad (2.53)^5$$

- Mesure de la magnitude de courant :** le vecteur des magnitudes du courant  $\mathbf{h}_I^{(i)}$  où il y a des éléments de mesure de courant est calculée dans l'équation (2.54).  $\mathbf{z}_I$  est le vecteur des mesures. Les vecteurs  $\mathbf{I}_{R,|I|}^{(i)}$  et  $\mathbf{I}_{X,|I|}^{(i)}$  appartiennent respectivement à  $\mathbf{I}_{R,S}^{(i)}$  et  $\mathbf{I}_{X,S}^{(i)}$  et représentent les courants des sections où les appareils de mesure sont branchés. Comme les mesures de l'amplitude de courant sont modélisées de la même façon que les interrupteurs fermés, alors les valeurs de  $\mathbf{I}_{R,|I|}^{(i)}$  et  $\mathbf{I}_{X,|I|}^{(i)}$  sont déjà prises en compte comme des variables d'état.

$$\mathbf{m}_I(\mathbf{x}^{(i)}) = \overbrace{\sqrt{\left( \mathbf{I}_{R,|I|}^{(i)} \right)^2 + \left( \mathbf{I}_{X,|I|}^{(i)} \right)^2}}^{\mathbf{h}_I^{(i)}} \cdot \mathbf{z}_I - \mathbf{I}_{MEAS} \quad (2.54)$$

Les termes de la matrice Jacobienne sont calculés à l'aide de l'équation (2.55)

$$\mathbf{M}_I(\mathbf{x}^{(i)}) : \begin{cases} \mathbf{C}_{R,I}^{(i)} = \overbrace{\begin{bmatrix} \dots & \underbrace{\Delta I_{R,|I|}} & \dots \end{bmatrix}}^{\text{diag } \left\{ \sqrt{\left( I_{R,|I|}^{(i)} \right)^2 + \left( I_{X,|I|}^{(i)} \right)^2} \right\}^{-1} I_{R,|I|}^{(i)}} \\ \mathbf{C}_{X,I}^{(i)} = \overbrace{\begin{bmatrix} \dots & \underbrace{\Delta I_{X,|I|}} & \dots \end{bmatrix}}^{\text{diag } \left\{ \sqrt{\left( I_{R,|I|}^{(i)} \right)^2 + \left( I_{X,|I|}^{(i)} \right)^2} \right\}^{-1} I_{X,|I|}^{(i)}} \end{cases} \quad (2.55)$$

---

<sup>5</sup> Les opérations d'exponentiation et de racine sont terme par terme

### 2.3 Calcul des dérivées partielles du facteur de puissance

La demande PQ de la charge peut varier beaucoup au cours de la journée, donc les données utilisées dans l'estimation d'état ne sont pas assez précises (sauf les télémesures). En conséquence, l'estimation d'état de ces variables n'est pas fiable. D'autre côté, la variation du facteur de puissance de la charge est plus petite que la variation de la puissance demandée. Cette information, une fois extraite à partir des données PQ de la charge, peut être utilisée pour améliorer la précision de l'estimation de la charge.

Tout comme l'équation de puissance de la charge (2.21), l'équation du facteur de puissance doit être écrite en termes des variables d'état et dérivé avant de l'intégrer dans la matrice Jacobienne.

D'abord, le facteur de puissance PF de la charge ( $k$ ) est calculé à partir du triangle de puissance:

$$h_{PF,(k)} = \cos \phi = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad (2.56)$$

En utilisant l'équation (2.28), le facteur de puissance peut être écrit en termes des variables d'état comme suit :

$$h_{PF,(k)} = \frac{V_R I_R + V_X I_X}{\sqrt{(V_R^2 + V_X^2)(I_R^2 + I_X^2)}} \quad (2.57)$$

La matrice  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  de l'équation (2.46) est mise à jour et devient l'équation (2.58).

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}^{(i)}) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{LG}^{(i)} \\ \mathbf{m}_{PF}^{(i)} \\ \mathbf{m}_{PQ}^{(i)} \\ \mathbf{m}_V^{(i)} \\ \mathbf{m}_I^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{LG}^{(i)} \\ \mathbf{h}_{PF}^{(i)} \\ \mathbf{h}_{PQ}^{(i)} \\ \mathbf{h}_V^{(i)} \\ \mathbf{h}_I^{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{LG} \\ \mathbf{z}_{PF} \\ \mathbf{z}_{PQ} \\ \mathbf{z}_V \\ \mathbf{z}_I \end{bmatrix} \text{ où } \begin{cases} \mathbf{m}_{PF} : \text{fonctions des pseudo-mesures du facteur} \\ \text{de puissance de la charge} \\ \mathbf{z}_{PF} : \text{Calcul du facteur de puissance à partir} \\ \text{de la mesure de } PQ \end{cases} \quad (2.58)$$

En dérivant  $\mathbf{m}_{PF}$  par rapport aux variables d'état, on obtient les équations (2.59) pour mettre à jour la matrice Jacobienne  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  de l'équation (2.47)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(m_{PF,(k)}^{(i)})}{\partial V_{R,(k)}^{(i)}} &= \frac{I_R}{(I_R^2 + I_X^2)^{\frac{1}{2}} * (V_R^2 + V_X^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{V_R * (I_R V_R + I_X V_X)}{(I_R^2 + I_X^2)^{\frac{1}{2}} * (V_R^2 + V_X^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial(m_{PF,(k)}^{(i)})}{\partial V_{X,(k)}^{(i)}} &= \frac{I_X}{(I_R^2 + I_X^2)^{\frac{1}{2}} * (V_R^2 + V_X^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{V_X * (I_R V_R + I_X V_X)}{(I_R^2 + I_X^2)^{\frac{1}{2}} * (V_R^2 + V_X^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial(m_{PF,(k)}^{(i)})}{\partial I_{R,(k)}^{(i)}} &= \frac{V_R}{(I_R^2 + I_X^2)^{\frac{1}{2}} * (V_R^2 + V_X^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{I_R * (I_R V_R + I_X V_X)}{(I_R^2 + I_X^2)^{\frac{3}{2}} * (V_R^2 + V_X^2)^{\frac{1}{2}}} \\
\frac{\partial(m_{PF,(k)}^{(i)})}{\partial I_{X,(k)}^{(i)}} &= \frac{V_X}{(I_R^2 + I_X^2)^{\frac{1}{2}} * (V_R^2 + V_X^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{I_X * (I_R V_R + I_X V_X)}{(I_R^2 + I_X^2)^{\frac{3}{2}} * (V_R^2 + V_X^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.59}<sup>6</sup>$$

La matrice Jacobienne est aussi mise à jour dans l'équation (2.60)

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\mathbf{x}^{(i)}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{LG}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \mathbf{M}_{PF}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \mathbf{M}_{PQ}(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \mathbf{M}_v(\mathbf{x}^{(i)}) \\ \mathbf{M}_I(\mathbf{x}^{(i)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{V}_{R,n}^{(i)} & \Delta \mathbf{I}_{R,V}^{(i)} & \Delta \mathbf{I}_{R,D}^{(i)} & \Delta \mathbf{I}_{R,S}^{(i)} & \Delta \mathbf{I}_{R,LG}^{(i)} & \Delta \mathbf{V}_{X,n}^{(i)} & \Delta \mathbf{I}_{X,V}^{(i)} & \Delta \mathbf{I}_{X,D}^{(i)} & \Delta \mathbf{I}_{X,S}^{(i)} & \Delta \mathbf{I}_{X,LG}^{(i)} \\ \mathbf{C}_{R,LG}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{R,LG}^{(i)} & \mathbf{C}_{X,LG}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{X,LG}^{(i)} \\ \mathbf{C}_{R,PF}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{R,PF}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{X,PF}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{X,PF}^{(i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{R,PQ}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{R,PQ}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{X,PQ}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{X,PQ}^{(i)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{R,V}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{R,V}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{R,I}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{X,I}^{(i)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\
\text{où } \mathbf{C}_{R,PF}^{(i)} &= \left[ \begin{array}{c|cc} \cdots & \Delta \mathbf{V}_{R,(j)}^{(i)} & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial(\mathbf{m}_{PF}^{(i)})}{\partial V_R^{(i)}} & \cdots \end{array} \right], \mathbf{C}_{X,PF}^{(i)} = \left[ \begin{array}{c|cc} \cdots & \Delta \mathbf{V}_{X,(j)}^{(i)} & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial(\mathbf{m}_{PF}^{(i)})}{\partial V_X^{(i)}} & \cdots \end{array} \right], \\
\mathbf{D}_{R,PF}^{(i)} &= \left[ \begin{array}{c|cc} \cdots & \Delta \mathbf{I}_{R,LG}^{(i)} & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial(\mathbf{m}_{PF}^{(i)})}{\partial \mathbf{I}_R^{(i)}} & \cdots \end{array} \right], \mathbf{D}_{X,PF}^{(i)} = \left[ \begin{array}{c|cc} \cdots & \Delta \mathbf{I}_{X,LG}^{(i)} & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial(\mathbf{m}_{PF}^{(i)})}{\partial \mathbf{I}_X^{(i)}} & \cdots \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{2.60}$$

---

6 Les variables d'état  $I$  et  $V$  correspondent à la charge ( $k$ ), mais l'indice n'a pas été misé afin d'alléger les équations.

## CHAPITRE 3 IMPLÉMENTATION DE LA MÉTHODE (DSSE-MANA)

### 3.1 Introduction

Ce chapitre montre les résultats de l'implémentation de la méthode DSSE-MANA [7] et évalue les critères de stabilité et de précision pour deux réseaux maillés.

#### 3.1.1 Objectifs

Afin de parvenir à atteindre l'objectif général du chapitre 1, deux objectifs spécifiques ont été formulés dans ce chapitre :

**Objectif spécifique 1 :** Vérifier la stabilité et la vitesse de la méthode en fonction de la quantité d'itérations requises pour converger.

**Objectif spécifique 2 :** Mesurer l'erreur des résultats de l'estimation par rapport au résultat original et suivre l'évolution de la fonction objective au cours des itérations.

#### 3.1.2 Hypothèses scientifiques

Une hypothèse a été formulée pour chaque objectif spécifique.

**Hypothèse 1 :** La méthode d'estimation d'état avec MANA possède la propriété de calculer les variables d'état des réseaux fortement maillés tout comme la méthode de répartition de puissance MANA.

