

**Titre:** Modélisation analytique de l'amortissement des poutres composites  
Title: sandwich contenant des couches viscoélastiques

**Auteur:** François Horel  
Author:

**Date:** 2013

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Horel, F. (2013). Modélisation analytique de l'amortissement des poutres composites sandwich contenant des couches viscoélastiques [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/1303/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/1303/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Annie Ross  
Advisors:

**Programme:** Génie mécanique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION ANALYTIQUE DE L'AMORTISSEMENT DES POUTRES  
COMPOSITES SANDWICH CONTENANT DES COUCHES  
VISCOÉLASTIQUES

FRANÇOIS HOREL

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

DÉCEMBRE 2013

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÉLISATION ANALYTIQUE DE L'AMORTISSEMENT DES POUTRES  
COMPOSITES SANDWICH CONTENANT DES COUCHES  
VISCOÉLASTIQUES

présenté par : HOREL François

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Mme PERIÉ-CURNIER Delphine, Doct., présidente

Mme ROSS Annie, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. LAKIS Aouni A., Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à tous ceux et toutes celles qui m'ont aidé et soutenu durant ces deux années passées à préparer ma maitrise.

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à Annie Ross pour avoir dirigé cette maitrise. Sa disponibilité, son soutien sans faille, ses qualités humaines et scientifiques ont permis l'aboutissement de mes travaux de recherche. Je la remercie également pour la confiance qu'elle m'a accordée pour d'autres projets au sein du laboratoire et pour le temps précieux qu'elle a passé à l'examen de ce travail. Ce fût un réel plaisir de travailler ensemble. Une salutation spéciale à Edith Roland Fotsing pour le temps qu'il m'a accordé, ses compétences en mises en forme des matériaux composites, et son humour. Les oreilles de lapins n'ont plus de secret pour moi. Je voudrais également remercier les techniciens Nour Aimene et Bénédict Besner pour leurs aides et conseils.

Je remercie également Mme Delphine Perié-Curnier pour avoir accepté de présider ce jury et M. Aouni Lakis pour avoir accepté d'en être membre.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude aux collègues de la « cave » avec qui la vie de laboratoire fut très épanouissante : Valérie Lalonde, Emmanuelle Sommier, Paul Nee, Pablo Mac, Masoud Hassani, Jérémy Pinto, Florent Pichard, Constant Charreton, Elsa Piollet. Un gros merci à mes stagiaires Christophe Leclerc et Vincent Marchal pour leur contribution à ce travail et leur bonne humeur. Mention spéciale à mes 2 acolytes Samy Geronymos et Jean-Michel Attendu sans qui ces 2 années n'auraient pas été les mêmes. Merci pour votre soutien, vos conseils, votre humour douteux et pour toutes nos conversations toujours très motivées.

Je remercie enfin l'École Nationale Supérieure des Arts & Métiers qui a permis cet échange chargé de voyages inoubliables, d'amitiés sincères et de soirées toujours aussi animées. Merci à tous mes amis et spécialement ma copine Chloé qui m'a suivi dans ce voyage ; son soutien et son affection m'ont été très précieux.

## RÉSUMÉ

Les structures composites, telles que les fuselages d'avions, faites de panneaux composites sandwichs sont sujets à des vibrations nuisibles sources de bruit et de défaillances mécaniques. Contrôler l'amortissement de ces structures est essentiel. Les méthodes de contrôle passif par insertion d'un matériau viscoélastique entre les plis des peaux peuvent résoudre le problème dès la phase de conception. Plusieurs études expérimentales ont prouvé l'efficacité des couches viscoélastiques, mais aucun modèle analytique ne détermine leur impact sur l'amortissement de la structure. Ce travail traite de la modélisation analytique d'une poutre sandwich viscoélastique avec des peaux anisotropes en composite stratifié et un cœur en nid d'abeille. Des couches viscoélastiques, totales ou partielles, sont insérées entre les plis des peaux; leur nombre, leurs positions et leurs dimensions peuvent varier.

Le nid d'abeille est modélisé par une théorie dérivée du modèle de Timoshenko incluant le cisaillement transverse. Les énergies cinétiques et potentielles des peaux sont quant à elles obtenues à partir de la théorie classique des stratifiés. L'énergie dissipée par le matériau viscoélastique est déduite de l'expression de son angle de cisaillement. Son comportement viscoélastique, ainsi que celui du nid d'abeille, est modélisé par un module de Coulomb complexe constant. Les équations de mouvement de la poutre sont obtenues par les équations de Lagrange. La méthode des modes assumés est employée pour discréteriser le déplacement transversal de la poutre, le déplacement longitudinal des peaux, et le cisaillement du nid d'abeille. Les fréquences naturelles et facteurs de perte sont alors obtenus par résolution du problème aux valeurs propres. Puisqu'il n'existe que peu de données fiables d'amortissement de telles structures, une première validation par la littérature est faite pour une poutre sandwich viscoélastique sans cœur en nid d'abeille.

Pour remédier à ce manque de données, un panel de poutres sandwichs viscoélastiques avec différentes caractéristiques est fabriqué. Un banc d'essai et une méthode de traitements des données ont été développés, puis validés par une étude de fiabilité et de répétabilité. Les données expérimentales sont obtenues pour des conditions aux limites encastrées-libres en excitant près de l'enca斯特rement à l'aide d'un marteau d'impact. La réponse vibratoire est mesurée par un vibromètre laser. Les fréquences naturelles sont obtenues expérimentalement par analyse modale,

et les facteurs de perte sont identifiés soit par la méthode classique de la demi-puissance, ou à l'aide d'une méthode d'ajustement de courbe développée par nos soins. Les fréquences naturelles et les facteurs de perte obtenus par simulations à partir du modèle sont comparés aux résultats expérimentaux. La très bonne concordance entre les résultats montre que le modèle est adéquat.

Le modèle ainsi validé est utilisé pour caractériser les effets de la position et des dimensions des inserts en régime harmonique. Les résultats de cette étude montrent l'efficacité du traitement partiel pour les applications où la masse joue un rôle critique. Les traitements viscoélastiques sont plus efficaces lorsqu'ils sont placés dans des zones fortement cisaillées telles que l'encastrement ou les nœuds modaux. Pour la configuration étudiée, des inserts viscoélastiques de 2cm centrés autour des nœuds du mode 3 et à l'encastrement permettent d'atteindre un gain en amortissement de 65% sur le facteur de perte, pour un ajout de masse de 0.66%. Cela correspond à 83% du gain en amortissement du traitement total pour un ajout de masse 6 fois moindre. La position transversale des inserts entre les plis des peaux n'influence pas le facteur de perte.

En plus du modèle, deux résultats pratiques immédiatement applicables ressortent de cette étude, soit :

- Il est possible d'augmenter significativement l'amortissement de structures sandwichs avec un ajout de masse minimal. Ce résultat est d'une importance capitale sur les décisions d'ingénierie, surtout dans les domaines de l'aéronautique et du transport où tout accroissement de masse est nuisible.
- L'efficacité du traitement viscoélastique interlamininaire partiel est maximisée s'il est placé dans les zones où le cisaillement est maximal. Cela fournit aux ingénieurs de structures une règle de conception en vue de contrôler les vibrations dès la phase de conception.

## ABSTRACT

Composite structures, such as aircraft cabins, made of sandwich composite panels are subject to vibration causing noise and mechanical failure. Controlling the damping of these structures is essential. For this purpose, passive control by insertion of viscoelastic material between face sheet layers can be provided at the design stage. Various experimental studies have proved the effectiveness of viscoelastic layers, but no analytical model can predict their impact on the damping of the structure. This paper deals with the analytical modeling of a viscoelastic sandwich beam with anisotropic composite laminated faces and a honeycomb core. Full or partial viscoelastic layers are inserted between the layers of the face sheets; their number, location and dimensions are varied.

A theory based on the Timoshenko model including the transverse shear is used to model the honeycomb behaviour. Kinetic and potential energies of the face sheet layers are obtained using the classical laminate theory. The energy dissipated by the viscoelastic material is derived from the expression of its shear angle. The viscoelastic behaviour, as well as that of the honeycomb, is modeled using a constant complex modulus. The governing equation of the beam is derived from the Lagrange's equation. Assumed-modes method is applied for discretizing the transverse displacement of the beam, the longitudinal displacements of the face sheet layers, and the shear deformation of the honeycomb. With this model, the natural frequencies and loss factors can be obtained by solving the eigenvalue problem. Because there are no such general solutions presented in the literature, a first validation is done for viscoelastic sandwich beams without honeycomb core (literature).

Then, to address this lack of data, several viscoelastic sandwich beams with different characteristics were constructed. A test bench and a method of data processing were developed and validated by a study of reliability and repeatability. Experimental data are obtained for clamped/free boundary conditions in exciting near the clamped area using an impact hammer. The vibrational response is measured with a laser vibrometer. Natural frequencies were obtained experimentally by modal analysis, and loss factors were identified either by the classical method of the half-power bandwidth or by using a homemade curve fitting method. Natural frequencies

and loss factors obtained by simulations from the model are compared with experimental results. The very good agreement between the results shows that the model is reliable.

Once validated, the model is used to predict the effects of location and dimensions of patches on free vibration behaviour. The results of this study demonstrate the effectiveness of partial processing for applications where weight is critical. The viscoelastic treatments are most effectives when placed in highly sheared areas such as clamped area or around modal nodes. For the studied configuration, 2cm viscoelastic inserts centered on nodes of the 3<sup>rd</sup> mode and at the clamped edge achieve a damping gain of 65% on the loss factor, to an addition of mass of 0.66%. This corresponds to 83% of the damping gain of the full treatment for an adding mass 6 times lower. The transverse position of the inserts between the face sheet layers doesn't influence the loss factor.

In addition to the model, two practical results immediately applicable emerge from this study:

- It's possible to significantly increase the damping of sandwich structures with a minimal addition of mass. This result is of paramount importance on engineering decisions, especially in the aerospace and transportation where any increase in mass is harmful.
- The partial interlaminar viscoelastic treatment efficiency is maximized if placed in areas where the shear is maximum. This provided structural engineers a design rule to control the vibrations from the design phase.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	III
RÉSUMÉ.....	IV
ABSTRACT.....	VI
TABLE DES MATIÈRES .....	VIII
LISTE DES TABLEAUX.....	XII
LISTE DES FIGURES.....	XIII
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	XVI
LISTE DES ANNEXES.....	XXI
INTRODUCTION.....	1
Chapitre 1 REVUE DE LA LITTERATURE.....	4
1.1 Généralités sur les matériaux composites .....	4
1.1.1 Matrice et renforts .....	5
1.1.2 Propriétés des matériaux composites .....	6
1.1.3 Architecture des matériaux composites.....	6
1.2 Mécanique des composites sandwichs .....	8
1.2.1 Modes de rupture.....	8
1.2.2 Résumé des diverses théories des poutres.....	10
1.2.3 Cas particulier du nid d'abeille .....	11
1.2.4 Caractéristiques homogénéisées du nid d'abeille.....	15
1.3 Méthodes d'approximation .....	18
1.3.1 Méthode de Galerkin.....	19
1.3.2 Méthode de Rayleigh-Ritz .....	19
1.3.3 Méthodes des modes assumés .....	20

1.4	Techniques d'amortissement.....	21
1.4.1	Type d'amortissement .....	21
1.4.2	Différents traitements .....	24
1.4.3	Modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques .....	27
1.4.4	Revue des travaux .....	29
Chapitre 2	OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE.....	34
Chapitre 3	MODÈLE ANALYTIQUE .....	37
3.1	Introduction .....	37
3.2	Modélisation du nid d'abeille.....	38
3.2.1	Géométrie et déplacement.....	39
3.2.2	Définition des énergies.....	41
3.2.3	Détermination des équations d'onde .....	43
3.2.4	Détermination des nombres d'onde.....	45
3.2.5	Modes assumés.....	47
3.2.6	Équation du mouvement et fréquences naturelles.....	47
3.3	Modélisation des peaux .....	50
3.3.1	Géométrie et déplacement.....	50
3.3.2	Champ de contrainte.....	53
3.3.3	Définition des énergies.....	54
3.4	Modélisation du viscoélastique .....	55
3.5	Équation du mouvement et résolution.....	57
3.5.1	Procédure.....	57
3.5.2	Mode assumés .....	59
3.5.3	Équation du mouvement.....	62

3.5.4 Réponse harmonique .....	63
3.6 Validation à partir de la littérature .....	63
Chapitre 4 PROCÉDURE ET RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.....	65
4.1 Fabrication des poutres.....	65
4.1.1 Matériaux .....	65
4.1.2 Mise en forme.....	67
4.1.3 Cuisson.....	68
4.2 Choix du panel de poutre .....	69
4.3 Banc d'essai.....	72
4.3.1 Description du banc d'essai.....	72
4.3.2 Protocole expérimental.....	73
4.4 Analyse des données .....	75
4.4.1 Méthode -3dB.....	77
4.4.2 Méthode de lissage .....	78
4.4.3 Conclusion sur les méthodes .....	82
4.5 Résultats et discussion.....	82
4.5.1 Analyse préliminaire temporelle .....	83
4.5.2 Analyse des fréquences naturelles.....	84
4.5.3 Analyse des amortissements : .....	88
4.6 Conclusion sur la partie expérimentale .....	91
Chapitre 5 VALIDATION, ANALYSES ET DISCUSSIONS .....	92
5.1 Validation du modèle analytique.....	92
5.1.1 Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.....	92
5.1.2 Comparaison avec les résultats expérimentaux de la littérature .....	96

5.1.3	Vérification des hypothèses :	98
5.1.4	Discussion sur le modèle	100
5.2	Étude paramétrique à l'aide du modèle	103
5.2.1	Effet de la longueur du patch sur l'amortissement	103
5.2.2	Effet de l'épaisseur du patch sur l'amortissement	104
5.2.3	Traitement multi-patchs	106
5.2.4	Conclusion sur les traitements amortissants	109
	CONCLUSION	110
	BIBLIOGRAPHIE	114
	ANNEXE	121

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Pourcentage d'erreur par rapport aux données expérimentales de tests sur poutres homogènes [7] .....	11
Tableau 1.2 : Comparaison des 4 théories [7] : ✓ → Effet considéré .....	11
Tableau 1.3 : Propriétés mécaniques et géométriques du nid d'abeille [24] .....	17
Tableau 1.4 : Propriétés effectives du nid d'abeille.....	18
Tableau 3.1 : Conditions aux limites [23] .....	45
Tableau 3.2 : Résolution matricielle pour différentes conditions aux limites.....	49
Tableau 3.3 : Coefficients des fonctions modales transversales des peaux [64].....	61
Tableau 3.4 : Fonctions modales transversales des peaux [64].....	61
Tableau 3.5 : Fonctions longitudinales des peaux [65] .....	61
Tableau 3.6 : Validation par la littérature .....	64
Tableau 4.1 : Caractéristiques des matériaux .....	66
Tableau 4.2 : Traitement viscoélastique des poutres.....	71
Tableau 4.3 : Paramètres d'acquisition .....	74
Tableau 4.4 : Test de reproductibilité de la poutre test .....	81
Tableau 4.5 : Masse ajoutée par les traitements viscoélastique .....	86
Tableau 4.6 : Fréquences naturelles (Hz) par mode .....	88
Tableau 4.7 : Résultats expérimentaux sur les amortissements par mode .....	89
Tableau 5.1 : Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.....	93
Tableau 5.2 : Erreur moyenne d'estimation des fréquences naturelles .....	94
Tableau 5.3 : Résultats théoriques de notre modèle et expérimentaux obtenus par E.R. Fotsing et al [57] .....	97
Tableau 5.4 : Performances relatives des traitements Référence, Base, multi-patchs et Complet - par mode .....	108

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Structure d'un composite stratifié .....	7
Figure 1.2 : Structure composite sandwich .....	7
Figure 1.3 : Principaux modes de ruptures des structures sandwichs avec âme en nid d'abeille [5]	9
Figure 1.4 : Cartographie des modes d'endommagement d'une poutre sandwich avec âme en nid d'abeille en flexion 3 points [6] .....	9
Figure 1.5 : Flexion d'une poutre sandwich [5].....	12
Figure 1.6 : Contraintes normales de flexion [5] .....	12
Figure 1.7 : Contrainte de cisaillement [5].....	12
Figure 1.8 : Comparaison des hypothèses de Navier-Bernoulli (gauche) et Reisnner-Mindlin (droite).....	13
Figure 1.9 : Modèle du nid d'abeille contraint .....	14
Figure 1.10 : Assemblage des âmes en nid d'abeille .....	15
Figure 1.11 : Modèle d'une cellule hexagonale par Gibson et Ashby [24] .....	17
Figure 1.12 : Champ de déformation du nid d'abeille .....	17
Figure 1.13 : Courbe de fluage et recouvrance d'un matériau viscoélastique [6] .....	23
Figure 1.14 : Réponse d'un matériau viscoélastique à une excitation dynamique [6] .....	23
Figure 1.15 : Traitement libre .....	25
Figure 1.16 : Traitement constraint.....	26
Figure 1.17 : Traitement interlaminaire .....	26
Figure 1.18 : Évolution du facteur de perte avec la fréquence [45] .....	28
Figure 1.19 : Traitement PCLD.....	30
Figure 1.20 : Traitement PCLD, impact de la surface du patch sur le facteur de perte (LF – « Loss Factor ») .....	31
Figure 1.21 : Traitement d'un composite unidirectionnel, effet de l'orientation des plis [55] .....	32

Figure 1.22 : Exemples de délamination .....	32
Figure 3.1 : Modèle d'un composite sandwich non traité.....	37
Figure 3.2 : Modèle d'un composite sandwich traité (dans cette illustration, une pièce viscoélastique est insérée sous le pli externe de la peau supérieure d'un sandwich quelconque) .....	38
Figure 3.3 : Nid d'abeille à maille hexagonale .....	39
Figure 3.4 : Déformée due à la flexion (a) et au cisaillement (b) .....	39
Figure 3.5 : Représentation du cisaillement .....	40
Figure 3.6 : Modèle du nid d'abeille contraint .....	40
Figure 3.7 : Évolution illustrative du module des nombres d'onde avec la fréquence : , $\kappa_1$ ; , $\kappa_2$ ; , $\kappa_3$ .....	46
Figure 3.8 : Modélisation des peaux .....	51
Figure 3.9 : Déplacements dans une peau .....	51
Figure 3.10 : Calcul de l'angle de cisaillement.....	56
Figure 3.11 : Processus de modélisation et de résolution .....	58
Figure 4.1 : Pré-imprégné Carbone/Epoxy .....	66
Figure 4.2 : Nid d'abeille Aramide .....	66
Figure 4.3 : Section d'une poutre (Fotsing, Sola, Ross, & Ruiz, 2012) .....	66
Figure 4.4 : Section transversale de la poutre illustrant l'état contraint de la couche viscoélastique [57] .....	67
Figure 4.5 : Cuisson en autoclave des plaques sandwichs .....	68
Figure 4.6 : Évolution du facteur d'amortissement selon la position de la couche viscoélastique pour les 4 premiers modes par E.Fotsing et al.[57] .....	69
Figure 4.7 : Schéma banc d'essai.....	72
Figure 4.8 : Photo du banc d'essai .....	73

Figure 4.9 : Plan d'expérience .....	74
Figure 4.10 : FRF typique de poutre sandwich – poutre de « Référence ».....	75
Figure 4.11 : 1er mode de la FRF d'une poutre test .....	76
Figure 4.12 : Méthode du -3dB .....	77
Figure 4.13 : Système à 1 degré de liberté .....	78
Figure 4.14 : Pic du 1er mode de la poutre test.....	79
Figure 4.15 : Exemples de résultats obtenus par la méthode de lissage.....	80
Figure 4.16 : Réponses temporelles des poutres de « Référence » (bleu), avec traitement « Complet » (vert) et avec traitement « P0 » (rouge).....	84
Figure 4.17 : FRF des poutres « Référence » et « Complet » .....	85
Figure 4.18 : FRF des poutres « P0 », « P1 » et « P2 ».....	86
Figure 4.19 : FRF des poutres « Base », « Double », « C23 » et « C34 » .....	87
Figure 4.20 : Résultats expérimentaux des traitements Référence, Complet et Base .....	91
Figure 5.1 : Comparaison des résultats théoriques avec les résultats expérimentaux obtenus par E.R. Fotsing et al [57] : losange bleu → résultat expérimental, carré rouge → résultat analytique .....	97
Figure 5.2 : Théorie de Reddy [21] .....	101
Figure 5.3 : Effet de la cocuisson sur le module de cisaillement [6] .....	102
Figure 5.4 : Effet de la longueur du patch.....	103
Figure 5.5 : Évolution de l'amortissement du mode 3 avec la longueur du patch – 1 <sup>er</sup> nœud du mode 3 .....	104
Figure 5.6 : Évolution de l'amortissement du 3e mode en fonction de l'épaisseur du patch - longueur 2 cm.....	105
Figure 5.7 : Traitements multi-patchs sur les nœuds du mode 3.....	106
Figure 5.8 : Traitement Référence, Base, multi-patchs et Complet - amortissement par mode ..	107

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Acronymes :

VEM	“ViscoElastic Material”
EDM	Equation de movement
FFT	“Fast Fourier Transform”
GMH	“Golla, Hughes and McTavish”
PCLD	“Partial Constrained Layer Damping”
<i>Re</i>	Partie réelle
<i>Im</i>	Partie imaginaire
LAVA	Laboratoire d’Analyse Vibratoire et Acoustique
CCHP	Chaire de Composites Haute Performance

Variables

$\theta$	Angle d’orientation des fibres par rapport aux axes principaux du stratifié (rad)
$\rho_n$	Masse volumique de l’âme ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
$\rho_m$	Masse volumique du matériau d’âme ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
x,y,z	Axes principaux du modèle
$\gamma$	Angle de cisaillement (rad)
$\beta$	Angle d’Euler, de rotation de la section (rad)
$w$	Déplacement transversal selon z (m)
$u$	Déplacement longitudinal selon x (m)
$F, F_1, F_2$	Efforts représentant les conditions aux limites (N)
$M, M_1, M_2$	Moments fléchissant représentant les conditions aux limites (N.m)
$G_c$	Module de Coulomb du nid d’abeille (Pa)

$E_c$	Module d'Young du nid d'abeille (Pa)
$\rho_c$	Masse volumique du nid d'abeille ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
$E_p$	Module d'Young des peaux homogènes fictives (Pa)
$\rho_p$	Masse volumique des peaux homogènes fictives ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
$H$	Épaisseur du nid d'abeille (m)
$h$	Épaisseur des peaux homogènes fictives (m)
$U_c$	Énergie potentielle du nid d'abeille (J)
$T_c$	Énergie cinétique du nid d'abeille (J)
$D_1, D_2$	Coefficients de rigidité en flexion (N.m)
$k_x$	Nombre d'onde
$B$	Largeur de la poutre (m)
$L$	Longueur de la poutre (m)
$\mu_{tot}$	Masse volumique effective du modèle de Nilsson ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )
$t$	temps (s)
$I_{tot}$	Moment d'inertie par unité de longueur du modèle de Nilsson ( $\text{kg}/\text{m}^2$ )
$\omega$	Fréquence (rad/s)
$E_x^*, E_y^*, E_z^*$	Modules d'Young effectifs du nid d'abeille (Pa)
$G_{xy}^*, G_{xz}^*, G_{yz}^*$	Modules de Coulomb effectifs du nid d'abeille (Pa)
$\nu_{xy}^*, \nu_{xz}^*, \nu_{yz}^*$	Coefficients de Poisson effectifs du nid d'abeille dans les axes principaux
$a, b$	Dimensions des cellules hexagonales du nid d'abeille (m)
$n$	Nombre de degré de liberté
$q$	Coordonnée généralisée
$\xi$	Fonction admissible (m)
$c_k$	Coefficients à déterminer, vecteur propre