*Réfutabilité* : L'hypothèse sera réfutée si la convergence vers la solution prend plus de 100 itérations.

**Hypothèse 2 :** La précision de la valeur des variables d'état est plus grande que 95%.

*Réfutabilité* : L'hypothèse sera réfutée si l'erreur est plus grande que 5%.

## 3.2 Activités et méthodologie

### 3.2.1 Sélection des réseaux électriques

Pour les trois tests de validation de la méthode on utilise deux circuits composés respectivement de 2 et 3 sources, 0 et 4 boucles [2], de transformateurs à prise fixe, d'impédances de ligne et de charges du type PQ.

Les éléments de mesure de puissance et de courant sont représentés par le symbole . Les mesures de tension sont prises directement aux nœuds et ne sont pas représentées dans le diagramme unifilaire.

### 3.2.2 Développement de l'algorithme

Dans un environnement MATLAB® [17] , un algorithme qui simule la méthode d'estimation d'état a été développé en utilisant les techniques de matrice creuse.

### 3.2.3 Simulation et comparaison des résultats

Tout d'abord, l'étude de la répartition de puissance du réseau est exécutée avec le logiciel CYME®, version 5.04 [18] pour une charge arbitraire. Les résultats de tension, de courant et de puissance sont définis comme les mesures. Ces valeurs ainsi que les valeurs des charges sont considérées comme la solution du système. Ensuite, une perturbation contrôlée entre 0% et  $\pm 30\%$  est introduite sur les valeurs des charges (puissance active et puissance réactive) en maintenant le facteur de puissance constant. Par la suite, l'algorithme mis au point dans l'étape précédente estime l'état des réseaux en essayant de limiter la différence entre les variables d'état et les mesures. L'algorithme calcule aussi les valeurs des nouvelles charges et évalue l'écart entre ces valeurs et celles du cas original. Cet écart est appelé l'erreur. La précision des éléments de mesure et de pseudo-mesure est ajustée au maximum possible (sans mettre en péril la convergence du système) afin de trouver les résultats les plus précis possibles. Dans le but de vérifier la stabilité et la précision de la méthode, les critères de réfutabilité des hypothèses seront vérifiés à chaque test.

### 3.3 Test 1 : stabilité du système (mesures de courant et mesures de puissance)

Le premier test est un réseau avec deux sources et une boucle (Figure 3.1). Il y a 3 mesures de courant (tronçons 1077, 736 et 773) avec une précision de 99% et 2 mesures de tension aux bus 4 et 733 avec une précision de 99.9%

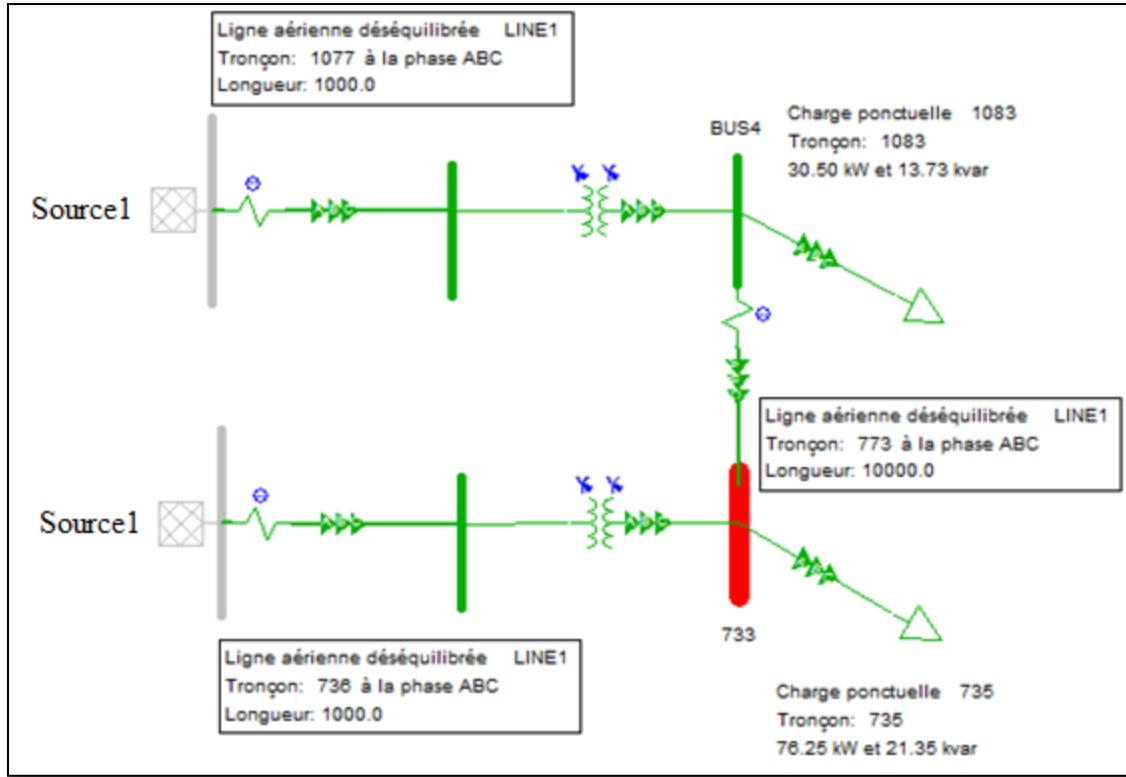


Figure 3.1: Réseau du test 1

La fonction objective comme elle a été définie dans l'équation (2.39) est la sommation des valeurs adimensionnelles qui représentent l'erreur sur les mesures. Le but est de minimiser la valeur de cette fonction. Comme la Figure 3.2 le montre, la fonction objective commence à 57350 unités et à l'itération suivante tombe à 114.3 unités. 10 itérations plus tard, la valeur est de 15.69 unités. Par ailleurs, le système calcule à chaque itération la correction qu'il faut apporter aux variables d'état (2.24), ces valeurs constituent le vecteur « Delta des variables d'état  $\Delta\mathbf{x}^{(i)}$  ». Comme la Figure 3.3 le montre, après la quatrième itération, les valeurs de  $\Delta\mathbf{x}^{(i)}$  sont presque nulles. Ces deux résultats confirment l'hypothèse 1.

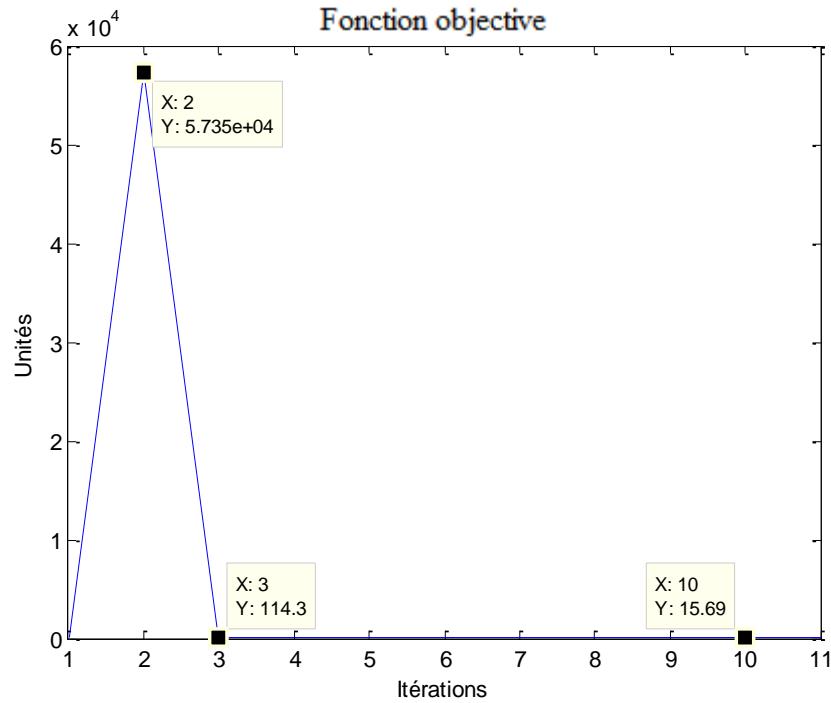


Figure 3.2 : Fonction objective du test 1

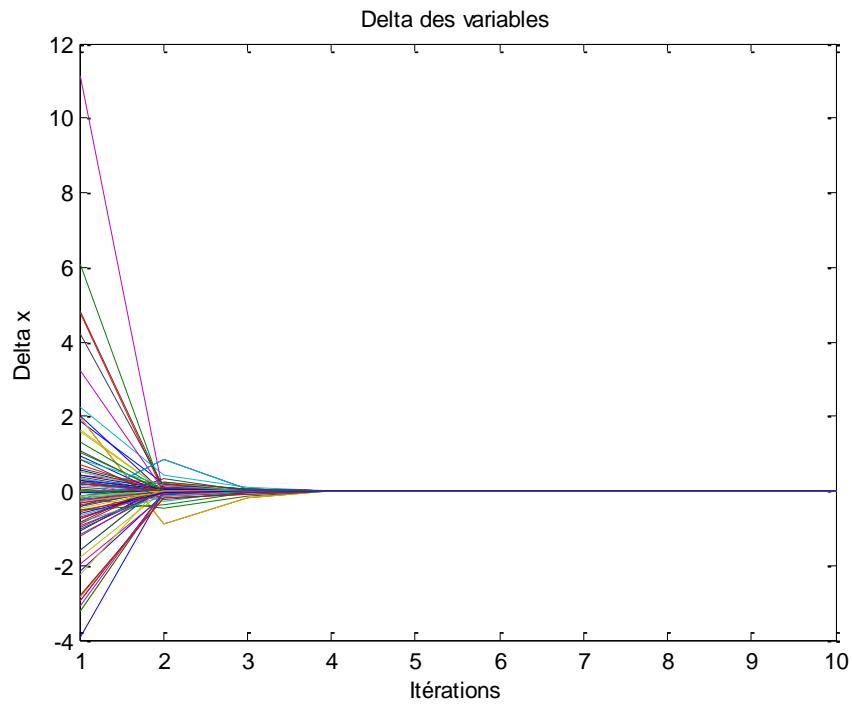


Figure 3.3 : Delta des variables d'état du test 1

Le Tableau 3.1 compare les valeurs des mesures de la première et de la dernière itération et évalue l'erreur de la dernière itération par rapport aux valeurs du cas original (solution). Dans ce test l'erreur est égale ou plus petite que 0.14% pour toutes les mesures.

Tableau 3.1 : Analyse des mesures

<b>Mesures de tension</b>	<b>Itération 0 V</b>	<b>Itération 100 V</b>	<b>Solution V</b>	<b>Erreur</b>
BUS4	2394.68	2391.802167	2391.43	0.02%
	2388.86	2394.274188	2391.43	0.12%
	2390.22	2394.563061	2391.43	0.13%
733	2376.32	2381.472876	2381.25	0.01%
	2378.64	2384.103217	2381.25	0.12%
	2387.69	2384.576305	2381.25	0.14%

<b>Mesures de courant</b>	<b>Itération 0 A</b>	<b>Itération 100 A</b>	<b>Solution A</b>	<b>Erreur</b>
1077	1.22456	1.634032772	1.63456	0.03%
	1.96782	1.634108482	1.63456	0.03%
	1.79713	1.635233211	1.63456	0.04%
736	4.20994	3.5252087	3.52336	0.05%
	4.04803	3.525451284	3.52336	0.06%
	2.49475	3.520341982	3.52336	0.09%
773	2.37632	0.418004605	0.41808	0.02%
	2.37864	0.417885416	0.41808	0.05%
	2.38769	0.418293387	0.41808	0.05%

La précision de l'estimation de la charge à partir des mesures est acceptable. Le Tableau 3.2 montre que la puissance active a une erreur maximale de 1.07% tandis que l'erreur de la puissance réactive est plus grande dans tous le cas. On remarque qu'une valeur dépasse le seuil de 5% de l'hypothèse 2. Cependant, l'hypothèse 2 a été formulée pour les mesures et non pour les charges. En effet, il pourrait y avoir plusieurs façons de repartir la charge pour respecter la tolérance des mesures.

Tableau 3.2 : Estimation des charges

<b>Charge</b>	<b>Variation</b>	<b>Valeur initiale</b>		<b>Itération 100</b>		<b>Solution</b>		<b>Erreur</b>	
		kW	kvar	kW	kvar	kW	kvar	Act.	Réact.
1083	-30%	7	3.15	10.107	4.1897	10	4.5	1.07%	6.90%
	20%	12	5.4	9.936	4.6531	10	4.5	0.64%	3.40%
	15%	11.5	5.175	10.06	4.3696	10	4.5	0.60%	2.90%
735	20%	30	8.4	25.074	6.821	25	7	0.29%	2.56%
	15%	28.75	8.05	24.967	7.1491	25	7	0.13%	2.13%
	-30%	17.5	4.9	25.064	6.7063	25	7	0.26%	4.20%

Lorsque les éléments de mesure de courant des tronçons 1077 et 736 sont remplacés par des éléments de mesure de puissance active et réactive, le système diverge. La fonction objective se comporte de façon oscillatoire (Figure 3.4) et ne tend pas vers zéro. Le résultat est contraire à celui attendu car les mesures de puissance ajoutent une information supplémentaire au système par rapport aux mesures d'amplitude de courant : l'angle.

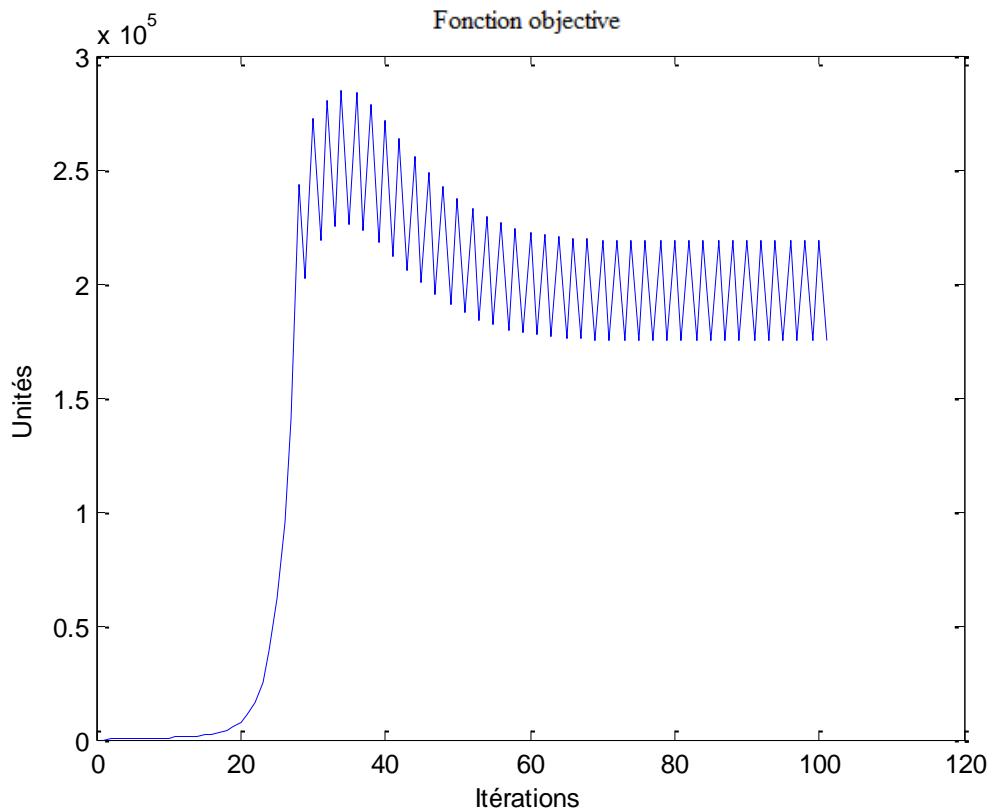


Figure 3.4 : Fonction objective en utilisant des mesures de puissance.

### 3.4 Test 2 : précision des résultats sans mesures de puissance

Le réseau à tester (Figure 3.5) comporte 6 boucles, 4 dans le réseau et 2 formées par les sources (prendre les sources comme un seul nœud). Pour calculer le nombre de boucles, il faut former un trajet ou un arbre qui passe par tous les nœuds une seule fois à l'aide des sections du réseau. Le nombre de sections non utilisées (qui ne font pas partie de l'arbre) représente le nombre de boucles [2].

Le réseau comporte aussi trois sources, 15 mesures de courant avec une précision de 95% et 9 mesures de tension avec une précision de 99% .