$m$	Masse d'une poutre homogène de Bernoulli (kg)
$E$	Module d'Young d'une poutre homogène de Bernoulli (Pa)
$I$	Second moment de surface d'une poutre homogène de Bernoulli ( $\text{m}^4$ )
$\mathfrak{R}(\varphi)$	Reste de Rayleigh
$\varphi(x)$	Solution du problème aux valeurs propres
$K$	Matrice de rigidité du sandwich (N.m)
$M$	Matrice de masse du sandwich (kg)
$\sigma$	Tenseur des contraintes (Pa)
$\epsilon$	Vecteur des déformations (m/m)
$\eta$	Facteur de perte (%)
$Q$	Facteur de qualité (%)
$\zeta$	Facteur d'amortissement (%)
$G^*$	Module de Coulomb complexe (Pa)
$G_s, G_l$	Modules de perte et de restauration (Pa)
$s$	Opérateur de Laplace
$x1, x2$	Position de début et de fin de traitement viscoélastique (m)
$A_c$	Énergie potentielle par unité de longueur des forces externes conservatives (J)
$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$	Nombres d'onde
$\eta_c$	Facteur de perte du nid d'abeille
$f_p$	Fréquence remarquable pour les nombres d'onde (rad/s)
$A_i$	Coefficients de la fonction admissible du déplacement transversal $w$
$B_i$	Coefficients de la fonction admissible du déplacement angulaire $\beta$
$N_i$	Nombre de plis dans la peau i (i=haut ou bas)
$\varphi_x \varphi_y$	Angle de cisaillement transverse selon les axes x et y (rad)

$u_0 v_0 w_0$	Déplacement longitudinaux et transversal initiaux (m)
$\gamma_{xz} \gamma_{yz}$	Cisaillement transverse selon les axes x et y (Pa)
$\varepsilon_m$	Champ de déformation en membrane (m/m)
$\varepsilon_f$	Champ de déformation en flexion (m/m)
$\kappa$	Matrice des courbures
$Q'_k$	Matrice des coefficients de rigidité réduite de la couche de la couche k dans les axes principaux (Pa)
$A$	Matrice de rigidité en membrane (Pa.m)
$D$	Matrice de rigidité en flexion (Pa.m <sup>2</sup> )
$B$	Matrice de couplage membrane-flexion-torsion (Pa.m <sup>3</sup> )
$U_p$	Énergie de déformation d'une peau (J)
$T_p$	Énergie cinétique d'une peau (J)
$G_v^*$	Module de Coulomb complexe du viscoélastique (Pa)
$h_v$	Épaisseur du viscoélastique (m)
$h_k$	Épaisseur du pli k (m)
$U_p$	Énergie de déformation du viscoélastique (J)
$\Gamma$	Fonction admissible associée au déplacement longitudinal des peaux (m)
$\Pi$	Fonction admissible associée au déplacement transversal des peaux (m)
$\Xi$	Fonction admissible associée au déplacement transversal du nid d'abeille (m)
$\Phi$	Fonction admissible associée à la rotation de la section droite des peaux (m)
$n_u$	Nombre de degrés de liberté pour les déplacements longitudinaux des peaux
$n_{wp}$	Nombre de degrés de liberté pour les déplacements transversaux des peaux
$n_{wn}$	Nombre de degrés de liberté pour les déplacements transversaux des peaux
$n_\beta$	Nombre de degrés de liberté pour la rotation des peaux

$\beta_i$	Nombre d'onde d'Euler Bernoulli
$Q$	Vecteur des forces généralisées (N)
$U$	Énergie potentielle du sandwich (J)
$T$	Énergie cinétique du sandwich (J)
$L$	Lagrangien (J)
$f_s$	fréquence d'échantillonnage (Hz)
$N$	Nombre d'échantillons
$\omega_n$	Fréquence naturelle (rad/s)

*Indices :*

$n$	Indice relatif au nid d'abeille
$p$	Indice relatif aux peaux
$v$	Indice relatif au viscoélastique
$k$	Indice relatif à la couche numérotée k

## **LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE 1 – Théorie classique des stratifiés

## INTRODUCTION

Depuis les années 80, l'essor des technologies modernes impose l'utilisation de matériaux novateurs présentant des propriétés mécaniques élevées et adaptées à leur utilisation ainsi qu'une faible masse volumique. Les matériaux composites répondent à ces exigences. Ils sont typiquement constitués de renforts, sous forme de fibres tissées, et d'une matrice polymère. Leur mise en forme se fait par laminage. Il en résulte alors une structure hétérogène et anisotrope dont les propriétés sont supérieures à celles de chacune de ses composantes prises séparément. De par leur faible densité, leur grande résistance et leur excellente durabilité, ces matériaux ont d'abord été utilisés comme éléments structuraux dans le domaine aéronautique. Grâce à la diminution des leurs coûts de production, ces matériaux sont aujourd'hui utilisées dans une large gamme de domaines dont les transports terrestres (automobile, secteur ferroviaire), la construction, les énergies (pales d'éoliennes) ou les loisirs (ski, surf). Leur résistance à la corrosion en fait également un matériau privilégié pour la construction navale.

Les matériaux composites sont souvent utilisés sous forme de panneaux sandwichs. Ces structures sont constituées de deux peaux, de faibles épaisseurs et de haute résistance, entre lesquelles est collé un noyau plus épais et de faible densité. Ils combinent alors légèreté et bonnes propriétés de flexion. Typiquement, l'industrie aéronautique utilise un noyau sous forme de nid d'abeille constitué de feuilles ondulées d'aramide imprégnées d'une résine phénolique collées entre-elles.

Ces panneaux sandwichs sont légers et rigides. Pour cela, se sont d'excellents transmetteurs de vibrations mécaniques et acoustiques pouvant nuire à l'intégrité du système. Les vibrations en flexion apparaissant en plus basses fréquences, elles peuvent atteindre des amplitudes plus grandes que d'autres modes vibratoires comme la torsion. Si elles ne sont pas amorties, ces vibrations peuvent mener à des défaillances mécaniques telles des bris ou des délaminations. De plus, dans le cadre des transports, elles vont à l'encontre du confort des passagers. La maîtrise de ces vibrations est devenue une préoccupation majeure. L'amortissement de ces structures devient un critère essentiel pour de nombreuses applications. Dans le cas des structures assemblées, la majeure partie de l'énergie dissipée trouve son origine dans les frottements intervenant aux liaisons entre les éléments. Grâce aux matériaux composites, il est possible de réduire

considérablement le nombre de pièces d'une structure. Il y a alors moins de frottements aux liaisons. Il est donc impératif de développer une technique d'amortissement efficace. Deux voies peuvent être empruntées. Les traitements « actifs » contrôlent les vibrations en générant une onde en opposition de phase contrôlée par une boucle d'asservissement. Ces systèmes sont toutefois consommateurs d'énergie et ajoutent une masse non négligeable à la structure. C'est pourquoi l'industrie aéronautique s'est tournée vers des techniques « passives » permettant d'amortir les vibrations à la source sans ajout conséquent de masse.

Les systèmes d'amortissement « passifs » intègrent généralement un matériau viscoélastique qui se déforme avec les vibrations de la structure. En se déformant, ce dernier dissipe de l'énergie sous forme de chaleur, amortissant ainsi chaque cycle de vibration. Ainsi, un matériau viscoélastique collé sur une structure se déformerà en tension lorsque celle-ci est sollicitée en flexion. L'efficacité de ces traitements peut être augmentée en ajoutant une couche rigide, dite de contrainte, sur le matériau viscoélastique. Celui-ci est alors déformé en cisaillement. Les matériaux viscoélastiques étant très efficaces en cisaillement, l'amortissement se trouve augmenté. Plus récemment, une évolution ingénieuse de ces traitements à conduit à placer le matériau viscoélastique directement entre les plis des laminés. Cette technique se prête d'ailleurs parfaitement à la mise en forme des matériaux composites par laminage. Le traitement peut être complet, c'est-à-dire que le matériau viscoélastique recouvre la totalité de la surface de la structure, ou partiel. Plusieurs études ont déjà démontré l'efficacité de ces traitements sur l'amortissement. Le traitement étant interne à la structure, la question de l'amortissement doit être posée dès la phase de conception. Différentes études, expérimentales et analytiques, se sont intéressées à l'amortissement des composites laminés. Toutefois, bien que quelques travaux expérimentaux existent, aucun modèle analytique ne permet de déterminer le coefficient d'amortissement des composites sandwichs contenant des couches viscoélastiques dans ses peaux.

L'objectif cette étude est donc de remédier à cette lacune en fournissant un modèle d'une poutre sandwich avec âme en nid d'abeille et couches viscoélastiques partielles dans les peaux. Un tel modèle permettra de répondre à différentes questions à savoir, où doit-on placer le traitement afin de maximiser l'amortissement ? Quelle est la longueur optimale du traitement ? Comment les fréquences naturelles et facteurs de perte évoluent-ils et comment cela affecte-t-il la masse de la structure ? Le travail proposé permettra d'expliquer les différents phénomènes mis en jeu dans

l'amortissement et de déterminer les fréquences naturelles et facteurs de perte des modes de flexion des structures sandwichs traitées. Des études paramétriques utilisant le modèle seront alors faites pour répondre à ces questions. Finalement, des recommandations pratiques sur l'utilisation des traitements amortissants par insertion de couches viscoélastique seront faites.

Ce mémoire se divise en 5 parties. Le chapitre 1 est une revue de la littérature portant sur les différents aspects des traitements amortissants des composites sandwichs pertinents à l'élaboration du modèle. Les structures sandwichs et leurs comportements mécaniques seront présentés ainsi que le cas particulier des noyaux en nid d'abeille. Les méthodes d'approximation permettant la discrétisation des systèmes continus seront ensuite développées ainsi que les différentes techniques d'amortissement. Le deuxième chapitre définit les objectifs et la démarche suivie pour y parvenir. Le modèle analytique est alors développé dans le chapitre 3. Le chapitre 4 est une partie expérimentale visant à obtenir des résultats d'amortissement en vue de la validation du modèle. Les premières conclusions sur le comportement des traitements amortissants seront tirées. Finalement, la validation du modèle sera faite dans le chapitre 5. Quelques exemples d'études paramétriques utilisant le modèle seront également présentés ainsi qu'une discussion générale sur les parties analytiques et expérimentales du projet.

## Chapitre 1 REVUE DE LA LITTERATURE

Cette revue de la littérature fait l'état de l'art des différents domaines qui ont servi aux études présentées dans ce mémoire. D'abord, un aperçu général des matériaux composites et de leurs caractéristiques permettra de poser les bases de ces matériaux novateurs. Les structures sandwichs seront alors présentées. Un résumé des différentes théories des poutres sandwichs présentera les avantages et limites de chacune. Le cas particulier des âmes en nid d'abeille sera ensuite étudié ainsi que les modèles d'obtention de leurs propriétés effectives. Une dernière partie s'intéressera aux techniques d'amortissement en présentant d'abord les différents types d'amortissement puis quelques exemples de traitements. L'étude du traitement viscoélastique interlamininaire mènera enfin à l'analyse des phénomènes de viscoélasticité et à leur modélisation. Une revue des différents travaux analytiques et expérimentaux sur l'amortissement des structures composites sandwichs possédant des couches viscoélastiques entre ses plis conclura cette partie.

### 1.1 Généralités sur les matériaux composites

Par définition, un composite est un matériau composé d'au moins 2 constituants : une matrice et un renfort. L'étude du comportement de ces matériaux et la prédiction de leurs propriétés font aussi bien intervenir les caractéristiques de la matrice et des fibres que les conditions de fabrication et de qualité d'interface. De manière générale, les propriétés mécaniques dépendent essentiellement des fibres utilisées (type, taux de remplissage, diamètre, longueur, orientation, etc). Cependant, les propriétés aussi bien mécaniques qu'électriques, chimiques ou thermiques restent grandement affectées par celles de la matrice, et ce, notamment lors de l'utilisation de fibres courtes et de faibles taux de remplissage. Ainsi, la bonne connaissance du matériau passe nécessairement par celle des renforts et des matrices.

### 1.1.1 Matrice et renforts

- **La matrice**

Aujourd’hui, la plupart des composites utilisent des matrices organiques en polymère. Il existe quelques exemples de composites à matrice inorganique tel que des métaux ou des céramiques, toutefois, leur utilisation reste marginale dû à des coûts de production importants [1]. La matrice assure de nombreux rôles pour le matériau. Elle apporte tout d’abord un support et une protection (chimique, thermique, électrique) aux fibres. Elle permet ensuite de répartir les efforts. Enfin, de par ses techniques d’imprégnation, elle autorise la fabrication de pièces à géométrie complexe par drapage sur contre-moule.

- **Les renforts**

Les renforts se présentent le plus souvent sous forme de fibres. Il peut s’agir de fibres courtes, quelques millimètres, de fibres mi-longues, de l’ordre du centimètre, voire longues, proche de la taille du produit. Il existe trois principaux types de fibres : les fibres de verres, de carbone et d’aramide [2], [3]. Les fibres de verres, coulées à partir d’un mélange de silice et de différents additifs, représentent plus de 90% de la production. Elles sont produites en trois qualités selon leurs domaines d’application : les fibres E pour les composites à grande diffusion, fibres D pour des applications en construction électrique et fibres R pour les hautes performances. Pour un prix raisonnable, ces fibres offrent une bonne interface fibre/résine ainsi que de bonnes propriétés mécaniques. Leur utilisation reste toutefois limitée dans des domaines tels que l’aéronautique pour lesquelles elles présentent une rigidité insuffisante ou un vieillissement accéléré au contact de l’eau, des rayons UV, etc. Dans ces cas, des fibres de carbones seront privilégiées. En plus d’offrir de meilleures caractéristiques techniques, ces dernières apportent une faible masse volumique ainsi qu’une très bonne tenue en température. Enfin, les fibres aramide, aussi appelées Kevlar de par leur développeur, sont utilisées notamment dans les gilets pare-balles. Leur résistance au choc et à la fatigue est grande mais elles ont une mauvaise résistance en compression.

Contrairement aux matériaux classiques pour lesquels la conception de la structure est adaptée en fonction du matériau, les composites sont conçus pour une application donnée et en fonction des chargements qui lui sont appliqués.

### **1.1.2 Propriétés des matériaux composites**

Au final, les matériaux composites se différencient des matériaux classiques par un fort module d'Young, une faible masse volumique et une bonne tenue en fatigue. Ils ont l'avantage d'avoir une limite élastique très élevée, de ne pas se corroder et de résister aux produits chimiques courants tels que les graisses, huiles, peintures, etc. De plus, les techniques de mise en forme par moulage permettent la réalisation de pièces complexes. Cependant, leur résistance aux impacts est souvent plus faible que celle de matériaux métalliques classiques. Enfin, ils sont plus sensibles à la chaleur et à l'humidité.

### **1.1.3 Architecture des matériaux composites**

- **Les monocouches**

Les monocouches sont les éléments de base des structures composites. Des fibres unidirectionnelles placées dans le plan médian sont emprisonnées dans une matrice polymère [4]. Ils sont caractérisés par le type de renfort utilisé : des fibres longues (unidirectionnelles ou non), courtes, sous forme de tissus, de rubans...

- **Les stratifiés**

Les stratifiés sont formés par l'empilement de monocouches unidirectionnels, chacun ayant une orientation  $\theta$  propre par rapport aux axes principaux de la structure (Figure 1.1). Un choix judicieux de la séquence d'empilement et des différentes orientations permettra d'obtenir des propriétés mécaniques adaptées au champ de contrainte subi par la structure [4]. Il existe différentes classes de stratifiés :

1. Équilibré : le stratifié compte autant de couches orientées selon l'angle  $+θ$  que l'angle  $-θ$
2. Symétrique : les couches du stratifié sont disposées de manière symétrique par rapport au plan moyen
3. Antisymétrique : les couches du stratifié sont disposées de manière antisymétrique par rapport au plan moyen
4. Croisé : le stratifié compte autant de couches orientées à  $0^\circ$  qu'à  $90^\circ$ .
5. Hybride: les couches successives du stratifié comportent des fibres de natures différentes

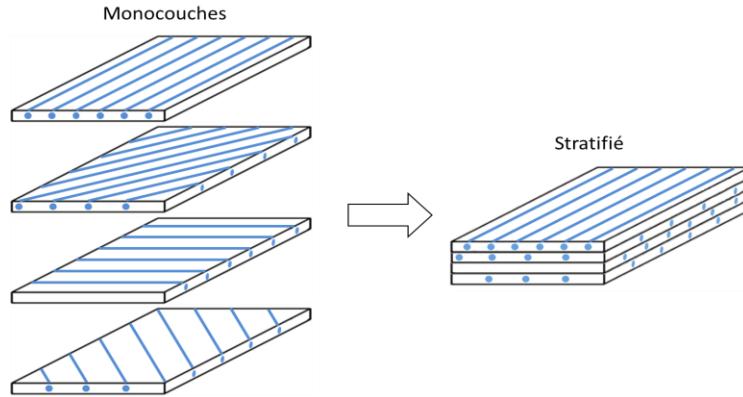


Figure 1.1 : Structure d'un composite stratifié

- **Les sandwiches**

Le principe des matériaux composites sandwichs consiste en l'association d'une âme épaisse et de faible masse volumique et de deux peaux minces à fort module. L'objectif est de constituer une structure conciliant légèreté et rigidité. La théorie de la résistance des matériaux montre que la rigidité en flexion est proportionnelle au cube de l'épaisseur. Ainsi, dans un sandwich, le rôle de l'âme est d'accroître le module du stratifié en augmentant significativement son second moment de surface (via l'épaisseur) par l'ajout d'un matériau de faible densité [2]. Lorsqu'une telle structure est sollicitée en flexion, la peau supérieure est globalement chargée en compression, la peau inférieure en traction, et l'âme en cisaillement. Ainsi, l'un des principaux critères de sélection du matériau d'âme sera sa résistance au cisaillement. De plus, l'âme doit être capable de supporter des charges de compression afin d'éviter le flambage des peaux suite à un plissement de celles-ci.

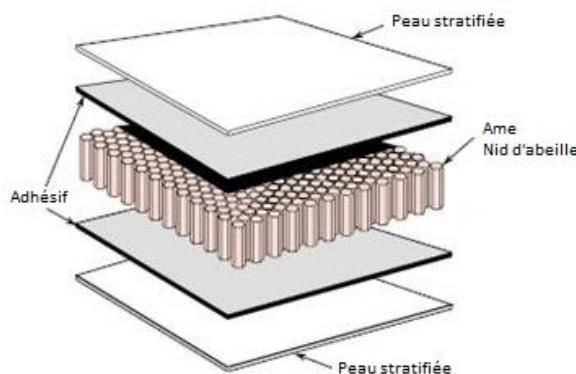


Figure 1.2 : Structure composite sandwich

Les âmes sont classées en deux catégories : les âmes pleines pouvant être constituées de différents bois, mousses, résines chargées et les âmes creuses, essentiellement des nids d'abeilles et des profilés en alliage métallique léger (souvent aluminium), papier Kraft (enduit de résine ou non), papier polyamide de type Nomex, et autres. Les critères de sélection du matériau d'âme seront la résistance au cisaillement, en flexion, au choc, à la compression,... ou encore sa résistance au feu, à l'eau ou ses propriétés acoustiques d'isolation (cas des mousses).

Les peaux rigides sont quant à elles, pour des composites de moyennes et hautes performances, des stratifiés à matrice thermodurcissable contenant des renforts fibreux de verre, de carbone ou d'aramide [5]. Pour des structures portantes, des feuilles métalliques d'aluminium ou d'acier seront privilégiées tandis que des matériaux tels que du bois, du laminé ou du contreplaqué serviront pour des structures à faibles performances.

Dans le but de répartir les efforts entre âme et peaux et ainsi d'obtenir le maximum de performance des structures sandwichs, il est également nécessaire de soigner l'interface âme/peaux. L'assemblage est réalisé par collage grâce à des résines compatibles avec les matériaux.

## 1.2 Mécanique des composites sandwichs

### 1.2.1 Modes de rupture

L'avantage des matériaux composites sandwichs est clairement leur légèreté et leur rigidité. Cependant, soumis à diverses sollicitations, les peaux du sandwich doivent résister à des contraintes de traction, de compression, de flambage. L'âme ainsi que l'interface âme/peaux doivent également résister au cisaillement. Les modes de ruptures sont donc variés et dépendent des propriétés mécaniques des peaux et de l'âme. Les principaux modes de ruptures sont présentés à la Figure 1.3.

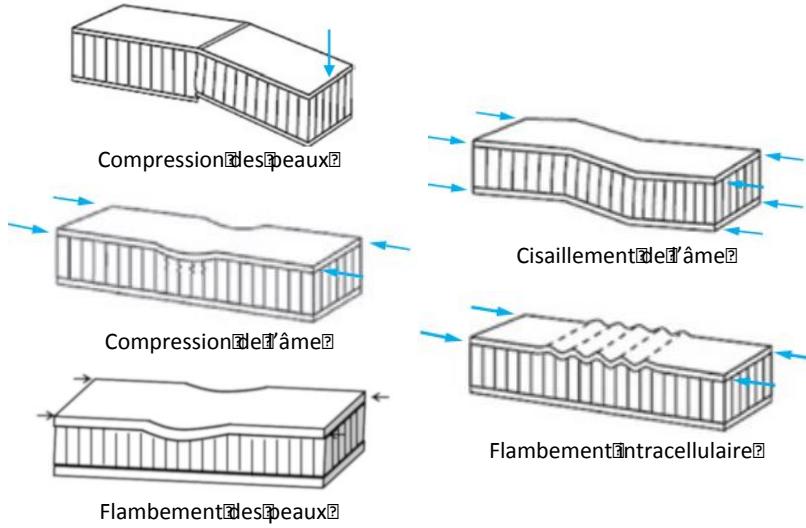


Figure 1.3 : Principaux modes de ruptures des structures sandwichs avec âme en nid d'abeille [5]

Des cartes de prévision de ces ruptures existent pour les âmes en mousse et en nid d'abeille pour différents types de chargement. La Figure 1.4 donne les différents modes de rupture d'un matériau composite sandwich avec une âme en nid d'abeille soumise à un chargement en flexion 3 points. La figure présente le rapport de la densité de l'âme  $\rho_n$  sur celle de son matériau  $\rho_m$  en fonction de l'épaisseur de l'âme. Elle est spécifique au cas d'un rapport  $\frac{\text{épaisseur de peaux}}{\text{longueur entre les appuis}} = 5.10^{-4}$  [6].

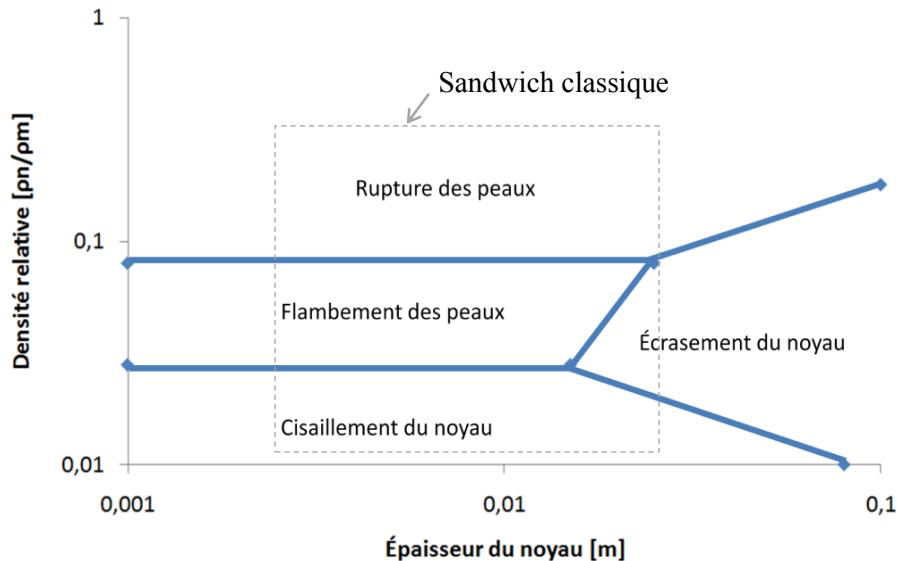


Figure 1.4 : Cartographie des modes d'endommagement d'une poutre sandwich avec âme en nid d'abeille en flexion 3 points [6]

## 1.2.2 Résumé des diverses théories des poutres

Les théories des poutres sur lesquelles reposent le modèle analytique développé datent des années 1920. Le problème des poutres vibrant transversalement s'exprime par une équation différentielle partielle du mouvement, en tenant compte des forces extérieures, des conditions aux limites et des conditions initiales. Comme relaté par Han et al [7], de très nombreux auteurs se sont efforcés de comprendre et développer la solution de ce problème non-homogène. Voici un bref historique.

Jacob Bernoulli (1654-1705) fut le premier à découvrir que la courbure d'une poutre élastique est proportionnelle au moment fléchissant. Par la suite, et durant de nombreuses années, les chercheurs s'accordèrent sur le fait que cet effet de flexion était le paramètre prédominant de la vibration transversale des poutres. Le modèle d'Euler-Bernoulli voit le jour au 18<sup>e</sup> siècle avec Daniel Bernoulli (1700-1782) qui formula pour la première fois l'équation différentielle de mouvement d'une poutre. Ce modèle inclut l'énergie de déformation par flexion et l'énergie cinétique due au déplacement latéral. Euler y apporta de nombreuses améliorations par ses travaux sur l'élasticité [8]. Aussi appelée théorie classique des poutres, le modèle d'Euler-Bernoulli reste le plus commun de par sa simplicité et fournit des approximations acceptables à de nombreux problèmes d'ingénierie. Cependant, il tend à légèrement surestimer les fréquences naturelles et se limite, pour l'essentiel, au cas des poutres minces.

En 1877, la théorie de Rayleigh [9] introduit les effets de rotation de la section transversale au modèle. Cet ajout corrige partiellement la surestimation des fréquences naturelles, mais pas complètement. Parallèlement, le modèle de cisaillement (« *Shear Model* ») ajoute l'effet de l'angle de cisaillement au modèle d'Euler-Bernoulli et améliore de façon considérable l'évaluation des fréquences naturelles.

Il faut attendre 1921 pour que Timoshenko réunisse le tout en proposant une théorie incluant les effets de cisaillement et de rotation au modèle d'Euler-Bernoulli [10], [11]. Il apporte ainsi une amélioration majeure pour les poutres épaisses et les réponses en hautes fréquences pour lesquelles les effets de cisaillement et de rotation ne sont pas négligeables. De là, de nombreux auteurs ont développé les équations de fréquence et les modes pour différentes conditions aux limites [12]–[15]. Un paramètre important de ce nouveau modèle est le facteur de forme, également appelé coefficient de cisaillement. Celui-ci provient du fait que le cisaillement n'est pas constant le long de la section transversale et dépend du coefficient de Poisson, de la

fréquence et de la forme de la section. Cependant, à des fins de simplification de calcul, la dépendance en fréquence est souvent ignorée. Mindlin et Deresiewicz [16] et Cowper [17] donnent une formulation du facteur de forme comme fonction du coefficient de Poisson et de la forme de la section.

Les Tableau 1.1 et Tableau 1.2 résument les améliorations apportées au modèle d'Euler-Bernoulli. Le Tableau 1.1 présente les erreurs commises sur l'estimation des fréquences (Données non vérifiables). Le Tableau 1.2 donne les effets considérés ou non par chacune des théories. Bien qu'il existe différents travaux sur de nouvelles théories, les modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko restent les plus usités.<

Tableau 1.1 : Pourcentage d'erreur par rapport aux données expérimentales de tests sur poutres homogènes [7].

Beam models	First natural frequency	Second natural frequency
Euler–Bernoulli	+14% to +26%	+78% to +133%
Shear	0% to +3%	-1% to +6%
Timoshenko	-1% to +2%	-1% to +6%

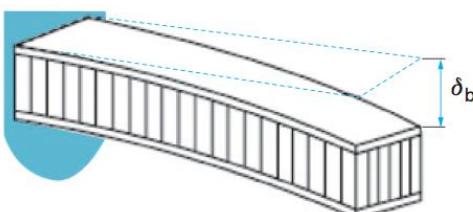
Tableau 1.2 : Comparaison des 4 théories [7] : ✓ → Effet considéré

Beam models	Bending moment	Lateral displacement	Shear deformation	Rotary inertia
Euler–Bernoulli	✓	✓		
Rayleigh	✓	✓		✓
Shear	✓	✓	✓	
Timoshenko	✓	✓	✓	✓

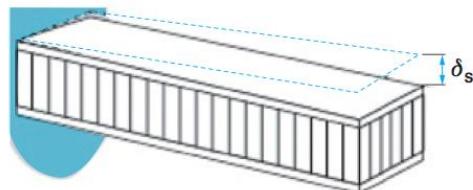
### 1.2.3 Cas particulier du nid d'abeille

La principale différence entre une structure sandwich à nid d'abeille et une structure sandwich classique est la contribution très significative du cisaillement transversal due à la déformation du nid d'abeille.

La Figure 1.5 présente une poutre sandwich soumise à une sollicitation de flexion. La flèche est alors une combinaison de deux composantes, l'une due au moment fléchissant (a), et l'autre due au cisaillement de l'âme (b). Les Figure 1.6 et Figure 1.7 illustrent les répartitions réelles et modélisées des contraintes normales de flexion et de cisaillement dans une poutre sandwich. On observe qu'il est nécessaire que la résistance au cisaillement de la liaison âme/peaux soit au moins égale à celle de l'âme. En pratique, elle devra être supérieure car de nouvelles contraintes de cisaillement, issues de la différence des coefficients de dilation des matériaux de l'âme et des peaux, peuvent apparaître.



**(a) flèche due au moment fléchissant**



**(b) flèche due aux contraintes de cisaillement de l'âme**

Figure 1.5 : Flexion d'une poutre sandwich [5]

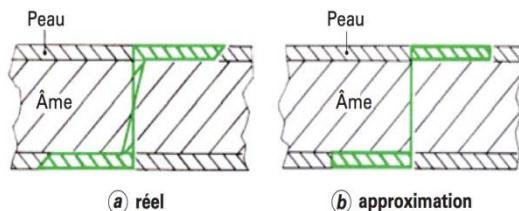


Figure 1.6 : Contraintes normales de flexion [5]

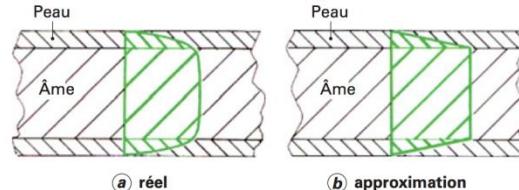


Figure 1.7 : Contrainte de cisaillement [5]

Ainsi, certaines dérivées représentant les champs de déplacement sont discontinues dans l'épaisseur. En conséquence, les théories (Allen [18] ou Zenkert [19]) basées sur les hypothèses de Navier-Bernoulli indiquant que toute section droite d'une poutre subit un déplacement de corps rigide qui la maintient perpendiculaire à la ligne moyenne [20], sont à priori inadaptées à la modélisation des structures sandwichs ayant un cœur en nid d'abeille.

D'autres modèles, basés sur les hypothèses de Reissner-Mindlin, définissent un champ de déformation en cisaillement du premier ordre tel que la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen [2], [21]. La Figure 1.8 illustre la

différence entre les hypothèses Navier-Bernoulli (gauche) et de Reissner-Mindlin (droite). La partie de droite fait apparaître l'angle de cisaillement  $\gamma$ .

Cependant, ces théories du premier ordre ne peuvent représenter de manière fidèle les déformations dues au cisaillement transverse. La condition de continuité des déplacements n'est pas respectée à l'interface âme/peaux et nécessite alors l'utilisation de facteurs de correction non-évidents à obtenir pour des structures complexes [21].

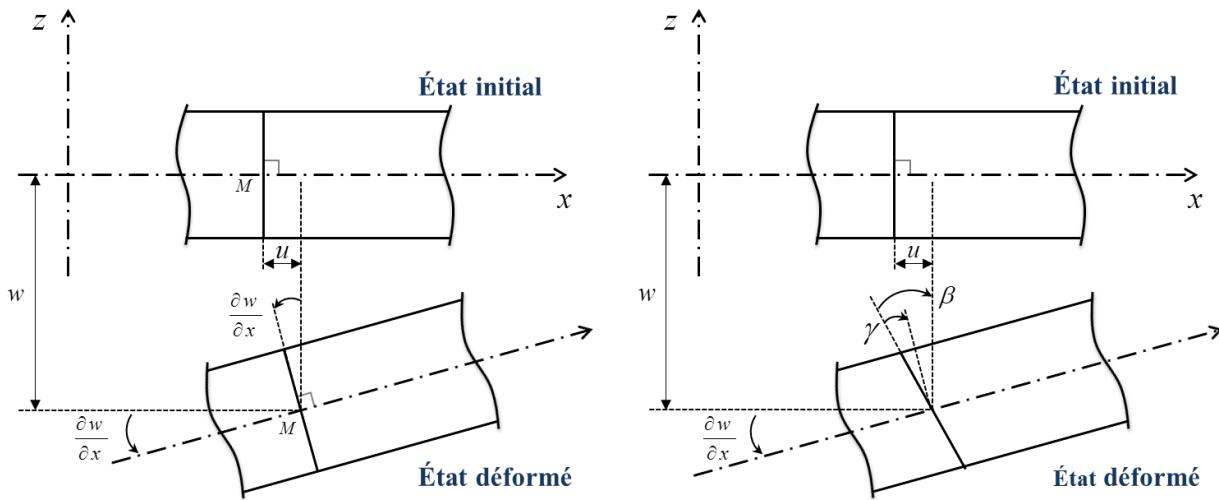


Figure 1.8 : Comparaison des hypothèses de Navier-Bernoulli (gauche) et Reissner-Mindlin (droite)

Pour pallier à ce problème, des théories d'ordres supérieurs ont été développées. Par exemple, Frostig et al [22] représentent les champs de déplacement par des fonctions polynomiales quadratiques, cubiques, ou d'ordre plus élevé. Selon les conditions aux limites du système considéré, le choix de ces fonctions se révèle complexe, la plupart nécessitant une continuité des déplacements (i.e. déplacements dérivables et de dérivée continue).

Des alternatives aux théories d'ordres supérieurs sont proposées par Nilsson [23] ou Gibson [24]. Ces théories reposent sur les hypothèses de Reissner-Mindlin mais proposent une modélisation des champs de déplacement qui dépendent de trois nombres d'ondes permettant la simplification des équations et une bonne approximation des résultats.

Le modèle de Nilsson traite le cas d'un sandwich avec un cœur en nid d'abeille à maille hexagonale et des peaux de matériau homogène (Figure 1.9).

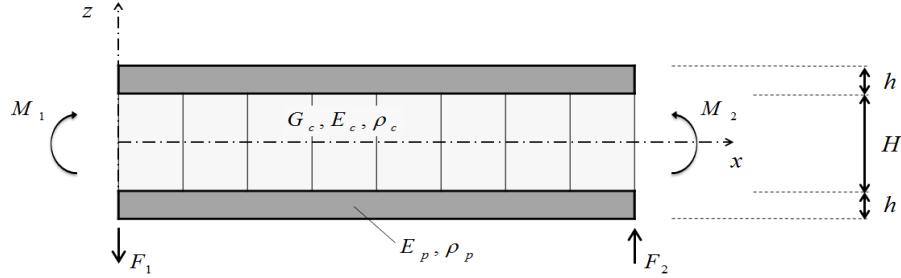


Figure 1.9 : Modèle du nid d'abeille contraint

Les énergies potentielles  $U_c$  et cinétiques  $T_c$  sont calculées, équations (1.1) et (1.2) [23], en fonction des coefficients de rigidité en flexion  $D_1$  et  $D_2$ , du module de cisaillement  $G_c$  du nid d'abeille, des dimensions géométriques du modèle, et des déplacements angulaires  $\beta$  et  $\gamma$  et transversale  $w$  définis à la Figure 1.8. La résolution du problème variationnel de Hamilton conduit, pour un nid d'abeille à maille hexagonale, aux équations d'onde (1.3) [23].

$$U_c = \frac{B}{2} \int_0^L \left( D_1 \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + 2D_2 \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 + G_c H \gamma^2 \right) dx \quad (1.1)$$

$$T_c = \frac{B}{2} \int_0^L \left( \mu_{tot} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_{tot} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right) dx \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} 2D_2 k_x^6 - \frac{2D_2}{D_1} I_{tot} k_x^4 \omega^2 - \left( \mu_{tot} + \frac{2D_2}{D_1} \mu_{tot} + \frac{I_{tot} G_c H}{D_1} \right) k_x^2 \omega^2 \\ + G_c H \left( k_x^4 - \frac{\mu_{tot}}{D_1} \omega^2 \right) + \frac{I_{tot} \mu_c}{D_1} \omega^4 = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

La résolution de ces équations d'ordre 6 permet d'obtenir trois nombres d'ondes  $k_x$  (6 solutions conjuguées) qui permettront une expression fidèle du champ de déplacement. Le premier nombre d'onde a une signification physique, il est proportionnel au nombre d'oscillations effectué par une onde par unité de longueur en radian par mètre. Il est ainsi inversement proportionnel à la longueur d'onde. Les équations de mouvements sont alors obtenues à partir de ces nombres d'onde par une méthode d'approximation. Ces méthodes seront présentées en section 1.3.

Il existe également de nombreuses études par éléments finis [25]–[27]. Ces travaux se sont intéressés à la modélisation des nids d'abeilles avec ou sans couches de contraintes. Leurs résultats montrent que le comportement des structures en nid d'abeille non contraint est très différent du comportement d'un sandwich. Ceci explique en partie le fait que les modèles analytiques traitent systématiquement les nids d'abeille comme des sandwichs, afin de représenter au mieux le comportement réel.

#### 1.2.4 Caractéristiques homogénéisées du nid d'abeille

Comme le montrent Noor et Burton [28], la modélisation des âmes et notamment des nids d'abeille est fortement dépendante de la bonne connaissance des propriétés de ceux-ci. Dans le cas des âmes en nid d'abeille, les modules d'Young, de Poisson et de Coulomb sont relativement difficiles à obtenir à cause de la forte hétérogénéité de la structure. Des techniques expérimentales par flexion 3 et 4 points permettent d'avoir une assez bonne estimation de ces paramètres [29].

Un nid d'abeille est une structure périodique dans deux directions. L'orthotropie est due au procédé de fabrication. Une fois mis en forme, les rubans formant les plis du nid d'abeille sont assemblés par collage. Ainsi, dans la direction principale, les cellules seront 2 fois plus épaisses, (Figure 1.10). Pour des composites sandwichs à hautes performances, la forme des cellules sera souvent hexagonale. Il existe également des cellules dites flexibles, sur-expansées, cruciformes, rectangulaires, renforcées, etc, voir [5].

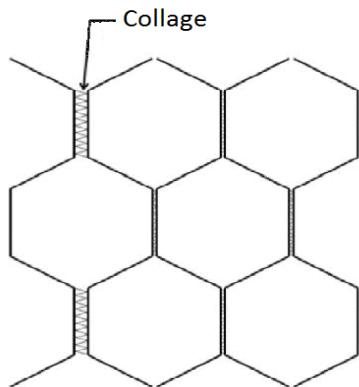


Figure 1.10 : Assemblage des âmes en nid d'abeille

Les propriétés équivalentes d'un nid d'abeille sont appelées propriétés effectives et sont notées par un astérisque (\*). Selon Berthelot [2], la description d'un matériau orthotrope nécessite 9 paramètres indépendants, les modules d'Young  $E_x^*, E_y^*, E_z^*$ , les modules de cisaillement  $G_{xy}^*, G_{xz}^*, G_{yz}^*$ , et les coefficients de Poisson  $\nu_{xy}^*, \nu_{xz}^*, \nu_{yz}^*$ . Ils sont estimés en fonction des paramètres géométriques de la cellule et des propriétés du matériau.

Noor et Schwingshackl [28], [30] proposent une revue des différentes méthodes d'obtention des propriétés effectives des nids d'abeille. En 1958, Kelsey [31] développe les premières équations donnant  $G_{xz}^*, G_{yz}^*$  par une méthode énergétique appliquée sur les faces des cellules. Gibson et Ashby [24] complètent cette analyse et obtiennent les 9 paramètres. Leur travail reste aujourd'hui la référence dans le domaine. Cependant, leurs développements ne tiennent pas compte de la double épaisseur induite par le collage des rubans et les résultats ne correspondent pas de manière fiable aux résultats expérimentaux. De nombreux chercheurs continuent à travailler sur l'amélioration de l'estimation de ces paramètres.

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous contenterons des développements réalisés par Kelsey et complétés par Gibson et Ashby. Le calcul des propriétés dans le plan se base sur la théorie classique des poutres (Euler-Bernoulli). Bien que mal adaptée aux structures en nid d'abeille, cette méthode nous permettra toutefois d'obtenir une bonne estimation des propriétés effectives homogénéisées. Une cellule hexagonale est soumise à des chargements selon  $x$  et  $y$ , tels que présentés à la Figure 1.11. Le champ de déformation associé est donné à la Figure 1.12. Le matériau d'âme est considéré linéaire, élastique et isotrope. Les composantes hors plan sont quant à elles estimées par des théorèmes de minimisation de l'énergie cinétique et complémentaire. Les propriétés effectives sont données en Tableau 1.4 et en référence aux propriétés mécaniques et géométriques générales du nid d'abeille présentées par le Tableau 1.3.

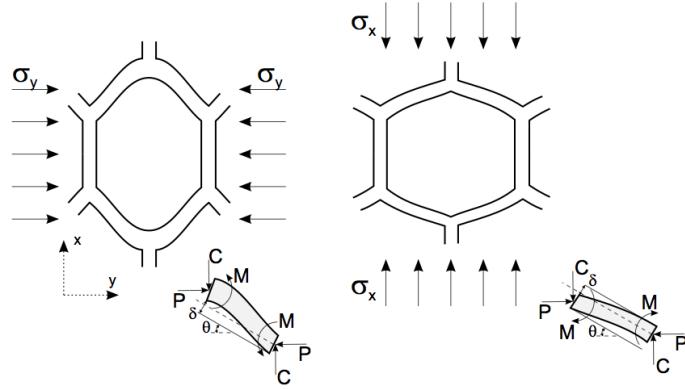


Figure 1.11 : Modèle d'une cellule hexagonale par Gibson et Ashby [24]

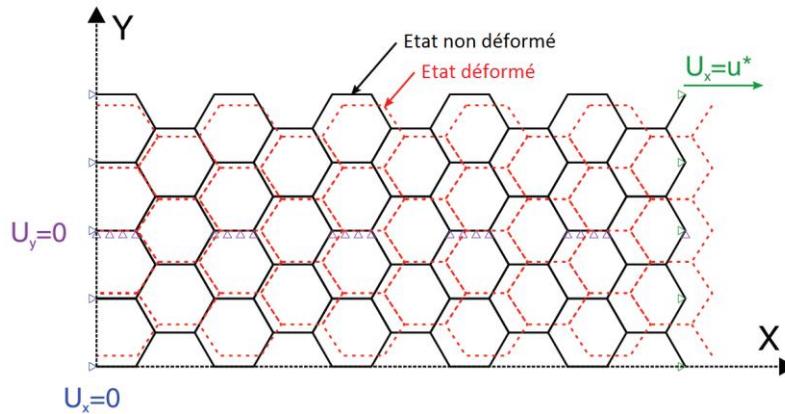


Figure 1.12 : Champ de déformation du nid d'abeille

Tableau 1.3 : Propriétés mécaniques et géométriques du nid d'abeille [24]

Propriétés du matériau		Géométrie de la cellule	
E	Module d'Young	a	Longueur d'un côté de cellule selon X
G	Module de Coulomb	b	Longueur du côté incliné de la cellule
ρ	Masse volumique	θ	Angle de cellule
ν	Coefficient de Poisson	t	Épaisseur de la paroi

Tableau 1.4 : Propriétés effectives du nid d'abeille

Paramètres du plan (x,y)		Paramètres hors plan	
$E_x^*$	$E \left(\frac{t}{b}\right)^3 \frac{\frac{a}{b} + \sin\theta}{\cos^3\theta}$	$E_z^*$	$E \frac{2t + \frac{a}{b}t'}{b \left(\frac{a}{b} + \sin\theta\right) \cos\theta}$
$E_y^*$	$E \left(\frac{t}{b}\right)^3 \frac{\cos\theta}{\left(\frac{a}{b} + \sin\theta\right) \sin^2\theta}$	$G_{yz}^*$	$G \frac{t}{b} \frac{\cos\theta}{\frac{a}{b} + \sin\theta}$
$G_{xy}^*$	$\frac{E}{b^3} \frac{\frac{a}{b} + \sin\theta}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2a}{bt^3}\right) \cos\theta}$	$G_{xz}^*$	Up: $\frac{G}{b} \frac{\frac{a}{b}t' + 2ts\sin^2\theta}{2\cos\theta \left(\frac{a}{b} + \sin\theta\right)}$ Low: $\frac{G}{b} \frac{\left(\frac{a}{b}t' + ts\sin\theta\right)^2}{\cos\theta \left(\frac{a}{b} + \sin\theta\right) \left(2\frac{a}{b}t' + t\right)}$
$v_{xy}^*$	$\frac{\left(\frac{a}{b} + \sin\theta\right) \sin\theta}{\cos^2\theta}$	$v_{zx}^*$	$v$
$v_{yx}^*$	$\frac{\cos^2\theta}{\left(\frac{a}{b} + \sin\theta\right) \sin\theta}$	$v_{zy}^*$	$v$

### 1.3 Méthodes d'approximation

De manière générale, l'étude du comportement dynamique des systèmes continus est complexe. Elle passe par la résolution d'équations aux dérivées partielles dont les solutions sont souvent difficiles. Face à ces contraintes, des méthodes approximatives sont utilisées. Ces méthodes discrétilisent le système continu en un système ayant un nombre fini «  $n$  » de degré de liberté. Ces méthodes consistent à exprimer le déplacement sous la forme d'un produit de deux fonctions. La première est appelée coordonnée généralisée, notée  $q(t)$ , et dépend du temps. La seconde est appelée fonction admissible, notée  $\xi(x)$ , dépendant des variables d'espace, ici selon la longueur de la poutre  $x$ . Elle vise à représenter les modes de déformation et doit respecter les conditions aux limites du système. Le déplacement transversal  $w$  s'écrit alors sous la forme :

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n \xi_k(x) q_k(t) \quad (1.4)$$

La solution du problème aux valeurs propres s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n c_k \xi_k(x) \quad (1.5)$$

où  $c_k$  est un set de  $n$  coefficients inconnus devant être déterminés par différentes méthodes.

### 1.3.1 Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin détermine ces coefficients  $c_k$  par l'intermédiaire d'un résidu. Pour une poutre d'Euler-Bernoulli classique de masse  $m(x)$ , de module  $E$  et de second moment de surface  $I$ , ce reste s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\varphi) &= \frac{d^2}{dx^2} (EI(x)\varphi''(x) + \lambda m(x)\varphi(x)) \\ &\cong \sum_{k=1}^n c_k \left[ \frac{d^2}{dx^2} (EI(x)\xi_k''(x)) + \lambda m(x)\xi_k(x) \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Les coefficients  $c_k$  sont alors obtenus par annulation de l'intégrale :

$$\int_0^L \mathfrak{R}(\varphi) \xi_k(x) dx = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.7)$$

### 1.3.2 Méthode de Rayleigh-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz est une méthode énergétique. Elle assume le mouvement du système sous la forme  $w(x, t) = \varphi(x)e^{j\omega_k t}$ . Le résidu est cette fois ci exprimé en fonction des énergies potentielles (1.8) et cinétiques (1.9) maximales tel qu'exprimé en équation (1.10) :

$$V_{max} = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) (w_{xx})_{max}^2 dx = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) \varphi''_k(x)^2 dx \quad (1.8)$$

$$T_{max} = \int_0^L \frac{1}{2} m(x) (w_t)_{max}^2 dx = \omega_k^2 \underbrace{\int_0^L \frac{1}{2} m(x) \varphi_k^2(x) dx}_{T_{max}^*} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \Re(\varphi_k) &= \omega_k^2 = \frac{V_{max}}{T_{max}^*} \\ &= \frac{\int_0^L \frac{1}{2} EI(x) \varphi''_k(x) dx}{\int_0^L \frac{1}{2} m(x) \varphi_k^2(x) dx} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} c_i c_j}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} c_i c_j} = \frac{N}{D} \end{aligned} \quad (1.10)$$

où  $\omega_k$  est la pulsation propre du mode k, K est la matrice de rigidité et M et la matrice de masse.