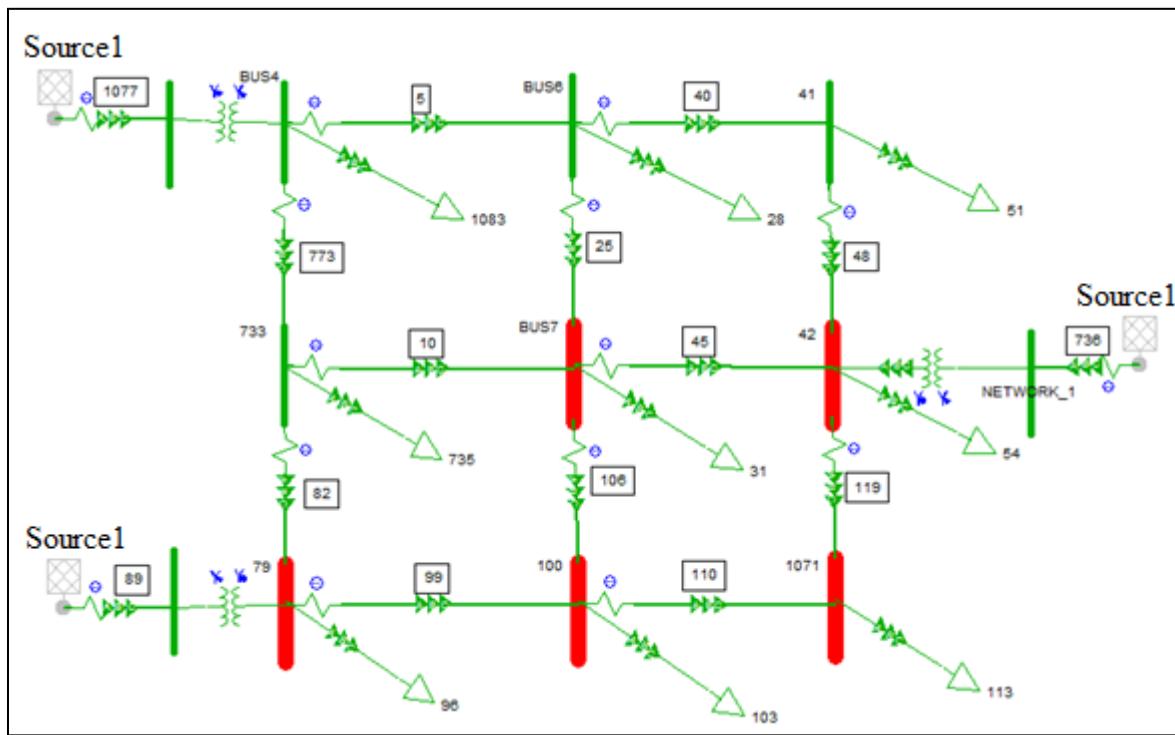


Figure 3.5 : Réseau du test 2

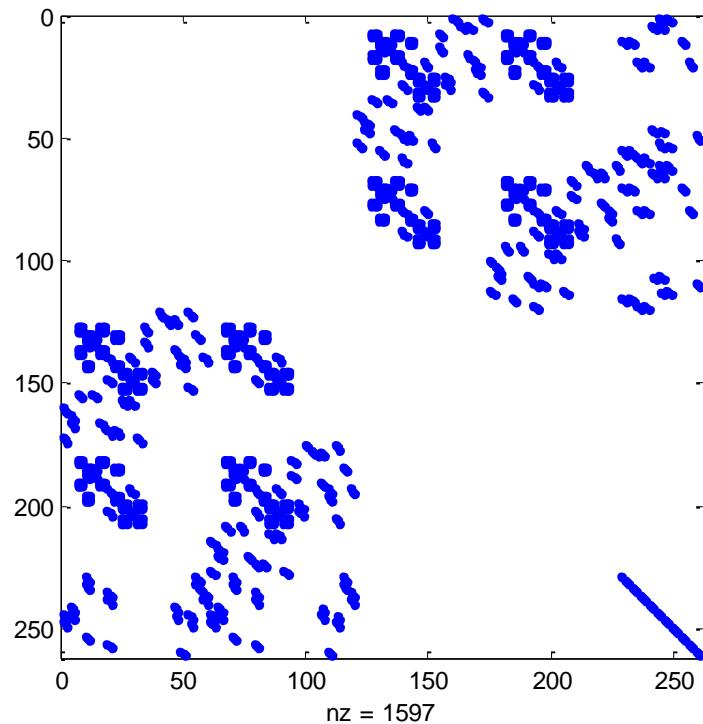


Figure 3.6 : Matrice Jacobienne du test 1

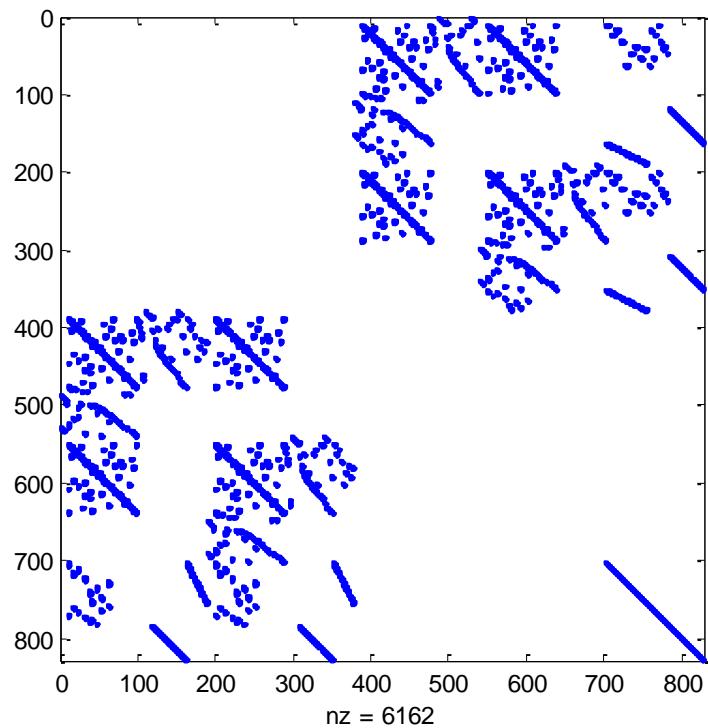


Figure 3.7 : Matrice Jacobienne du test 2

Avec la Figure 3.6 et la Figure 3.7 on peut comparer les dimensions des matrices Jacobiennes du test 1 et du test 2. La matrice du premier test est creuse de dimensions  $261 \times 261$  avec 1597 éléments non-nuls et la matrice du deuxième test est de dimensions  $828 \times 828$  avec 6162 entrées non-nuls.

La fonction objective (Figure 3.8) commence à 60890 unités et 2 itérations après, elle tombe à 467.7 unités. À la 10<sup>ème</sup> itération, sa valeur est 384.4 unités et les valeurs du vecteur  $\Delta\mathbf{x}^{(i)}$  sont presque nulles (Figure 3.9), ce qui veut dire que l'étude converge mais qu'il y a une perte de précision.

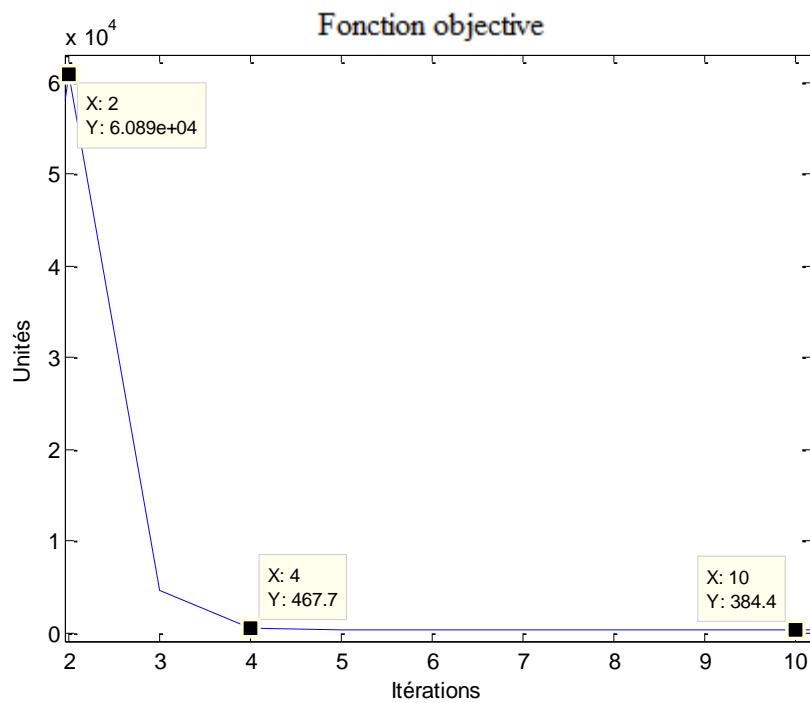


Figure 3.8 : Fonction objective du test 2

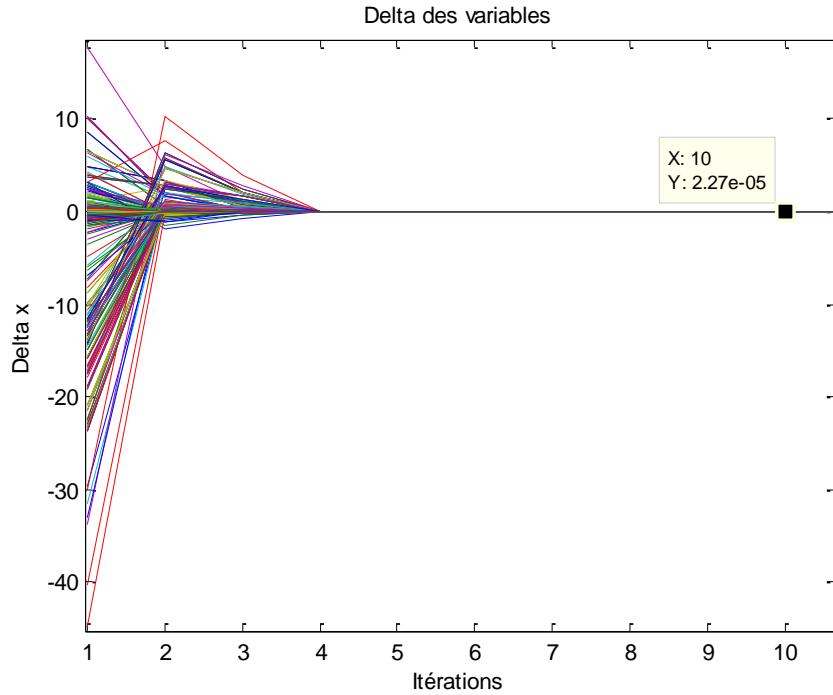


Figure 3.9 : Delta des variables d'état du test 2

En analysant les résultats, l'erreur maximale des mesures de tension est encore basse (0.14%). Par contre, l'erreur maximale des mesures de courant monte jusqu'à 5.14%. Cela réfute l'hypothèse 2, car le seuil de 5% est dépassé.

La précision de l'estimation de la charge à partir des mesures n'est pas non plus acceptable. La puissance active a une erreur maximale de 33.32%. L'erreur maximale sur la puissance réactive est encore plus grande, 106.5% comme le montre le Tableau 3.3

Tableau 3.3 : Pire cas de l'estimation des charges du test 2

<b>Charge</b>	<b>Valeur initiale</b>		<b>Itération 100</b>		<b>Solution</b>		<b>Erreur</b>	
	kW	kvar	kW	kvar	kW	kvar	Act.	Réact.
'54'	2.4	1.3	2.18	1.99	3.00	1.00	27.38%	99.39%
	9	1.4	6.13	1.48	7.00	2.00	12.37%	25.95%
	6.6	1	4.25	3.10	5.00	1.50	15.02%	106.50%

### 3.5 Test 3 : précision des résultats avec mesures de puissance

Le système du test 2 est très stable grâce à une grande quantité de mesures. Dans le but d'améliorer la précision de la réponse obtenue, les mesures de courant au départ de chaque circuit peuvent être remplacées par des mesures de puissance sans compromettre la stabilité du système. De cette façon, l'information sur le facteur de puissance vu par chacune des sources sera ajoutée au système.

Comme la Figure 3.10 l'indique, à la 10<sup>ème</sup> itération, la valeur de la fonction objective est de 0.7753 unités, ce qui veut dire que l'erreur relative (par rapport à la précision) est plus petite que celle du test 2 à la même itération. Cependant, la valeur maximale du vecteur « delta des variables d'état » à la Figure 3.11 est 0.02401 à la 10<sup>ème</sup> itération, ce qui est plus grand qu'au test 2. Donc, si le critère de convergence du système est basé uniquement sur ce vecteur, il faudrait faire plus d'itérations dans le test 3 que dans le test 2 pour converger, même si les résultats sont déjà meilleurs.