Les coefficients  $c_k$  sont alors obtenus par :

$$\frac{\partial \Re}{\partial c_k} = \frac{1}{D} \left( \frac{\partial N}{\partial c_k} - \frac{N}{D} \frac{\partial D}{\partial c_k} \right) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.11)$$

### 1.3.3 Méthodes des modes assumés

La méthode des modes assumés est également énergétique. Elle consiste à exprimer les énergies cinétiques et potentielles sous forme quadratique.

$$\begin{aligned} T &= \int_0^L \frac{1}{2} m(x) w_t^2 dx = \int_0^L \frac{1}{2} m(x) \left( \sum_{k=1}^n \xi_k(x) q_k(t) \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) w_{xx}^2 dx = \int_0^L \frac{1}{2} EI(x) \left( \sum_{k=1}^n \xi''_k(x) q_k(t) \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T K \dot{q} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Les équations de Lagrange donnent alors, pour un système libre, l'équation de mouvement en fonction des coordonnées généralisées :

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (1.14)$$

La résolution du problème aux valeurs propres  $(K - \omega^2 M)c = 0$  permet d'obtenir les fréquences propres  $\omega$  et les coefficients  $c_k$ .

Pour ces trois méthodes, les coefficients  $c_k$  forment les vecteurs propres devant ensuite être normalisés dans une base orthogonale. L'équation de mouvement est alors complète.

## 1.4 Techniques d'amortissement

### 1.4.1 Type d'amortissement

Au sein d'une structure cohabitent plusieurs types d'amortissements. Afin de bien traiter le sujet proposé, il est important de bien comprendre l'origine de ces phénomènes afin de ne calculer et mesurer que les grandeurs nous intéressent. Les trois principaux types d'amortissements possibles dans une structure sandwich sont :

- L'amortissement interne. Il résulte du mouvement microscopique entre les molécules du matériau. Pour des matériaux composites, il inclut également les frottements éventuels entre les fibres ou à l'interface fibre/matrice. Ces phénomènes sont généralement représentés par des graphiques contrainte vs déformation sous forme d'hystérésis.
- L'amortissement fluide. La structure évolue au sein d'un fluide, généralement de l'air. Le frottement entre ce fluide et la structure dissipe de l'énergie.
- L'amortissement structural. Dans un assemblage, les pièces (qu'elles soient mobiles ou non parfaitement immobilisées) peuvent bouger les unes par rapport aux autres. Ceci a pour effet de dissiper de l'énergie par frottement et donc de participer à l'amortissement de la structure. La mesure de l'amortissement structural est généralement expérimentale. Il faut alors analyser précautionneusement les résultats car l'amortissement mesuré est global et inclut les amortissements interne et fluide.

Les amortissements structural et fluide dépendent du milieu dans lequel sera placé le système. Les coefficients de perte associés nécessitent des mesures expérimentales et ne peuvent donc pas être connus à priori. C'est pourquoi la majorité des auteurs les négligent lors de l'étude des sandwichs [32], [33].

L'amortissement viscoélastique fait partie de l'amortissement interne. Cependant, il est généralement traité à part [34]. L'amortissement interne se référant d'abord aux matériaux élastiques.

Après déformation, un solide élastique restitue toute l'énergie emmagasinée lors du chargement (loi de Hooke).

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \begin{cases} \sigma = \text{contrainte appliquée} \\ E = \text{module d'Young} \\ \varepsilon = \text{déformation résultante} \end{cases} \quad (1.15)$$

A l'inverse, un matériau purement visqueux ne restitue aucune énergie car elle est totalement dissipée sous forme de chaleur.

$$\sigma = \mu \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \begin{cases} \mu = \text{viscosité} \\ t = \text{temps} \end{cases} \quad (1.16)$$

Un matériau viscoélastique est à la fois élastique et visqueux. Sous une charge constante, la déformation du matériau augmentera dans le temps, c'est le phénomène de fluage. Sous une déformation constante, la charge diminuera avec le temps, c'est la relaxation (Figure 1.13). Ainsi, soumis à une excitation dynamique, le matériau réagira avec un retard temporel par rapport à l'excitation (Figure 1.14).

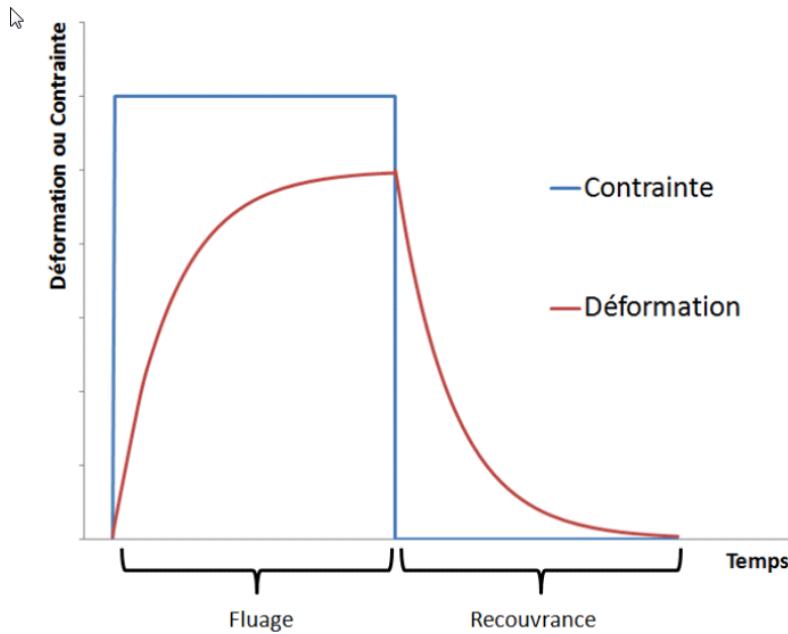


Figure 1.13 : Courbe de fluage et recouvrance d'un matériau viscoélastique [6]

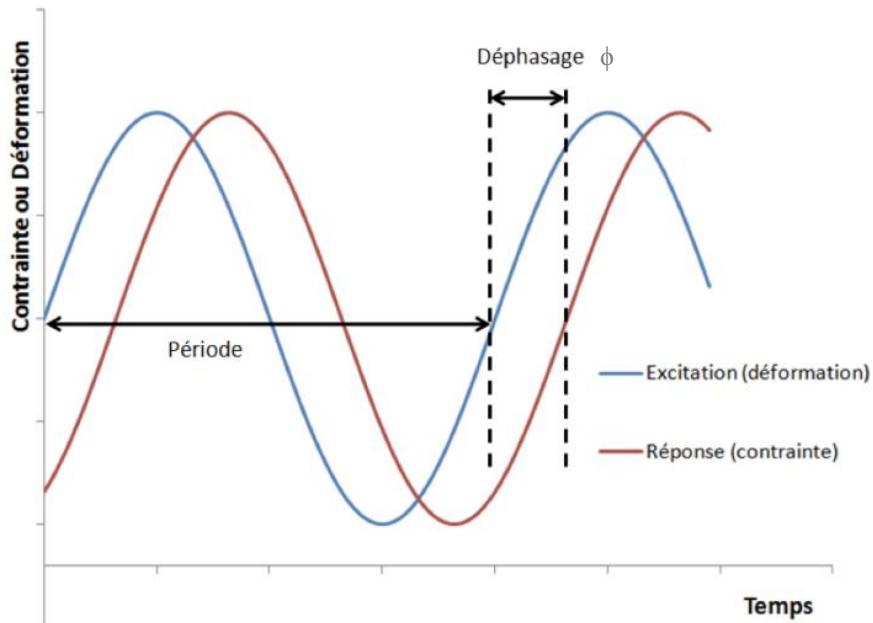


Figure 1.14 : Réponse d'un matériau viscoélastique à une excitation dynamique [6]

Le déphasage  $\phi$  observé Figure 1.14 est représentatif de la capacité amortissante du matériau. La réorganisation moléculaire opérée durant ces phases de fluage et relaxation dissipent de l'énergie

par échauffement, c'est l'amortissement viscoélastique. Plusieurs caractéristiques permettent de le caractériser [6] :

$$\eta = \frac{1}{Q} = 2\zeta = \tan \phi \quad (1.17)$$

où  $\eta$  est le facteur de perte,  $Q$  est le facteur de qualité et  $\zeta$  le taux d'amortissement. Ces paramètres dépendent essentiellement de la fréquence et de la température.

### 1.4.2 Différents traitements

Ces dernières années, l'industrie aéronautique a remplacé ses structures métalliques par des structures en matériaux composites afin de gagner en poids et en nombre de pièces. Les matériaux composites possèdent, de par le coefficient d'amortissement de la matrice, un meilleur amortissement interne que les matériaux métalliques. Cependant, la réduction significative du nombre total de pièces grâce aux matériaux composites réduit grandement l'amortissement structural de l'ensemble. De plus, pour une même énergie d'activation, des pièces de masse moindres auront de plus grandes amplitudes, ces dernières pouvant provoquer des délaminations ou des bris. Il reste donc important de contrôler l'amortissement de ces structures afin de minimiser la propagation de vibrations mécaniques et acoustiques. Les vibrations mécaniques soumettent les matériaux à des effets de fatigue et peuvent mener le matériau au déclassement ou à la rupture. Les vibrations acoustiques viennent quant à elles perturber le confort des passagers.

Les directions prises dans le traitement de l'amortissement des matériaux composites se déclinent en deux catégories principales : microscopique et macroscopique. A l'échelle microscopique, les recherches s'intéressent à l'amortissement interne en cherchant à optimiser les performances des fibres, de la matrice ou encore de leur interface. Une interface de mauvaise qualité entre les fibres et la matrice dissipera par exemple plus d'énergie par frottement et sera donc plus performante du point de vue de l'amortissement. Finegan et Gibson [35] montrent comment des traitements spéciaux sur les fibres (les endroits d'un matériau à fort coefficient de friction, ou améliorer leur profil de rugosité) permettent de contrôler cet effet. Suarez [36] montre également que l'utilisation de fibres courtes (vs les fibres continues) permet d'augmenter l'amortissement des matériaux en augmentant les points de contact entre les fibres.

De nombreuses recherches s'intéressent également aux optimisations macroscopiques, celles-ci étant généralement plus faciles à mettre en place. La qualité de l'interface âme/peaux, l'orientation des fibres ainsi que la séquence d'empilement sont par exemple des pistes investiguées [37].

Si l'optimisation des matériaux permet d'améliorer les performances des matériaux composites, le traitement de la structure est également à envisager. Ce traitement peut être actif ou passif. Typiquement, un amortisseur actif se compose d'actuateurs produisant un signal en opposition de phase avec la vibration [38]. Ce système s'accompagne d'une source d'énergie et d'une partie électronique. Ainsi, ces techniques viennent complexifier la structure et leur ajoute de la masse. C'est pourquoi, aujourd'hui, l'industrie aéronautique cherche à répandre des techniques passives utilisant des matériaux viscoélastiques [39], [40]. Introduits dans les années 60, ces traitements ont d'abord visé des applications non-commerciales. On les retrouve désormais pour des applications courantes sous les formes suivantes :

- Traitement libre
- Traitement constraint
- Traitement interlaminaire

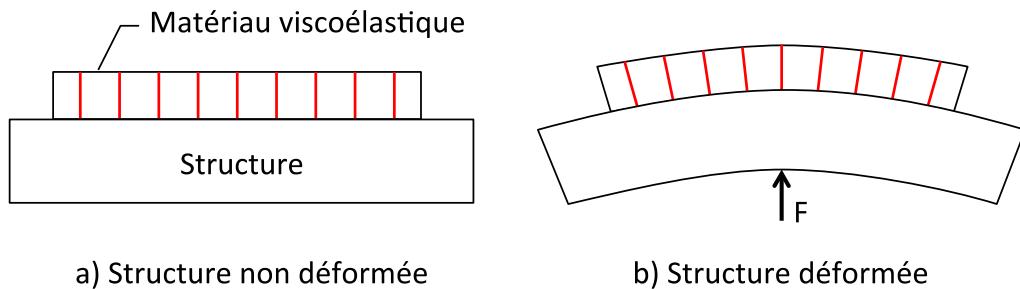


Figure 1.15 : Traitement libre

Le traitement libre (Figure 1.15) consiste à coller un matériau viscoélastique sur la structure. Lorsque celle-ci est sollicitée en flexion, le viscoélastique se déforme en tension/compression selon la déformée de la poutre. Le matériau viscoélastique dissipe alors de l'énergie sous forme de chaleur. L'efficacité du traitement augmente lorsque l'on augmente sa longueur ou son

épaisseur mais cela au détriment du poids de la structure. Cependant, Lall et al [41] montrent expérimentalement qu'un traitement localisé judicieusement peut s'avérer très efficace.

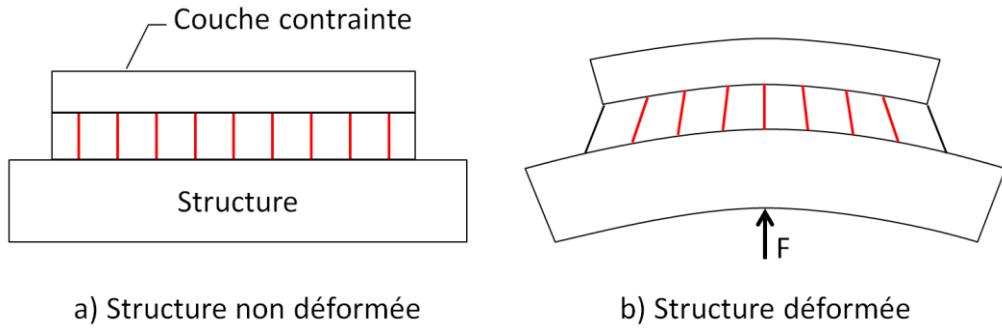


Figure 1.16 : Traitement contraint

Le traitement contraint (Figure 1.16) augmente la capacité de dissipation en contraignant la couche viscoélastique par une plaque rigide collée. Le viscoélastique se déforme alors par cisaillement et les déformations sont plus importantes [42].

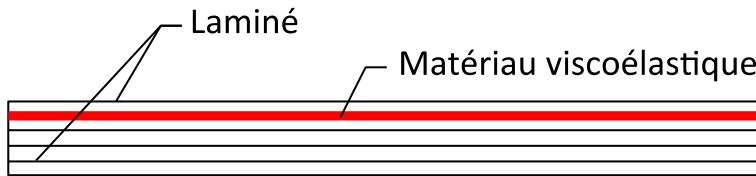


Figure 1.17 : Traitement interlaminaire

Une évolution plus récente de cette technique consiste à insérer la couche viscoélastique directement entre les plis des matériaux composites remplaçant peu à peu les structures métalliques (Figure 1.17). Du point de vue de la masse, cette technique est très intéressante. Cependant, elle implique de résoudre les problèmes d'amortissement dès la phase de design, le matériau devant être fabriqué en conséquence.

En conclusion, l'insertion de couches viscoélastiques entre les plis d'un stratifié semble être la méthode d'amortissement la plus efficace en limitant l'ajout de masse. Adapter cette technique

aux structures sandwichs permettrait donc d'obtenir des structures rigides, légères et efficaces du point de vue de l'amortissement par l'effet combiné du nid d'abeille et du viscoélastique.

### 1.4.3 Modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques

Il existe différents modèles pour représenter le comportement des matériaux viscoélastiques, l'ouvrage de Ferry [43] en présente quelque uns. Nous nous intéresserons ici aux trois modèles les plus couramment utilisés dans les calculs d'amortissement.

#### 1.4.3.1 Le module complexe

L'utilisation d'un module de rigidité complexe est la méthode la plus répandue, elle est également la plus simple. Le comportement du matériau viscoélastique est caractérisé par son module de cisaillement complexe  $G^*$ , dépendant de la fréquence, à une température de référence  $T_0$ , exprimé sous la forme :

$$G^*(\omega) \Big|_{T=T_0} = G_s(\omega)(1 + j\eta(\omega)) \quad (1.18)$$

$$\eta(\omega) = \frac{G_l(\omega)}{G_s(\omega)} \quad (1.19)$$

où  $G_l$  et  $G_s$  sont les modules de perte et de restauration. Le facteur de perte,  $\eta$ , est représentatif de la capacité amortissante du matériau viscoélastique. Pouvant prendre une valeur supérieure à 1, il ne représente pas directement le taux d'amortissement mais plutôt sa capacité amortissante [44]. L'ensemble de ces propriétés dépend de la fréquence. Barkanov [45] montre l'évolution du facteur de perte avec la fréquence (Figure 1.18). Cependant, de nombreux auteurs ont considéré ses propriétés comme étant constantes [46].

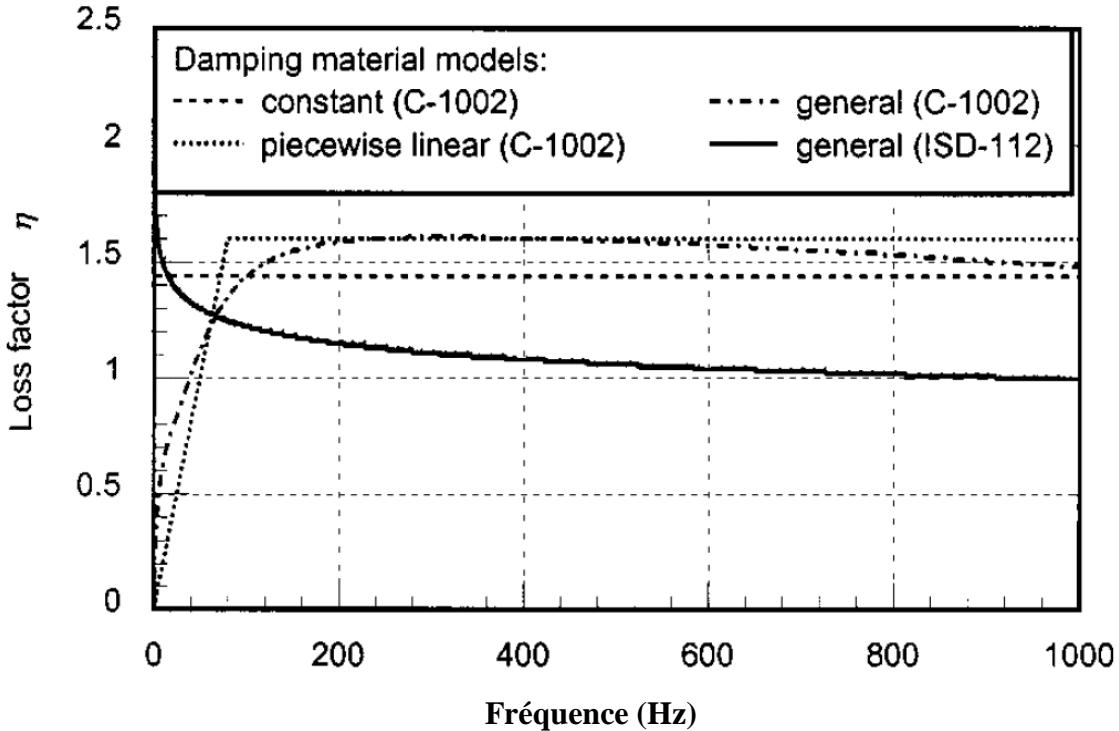


Figure 1.18 : Évolution du facteur de perte avec la fréquence [45]

Un facteur de perte de 1.46 est communément accepté dans la littérature comme une valeur moyenne pour les matériaux viscoélastiques [44], [46]–[49].

Ce modèle simple reste toutefois assez approximatif à cause de sa non dépendance en fréquence [50], [51]. Barkanov [45] montre que l'approximation faite est toutefois valide pour des fréquences pas trop faibles, supérieures à 100 Hz.

#### 1.4.3.2 Le modèle GHM

Du nom de ses développeurs Golla, Hughes et McTavish, le modèle GHM décrit le comportement viscoélastique comme une somme de mini-oscillateurs. Le module de cisaillement s'exprime dans le domaine de Laplace par l'équation (1.20) [52].

$$sG^*(s) = G^\infty \left[ 1 + \sum_k \alpha_k \frac{s^2 + 2\xi_k \omega_k s}{s^2 + 2\xi_k \omega_k + \omega_k^2} \right] \quad (1.20)$$

où  $G^\infty$  est la valeur d'équilibre du module de relaxation du matériau (MPa),  $\alpha_k$  est un facteur participatif positif,  $\xi_k$  est le taux d'amortissement et  $\omega_k$  la pulsation naturelle (rad/s) de chacun des  $k$  mini-oscillateurs. «  $s$  » est l'opérateur de Laplace. L'atout du modèle GHM est sa capacité à représenter le comportement viscoélastique dans le temps. Cependant, la détermination des paramètres nécessaires s'avère souvent difficile [44].

### 1.4.3.3 Série de Prony

Un autre modèle utilise les séries de Prony. Le module de cisaillement s'exprime dans le domaine de Fourier par l'équation (1.21) [53].

$$G^*(\omega) = G_0 \left[ 1 - \sum_{n=1}^N g_n + \sum_{n=1}^N \frac{j\omega g_n \tau_n}{1 + j\omega \tau_n} \right] \quad (1.21)$$

où  $g_n$  sont les constantes de Prony,  $\tau_n$  sont dits des temps de relaxation,  $\omega$  est la fréquence radiale (rad/s) et  $G_0$  le module initial (MPa). La force de cette méthode réside dans sa capacité à décrire le comportement des matériaux viscoélastiques dans une large bande de fréquence. De plus, elle permet un passage aisément entre les domaines temporel et fréquentiel (par transformée inverse), et inversement. Toutefois, la précision de cette méthode est directement liée au nombre de termes  $N$  utilisés et le temps de calcul peut ainsi rapidement augmenter.

Il existe enfin d'autres techniques permettant d'exprimer le module de cisaillement en fonction de la fréquence. Ces techniques sont généralement empiriques et spécifiques à un matériau [45].

### 1.4.4 Revue des travaux

Comme nous avons pu le voir, de nombreux modèles analytiques modélisant le comportement des structures sandwichs ont été développés [2], [22]. Bien que le comportement des coeurs en nid d'abeille soit difficile à représenter, plusieurs auteurs proposent des solutions [23], [24]. Les propriétés effectives de ces matériaux sont obtenues analytiquement [24], [28], [30], [31]. L'insertion de matériaux viscoélastiques entre les plis des peaux du sandwich représente la

véritable originalité scientifique de ce mémoire. A la connaissance de l'auteur, il n'existe pas de modèle permettant de déterminer l'amortissement de telles structures. Cependant, la modélisation des traitements viscoélastique est déjà bien maîtrisée notamment grâce aux travaux sur les traitements constraint dits PCLD (« Partial Constrained Layer Damping ») [44], [54] et à certaines études expérimentales.

- Traitements PCLD :

Khalfi [49] a récemment présenté une étude de ces traitements en s'intéressant notamment à l'effet de la position, de l'épaisseur et de la surface du patch. Son modèle, illustré à la Figure 1.19, utilise des séries de Prony pour modéliser le comportement viscoélastique. Il a ainsi montré que les zones de cisaillement maximal du patch amortissant si situaient au voisinage des coins, sur les crêtes modales et à côté des bords centraux de la plaque. Le facteur de perte atteint son maximum pour une épaisseur de matériau viscoélastique équivalente à la moitié de celle de la couche contrainte. Le minimum est atteint pour des épaisseurs égales. Les résultats de son étude sur l'effet de la surface du patch sont donnés dans la Figure 1.20. Le patch est initialement placé au centre, sa surface varie de 5% de la surface de la plaque de base jusque 100%. On observe alors que le maximum d'amortissement n'est pas proportionnel à la taille du patch. Il est atteint pour une couverture partielle de l'ordre de 75%.

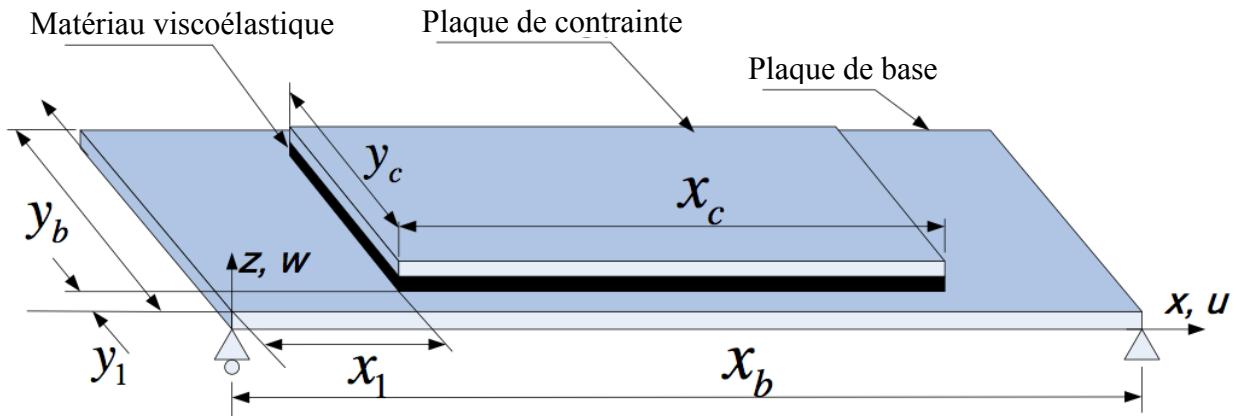


Figure 1.19 : Traitement PCLD

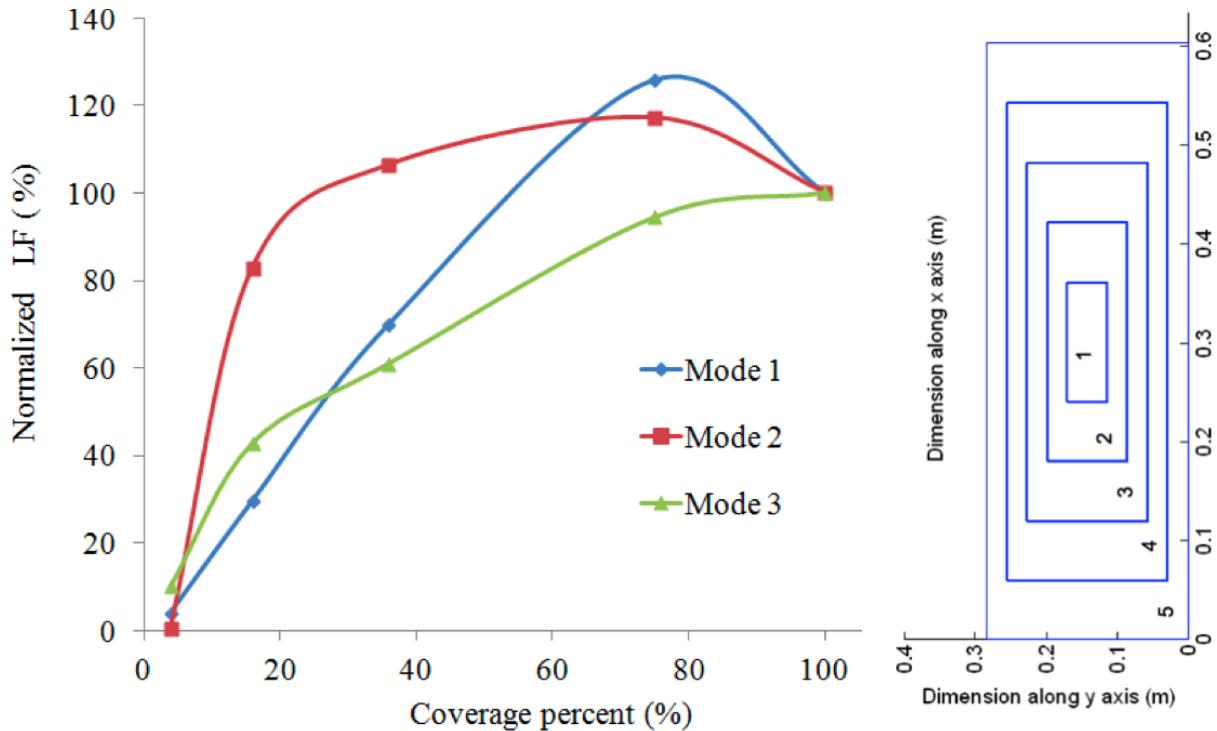


Figure 1.20 : Traitement PCLD, impact de la surface du patch sur le facteur de perte (LF – « Loss Factor »)

- Études expérimentales :

Même s'il n'existe pas de modèle analytique, plusieurs études expérimentales ont déjà traitées le sujet. D'abord, plusieurs travaux ont montré l'efficacité de ces traitements [55]–[57]. Ces traitements permettent d'atteindre un taux d'amortissement supérieur par rapport au matériau de base. Berthelot et Sefrani [55] montrent l'amélioration des performances amortissantes d'un composite monolithique à fibres unidirectionnelles  $[+0/-0]$  par insertion d'une couche viscoélastique. Ils étudient également l'impact de l'orientation des fibres sur le facteur de perte (Figure 1.21). Les résultats montrent d'abord que les traitements sont efficaces par rapport à la poutre de référence. Ensuite, on observe que l'amortissement optimal est atteint pour un composite  $[\pm 30^\circ]$ .

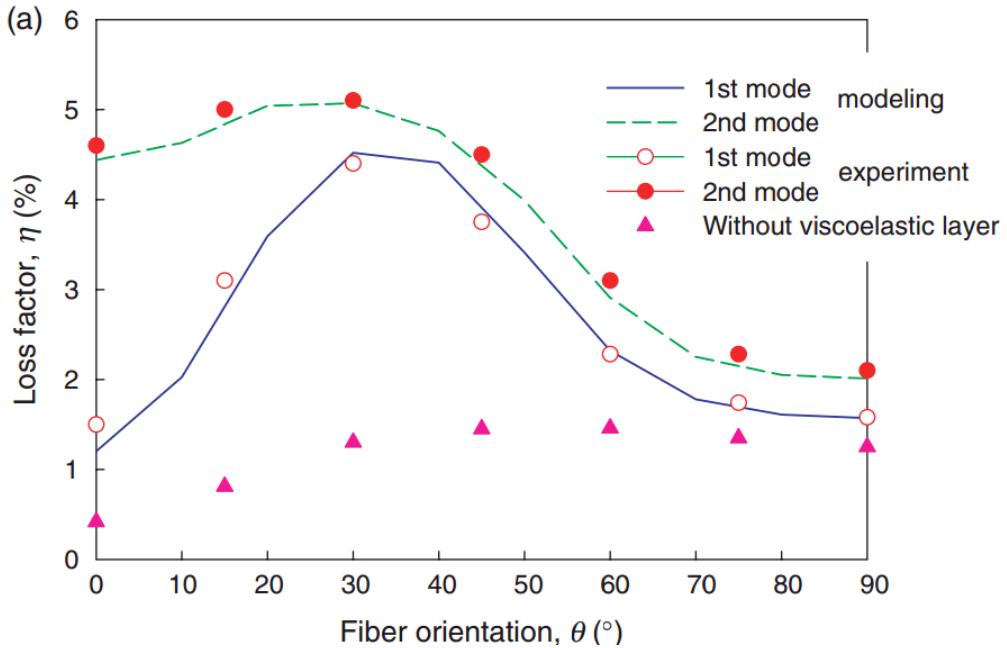


Figure 1.21 : Traitement d'un composite unidirectionnel, effet de l'orientation des plis [55]

D'autres auteurs tels He et Rao [58] ont travaillé sur l'effet des concentrations de contraintes engendrées par ces traitements et pouvant mener à des délaminations (Figure 1.22).

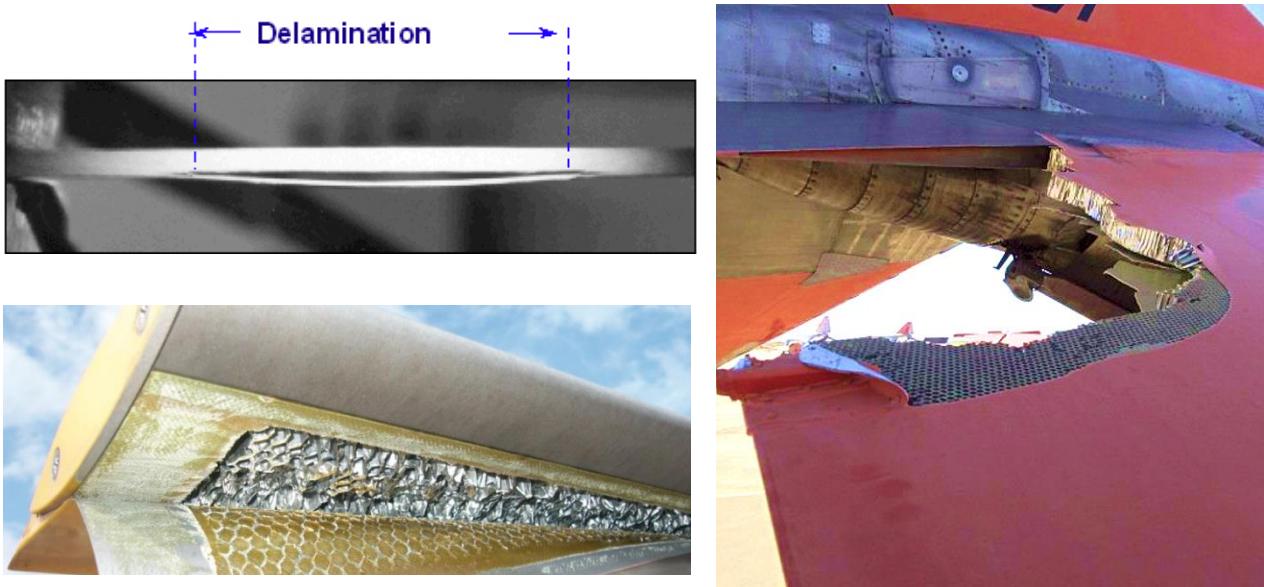


Figure 1.22 : Exemples de délamination

Plus récemment, Sola [6], [57] a étudié les caractéristiques de matériaux composites à structure sandwich comportant des modifications dont des inserts interlaminaires de couches viscoélastiques. Toutefois la lecture de ces travaux montre que la détermination des facteurs d'amortissement est délicate. La répétabilité des mesures effectuées n'est souvent pas excellente et les résultats se tiennent dans des écarts de l'ordre de 15%. De plus, les techniques d'analyses des données expérimentales ne sont généralement pas expliquées.

## Chapitre 2 OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE

Les structures composites, telles les carlingues d'avion, réalisées en panneaux sandwichs sont soumises à de nombreuses vibrations sources de bruit et de défaillance mécanique. Les traitements consistants en l'addition d'une couche contrainte externe d'amortissement sont efficaces mais ajoutent une masse conséquente à la structure. De plus, leur mise en œuvre se fait sur les structures assemblées, ce qui limite l'accès et laisse peu de choix sur l'emplacement du traitement. Il est donc important de développer le traitement de l'amortissement dès la phase de conception, notamment en insérant des couches viscoélastiques, totales ou partielles, entre les plis des peaux.

L'objectif principal de ce mémoire est de développer un modèle analytique permettant de déterminer les facteurs de perte et les fréquences naturelles de poutres composites sandwich contenant des inserts viscoélastiques entre les plis de ses peaux. A travers les différents travaux présentés, la revue de la littérature a permis de dégager certains points importants.

D'abord, bien qu'il existe quelques études expérimentales sur le sujet, aucune étude analytique ne traite de l'amortissement de structure sandwich à âme en nid d'abeille contenant des inserts viscoélastiques. Ces panneaux sont constitués de deux peaux en composites laminés encadrant une âme de faible densité, ici, en nid d'abeille. Les théories des poutres menant à la théorie classique des stratifiés sont largement documentées dans la littérature. La conception alvéolaire des âmes en nid d'abeille en fait des structures fortement orthotropes dont la modélisation est moins aisée. De plus, ils se déforment fortement en cisaillement. Cependant, différents modèles approchent leur comportement vibratoire en exprimant leurs propriétés effectives. L'insertion de couches viscoélastiques est déjà traitée dans le cas de composites stratifiés simples. Toutefois, ces études n'existent pas pour des structures sandwich à nid d'abeille.

D'autre part, la littérature recense quelques travaux expérimentaux portant sur les poutres sandwichs avec inserts viscoélastiques. Cependant, la mesure de l'amortissement n'est pas simple; elle nécessite un banc d'essai et un protocole de mesure dont la fiabilité et la répétabilité ont été vérifiées. Elles dépendent également du traitement de signal réalisé. Malheureusement, les rapports existants ne donnent généralement pas ces informations et la fiabilité des résultats

présentés n'est donc pas assurée. Ainsi, afin d'obtenir des données fiables pour valider le modèle, ce mémoire inclut une partie expérimentale.

Par conséquent, les objectifs poursuivis dans cette étude sont :

1. de développer un modèle analytique permettant de déterminer les facteurs de perte et les fréquences naturelles de flexion de poutres composites sandwich avec inserts viscoélastiques.
2. de fabriquer un panel de poutre contenant des inserts viscoélastiques. Un banc d'essai devra être conçu et un protocole de mesure mis en place afin de permettre l'excitation de la poutre et la capture de son mouvement. La fiabilité et la répétabilité du montage expérimental devront être vérifiées.
3. de valider le modèle analytique développé grâce aux mesures expérimentales réalisées ainsi que des résultats de la littérature. Les valeurs comparées seront les fréquences naturelles et les facteurs de perte des quelques premiers modes pour chaque poutre (i.e. 4 à 5 modes selon la référence).
4. d'utiliser le modèle afin d'étudier l'effet de différents paramètres (longueur du traitement, position, épaisseur) sur le facteur de perte et les fréquences naturelles.

Le modèle est programmé sous Maple et Matlab. Il doit permettre de mener une étude paramétrique où l'ensemble des caractéristiques des peaux, du nid d'abeille et du traitement viscoélastique peuvent être variés afin d'étudier leurs effets sur le facteur de perte. Diverses conditions aux limites seront envisagées. La méthode utilisée se résume au protocole suivant :

- Expression du champ de déplacement du système;
- Calcul des énergies cinétiques et potentielles du système. Le caractère dissipatif du traitement viscoélastique et du nid d'abeille est modélisé par un module complexe;
- Discrétisation des déplacements par la méthode des modes assumés;
- Calcul de l'équation de mouvement par les équations de Lagrange;
- Résolution du problème aux valeurs propres;

Ainsi, le chapitre 3 portera sur le développement du modèle analytique. Le chapitre 4 s'intéressera à la fabrication des poutres et du banc d'essai. Les protocoles de mesure et de traitement seront présentés. L'analyse des résultats permettra de donner les premières conclusions sur l'efficacité des différents traitements proposés. Enfin, le chapitre 5 permettra la validation du modèle développé. Il inclut également une étude paramétrique utilisant le modèle développé.

## Chapitre 3 MODÈLE ANALYTIQUE

### 3.1 Introduction

Les structures considérées sont des poutres sandwichs avec une âme en nid d'abeille et des peaux stratifiées de composite telles que présentées à la Figure 3.1. Le traitement viscoélastique consiste en l'insertion d'un patch entre les plis des peaux (Figure 3.2). Le traitement peut être complet ou partiel (i.e. sur toute la longueur ou sur une partie seulement de la poutre), symétrique ou non (i.e. un traitement dans la peau supérieur se retrouve de façon symétrique dans la peau inférieure), multiple (i.e. plusieurs patchs peuvent être insérés à différents endroits).

Ces trois composantes, nid d'abeille, peaux et viscoélastique, ont des comportements vibratoires pouvant être modélisés de manières différentes :

- L'âme en nid d'abeille est épaisse. De par sa structure, elle se déforme fortement en cisaillement. Le modèle de Nilsson [23] sera utilisé.
- Les peaux sont des stratifiés de composite de faible épaisseur. Bien que plus approximatif, le modèle d'Euler-Bernoulli permettra une bonne représentation.
- Le viscoélastique fera l'objet d'un traitement particulier.

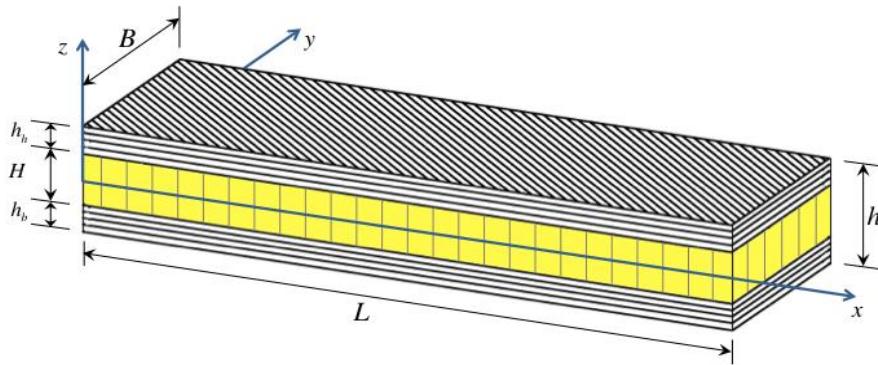


Figure 3.1 : Modèle d'un composite sandwich non traité

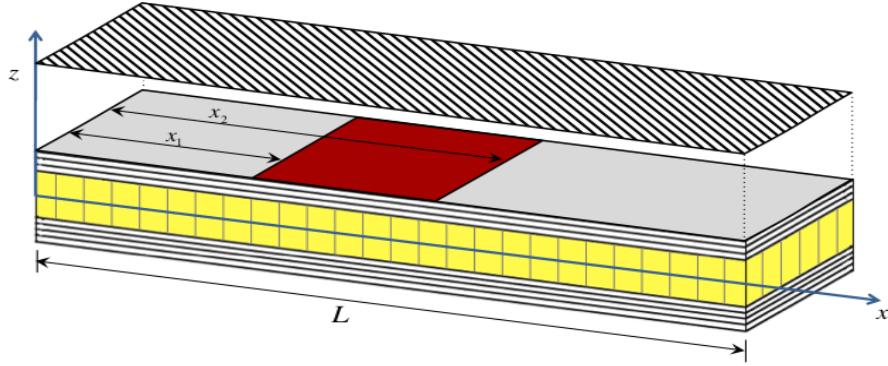


Figure 3.2 : Modèle d'un composite sandwich traité (dans cette illustration, une pièce viscoélastique est insérée sous le pli externe de la peau supérieure d'un sandwich quelconque)

## 3.2 Modélisation du nid d'abeille

Les cellules du nid d'abeille en font une structure orthotrope, c'est-à-dire que les caractéristiques dynamiques changent selon l'orientation considérée. La déformée d'un panneau en nid d'abeille soumis à une sollicitation en flexion n'est pas seulement causée par la flexion pure mais aussi par le cisaillement et la rotation dans l'âme. Ainsi, afin de représenter au mieux le comportement vibratoire de nos poutres sans faire appel à des théories complexes d'ordre élevé, le modèle de Nilsson [23], reprenant certains principes de la théorie de Timoshenko [11], sera utilisé. Toutefois, les travaux de Nilsson s'intéressent à une structure sandwich dont les peaux sont des matériaux homogènes et non à un nid d'abeille seul. Deux solutions sont alors envisageables :

- Réaliser l'homogénéisation des peaux stratifiées afin d'en extraire les propriétés apparentes.
- Annuler les termes associés aux peaux homogènes dans le modèle

La première solution proposée apparaît comme simple et rapide. Cependant, la présence des patchs viscoélastiques entre les plis des peaux nous oblige à exprimer le déplacement relatif de chacune des couches par rapport à ses voisines. En conséquence, l'homogénéisation n'est pas envisageable.

La seconde solution est donc à privilégier. Cependant, plusieurs étapes menant aux équations d'onde associées au champ de déplacement du nid d'abeille ne sont pas présentées dans les

articles de Nilsson. Ainsi, dans cette partie et afin de coller au modèle, le nid d'abeille sera modélisé avec deux peaux homogènes fictives dont on fera, par la suite, tendre les caractéristiques vers zéro.

Nous allons tout d'abord définir le modèle que nous allons considérer pour représenter le nid d'abeille. Les déplacements pourront alors être exprimés ainsi que les énergies cinétiques et de déformations associées. Les déplacements seront alors supposés comme étant fonction de nombres d'ondes à déterminer. Enfin, l'équation de mouvement sera calculée pour différentes conditions aux limites.

### 3.2.1 Géométrie et déplacement

Le nid d'abeille est donc modélisé selon le modèle de Nilsson comme un sandwich à 3 couches (le nid d'abeille et ses 2 peaux fictives), tel que décrit par la Figure 3.3. Figure 3.4 montre la déformée d'une poutre sollicitée en flexion due à la flexion pure d'une part (a), et due au cisaillement pur d'autre part (b). En réalité, ces deux phénomènes se combinent tel qu'illustré à la Figure 3.5. Cette figure montre la différence avec la théorie classique d'Euler-Bernoulli qui ne tient pas compte de l'angle de cisaillement. Elle montre aussi les déplacements considérés par le modèle, à savoir, le déplacement transversal  $w$  et le déplacement longitudinal  $u$ .

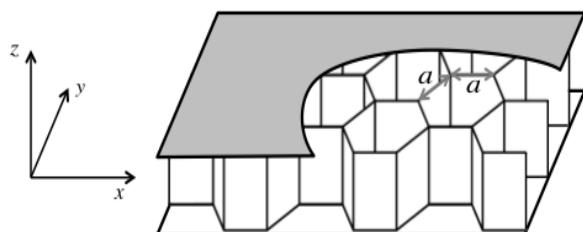


Figure 3.3 : Nid d'abeille à maille hexagonale

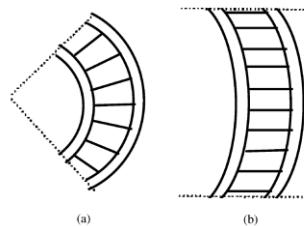


Figure 3.4 : Déformée due à la flexion (a) et au cisaillement (b)

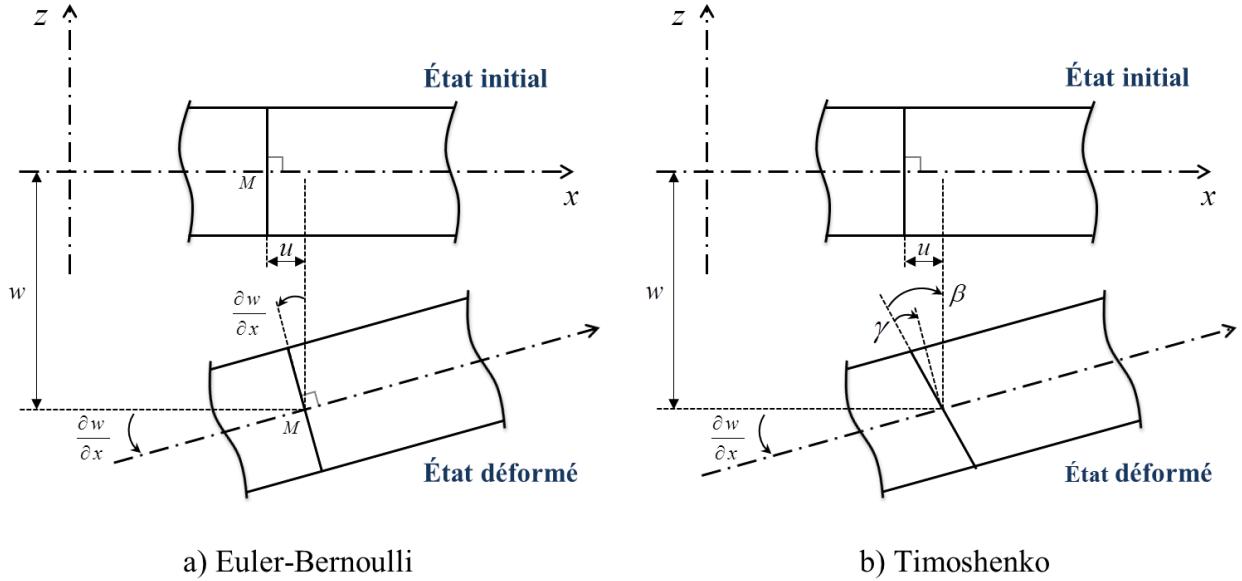


Figure 3.5 : Représentation du cisaillement

La courbure totale du sandwich s'exprime donc en fonction de l'angle de flexion  $\beta$  et de cisaillement  $\gamma$  par :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \gamma + \beta \quad (3.1)$$

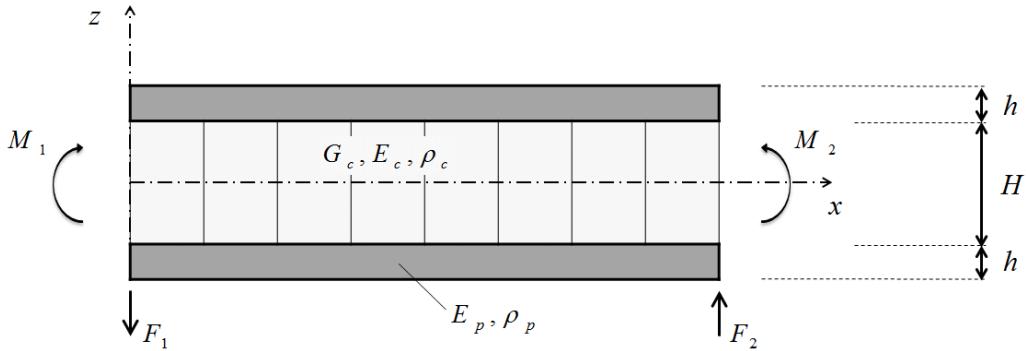


Figure 3.6 : Modèle du nid d'abeille contraint

La Figure 3.6 présente le modèle général du nid d'abeille. La poutre est de longueur  $L$  et de largeur  $B$ . Les caractéristiques du nid d'abeille sont son module de Coulomb  $G_c$ , son module d'Young  $E_c$  et sa masse volumique  $\rho_c$ . Il est contraint par deux poutres homogènes d'épaisseur  $h$ , de module d'Young  $E_p$  et de masse volumique  $\rho_p$ .