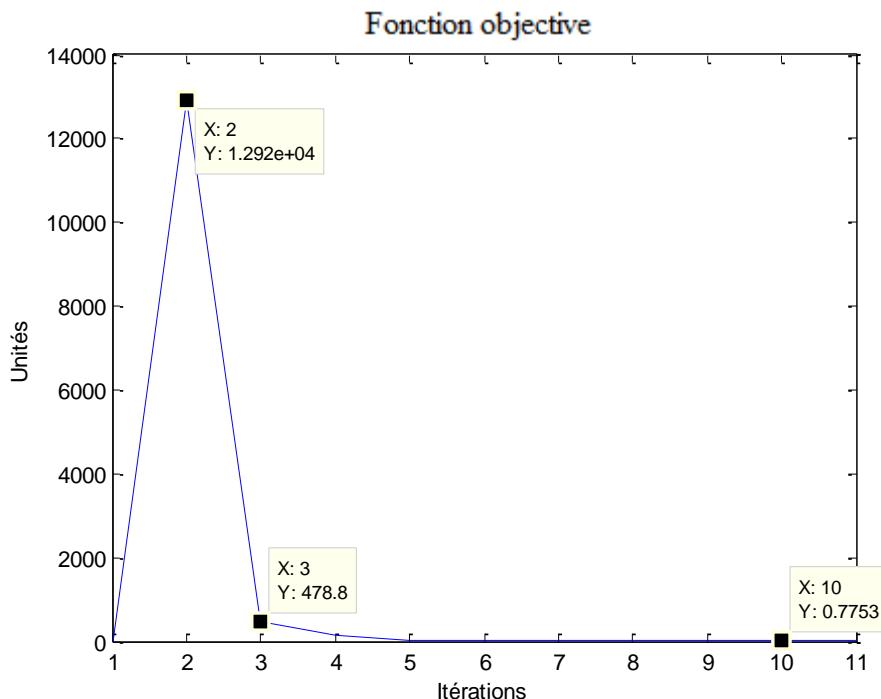


Figure 3.10 : Fonction objective du test 3

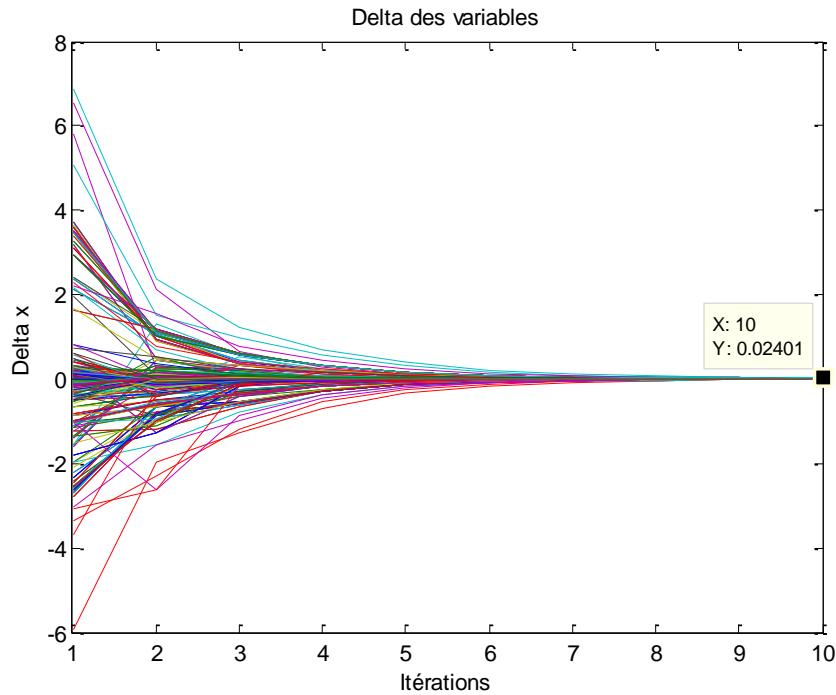


Figure 3.11 : Delta des variables d'état du test 3

Il y a aussi eu une amélioration dans la précision en ce qui concerne les mesures. L'erreur maximale des mesures de tension est encore plus basse que dans les tests précédents (0.14%). L'erreur maximale des mesures de courant est de 0.23%. Finalement, l'erreur maximale des mesures de puissance est 2.08%.

Étant donné que les deux hypothèses sont confirmées, on pourrait conclure que les mesures de courant contribuent à la stabilité du système, tandis que les mesures de puissance améliorent la précision.

L'estimation de la charge active présente un bilan acceptable avec une moyenne de 1.51% d'erreur, même si le seuil est dépassé pour quelques valeurs. D'autre part, presque toutes les valeurs de puissance réactive dépassent le seuil. L'erreur moyenne est de 23.56% et la maximale de 79.7%. Le Tableau 3.4 montre comme la charge 54 du test 2 a évolué.

Tableau 3.4 : Pire cas de l'estimation des charges du test 3

<b>Charge</b>	<b>Valeur initiale</b>		<b>Itération 100</b>		<b>Solution</b>		<b>Erreur</b>	
	<b>kW</b>	<b>kvar</b>	<b>kW</b>	<b>kvar</b>	<b>kW</b>	<b>kvar</b>	<b>Act.</b>	<b>Réact.</b>
'54'	2.4	1.3	2.80	1.37	3.00	1.00	6.66%	37.04%
	9	1.4	7.35	1.54	7.00	2.00	5.01%	22.99%
	6.6	1	5.16	1.13	5.00	1.50	3.18%	24.35%

### 3.6 Conclusion

Les tests précédents ont démontré que la méthode DSSE-MANA peut estimer la tension et le courant des réseaux maillés, 100% observables [2], avec un erreur acceptable (< 5%). D'autre part, l'erreur de l'estimation de la charge (sauf les charges télémesurées) n'est pas acceptable (>5%).

## CHAPITRE 4 FACTEUR DE PUISSANCE

### 4.1 Introduction

Ce chapitre évalue la précision et la stabilité du système lorsque les équations du facteur de puissance sont introduites dans la matrice Jacobienne de l'estimation d'état DSSE-MANA.

#### 4.1.1 Objectifs

Afin de parvenir à atteindre l'objectif général formulé dans le chapitre 1, un objectif spécifique additionnel a été formulé dans ce chapitre.

**Objectif spécifique 3:** implémenter les équations du facteur de puissance de la charge dans le système d'estimation d'état des matrices augmentées.

#### 4.1.2 Hypothèses scientifiques

**Hypothèse 3 :** l'introduction de l'information du facteur de puissance de la charge avec une précision plus grande que celle de la puissance vont améliorer la précision de l'estimation de la charge du réseau.

*Réfutabilité* : l'hypothèse sera réfutée si l'erreur des variables d'état en incluant la charge est plus grand que 5%

**Justification de l'originalité :** l'information du facteur de puissance de la charge n'a pas encore été utilisée indépendamment de la puissance dans les développements publiés de la méthode DSSE-MANA.

### 4.2 Activités et méthodologie

#### 4.2.1 Modification à l'algorithme

L'algorithme qui émule la méthode d'estimation d'état dans un environnement MATLAB doit être mise à jour avec la nouvelle information du facteur de puissance de la charge.

## 4.2.2 Simulation et comparaison des résultats

En utilisant la méthodologie du chapitre 3, l'algorithme est exécuté avec la nouvelle fonction objective afin de mesurer l'impact des équations du facteur de puissance dans la précision de l'estimation de la charge.

## 4.3 Test 4 : estimation de la charge avant et après l'intégration du facteur de puissance

Le circuit des tests 2 et 3 est utilisé (Figure 3.5). Les charges originales se trouvent dans le Tableau 4.1 et les charges avec une perturbation contrôlée de  $\pm 30\%$  et un facteur de puissance constant se trouvent dans le Tableau 4.2

Tableau 4.1 : Charges originales du test 4.

Charge	kW-A	kW-B	kW-C	kvar-A	kvar-B	kvar-C
<b>103</b>	15	12	15	4	3	4
<b>1083</b>	10	10	10	2	2	2
<b>113</b>	5	2	5	1.4	0.5	1.4
<b>28</b>	30	25	25	3	2	2
<b>31</b>	7	7	7	1	1	1
<b>51</b>	3	7	5	1	2	1.5
<b>54</b>	3	7	5	1	2	1.5
<b>735</b>	9	12	10	2	3	2.5
<b>96</b>	3.2	7	4	1.8	1.2	3

Tableau 4.2 : Charges modifiées (perturbation contrôlée) du test 4.

Charge	kW-A	kW-B	kW-C	kvar-A	kvar-B	kvar-C
<b>103</b>	18	8.5	17	4.8	2.13	4.53
<b>1083</b>	7	12	11	1.4	2.4	2.2
<b>113</b>	6.2	1.8	6	1.74	0.45	1.68
<b>28</b>	40	28	20	4	2.24	1.6
<b>31</b>	8	6	7.2	1.14	0.86	1.03
<b>51</b>	1	10	3	0.33	2.86	0.9
<b>54</b>	1	7.3	7	0.33	2.09	2.1
<b>735</b>	10	8	12	2.22	2	3
<b>96</b>	2.5	6.5	5.2	1.41	1.11	3.9

La précision des mesures de puissance est 99.2%, des mesures de tension est 99.5%, des mesures de courant est 99% et de la puissance des charges est 1%.

Lorsque l'algorithme est exécuté sans l'information de puissance l'erreur la plus haute des mesures est 1.7%. Par contre l'erreur la plus haute d'estimation de la charge est 62.7% Tableau 4.3).

Tableau 4.3 : Erreur de l'estimation de la charge du test 4 sans facteur de puissance

Charge	kW-A	kW-B	kW-C	kvar-A	kvar-B	kvar-C
<b>103</b>	0.6%	0.4%	0.6%	8.2%	12.7%	3.8%
<b>1083</b>	0.2%	0.1%	0.1%	9.2%	3.7%	11.4%
<b>113</b>	1.0%	0.5%	1.3%	3.7%	8.6%	16.3%
<b>28</b>	0.5%	0.1%	0.3%	32.1%	2.8%	16.1%
<b>31</b>	0.1%	0.3%	0.9%	13.4%	12.8%	2.5%
<b>51</b>	3.4%	0.9%	2.0%	60.9%	22.1%	35.7%
<b>54</b>	3.4%	0.9%	4.0%	62.7%	15.7%	44.4%
<b>735</b>	0.3%	0.4%	0.2%	5.7%	5.3%	3.9%
<b>96</b>	0.4%	0.6%	0.4%	13.5%	26.7%	4.2%

En la deuxième partie du test 4, les valeurs initiales de la charge sont les mêmes du Tableau 4.2, les précisions restent égales et l'information du facteur de puissance de la charge est introduite avec une précision de 99.9%. Comme résultats, l'erreur la plus haute des mesures est 0.3% et l'erreur la plus haute d'estimation de la charge est 4.7% Tableau 4.4).

Tableau 4.4 : Erreur de l'estimation de la charge du test 4 avec facteur de puissance

Charge	kW-A	kW-B	kW-C	kvar-A	kvar-B	kvar-C
<b>103</b>	0.1%	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%
<b>1083</b>	0.1%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.1%
<b>113</b>	0.8%	0.1%	0.0%	0.8%	0.1%	0.0%
<b>28</b>	0.2%	0.0%	0.0%	1.4%	0.1%	0.8%
<b>31</b>	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.1%	0.0%
<b>51</b>	1.8%	0.0%	0.2%	1.8%	0.0%	0.2%
<b>54</b>	4.6%	0.0%	0.4%	4.7%	0.0%	0.4%
<b>735</b>	0.1%	0.0%	0.0%	0.3%	0.0%	0.0%
<b>96</b>	1.4%	0.1%	0.2%	1.4%	0.1%	0.2%

Cette information confirme les hypothèses 2 et 3. Cependant, il faut vérifier si la convergence du système a été affectée par le traitement de la nouvelle information. La Figure 4.1 montre que pour le même point de départ de  $3.499 \times 10^5$  unités, la fonction objective tombe jusqu'à 730.8 unités à la dixième itération sans utiliser l'information du facteur de puissance de la charge. Lorsque

l'information est utilisée, la fonction tombe jusqu'à 1909 unités (Figure 4.2). Par contre, la valeur de delta des variables d'état est plus petite si la nouvelle information est utilisée (Figure 4.3 et Figure 4.4). En général le système converge indépendamment de l'utilisation du facteur de puissance, donc l'hypothèse 1 est encore valide.

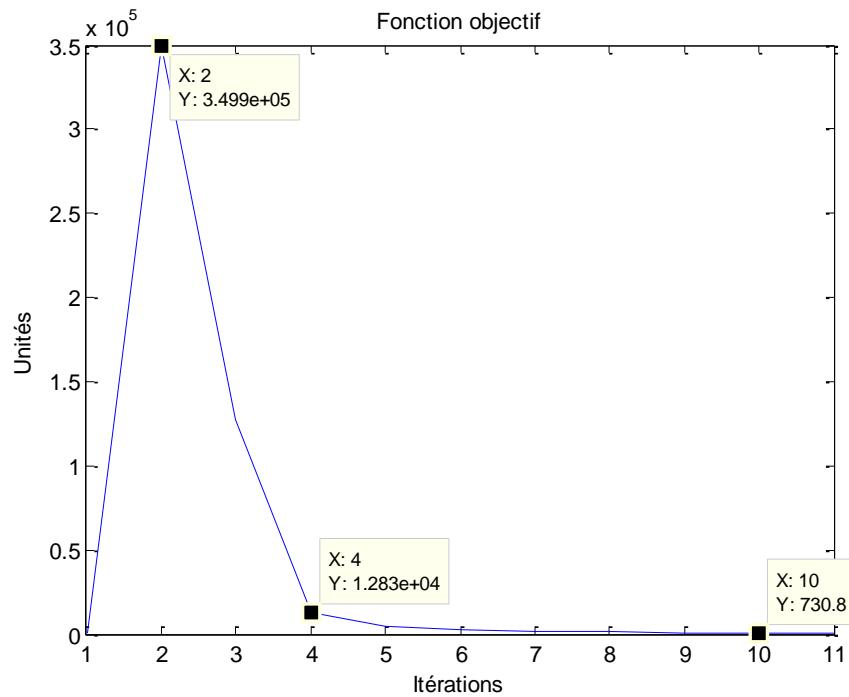


Figure 4.1 : Fonction objective avant l'utilisation du facteur de puissance (Test4)

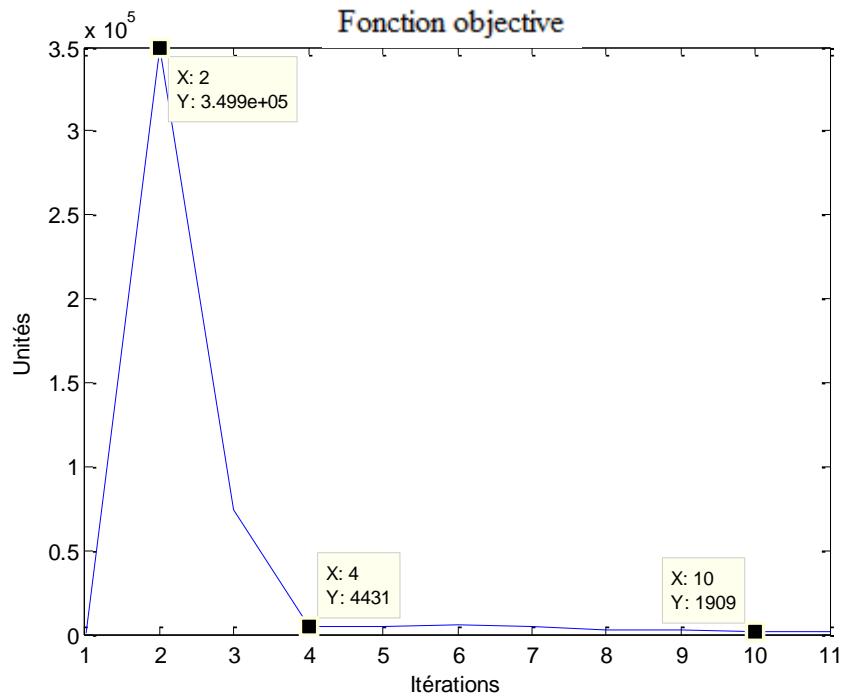


Figure 4.2 : Fonction objective après l'utilisation du facteur de puissance (Test4)

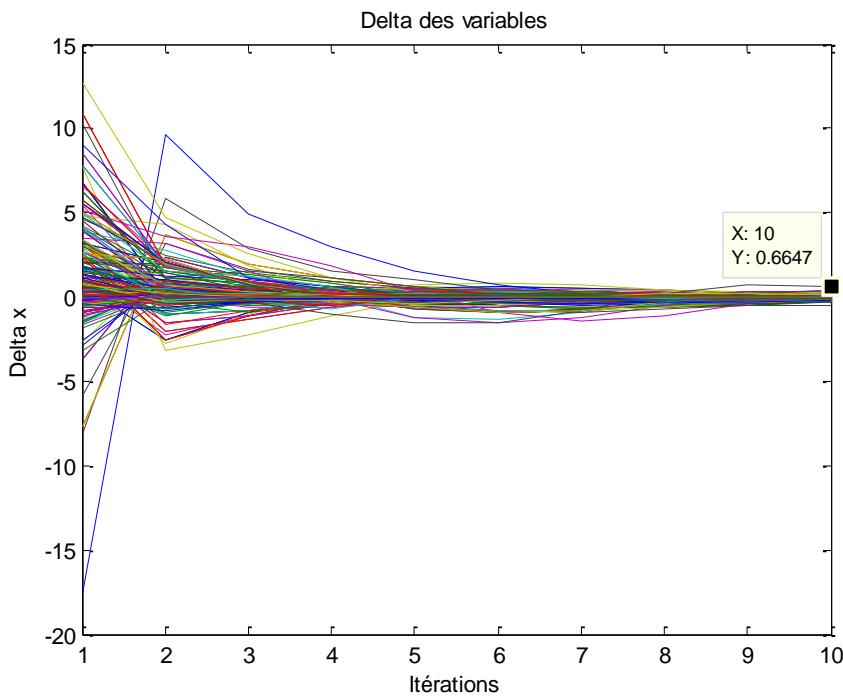


Figure 4.3 : Delta des variables d'état avant l'utilisation du facteur de puissance (Test4)

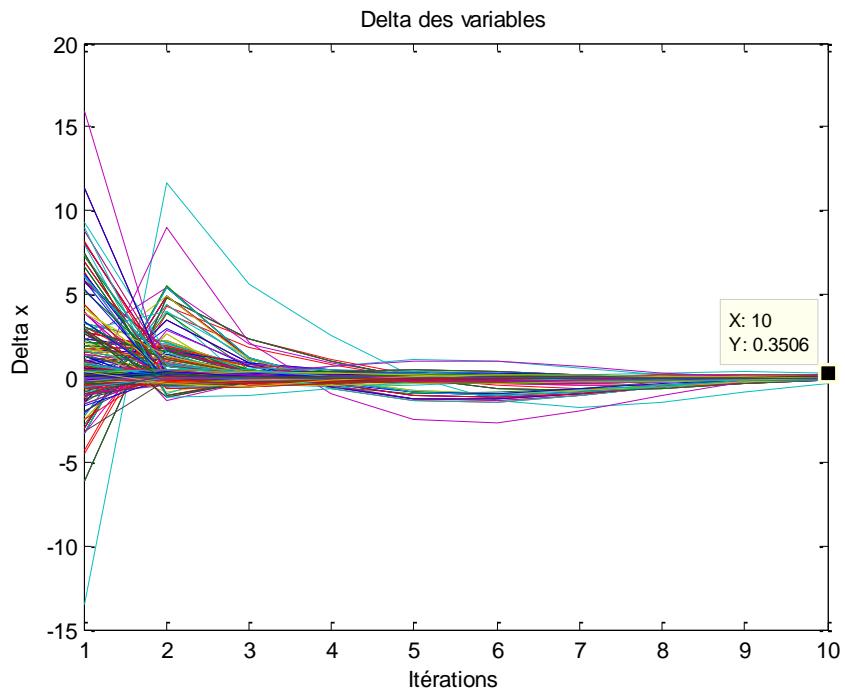


Figure 4.4 : Delta des variables d'état après l'utilisation du facteur de puissance (Test4)

## CHAPITRE 5 OBSERVABILITÉ ET STABILITÉ

### 5.1 Introduction

Les chapitres précédents montrent la stabilité et la précision de l'algorithme pour les réseaux 100% observables. Cependant, l'observabilité des réseaux de distribution réels est beaucoup plus faible du côté primaire est presque nulle du côté secondaire.

On veut évaluer la stabilité de l'algorithme pour des réseaux qui ne sont pas 100% observables. Ce chapitre présente les résultats des tests pour le réseau décrit dans le chapitre 3 (Figure 3.5) lorsque quelques éléments de mesure sont enlevés. Plusieurs exécutions sont effectuées pour trouver le niveau minimal d'observabilité. Autrement dit, le maximum des éléments de mesure qui peuvent être enlevés avant que le système ne converge plus.

On propose aussi de placer des mesures virtuelles, dans le but d'améliorer la stabilité de l'algorithme lorsque le réseau n'a pas assez d'éléments de mesure réels installés. Comme ces mesures ne sont pas présentes dans le vrai réseau, elles n'apportent pas de nouvelle information, c'est pour cela que leur précision doit être faible par rapport à la précision des vrais éléments de mesure. Les valeurs de tension et de courant des mesures virtuelles sont celles calculées par la répartition de puissance utilisée dans l'initialisation de l'estimation d'état.

Avec l'aide des mesures virtuelles de faible précision, l'estimation d'état a un meilleur point de départ pour estimer les variables d'état et la puissance de la charge de réseaux maillés faiblement observables. Ce chapitre compare aussi les plus faibles niveaux d'observabilité avant et après l'utilisation des mesures virtuelles.