Le sandwich considéré est soumis à des contraintes générales tel que présentées à la Figure 3.6. Les moments  $M_1$  et  $M_2$  et les efforts  $F_1$  et  $F_2$  représentent les conditions aux limites du sandwich.

### 3.2.2 Définition des énergies

Les équations différentielles régissant  $w$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  seront déterminées par le principe de Hamilton [59] défini par l'équation (3.2).  $U_c$  est l'énergie potentielle par unité de longueur du système,  $T_c$  est l'énergie cinétique par unité de longueur et  $A_c$  est l'énergie potentielle par unité de longueur des forces externes conservatives.

$$\delta \iint (U_c - T_c + A_c) dx dt = 0 \quad (3.2)$$

L'indice «  $c$  » sera utilisé comme référence au nid d'abeille.

Nous supposerons que la rigidité de l'âme en nid d'abeille est très faible dans la direction  $x$  [24], [31]. Dans la direction  $z$ , elle doit être suffisante pour assurer le déplacement en phase des deux peaux. La rigidité en flexion par unité de largeur de la poutre se calcule par :

$$\begin{aligned} D_1 &= \int E z^2 dz \\ D_1 &= \int_{-(\frac{H}{2}+h)}^{-\frac{H}{2}} E_p z^2 dz + \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} E_c z^2 dz + \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}+h} E_p z^2 dz \\ D_1 &= E_p \left( \frac{\left(-\frac{H}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{H}{2}-h\right)^3}{3} \right) + E_c \left( \frac{\left(\frac{H}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{H}{2}\right)^3}{3} \right) + E_p \left( \frac{\left(\frac{H}{2}+h\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{H}{2}\right)^3}{3} \right) \\ D_1 &= \frac{E_c H^3}{12} + E_p \left( \frac{3H^2 h}{2} + 3Hh^2 + 2h^3 \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Soit :

$$D_1 = \frac{E_c H^3}{12} + E_p \left( \frac{H^2 h}{2} + Hh^2 + \frac{2h^3}{3} \right) \quad (3.4)$$

En comparaison, la rigidité en flexion d'une peau est :

$$D_2 = \frac{E_p h^3}{12} \quad (3.5)$$

De même, le calcul du moment d'inertie par unité de largeur donne :

$$I_{tot} = \frac{\rho_c H^3}{12} + \rho_p \left( \frac{H^2 h}{2} + H h^2 + \frac{2h^3}{3} \right) \quad (3.6)$$

et la masse surfacique des trois couches est :

$$\mu_{tot} = 2h\rho_p + H\rho_c. \quad (3.7)$$

Afin d'appliquer le principe de Hamilton, les énergies cinétiques et potentielles doivent être exprimées en fonction des déplacements de la poutre définis par  $w$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . A des fins de simplification, le déplacement longitudinal  $u$  sera négligé. L'énergie potentielle totale de la poutre est alors due à la flexion pure de la poutre, la flexion des deux peaux et du cisaillement de l'âme. L'énergie potentielle s'exprime alors sous la forme :

$$U_c = \frac{B}{2} \int_0^L \left( D_1 \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + 2D_2 \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 + G_c H \gamma^2 \right) dx \quad (3.8)$$

L'énergie cinétique est quant à elle due au déplacement vertical  $w$  de la poutre et à la rotation de la section. L'énergie cinétique s'écrit donc :

$$T_c = \frac{B}{2} \int_0^L \left( \mu_{tot} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_{tot} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right) dx \quad (3.9)$$

L'énergie potentielle associée aux forces externes conservatives représentant les conditions aux limites, telles que définies à la Figure 1.9, est donnée en équation (3.10).  $F$  et  $M$  sont respectivement les forces et les moments par unité de largeur de poutre.

$$\begin{aligned} -A_c &= B[F_2 w(L) - F_1 w(0) - M_2 \beta(L) + M_1 \beta(0)] \\ &= B[Fw - M\beta]_0^L \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.2.3 Détermination des équations d'onde

En insérant les équations (3.8)-(3.10) dans l'expression de Hamilton (3.2) et en exprimant le résultat uniquement en fonction des déplacements  $w$  et  $\beta$  grâce à l'équation (1.18), on obtient :

$$\delta \iint \left\{ D_1 \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + 2D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + G_c H \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta \right)^2 - \mu_{tot} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - I_{tot} \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right\} \frac{dx dt}{2} - \delta \iint [Fw - M\beta]_0^L dt = 0 \quad (3.11)$$

Par intégration sur le temps et la longueur et en résolvant le problème variationnel, Nilsson et al [60] montrent que le déplacement  $w$  et la rotation  $\beta$  satisfont les équations différentielles (3.12) et (3.13). Cependant, il est à noter que ces équations simplifiées ne sont applicables que pour des configurations de nid d'abeille à maille hexagonale.

$$-G_e H \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + 2D_2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} \right) + \mu_{tot} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.12)$$

$$-\frac{D_1 \partial^2 \beta}{\partial x^2} + 2D_2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} \right) + I_{tot} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - G_c H \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta \right) = 0 \quad (3.13)$$

Par élimination de  $\beta$ , on obtient l'équation de  $w$ , d'ordre 6 :

$$\begin{aligned} -2D_1 D_2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 2D_2 I_c \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial t^2} - (D_1 \mu_{tot} + 2D_2 \mu_{tot} + I_{tot} G_c H) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \\ + G_c H \left( D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu_{tot} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + I_{tot} \mu_{tot} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

De même, l'élimination de  $w$  fournit l'équation pour  $\beta$  qui identique à celle de  $w$  :

$$\begin{aligned} -2D_1 D_2 \frac{\partial^6 \beta}{\partial x^6} + 2D_2 I_{tot} \frac{\partial^6 \beta}{\partial x^4 \partial t^2} - (D_1 \mu_{tot} + 2D_2 \mu_{tot} + I_{tot} G_c H) \frac{\partial^4 \beta}{\partial x^2 \partial t^2} \\ + G_c H \left( D_1 \frac{\partial^4 \beta}{\partial x^4} + \mu_{tot} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \right) + I_{tot} \mu_{tot} \frac{\partial^4 \beta}{\partial t^4} = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'angle de cisaillement  $\gamma$  suit la même équation différentielle que  $\beta$  (3.15). Les conditions aux limites à satisfaire sont également fournies par l'expression variationnelle (3.11). Pour chaque extrémité, soit un déplacement ( $w, \beta$ ) est nul et dans ce cas la résultante associée (force  $F$ , moment  $M$ ) est non-nulle (colonne de gauche) soit il est non nul et donc la résultante doit être nulle (colonne de droite).

$$\begin{cases} w = 0 \\ F = G_c H \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \beta \right) - 2D_2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} \right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} w \neq 0 \\ F = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ M = -D_1 \frac{\partial \beta}{\partial x} + 2D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \beta \neq 0 \\ M = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

Pour une extrémité encastrée, le déplacement  $w$  et la rotation  $\beta$  doivent être nuls à extrémité. L'enca斯特rement ne permet pas non plus la flexion à l'enca斯特rement ce qui implique  $w = \partial w / \partial x = 0$ .

Pour une extrémité libre, l'effort tranchant  $F$  et le moment fléchissant  $M$  sont nuls et donnés par l'équation (3.16) et (3.17). La rotation  $\partial w / \partial x$  étant non nulle, l'équation (3.18) est satisfaite seulement si  $\partial^2 w / \partial x^2 = \partial \beta / \partial x$ . Dans ce cas, puisque  $M = 0$ , l'équation (3.17) donne  $\partial \beta / \partial x = 0$  et donc  $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ . Sachant que  $F$ , défini par (3.16), est nul, et en injectant le résultat dans (3.13), on obtient la condition  $I_p \partial^2 \beta / \partial t^2 = D_1 \partial^2 \beta / \partial x^2$ .

Pour la condition simplement supportée, le déplacement  $w$  et le moment sont nuls au point de contact. Le moment étant nul et la rotation  $\partial w / \partial x$  étant permise, les équations (3.16) et (3.17) donnent  $\partial \beta / \partial x = 0$  et  $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ . Ces conditions aux limites sont résumées en Tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Conditions aux limites [23]

Encastré	$w = 0$	$\beta = 0$	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$
Simplement supporté	$w = 0$	$\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$
Libre	$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$	$D_1 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = I_{tot} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}$

### 3.2.4 Détermination des nombres d'onde

En supposant une solution de la forme  $w = e^{(i\omega t - k_x x)}$  pour l'équation d'onde (3.14), le nombre d'onde  $k_x$  doit vérifier l'équation (3.19) [23],  $\omega$  est la fréquence exprimée en rad/s.

$$2D_2 k_x^6 - \frac{2D_2}{D_1} I_{tot} k_x^4 \omega^2 - \left( \mu_{tot} + \frac{2D_2}{D_1} \mu_{tot} + \frac{I_{tot} G_c H}{D_1} \right) k_x^2 \omega^2 + G_c H \left( k_x^4 - \frac{\mu_{tot}}{D_1} \omega^2 \right) + \frac{I_{tot} \mu_c}{D_1} \omega^4 = 0 \quad (3.19)$$

Les six solutions conjuguées de cette équation sont données sous la forme  $k_x = \pm \kappa_1, \pm i\kappa_2, \pm i\kappa_3$  où  $\kappa_1$  et  $\kappa_3$  sont réels tandis que  $\kappa_2$  passe de réel à imaginaire quand augmente la fréquence. En définissant  $G_c$  sous forme complexe  $G_c^* = G_{0c}(1 + i\eta_c)$ , on intègre le facteur de perte du nid d'abeille, son effet viscoélastique. Nous verrons par la suite comment cette astuce permet de simplifier les calculs.

Les valeurs absolues des 3 nombres d'ondes sont présentées à la Figure 3.7. Afin d'illustrer plus précisément le rôle de ces nombres d'onde, la figure présentée ici est un cas fictif, ne correspondant pas exactement aux caractéristiques des poutres étudiées ici.

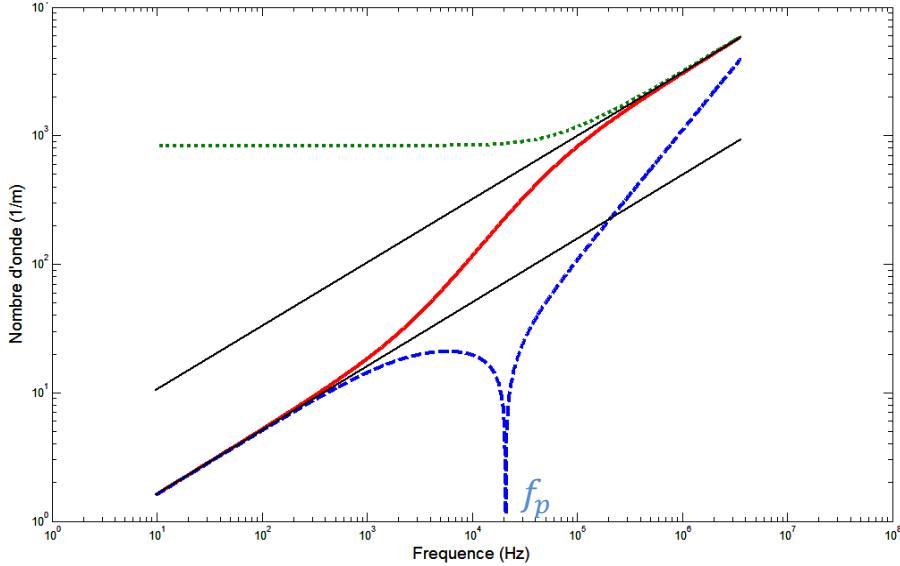


Figure 3.7 : Évolution illustrative du module des nombres d'onde avec la fréquence

: —,  $\kappa_1$  ; - - -,  $\kappa_2$  ; ....,  $\kappa_3$ .

Les lignes noires parallèles observées sont les asymptotes des nombres d'ondes. L'asymptote inférieure représente le nombre d'onde correspondant à la flexion pure de la poutre entière. L'asymptote supérieure représente le nombre d'onde correspondant à la flexion pure d'une seule des peaux. Ces parallèles sont les asymptotes du nombre d'onde  $\kappa_1$  en basses et hautes fréquences. En moyenne fréquence, les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation deviennent importants et  $\kappa_1$  passe de la parallèle inférieure à la supérieure.

La valeur constante de la courbe pointillée verte en basse fréquence représente la rigidité de l'âme en nid d'abeille. Plus sa rigidité augmente, plus la courbe est décalée vers le bas. Lorsque la fréquence augmente,  $\kappa_3$  tend vers la limite associée à la flexion pure de l'une des peaux.

La courbe tiretée bleue représente l'évolution du module nombre d'onde  $\kappa_2$ . En basse fréquence, la courbe suit l'asymptote de la flexion pure de la poutre entière. Puis, quand la fréquence augmente, le module  $\kappa_2$  tends vers 0 pour la fréquence  $f_p$  (en Hz), définie par l'équation (3.20). Pour les fréquences inférieures à  $f_p$ ,  $k_x = \pm i\kappa_2$  est imaginaire ; il définit donc la partie évanescente de l'onde. Pour les fréquences supérieures à  $f_p$ ,  $k_x = \pm i\kappa_2$  devient réel et représente alors la partie propagative de l'onde ; le module  $\kappa_2$  augmente alors rapidement.

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G_c H}{I_{tot}}} \quad (3.20)$$

### 3.2.5 Modes assumés

Comme déterminé précédemment, le déplacement  $w$  et la rotation  $\beta$  doivent satisfaire les équations différentielles (3.14) et (3.15). Ils doivent être exprimés en fonction de  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et  $\kappa_3$ . Nilsson et al [23] proposent les formulations suivantes :

$$w = (A_1 \sin \kappa_1 x + A_2 \cos \kappa_1 x + A_3 e^{-\kappa_2 x} + A_4 e^{\kappa_2(x-L)} + A_5 e^{-\kappa_3 x} + A_6 e^{\kappa_3(x-L)}) e^{i\omega t} \quad (3.21)$$

$$\beta = (B_1 \sin \kappa_1 x + B_2 \cos \kappa_1 x + B_3 e^{-\kappa_2 x} + B_4 e^{\kappa_2(x-L)} + B_5 e^{-\kappa_3 x} + B_6 e^{\kappa_3(x-L)}) e^{i\omega t} \quad (3.22)$$

Les amplitudes  $A_1$ - $A_6$  et  $B_1$ - $B_6$  sont à déterminer à partir des conditions aux limites. Cependant les paramètres  $A_i$  et  $B_i$  ne sont pas indépendants. En introduisant les expressions (3.21) et (3.22) dans l'équation (3.13), on obtient une fonction de  $\sin \kappa_1 x, \cos \kappa_1 x, e^{-\kappa_2 x}, \dots$  devant être valable pour n'importe quelle position  $x$ . Ainsi, chacune des amplitudes des facteurs  $\sin \kappa_1 x, \cos \kappa_1 x, e^{-\kappa_2 x}, \dots$  doit être nulle. En posant  $D_t = D_1 + 2D_2$  et  $\Omega = G_c^* H - \omega^2 I_{tot}$ , on obtient les relations :

$$\begin{aligned} B_1 &= -A_2 \frac{2D_2 \kappa_1^3 + G_e H \kappa_1}{D_t \kappa_1^2 + \Omega} = A_2 X_2, & B_2 &= A_1 \frac{2D_2 \kappa_1^3 + G_e H \kappa_1}{D_t \kappa_1^2 + \Omega} = A_1 X_1, \\ B_3 &= -A_3 \frac{2D_2 \kappa_2^3 - G_e H \kappa_2}{D_t \kappa_2^2 + \Omega} = A_3 X_3, & B_4 &= A_4 \frac{2D_2 \kappa_2^3 + G_e H \kappa_2}{D_t \kappa_2^2 + \Omega} = A_4 X_4, \\ B_5 &= -A_5 \frac{2D_2 \kappa_3^3 + G_e H \kappa_3}{D_t \kappa_3^2 + \Omega} = A_4 X_4, & B_6 &= A_6 \frac{2D_2 \kappa_3^3 + G_e H \kappa_3}{D_t \kappa_3^2 + \Omega} = A_6 X_6, \end{aligned} \quad (3.23)$$

On observe que  $X_1 = -X_2$ ,  $X_3 = -X_4$ ,  $X_5 = -X_6$ .

### 3.2.6 Équation du mouvement et fréquences naturelles

Pour chaque poutre, il existe six conditions aux limites à satisfaire, soit trois à chaque extrémité. Ces conditions permettent de déterminer les amplitudes relatives  $A_i/A_1$  permettant l'obtention de l'équation de mouvement ainsi que les fréquences naturelles.

Un exemple de résolution est présenté ici, soit celui d'une poutre simplement supportée. Les conditions aux limites pour ce cas sont données en Tableau 3.1.

Le déplacement  $w$ , défini par (3.21), et la rotation  $\beta$ , définie par (3.22), peuvent alors être injectés dans l'expression des six conditions aux limites, en  $x = 0$  et  $x = L$ . On obtient un système de six équations ayant pour facteurs  $A_1$ - $A_6$ . Ce dernier peut se mettre sous la forme matricielle (3.24). La première ligne correspond à la condition  $w = 0$  en  $x = 0$  et la seconde en  $x = L$ . Les 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> lignes proviennent de  $\partial\beta/\partial x = 0$  en  $x = 0$  et  $x = L$ . Enfin, les deux dernières lignes dérivent de la condition  $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$  en  $x = 0$  et  $x = L$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & e^{-\kappa_2 L} & 1 & e^{-\kappa_3 L} \\ \sin \kappa_1 L & \cos \kappa_1 L & e^{-\kappa_2 L} & 1 & e^{-\kappa_3 L} & 1 \\ 0 & X_2 \kappa_1 & -X_3 \kappa_2 & X_4 \kappa_2 e^{-\kappa_2 L} & -X_5 \kappa_3 & X_6 \kappa_3 e^{-\kappa_3 L} \\ -X_1 \kappa_1 \sin \kappa_1 L & X_2 \kappa_1 \cos \kappa_1 L & -X_3 \kappa_2 e^{-\kappa_2 L} & X_4 \kappa_2 & -X_5 \kappa_3 e^{-\kappa_3 L} & X_6 \kappa_3 \\ 0 & -\kappa_1^2 & \kappa_1^2 & \kappa_2^2 e^{-\kappa_2 L} & \kappa_3^2 & \kappa_3^2 e^{-\kappa_3 L} \\ -\kappa_1^2 \sin \kappa_1 L & -\kappa_1^2 \cos \kappa_1 L & \kappa_2^2 & \kappa_2^2 & \kappa_3^2 e^{-\kappa_3 L} & \kappa_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

Le Tableau 3.2 regroupe ces résolutions pour différents types de conditions aux limites.

La résolution du système permet de déterminer les amplitudes relatives en posant  $A_1 = 1$  et donc d'obtenir l'équation du mouvement. Les amplitudes  $B_i$  sont alors données par (3.23). Les fréquences naturelles sont quant à elles obtenues par l'annulation du déterminant de la matrice (3.24). Les nombres d'onde dépendant de la fréquence, le déterminant peut-être calculé pour chaque  $\omega$ . Lorsque la courbe obtenue passe par zéro, on obtient une fréquence naturelle du système.

Le comportement dynamique du nid d'abeille est donc désormais parfaitement connu. Le modèle précédemment développé permet le calcul des nombres d'onde, des fréquences naturelles et de l'équation de mouvement du nid d'abeille. Les peaux et le viscoélastique restent encore à traiter.