#### 5.1.1 Objectif

Afin de parvenir à atteindre l'objectif général formulé dans le chapitre 1, un objectif spécifique additionnel a été formulé dans ce chapitre :

**Objectif spécifique 4:** estimer l'état des réseaux de distribution maillés faiblement observables.

#### 5.1.2 Hypothèses scientifiques

**Hypothèse 4 :** l'introduction de mesures virtuelles dans les nœuds où le réseau n'est pas observable augmente la stabilité du système.

*Réfutabilité* : l'hypothèse sera vérifiée si la méthode est capable de converger vers le bon résultat dans les cas où le faible niveau d'observabilité empêche la convergence de la méthode DSSE-MANA.

**Justification de l'originalité** : les mesures virtuelles de faible précision n'ont pas encore été utilisées dans la méthode DSSE-MANA pour améliorer la stabilité du système.

## 5.2 Activités et méthodologie

### 5.2.1 Évaluation de la stabilité du système

En utilisant la méthodologie du chapitre 3, ainsi que le circuit et les charges (originales et modifiées) du test 4 (Figure 3.5, Tableau 4.1 et Tableau 4.2), les éléments de mesure de tension et de courant seront enlevés un par un de façon aléatoire afin de trouver le cas où l'algorithme ne converge plus (niveau minimal d'observabilité).

### 5.2.2 Évaluation de la stabilité du système avec les mesures virtuelles

Les éléments de mesure de tension et de courant enlevées dans l'activité précédente seront remplacés par des mesures virtuelles. Si le nouvel algorithme est stable, d'autres éléments seront enlevés et remplacés afin de trouver la nouvelle limite minimale d'observabilité. Les valeurs des mesures virtuelles seront prises des résultats de la répartition de puissance du réseau avec les conditions initiales (charge modifiées Tableau 4.2) et sa précision sera fixée à 1%.

## 5.3 Test 5 : stabilité du système lorsque l'observabilité du réseau diminue

Après avoir fait plusieurs tests, la quantité maximale des mesures qu'on peut enlever du circuit avant que le système diverge ou converge vers les mauvais résultats des mesures est : 3 appareils de mesure de tension (nœuds 4, 79 et 100) et 3 appareils de mesure de courant (sections 773, 10 et 119), ce qui représente le 33% et le 20% des mesures initiales respectivement.

Les erreurs calculées des mesures de tension et de courant sont toutes plus petites que 5%. Cependant, le Tableau 5.1 montre que certaines valeurs de l'erreur des mesures de puissance ont dépassé le seuil de 5%.

Tableau 5.1 : Erreur de l'estimation de puissance fournis par les sources, test 5

Source	kW-A	kW-B	kW-C	kvar-A	kvar-B	kvar-C
<b>1077</b>	8.8%	0.8%	4.0%	6.9%	2.1%	2.9%
<b>736</b>	3.3%	0.1%	2.0%	3.4%	0.3%	1.7%
<b>89</b>	7.2%	0.1%	3.0%	8.4%	0.5%	0.9%

Par ailleurs, l'erreur des pseudo-mesures (les charges) a beaucoup augmenté, car les éléments de mesure enlevés se trouvent branchés aux mêmes nœuds que les charges. Dans le Tableau 5.2, on peut voir que les deux pseudo-mesures, les plus affectées (54 et 31) se trouvent branchées aux nœuds plus maillés (4 sections banchés, Figure 5.1), où le flow de courant est plus difficile à estimer. On peut aussi voir que malgré l'absence de mesure de tension au nœud 79, la charge y branché (103) n'a pas été beaucoup affectée par rapport aux autres.

On peut conclure, encore une fois, que les mesures de courant sont les plus importantes dans l'estimation d'état des réseaux maillés et que les mesures de puissance sont le point faible des mesures du réseau (test 1 et 5).

Tableau 5.2 : Erreur de l'estimation de la charge du test 5

Charge	kW-A	kW-B	kW-C	kvar-A	kvar-B	kvar-C	Erreur accumulé
<b>54</b>	83.30%	20.40%	71.60%	83.20%	20.50%	71.20%	350.20%
<b>31</b>	59.90%	36.90%	55.60%	78.40%	37.40%	56.00%	324.20%
<b>735</b>	51.20%	31.90%	56.50%	50.20%	32.50%	59.00%	281.30%
<b>113</b>	41.10%	43.30%	44.90%	41.00%	43.30%	44.90%	258.50%
<b>96</b>	92.50%	7.00%	7.20%	92.50%	6.90%	7.30%	213.40%
<b>51</b>	39.10%	8.30%	32.70%	39.00%	8.40%	32.70%	160.20%
<b>1083</b>	43.40%	10.10%	20.00%	40.70%	10.30%	19.30%	143.80%
<b>28</b>	5.90%	0.20%	1.00%	71.40%	18.70%	0.80%	98.00%
<b>103</b>	11.10%	7.10%	12.10%	14.00%	7.30%	12.70%	64.30%

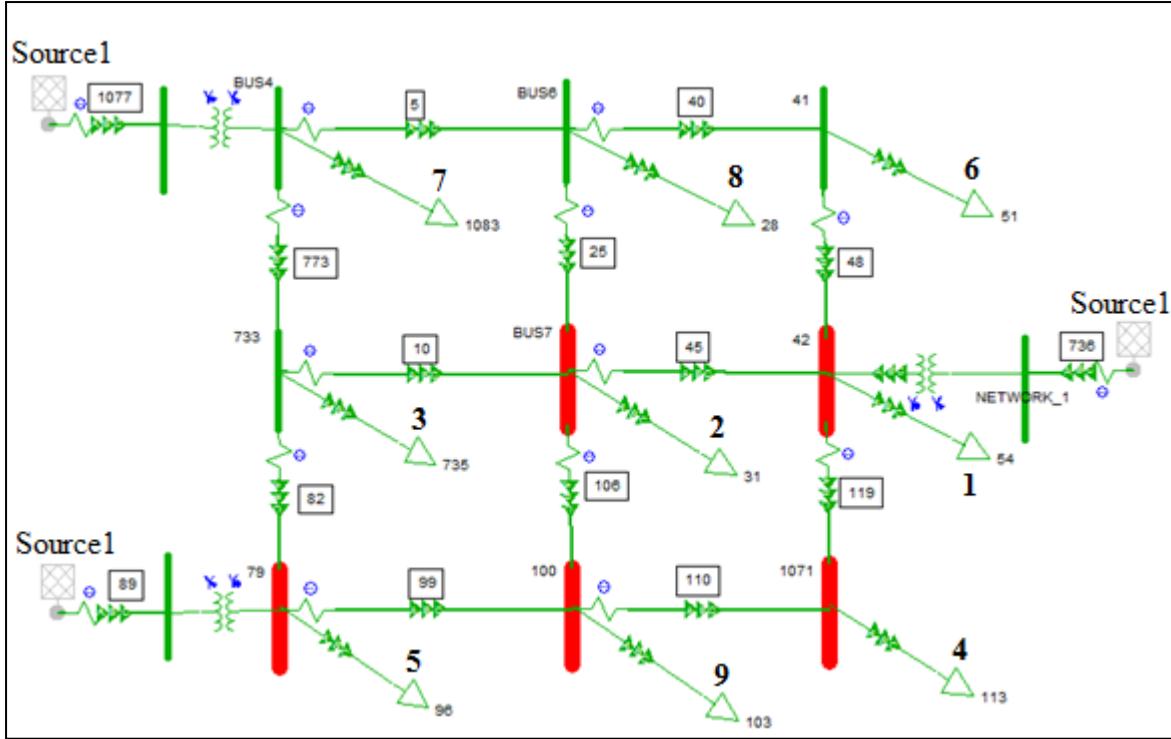


Figure 5.1 : Identification des charges par ordre d'erreur accumulé du Tableau 5.2

#### 5.4 Test 6 : stabilité du système avec mesures virtuelles

Dans ce test, le 50% des mesures de tension et de courant ont été remplacés par des mesures virtuelles.

Comme la partie du réseau proche des sources a des appareils de mesure de puissance et ce type de mesure n'a pas été enlevé, cette partie du réseau est toujours observable. En conséquence, pour savoir si le système converge vers les bons résultats, on va utiliser comme référence seulement les mesures de puissance.

Le Tableau 5.3 montre que l'estimation des mesures de puissance est beaucoup plus précise en utilisant les mesures virtuelles, même si le niveau d'observabilité est plus faible (comparer avec le test 5). Cette information est suffisante pour confirmer l'hypothèse 4. Comme information additionnelle, le Tableau 5.4 montre que l'estimation de la charge est meilleure que celle du test 5.

Tableau 5.3 : Erreur de l'estimation de puissance fournis par les sources, test 6

Source	kW-A	kW-B	kW-C	kvar-A	kvar-B	kvar-C
<b>1077</b>	0.2%	0.1%	0.4%	0.0%	0.0%	0.0%
<b>736</b>	1.1%	0.5%	0.0%	1.6%	1.0%	1.5%
<b>89</b>	0.1%	0.1%	0.2%	0.0%	0.0%	0.1%

Tableau 5.4 : Erreur de l'estimation de la charge du test 6

Charge	kW-A	kW-B	kW-C	kvar-A	kvar-B	kvar-C
<b>103</b>	0.2%	0.2%	1.2%	2.2%	0.4%	1.0%
<b>1083</b>	5.2%	7.7%	7.5%	11.5%	6.4%	16.1%
<b>113</b>	11.6%	10.7%	0.9%	13.9%	10.6%	7.0%
<b>28</b>	2.0%	1.5%	8.4%	20.0%	21.7%	10.1%
<b>31</b>	1.1%	18.6%	9.5%	2.6%	3.1%	9.1%
<b>51</b>	9.8%	1.7%	8.3%	22.8%	0.1%	9.5%
<b>54</b>	44.3%	8.6%	5.4%	45.7%	4.3%	17.3%
<b>735</b>	23.0%	26.7%	28.2%	13.4%	25.8%	19.7%
<b>96</b>	13.8%	9.4%	18.9%	14.3%	20.5%	19.1%

## 5.5 Test 7 stabilité du système avec mesures virtuelles

Après plusieurs tests, on trouve que tous les éléments de mesure de tension et de courant peuvent être remplacés dans le système (avec les trois mesures de puissance) toujours converge. Cependant, il y a une limitation. Au fur et à mesure que les éléments de mesure réels sont remplacés par son équivalent virtuel la quantité de réponses possibles augmente. En conséquence, il faut diminuer la précision des éléments de mesure qui restent en incluant les pseudo-mesures de puissance et du facteur de puissance de la charge, pour que le système puisse converger. Par exemple lorsqu'on remplace le 89% des mesures, la précision du facteur de puissance de la charge ne peut pas être plus grande que 85%. À ce niveau, la fonction objective du système commence à osciller (Figure 5.2). Si cette limite de précision est dépassée le système diverge.

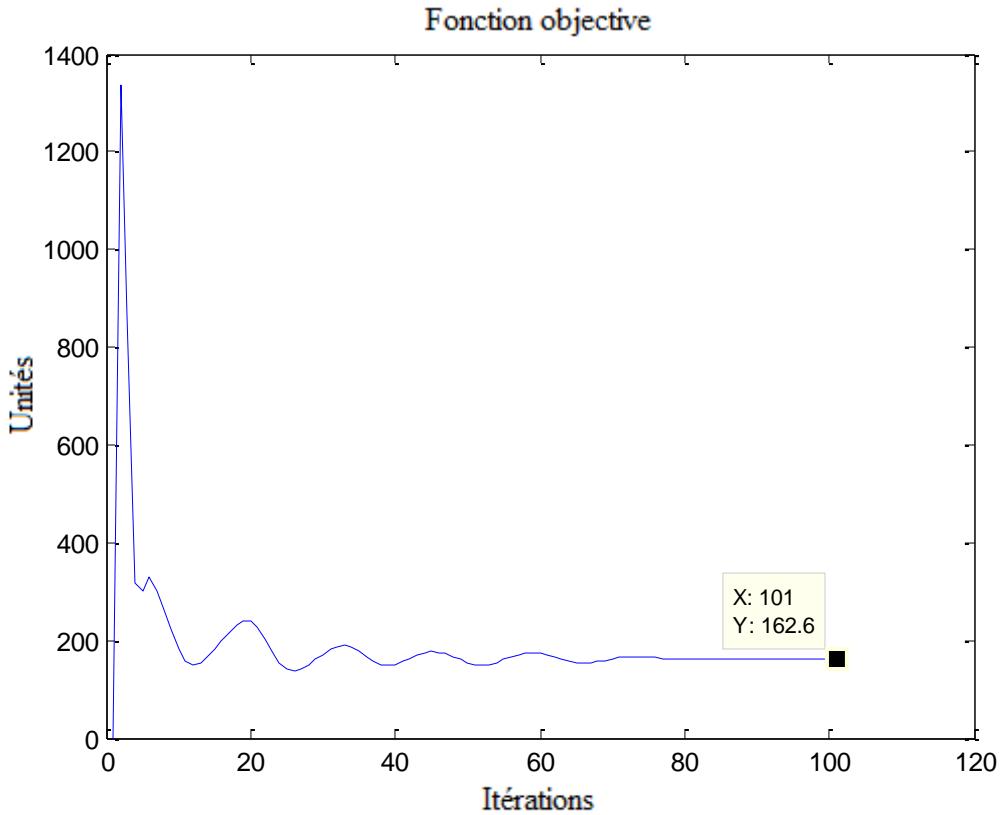


Figure 5.2 : Fonction objective lorsque le 89% des éléments de mesure sont remplacés par des éléments virtuels.

Le Tableau 5.5 montre que le niveau d'erreur de l'estimation de la puissance est acceptable lorsque tous les éléments de mesure de tension et de courant ont été remplacés par des mesures virtuelles. Seulement, une mesure dépasse le seuil de l'erreur du 5%.

Tableau 5.5 : Erreur de l'estimation de puissance du test 7.

Source	kW-A	kW-B	kW-C	kvar-A	kvar-B	kvar-C
<b>1077</b>	0.5%	0.5%	1.9%	3.3%	9.3%	3.8%
<b>736</b>	2.6%	1.6%	0.7%	0.3%	1.8%	0.6%
<b>89</b>	3.3%	4.5%	0.0%	0.4%	3.4%	3.0%

## CONCLUSION

Grâce à la méthodologie utilisée dans la recherche, à l'analyse de l'information utilisée comme référence et à l'interprétation des résultats des tests d'estimation d'état présentés dans ce mémoire, on peut conclure que :

En général :

- La méthode unifiée d'estimation d'état (DSSE-MANA) avec les modifications proposées peut estimer correctement l'état des réseaux de distribution maillés (où le réseau est observable).
- L'estimation d'état devient plus complexe au fur et à mesure que la quantité de boucles du réseau augmente.
- La tâche la plus complexe de l'estimation d'état est le calcul de la répartition du flux de puissance ou de courant dans les nœuds qui branchent les boucles.

Par rapport aux mesures :

- Les mesures de puissance (active et réactive) ont plus d'information que les mesures de magnitude de courant, puisqu'ils fournissent la magnitude et l'angle. Cependant, les équations des mesures de courant aident plus que les mesures de puissance à la convergence du système, car elles sont indépendantes de la tension, donc elles sont mathématiquement plus simples.
- Les mesures de tension branchées aux nœuds qui raccordent plusieurs sections doivent avoir une très haute précision afin que leur information soit tenue compte dans les calculs, parce qu'une petite plage de variation de la tension représente une grande plage dans la variation des valeurs de la répartition du flux de puissance ou de courant. Autrement dit, une mesure de tension, qui n'est pas assez précise, est ignorée par le système parce qu'elle peut être le résultat de plusieurs combinaisons de répartition de puissance.

- Les mesures de courant sont les plus utiles dans l'estimation d'état, car elles n'ont pas besoin d'une grande précision pour que l'estimation trouve des bons résultats. De plus, elles apportent beaucoup de stabilité au système.

Par rapport aux modifications proposées :

- La charge varie beaucoup pendant la journée, parfois elle peut doubler ou même tripler sa valeur en quelques heures. Par contre, la plage de variation du facteur de puissance est petite, grâce aux systèmes de contrôle de puissance des industries et à l'absence de grosses charges inductives dans les zones résidentielles. Les tests montrent que séparer le facteur de puissance et la magnitude de la charge pour les assigner une précision différente est une façon efficace d'améliorer la précision de l'estimation de la charge. En d'autres termes, si le facteur de puissance est isolé, on peut forcer le système à varier la puissance active et la puissance réactive de façon proportionnelle, comme dans la réalité. Autrement, la puissance active est totalement indépendante de la puissance réactive.
- Si le réseau n'est pas 100% observable, l'approche peut diverger ou converger vers des résultats non attendus. En ajoutant des mesures virtuelles de faible précision, le système converge vers les bons résultats.
- Comme le test 3 le démontre, la convergence du système ne devrait pas dépendre seulement du vecteur « delta des variables d'état ». La convergence devrait aussi être associée à d'autres éléments comme la fonction objective.

## RÉFÉRENCES

- [1] D. Zhu, "Electric distribution reliability analysis considering time-varying load, weather conditions and reconfiguration with distributed generation." vol. Doctor of Philosophy In Electrical Engineering, ed: Virginia Polytechnic Institute and State University, 2007, p. 15.
- [2] A. Abur and A. Gomez Exposito, *Power system state estimation theory and implementation*. New York: Marcel Dekker, 2004.
- [3] A. G. Exposito, A. D. L. V. Jaen, and J. L. Ramirez Izaga, "An alternative state estimation formulation for radial distribution networks," *2007 IEEE Lausanne POWERTECH, Proceedings*, pp. 396-400, 2007.
- [4] I. Dzafic, D. Ablakovic, and S. Henselmeyer, "Real-time three-phase state estimation for radial distribution networks," *2012 IEEE Power Energy Society General Meeting. New Energy Horizons - Opportunities and Challenges*, p. 6, 2012.
- [5] S. Mishra, "A simple algorithm for unbalanced radial distribution system load flow," *IEEE Region 10 Annual International Conference, Proceedings/TENCON*, pp. 1692-1697, 2008.
- [6] C. EDISON. (2006). *OVERVIEW OF CON EDISON SYSTEM AND LIC NETWORK*. Available: <http://www.coned.com/messages/LICReport/Overview.pdf>
- [7] F. Therrien, I. Kocar, and J. Jatskevich, "A unified distribution system state estimator using the concept of augmented matrices," *IEEE PES Transactions on Power Systems*, p. 11, 2013.
- [8] M. Houari and I. Kocar, "Treatment of transformers and voltage regulators in branch current state estimation for distribution network," p. 5, 2012.
- [9] W. Kersting, "Distribution feeder analysis," in *Distribution system modeling and analysis*, ed: CRC PRESS, 2001.
- [10] J. Mahseredjian and F. Alvarado, "Creating an Electromagnetic Transients Program in MATLAB: MatEMTP," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 12, pp. 380-8, 1997.
- [11] J. Mahseredjian, S. Dennetière, L. Dubé, B. Khodabakhchian, and L. Gérin-Lajoie, "On a new approach for the simulation of transients in power systems," *Electric Power Systems Research*, vol. 77, pp. 1514-1520, Sep 2007.
- [12] I. Kocar, J. Mahseredjian, U. Karaagac, and O. Saad, "Multiphase load flow solution of large scale distribution systems using the concept of augmented matrices," *IEEE Transactions on Power Delivery*, p. 8, 2013.
- [13] L. M. Wedepohl and L. Jackson, "Modified nodal analysis: An essential addition to electrical circuit theory and analysis," *Engineering Science and Education Journal*, vol. 11, pp. 84-92, 2002.

- [14] C. W. Ho, A. E. Ruehli, and P. A. Brennan, "The modified nodal approach to network analysis," *Proceedings of the 1974 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 505-9, 1974.
- [15] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical methods for engineers*, 6th ed. Boston, [Mass.]; Montreal: McGraw-Hill Higher Education, 2010.
- [16] R. Singh, B. C. Pal, and R. A. Jabr, "Choice of estimator for distribution system state estimation," *IET Generation, Transmission and Distribution*, vol. 3, pp. 666-678, Jul 2009.
- [17] (2012). *MathWorks*. Available: <http://www.mathworks.com/>
- [18] *CYME International T&D*. Available: <http://www.cyme.com/>