Tableau 3.2 : Résolution matricielle pour différentes conditions aux limites

<u>Condition : libre -libre :</u>						
0	$-\kappa_1^2$	$\kappa_1^2$				
$-\kappa_1^2 \sin \kappa_1 L$	$-\kappa_1^2 \cos \kappa_1 L$	$\kappa_2^2 e^{-\kappa_2 L}$				
$\theta$	$X_2 \kappa_1$	$-X_3 \kappa_2$				
$-X_1 \kappa_1 \sin \kappa_1 L$	$X_2 \kappa_1 \cos \kappa_1 L$	$-X_3 \kappa_2 e^{-\kappa_2 L}$	$\dots$			
$-D_1 \kappa_1^2 X_1 + I_c X_1 \omega^2$	$\theta$	$D_1 \kappa_2^2 X_3 + I_c X_3 \omega^2$				
$-D_1 \kappa_1^2 X_1 \cos \kappa_1 L + I_c X_1 \cos \kappa_1 L \omega^2$	$-D_1 \kappa_1^2 X_2 \sin \kappa_1 L + I_c X_2 \sin \kappa_1 L \omega^2$	$D_1 \kappa_2^2 X_3 e^{-\kappa_2 L} + I_c X_3 e^{-\kappa_2 L} \omega^2$				
$\kappa_2^2 e^{-\kappa_2 L}$	$\kappa_3^2$	$\kappa_3^2 e^{-\kappa_3 L}$				
$\kappa_2^2$	$\kappa_3^2 e^{-\kappa_3 L}$	$\kappa_3^2$				
$X_4 \kappa_2 e^{-\kappa_2 L}$	$-X_5 \kappa_3$	$X_6 \kappa_3 e^{-\kappa_3 L}$				
$\dots$	$-X_5 \kappa_3 e^{-\kappa_3 L}$	$X_6 \kappa_3$				
$D_1 \kappa_2^2 X_4 e^{-\kappa_2 L} + I_c X_4 e^{-\kappa_2 L} \omega^2$	$D_1 \kappa_3^2 X_5 + I_c X_5 \omega^2$	$D_1 \kappa_3^2 X_6 e^{-\kappa_3 L} + I_c X_6 e^{-\kappa_3 L} \omega^2$				
$D_1 \kappa_2^2 X_4 + I_c X_4 \omega^2$	$D_1 \kappa_3^2 X_5 e^{-\kappa_3 L} + I_c X_5 e^{-\kappa_3 L} \omega^2$	$D_1 \kappa_3^2 X_6 + I_c X_6 \omega^2$				
			$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
			$A_5$	$A_6$		

<u>Condition : Encastré – Encastré :</u>						
0	1	1	$e^{-\kappa_2 L}$	1	$e^{-\kappa_3 L}$	
$\sin \kappa_1 L$	$\cos \kappa_1 L$	$e^{-\kappa_2 L}$	1	$e^{-\kappa_3 L}$	1	
$X_1$	$\theta$	$X_3$	$X_4 e^{-\kappa_2 L}$	$X_5$	$X_6 e^{-\kappa_3 L}$	
$X_1 \cos \kappa_1 L$	$X_2 \sin \kappa_1 L$	$X_3 e^{-\kappa_2 L}$	$X_4$	$X_5 e^{-\kappa_3 L}$	$X_6$	
$\kappa_1$	0	$-\kappa_2$	$\kappa_2 e^{-\kappa_2 L}$	$-\kappa_3$	$\kappa_3 e^{-\kappa_3 L}$	
$\kappa_1 \cos \kappa_1 L$	$-\kappa_1 \sin \kappa_1 L$	$-\kappa_2 e^{-\kappa_2 L}$	$\kappa_2$	$-\kappa_3 e^{-\kappa_3 L}$	$\kappa_3$	
						$A_1$
						$A_2$
						$A_3$
						$A_4$
						$A_5$
						$A_6$

<u>Condition : Simplement supporté - Simplement supporté :</u>						
0	1	1	$e^{-\kappa_2 L}$	1	$e^{-\kappa_3 L}$	
$\sin \kappa_1 L$	$\cos \kappa_1 L$	$e^{-\kappa_2 L}$	1	$e^{-\kappa_3 L}$	1	
0	$X_2 \kappa_1$	$-X_3 \kappa_2$	$X_4 \kappa_2 e^{-\kappa_2 L}$	$-X_5 \kappa_3$	$X_6 \kappa_3 e^{-\kappa_3 L}$	
$-X_1 \kappa_1 \sin \kappa_1 L$	$X_2 \kappa_1 \cos \kappa_1 L$	$-X_3 \kappa_2 e^{-\kappa_2 L}$	$X_4 \kappa_2$	$-X_5 \kappa_3 e^{-\kappa_3 L}$	$X_6 \kappa_3$	
0	$-\kappa_1^2$	$\kappa_1^2$	$\kappa_2^2 e^{-\kappa_2 L}$	$\kappa_3^2$	$\kappa_3^2 e^{-\kappa_3 L}$	
$-\kappa_1^2 \sin \kappa_1 L$	$-\kappa_1^2 \cos \kappa_1 L$	$\kappa_2^2$	$\kappa_2^2$	$\kappa_3^2 e^{-\kappa_3 L}$	$\kappa_3^2$	
						$A_1$
						$A_2$
						$A_3$
						$A_4$
						$A_5$
						$A_6$

<u>Condition : Encastré – Libre :</u>						
0	1	1		1		
$-\kappa_1^2 \sin \kappa_1 L$	$-\kappa_1^2 \cos \kappa_1 L$	$\kappa_2^2 \sin -\kappa_2 L$				
$X_1$	0	$X_3$				
$-X_1 \kappa_1 \sin \kappa_1 L$	$X_2 \kappa_1 \cos \kappa_1 L$	$-X_3 \kappa_2 \cos -\kappa_2 L$				
$\kappa_1$	0	$-X_3 \kappa_2$	$\dots$			
$-D_1 \kappa_1^2 X_1 \cos \kappa_1 L + I_c X_1 \cos \kappa_1 L \omega^2$	$-D_1 \kappa_1^2 X_2 \sin \kappa_1 L + I_c X_2 \sin \kappa_1 L \omega^2$	$D_1 \kappa_2^2 X_3 \cos -\kappa_2 L + I_c X_3 \cos -\kappa_2 L \omega^2$				
$\kappa_2^2 e^{-\kappa_2 L}$	$1$	$\kappa_3^2$				
$\kappa_2^2$	$\kappa_3^2 e^{-\kappa_3 L}$	$\kappa_3^2$				
$X_4 e^{-\kappa_2 L}$	$X_5$	$X_6 e^{-\kappa_3 L}$				
$\dots$	$-X_5 \kappa_3 e^{-\kappa_3 L}$	$X_6 \kappa_3$				
$X_4 \kappa_2$	$-\kappa_3$	$\kappa_3 e^{-\kappa_3 L}$				
$\kappa_2 e^{-\kappa_2 L}$	$\kappa_3$	$\kappa_3 e^{-\kappa_3 L}$				
$D_1 \kappa_2^2 X_4 + I_c X_4 \omega^2$	$D_1 \kappa_3^2 X_5 e^{-\kappa_3 L} + I_c X_5 e^{-\kappa_3 L} \omega^2$	$D_1 \kappa_3^2 X_6 + I_c X_6 \omega^2$				
			$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$
			$A_5$	$A_6$		

### 3.3 Modélisation des peaux

Les peaux des structures sandwichs considérées sont des stratifiés constitués de couches minces pouvant être décrites de manière acceptable par la théorie classique d'Euler-Bernoulli. En effet, comme présenté précédemment en section 1.2.2, la théorie de Timoshenko apporte de nombreuses améliorations dans l'analyse des poutres épaisses en incluant le cisaillement transverse. Dans le cas des peaux, et afin d'alléger les calculs, le développement sera basé sur les lois de la théorie classique dans sa formulation appliquée aux stratifiés : c'est la théorie classique des stratifiés notamment présentée par Berthelot [2].

#### 3.3.1 Géométrie et déplacement

Les peaux du sandwich sont modélisées selon la Figure 3.8. Ces peaux sont considérées séparément : la peau supérieure, indice  $h$ , et la peau inférieure, indice  $b$ . La zone mouchetée représentant le nid d'abeille a déjà été traité et ne sera donc pas incluse dans cette partie. Chaque peau est constituée de  $N_i$  plis (avec  $i = h, b$ ) dont les caractéristiques peuvent varier. Les plis sont numérotés de 1 à  $N_i$  de l'intérieur du sandwich vers l'extérieur. Pour chaque couche composite  $k$  du stratifié  $i$ , les grandeurs suivantes sont connues : son épaisseur, sa masse volumique, ses modules d'Young longitudinaux et transversaux, son coefficient de Poisson et l'orientation des fibres par rapport aux axes principaux du stratifié.

Les déplacements considérés dans les peaux sont le déplacement longitudinal  $u$ , transversal  $z$  et la rotation  $\beta$ , Figure 3.9. Le programme développé se voulant le plus complet, le modèle des peaux a été développé aussi bien sous forme de poutre que sous forme de plaque.

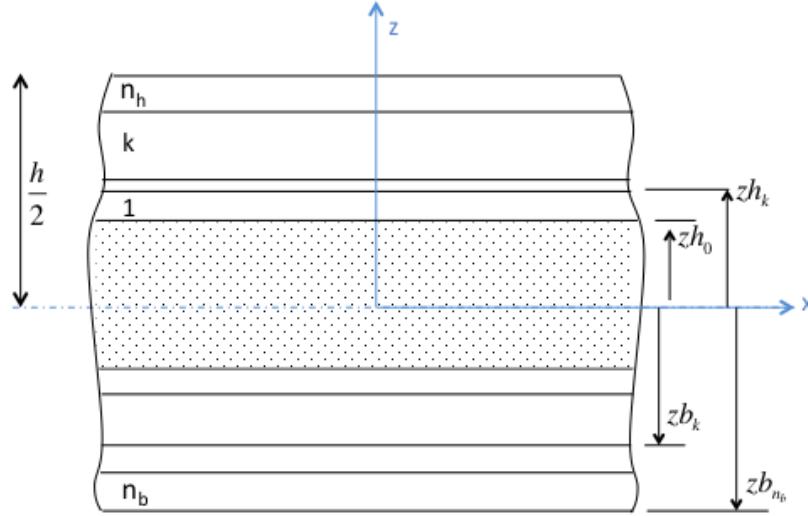


Figure 3.8 : Modélisation des peaux

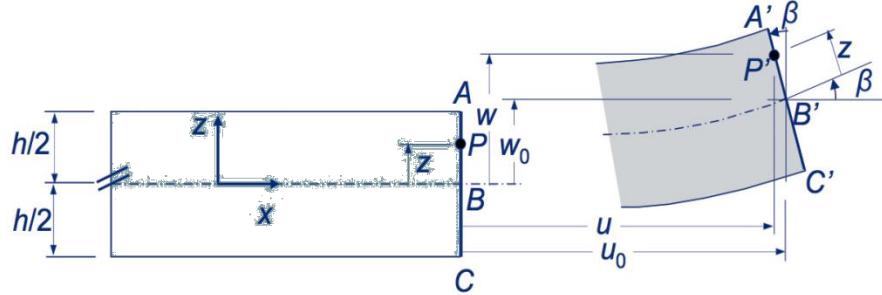


Figure 3.9 : Déplacements dans une peau

La théorie générale des stratifiés utilise un schéma de déformation du premier ordre, celui de Hencky-Mindlin ou Kirchhoff, pour décrire le comportement des plaques [2]. Le champ de déplacement s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Le champ de déformation associé ainsi que tous les détails de calculs suivants sont donnés en Annexe. La théorie classique fait également l'hypothèse que le cisaillement transverse est négligeable. Ainsi, les déformations en cisaillement sont nulles.

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \tag{3.26}$$

Ce qui implique :

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{et} \quad \varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.27)$$

Le champ de déplacement se résume donc à :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x(x, y)} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y(x, y)} \\ w(x, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.28)$$

et le champ de déformation à :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{zz} &= \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.29)$$

On peut exprimer le champ de déplacement total comme la superposition du champ de déformation en membrane  $\varepsilon_m$ , dépendant des déplacements  $(u_0, v_0)$ , et du champ de déformation en flexion-torsion  $\varepsilon_f$ , s'exprimant en fonction des angles de rotation et de la hauteur  $z$  [2]. Ce dernier se réécrit généralement comme fonction de  $\kappa$ , la matrice des courbures. Toutes ces définitions sont données en Annexe.

Au final, le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon(M) &= \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

avec

$$\begin{array}{c|c|c}
 \varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) & \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y) & \gamma_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\
 \hline
 \kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y) & \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y) & \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y)
 \end{array} \quad (3.31)$$

### 3.3.2 Champ de contrainte

Comme la théorie élémentaire des plaques, la théorie des stratifiés fait l'hypothèse que les contraintes normales  $\sigma_{zz}$  sont négligeables, hypothèse largement vérifiée en pratique.[2] Ainsi,  $\sigma_{zz} = 0$ . Les contraintes et déformations en cisaillement étant également supposées négligeables, le champ de contrainte dans une couche  $k$  s'exprime sous la forme (3.32), où  $Q'_k$  est la matrice des coefficients de rigidité réduite de la couche exprimée dans les axes principaux des couches.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = Q'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Le calcul de cette matrice de rigidité réduite est détaillé et expliqué en Annexe.

Le champ de contrainte pour la couche  $k$  s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Ceci est le champ de contrainte d'une seule couche, afin d'obtenir les contraintes globales il nous faut intégrer selon  $z$ , sur l'ensemble des couches. Cette opération consiste en fait à calculer les résultantes en membrane et les moments de flexion et torsion. Lors de cette étape apparaît trois nouvelles matrices  $A$ ,  $B$  et  $D$  où la matrice  $A$  est la matrice de rigidité en membrane,  $D$  est la matrice de rigidité en flexion et  $B$  est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion telles que définies en Annexe. Ces matrices  $A$ ,  $B$  et  $D$  sont intéressantes puisqu'elles permettent une homogénéisation des caractéristiques de la peau.

### 3.3.3 Définition des énergies

L'énergie de déformation d'un solide élastique s'écrit de la manière suivante :

$$U_p = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{yz}\gamma_{yz} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{xy}\gamma_{xy}) dx dy dz \quad (3.34)$$

L'indice « p » sera utilisé comme référence aux peaux.

En tenant compte des hypothèses de la théorie des stratifiés :  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  et des relations (3.32) formulant les contraintes en fonction des déformations, l'énergie de déformation s'écrit :

$$U_p = \frac{1}{2} \iiint (Q'_{11}\varepsilon_{xx}^2 + Q'_{22}\varepsilon_{yy}^2 + Q'_{66}\gamma_{xy}^2 + 2Q'_{12}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + 2Q'_{16}\varepsilon_{xx}\gamma_{xy} + 2Q'_{26}\varepsilon_{yy}\gamma_{xy}) dx dy dz \quad (3.35)$$

En introduisant les relations (3.30) et (3.31) on exprime l'énergie de déformation en fonction des déplacements  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$ . Puis, en intégrant suivant l'épaisseur z, nous obtenons [2] :

$$\begin{aligned} U_p = & \frac{1}{2} \iint \left\{ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right. \\ & + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 - B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - 2B_{12} \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ & - B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - 2B_{16} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \\ & - 2B_{26} \left[ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] - 4B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\ & \left. + D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (3.36)$$

Dans le cadre d'une simple poutre, pour lesquels les déformations suivant la direction y et le déplacement v sont supposés négligeables, cette expression se résume à :

$$U_p = \frac{1}{2} \iint \left\{ A_{11} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + -B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{11} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx dy \quad (3.37)$$

L'énergie cinétique d'un solide s'écrit quant à elle comme :

$$T_p = \frac{1}{2} \iiint \rho_p \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (3.38)$$

$$T_p = \frac{1}{2} \iiint \rho_p \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (3.39)$$

Pour une poutre ; cette expression se résume à :

$$T_p = \frac{1}{2} \iiint \rho_p \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (3.40)$$

### 3.4 Modélisation du viscoélastique

Le viscoélastique est lié à ses couches limites par adhésif. Nous supposerons dans ce modèle que ce contact est parfait et assure la continuité des déplacements à l'interface. Le viscoélastique possède la même largeur  $B$  que les couches entre lesquelles il est inséré. Enfin, nous ferons l'hypothèse que le patch viscoélastique travaille uniquement en cisaillement [54], [6], les contraintes normales seront négligées. Afin de matérialiser son caractère visqueux, son module de Coulomb  $G_v^*$  sera considéré complexe. Bien que différentes études montrent que l'utilisation de certaines séries telles que les séries de Prony permettent de modéliser de manière efficace la viscosité des viscoélastiques, cette étude se limitera à l'utilisation d'un module complexe constant, ne dépendant pas de la fréquence. L'intégration d'un module complexe nous conduit à travailler avec une matrice de rigidité complexe. Cependant, cette méthode a l'avantage de ne pas faire apparaître de matrice de dissipation dans l'équation de mouvement, la résolution du problème sera donc simplifiée [49].

Le viscoélastique travaillant uniquement en cisaillement, l'expression de son énergie de déformation passe par le calcul de l'angle de cisaillement transverse. La Figure 3.10 présente un élément du patch viscoélastique et de ses couches limites  $u_n$  et  $u_{n+1}$  dans leur état déformé.

L'angle de cisaillement recherché est  $\gamma_x$ . L'angle  $\alpha$  est lié à la déformation en flexion de la poutre sous l'effet d'une charge transversale.

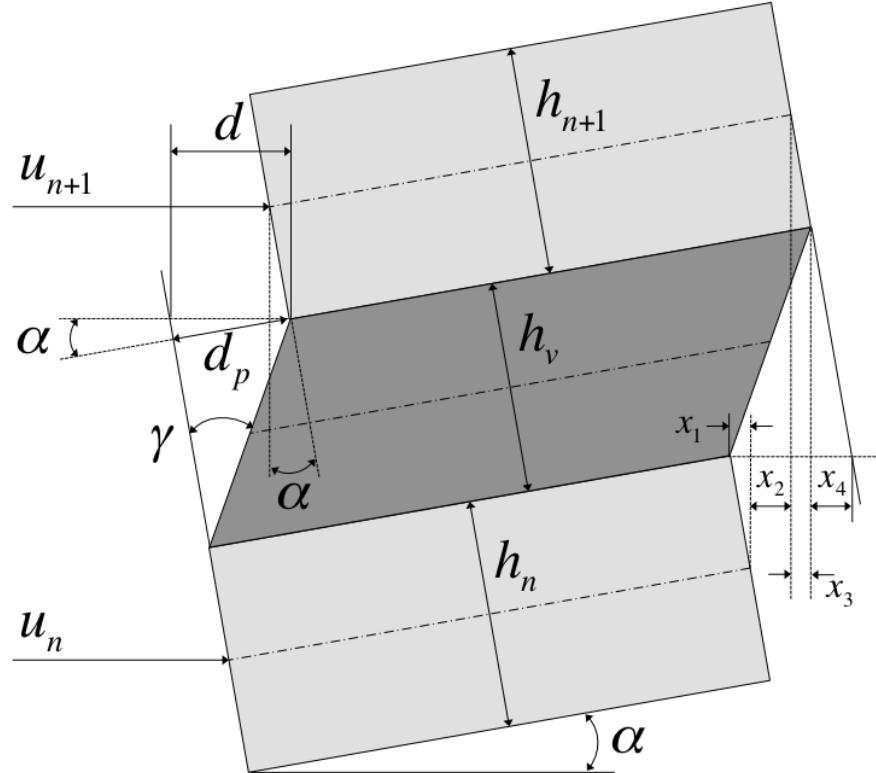


Figure 3.10 : Calcul de l'angle de cisaillement

Nous allons chercher à exprimer l'angle  $\gamma_x$  par sa tangente. Nous nous intéressons donc au calcul de la distance  $d_p$ , qui sera obtenu par le biais de  $d$ . La hauteur  $h_v$  est connue, elle correspond à l'épaisseur du viscoélastique. La distance  $d$  s'exprime selon la Figure 3.10 par :

$$d = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{h_{n+1}}{2} \sin \alpha + (u_{n+1} - u_n) + \frac{h_n}{2} \sin \alpha + \frac{h_v}{2} \sin \alpha \quad (3.41)$$

On déduit de plus que :

$$d = d_p \cos \alpha \quad \text{et} \quad d_p = h_v \tan \gamma_x \quad (3.42)$$

Alors, en incluant les équations (3.42) dans (3.41), en faisant l'approximation de faibles angles  $\tan \gamma_x = \gamma_x$  et en exprimant l'angle  $\alpha$  en fonction du déplacement transversal  $\alpha = \partial w / \partial x$ , on obtient l'équation (3.43) [49].

$$\gamma_x = \sin \gamma_x = \frac{u_{n+1} - u_n}{h_v} + \frac{1}{h_v} \left[ \frac{h_{n+1} + h_n}{2} + h_v \right] \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.43)$$

L'énergie de déformation d'un solide élastique est donnée en équation (3.34) [49]. Au vue des hypothèses faites, cette expression se limite ici à :

$$W = \frac{1}{2} \iiint \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} dx dy dz = \frac{1}{2} \iiint \sigma_{xz} \frac{\gamma_x}{2} dx dy dz \quad (3.44)$$

La contrainte de cisaillement s'exprime alors en fonction du module de Coulomb par :

$$\sigma_{xz} = 2G_v^* \varepsilon_{xz} \quad (3.45)$$

Alors, par combinaison de (3.44) et (3.45), l'énergie de déformation devient :

$$U_v = \frac{G_v^*}{2} \int_0^{h_v} \int_0^B \int_{x_1}^{x_2} \gamma_x^2 dx dy dz \quad (3.46)$$

L'expression de l'énergie de déformation dépend donc des déplacements longitudinaux et transversaux des peaux.

A la vue de la faible masse (<1% de la masse de la poutre) et de la faible surépaisseur ajoutées (de l'ordre de 0.2mm), l'énergie cinétique du viscoélastique sera négligée.

## 3.5 Équation du mouvement et résolution

### 3.5.1 Procédure

Les énergies du nid d'abeille, des peaux et du viscoélastique ont été calculées. L'objectif est ici de les réunir afin de procéder au traitement variationnel et obtenir l'équation de mouvement. La

Figure 3.11 présente un résumé du processus de calcul des énergies précédemment présenté et de la résolution. Les modes assumés exprimés, les équations de Lagrange permettront d'obtenir l'équation de mouvement. La résolution du problème aux valeurs propres mènera à la détermination des fréquences naturelles et des amortissements.

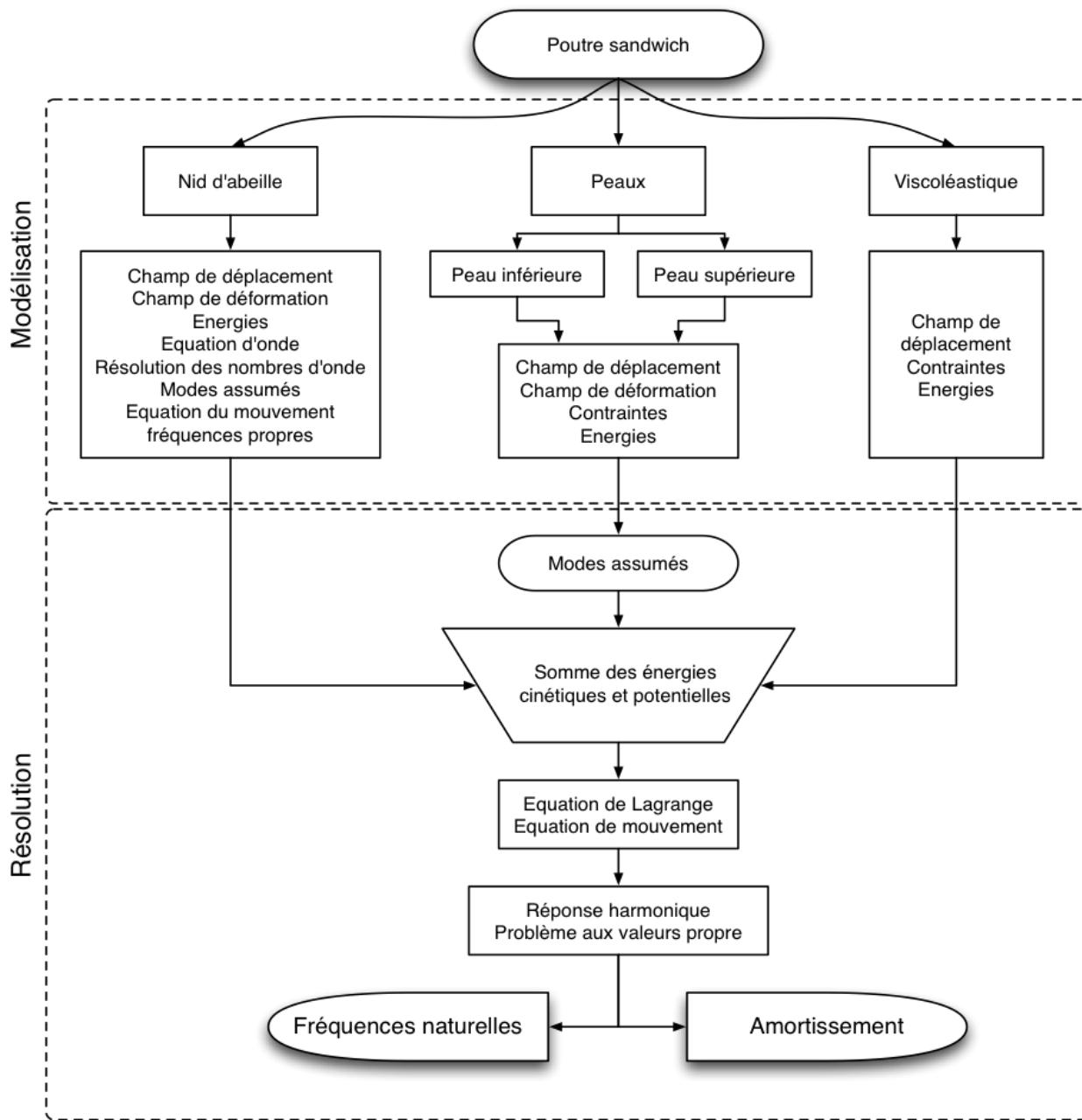


Figure 3.11 : Processus de modélisation et de résolution

### 3.5.2 Mode assumés

Les énergies potentielles et cinétiques des différentes composantes du sandwich sont exprimées en section 3.2, 3.3 et 3.4. Cependant, ces énergies restent fonction des déplacements longitudinaux des peaux  $u_0$ , des déplacements transversaux des peaux  $w_p$  et du nid d'abeille  $w_n$ , et de l'angle de flexion  $\beta$  du nid d'abeille. Afin de calculer les énergies totales, il nous faut donc exprimer ces déplacements. La méthode ici retenue est une méthode approximative dite des modes assumées. Utilisée par de nombreux auteurs [49][61], elle permet d'obtenir directement les équations de mouvements à l'inverse des méthodes de Galerkin ou Rayleigh-Ritz nécessitant la minimisation d'un reste [62], [63]. Cette méthode consiste à discréteriser les déplacements sous la forme une série d'un produit de 2 fonctions satisfaisants les conditions aux limites, l'une spatiale, l'autre temporelle. Ces expressions se présentent sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) &= \sum_{k=1}^{n_u} \Gamma_k(x) U_k(t) = \Gamma^T U \\
 w_p(x, t) &= \sum_{k=1}^{n_{w_p}} \Pi_k(x) W_{p,k}(t) = \Pi^T W_p \\
 w_n(x, t) &= \sum_{k=1}^{n_{w_n}} \Xi_k(x) W_{n,k}(t) = \Xi^T W_n \\
 \beta(x, t) &= \sum_{k=1}^{n_\beta} \Phi_k(x) B_k(t) = \Phi^T B
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

où  $\Gamma, \Pi, \Xi$  et  $\Phi$  sont les fonctions admissibles dépendant de l'espace (ici, la variable  $x$ ). Les fonctions  $U, W_p, W_n$  et  $B$  sont les nouvelles coordonnées généralisées, dépendant du temps. Les nombres  $n_u, n_{w_p}, n_{w_n}$  et  $n_\beta$  sont les nombres de modes utilisés pour représenter respectivement les déplacements longitudinaux des peaux, les déplacements transversaux des peaux, du nid d'abeille et la rotation de section du nid d'abeille.

Plus les fonctions modales choisies seront proches du mouvement réel et plus le nombre de mode utilisé sera grand, alors, plus la méthode sera efficace et se rapprochera du comportement réel. Cependant, le temps de calcul augmentant rapidement avec le nombre de mode, nous avons

cherché à connaître le nombre de mode optimal à choisir. Une étude préliminaire de convergence nous a montré que  $n_u = 20$ ,  $n_{w_p} = n_{w_n} = 30$  et  $n_\beta = 20$  était un bon compromis entre validité et temps de calcul. Le critère de convergence retenu pour cette étude était la stabilité des 5 premières fréquences naturelles du système. L'écart relatif des fréquences obtenues avec  $n$  et  $n+1$  modes devait être inférieur à 0.001%.

Les fonctions modales dépendent des conditions aux limites. L'obtention des fonctions modales pour le nid d'abeille, déplacement transversal  $w_n$  et rotation  $\beta$ , a déjà été présentée section 3.2.5 et 3.2.6. Les fonctions modales générales sont les équations (3.21) et (3.22) où les nombres d'onde  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  et  $\kappa_3$  deviennent alors chacun le vecteur des nombres d'onde associées aux fréquences propres déterminées pour le nid d'abeille seul pour des conditions aux limites donnée. Les nombres d'onde se déduisent du graphe Figure 3.7. Les coefficients  $A_i$  sont alors déterminés par résolution des conditions aux limites. Par exemple, pour un système simplement supporté, on obtient l'équation (3.24). Pour la fonction modale de  $\beta$ , les relations entre les  $A_i$  et les  $B_i$  sont données en (3.23).

En résumé, pour le nid d'abeille, les modes assumés s'écrivent [23] :

$$\Xi(x) = A_1 \sin \kappa_1(n)x + A_2 \cos \kappa_1(n)x + A_3 e^{-\kappa_2(n)x} + A_4 e^{\kappa_2(n)(x-L)} + A_5 e^{-\kappa_3(n)x} + A_6 e^{\kappa_3(n)(x-L)} \quad (3.48)$$

$$\Phi(x) = B_1 \sin \kappa_1(n)x + B_2 \cos \kappa_1(n)x + B_3 e^{-\kappa_2(n)x} + B_4 e^{\kappa_2(n)(x-L)} + B_5 e^{-\kappa_3(n)x} + B_6 e^{\kappa_3(n)(x-L)} \quad (3.49)$$

où «  $n$  » correspond au numéro du mode. Les coefficients  $(A_i, B_i)$  sont déterminés pour chaque couple de conditions aux limites, Tableau 3.2.

Pour les peaux, les fonctions modales associées au déplacement transverse  $w_p$  sont supposées plus simple, dépendant d'un seul nombre d'onde comme suggéré par le modèle d'Euler – Bernoulli [2], [64]. La forme générale de cette fonction est :

$$\Pi(x) = A \cosh\left((\beta_n L) \frac{x}{L}\right) + B \sinh\left((\beta_n L) \frac{x}{L}\right) + C \cos\left((\beta_n L) \frac{x}{L}\right) + D \sin\left((\beta_n L) \frac{x}{L}\right) \quad (3.50)$$

De même que pour le nid d'abeille, les coefficients A, B, C et D sont issues des conditions aux limites. Le Tableau 3.3 donne ces coefficients pour les cas principaux. Au final, les fonctions modales transversales  $\Pi(x)$  sont données en Tableau 3.4.

Enfin, les fonctions modales des déplacements longitudinaux des peaux s'écrivent sous la forme générale (3.51) [65]. Après résolution, on obtient les formes récapitulées en Tableau 3.5.

$$\Gamma(x) = A \sin \frac{\omega c}{L} + B \cos \frac{\omega c}{L} \quad (3.51)$$

Tableau 3.3 : Coefficients des fonctions modales transversales des peaux [64]

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b><math>\gamma</math></b>	<b><math>\beta_1 L</math></b>	<b><math>\beta_2 L</math></b>	<b><math>\beta_3 L</math></b>
	$\gamma$	1	$\gamma$	1	$\frac{\sin \beta L - \sinh \beta L}{\cosh \beta L - \cos \beta L}$	0.000	4.730	7.853
	$\gamma$	1	$-\gamma$	-1	$\frac{\sinh \beta L - \sin \beta L}{\cos \beta L - \cosh \beta L}$	4.730	7.853	10.996
	0	0	0	1		3.142	6.283	9.425
	$\gamma$	-1	$-\gamma$	1	$\frac{\sin \beta L + \sinh \beta L}{\cosh \beta L + \cos \beta L}$	1.875	4.694	7.855

Tableau 3.4 : Fonctions modales transversales des peaux [64]

Fonction admissible transversale	<b><math>\beta_1</math></b>	<b><math>\beta_2</math></b>	<b><math>\beta_3</math></b>	<b><math>\beta_n</math></b>
 $\sin(\beta_n \frac{x}{L}) + \sin(\beta_n \frac{x}{L}) + \frac{\sin(\beta_n) - \sinh(\beta_n)}{\cosh(\beta_n) - \cos(\beta_n)} \left( \cosh(\beta_n \frac{x}{L}) + \cos(\beta_n \frac{x}{L}) \right)$	0	4,73	7,85	$(n - 0,5)\pi$
 $\sin(\beta_n \frac{x}{L}) - \sinh(\beta_n \frac{x}{L}) + \frac{\sin(\beta_n) + \sinh(\beta_n)}{\cosh(\beta_n) + \cos(\beta_n)} \left( \cosh(\beta_n \frac{x}{L}) - \cos(\beta_n \frac{x}{L}) \right)$	1,88	4,69	7,86	$(n - 0,5)\pi$
 $\sinh(\beta_n \frac{x}{L}) - \sin(\beta_n \frac{x}{L}) + \frac{\sin(\beta_n) - \sinh(\beta_n)}{\cosh(\beta_n) - \cos(\beta_n)} \left( \cosh(\beta_n \frac{x}{L}) - \cos(\beta_n \frac{x}{L}) \right)$	4,73	7,85	11,0	$(n + 0,5)\pi$
 $\sin(\beta_n \frac{x}{L})$				$n \cdot \pi$

Tableau 3.5 : Fonctions longitudinales des peaux [65]

Fonction admissible longitudinale
 $\Gamma(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$
 $\Gamma(x) = \sin(2n - 1) \frac{\pi x}{2L}$
 $\Gamma(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$
 $\Gamma(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}$

### 3.5.3 Équation du mouvement

Les fonctions modales ainsi définies, les énergies potentielles et cinétiques peuvent s'exprimer de manière quadratique en fonction des nouvelles coordonnées modales, les fonctions temporelles. Notons  $\mathbf{q}$  l'ensemble de ces fonctions,  $U$  l'énergie potentielle totale et  $T$  l'énergie cinétique totale de la poutre telles que définis en équation (3.52) (3.53) et (3.54). Les matrices  $K$  et  $M$  formées sont alors les matrices de rigidité et de masse du système [66]. Le Lagrangien se calcule par la formule (3.55).

$$\mathbf{q} = \Gamma, \Pi, \Xi, \Phi \quad (3.52)$$

$$U = U_n + U_p + U_v = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T K \mathbf{q} \quad (3.53)$$

$$T = T_n + T_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} \quad (3.54)$$

$$L = U - T = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T K \mathbf{q} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} \quad (3.55)$$

Les équations de Lagrange se formulent de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = Q = 0 \quad (3.56)$$

où  $Q$  est le vecteur des forces généralisées. Puisque nous travaillons ici en régime libre afin d'identifier les fréquences naturelles et amortissements, ce vecteur sera nul. En remplaçant le Lagrangien par son expression, on obtient le système matriciel suivant :

$$[M] \begin{pmatrix} \ddot{\Gamma} \\ \ddot{\Pi} \\ \ddot{\Xi} \\ \ddot{\Phi} \end{pmatrix} + [K] \begin{pmatrix} \Gamma \\ \Pi \\ \Xi \\ \Phi \end{pmatrix} = 0 \quad (3.57)$$

La matrice  $K$  est complexe du fait qu'elle intègre l'effet de dissipation du viscoélastique. Il est également à noter que chaque terme  $\Gamma, \Pi, \dots$  est un vecteur de longueur du nombre de mode  $n_u, n_{w_p}, \dots$  choisi. La taille des matrices  $K$  et  $M$  peut donc rapidement augmenter.

### 3.5.4 Réponse harmonique

Si nous supposons les fonctions modales temporelles sous la forme :  $X = X(x)e^{j\omega t}$ , le système (3.57) devient alors [66] :

$$\{K - \omega^2 M\}X = 0 \quad (3.58)$$

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres classique. Cependant, de par la singularité de la matrice de masse, il doit être modifié. La technique utilisée est la méthode de la *LU* décomposition [67]. On va chercher à exprimer la matrice  $K$  comme le produit d'une matrice triangulaire inférieure formée de 1 sur la diagonale, notée  $L$ , et d'une matrice triangulaire supérieure, notée  $U$ , tel que  $K = LU$ . Alors, en posant  $\lambda = 1/\omega^2$  et en réalisant la transformation  $\bar{K} = L^{-1}MU^{-1}$ , le problème devient :

$$\{\bar{K} - \lambda I\}X = 0 \quad (3.59)$$

Les fréquences naturelles sont alors déterminées par l'annulation du déterminant de la matrice  $[\bar{K} - \lambda I]$ . Cependant,  $K$  étant une matrice complexe, les solutions obtenues sont complexes et les fréquences naturelles ne sont donc pas directement les solutions. Elles sont données par :

$$\omega = \sqrt{Re(\lambda)} \quad (3.60)$$

Le facteur d'amortissement, ou facteur de perte, s'obtient quant à lui par :

$$\eta = \frac{Im(\lambda)}{Re(\lambda)} \quad (3.61)$$

## 3.6 Validation à partir de la littérature

Le programme étant conçu de manière à pouvoir opérer ses différentes parties séparément, une première validation par la littérature a été réalisée. Les travaux de 3 auteurs ont été sélectionnés pour vérifier le comportement du code pour ses parties modélisation du nid d'abeille, modélisation des peaux et gestion du patch viscoélastique. Berthelot [2] présente des résultats expérimentaux d'un composite stratifié  $[0/90/\pm 45]_s$ . Kung and Singh [54] obtiennent

analytiquement les fréquences naturelles d'une poutre en aluminium traitée par une couche viscoélastique contrainte par une poutre (PCLD). Enfin, la modélisation de l'âme sera vérifiée grâce au travaux de Nilsson [23] présentant des résultats analytiques d'un nid d'abeille aluminium à maille hexagonale. Cette première vérification portera uniquement sur les fréquences naturelles, la théorie voulant que si les fréquences sont bonnes alors les facteurs de perte devraient être bons. Les résultats issus du modèle proposé et de la littérature sont regroupés dans le Tableau 3.6.

La partie du code modélisant le comportement des peaux stratifiées estime les fréquences naturelles expérimentales obtenues par Berthelot avec une erreur faible en basse fréquence mais qui tend à augmenter pour les modes plus élevés. Toutefois, il s'agit de résultats expérimentaux pour lesquels une erreur maximale de l'ordre 4% est acceptable. La modélisation du patch viscoélastique semble également correcte, elle rejoint le modèle de Kung and Singh à moins de 2% près. L'erreur maximale de 1.9% est atteinte pour le premier mode. Celle-ci s'explique par le fait que leur modèle inclut également un module d'Young complexe. Le cisaillement étant moins important en basse fréquence, la composante complexe du module d'Young peut s'imposer. Bien que notre modèle n'inclue pas cet effet, les résultats obtenus sont très acceptables. Enfin, les résultats présentés par Nilsson sont évidemment bien représentés car le modèle utilise ses travaux. L'ordre d'erreur de 0.1% peut être attribué à l'approximation de lecture des nombres d'ondes, ou à des arrondis de calculs.

Les résultats de cette première validation sont donc très satisfaisants. Cependant, ils ne révèlent seulement que chacune des sous-parties du programme fonctionne de manière attendue. Une validation plus complète est donc nécessaire pour s'assurer de la validité du modèle proposé.

Tableau 3.6 : Validation par la littérature

	Validation Berthelot exp (Hz)			Validation Kung and Singh (Hz)			Validation E. Nilsson (Hz)		
	Proposé	Littérature	Erreur	Proposé	Littérature	Erreur	Proposé	Littérature	Erreur
<b>Mode 1</b>	120,39	121,01	0,51%	38,21	37,48	1,91%	14	17	0,18%
<b>Mode 2</b>	209,27	209,73	0,22%	230,35	229,93	0,18%	67	68	0,01%
<b>Mode 3</b>	340,76	343,28	0,74%	625,24	627,4	0,35%	152	152	0%
<b>Mode 4</b>	520,72	531,11	2,13%	1221,81	1213,31	0,70%	277	271	0,02%
<b>Mode 5</b>	702,12	733,01	4,40%	2054,05	2121,94	1,34%	434	423	0,03%

## Chapitre 4 PROCÉDURE ET RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

La première validation par la littérature du code analytique montre que chacune des sous-parties du programme, prises indépendamment, fonctionne de manière attendue ; les erreurs relatives sur les fréquences naturelles étant de l'ordre de 3%. Cependant, la validité du modèle dans sa globalité reste à vérifier.

La littérature ne recense que peu de données sur l'amortissement de structures composites sandwichs avec patchs viscoélastiques insérés entre les plis. De plus, ces facteurs d'amortissement sont des données relativement complexes à mesurer et les techniques d'analyse, ainsi que les erreurs qui y sont liées, sont souvent très peu documentées. Ainsi, afin d'utiliser des données pertinentes pour valider ce modèle, il a été décidé de construire des prototypes de poutres et de les analyser. C'est l'objet de cette partie expérimentale. La validation du modèle se fera ensuite en CHAPITRE 5.

### 4.1 Fabrication des poutres

#### 4.1.1 Matériaux

Les poutres ont été réalisées au sein des laboratoires LAVA et CCHP à l'École Polytechnique de Montréal. Les peaux sont des stratifiés de 4 plis pré-imprégnés en fibre de Carbone/Epoxy, Figure 4.1, tandis que le cœur est un nid d'abeille à maille hexagonale en aramide, Figure 4.2. Afin de supporter les efforts d'encastrement, le nid d'abeille est renforcé par l'insertion d'une résine à base de billes de verre telle que représenté à la Figure 4.3. Les échantillons sont fabriqués sous forme de plaques qui sont ensuite découpées en poutres. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données en Tableau 4.1.



Figure 4.1 : Pré-imprégné Carbone/Epoxy

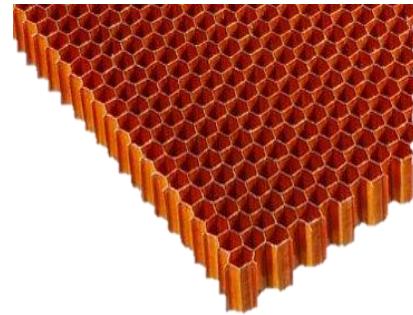


Figure 4.2 : Nid d'abeille Aramide

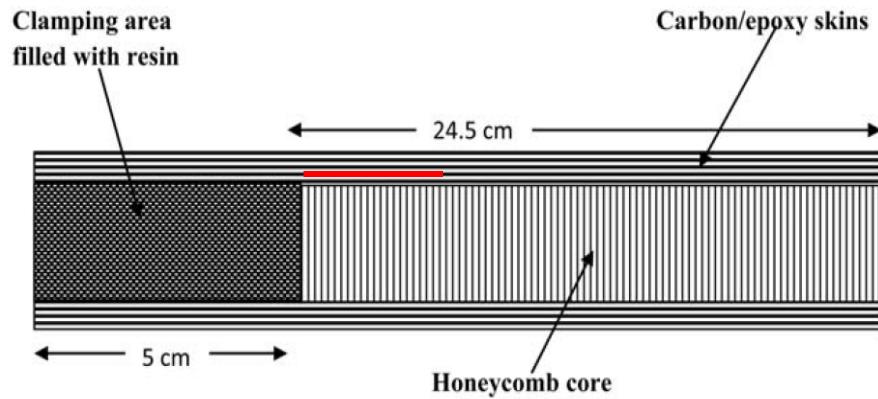


Figure 4.3 : Section d'une poutre (Fotsing, Sola, Ross, &amp; Ruiz, 2012)

Tableau 4.1 : Caractéristiques des matériaux

	Pré-imprégné Carbone/Epoxy	Nid d'abeille Aramide	Viscoélastique
<b>Nombre</b>	2x4	1	Selon traitement
<b>Dimensions (mm)</b>	400x400x0.2	350x350x1.27	Selon traitement
<b>Masse volumique (kg/m<sup>3</sup>)</b>	1560	47	783
<b>Coefficient de Poisson</b>	0.31	0.43	
<b>Module d'Young (GPa)</b>	17.23	0,13	
<b>Module de Coulomb (MPa)</b>		41.37	9.89

### 4.1.2 Mise en forme

Les composites Carbone/Époxy étant pré-imprégnés, leur mise en forme est simple. Un adhésif permet de maintenir leur positionnement durant l'empilement. Les couches sont empilées selon l'ordre  $[0/90/\pm 45]_s$ . Une couche adhésive permet de réaliser l'interface peau / nid d'abeille. Les patchs viscoélastiques sont positionnés dans la couche souhaitée à l'aide d'un gabarit spécialement conçu. Un positionnement minutieux est nécessaire car les poutres seront ensuite découpées dans la plaque alors que les traitements seront invisibles. De plus, comme le montre E-R.Fotsing et al. [57], il est important, afin d'obtenir un amortissement optimal, que les patchs viscoélastiques soient parfaitement contraints, même dans la largeur de la poutre, tel qu'ilustré à la Figure 4.4. La zone collée en périphérie du patch viscoélastique étant de 1mm, une grande attention sera portée à leur positionnement et à la découpe.

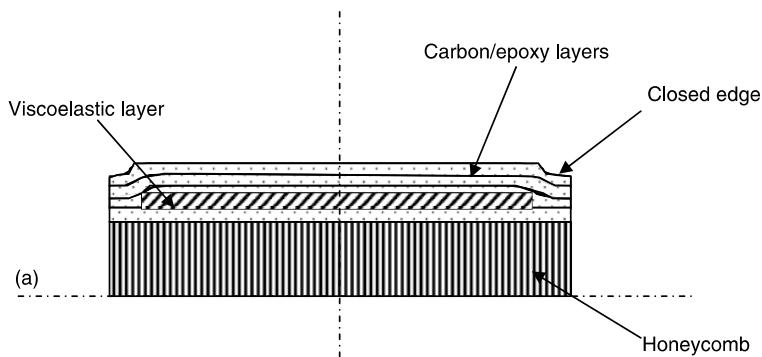


Figure 4.4 : Section transversale de la poutre illustrant l'état contraint de la couche viscoélastique [57]

La mise en forme suit le protocole suivant :

1. Empilement des plis de la première peau
2. Positionnement des patchs viscoélastiques grâce au gabarit pendant l'étape 1
3. Compactage léger par mise sous pression de la première peau
4. Pause de la première couche adhésive
5. Mise en place du nid d'abeille grâce au gabarit
6. Pause de la seconde couche adhésive
7. Empilement des plis de la seconde peau
8. Positionnement des patchs viscoélastiques grâce au gabarit
9. Compactage léger par mise sous pression

### 4.1.3 Cuisson

La cuisson des sandwichs est effectuée en une seule étape. Contrairement aux procédés “classiques” [68][69], les phases de stratification des peaux et d’adhésion âme/peaux sont réalisées simultanément par pressage sous vide.

Ce procédé se déroule dans un moule autoclave présenté à la Figure 4.5. Un film perforé non adhésif et un tissu absorbant sont posés sur la plaque afin de permettre l’évacuation de la résine en excédent. L’ensemble est enveloppé par un film plastique fixé au moule à l’aide d’un scotch double face épais créant ainsi une enceinte étanche. Le vide permet alors de compacter la structure et d’éliminer l’air emprisonné entre les différentes couches. L’ensemble suit un cycle de chauffage et pression précis typique de l’industrie aéronautique afin d’assurer la bonne imprégnation des fibres.

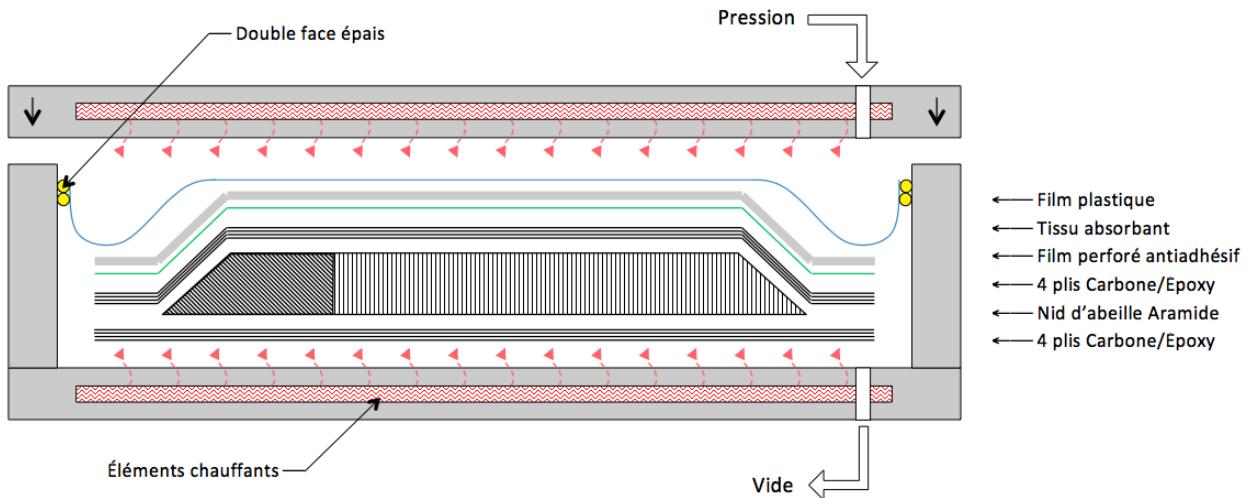


Figure 4.5 : Cuisson en autoclave des plaques sandwichs

Une fois la plaque sortie de l’autoclave, les poutres sont découpées suivant le gabarit de positionnement des patches viscoélastiques, à l'aide d'une scie circulaire au diamant sous jet d'eau. Les poutres sont alors séchées à 50°C pendant 2h.

Les poutres ainsi créées sont prêtes à être testées et analysées.

## 4.2 Choix du panel de poutre

Un panel de poutre a été choisi afin d'obtenir des résultats expérimentaux sur la performance des traitements amortissants par insertion de couches viscoélastiques. Les caractéristiques testées sont la longueur du patch, sa position longitudinale dans la poutre, et sa position suivant l'épaisseur de la poutre. Le choix des traitements se base sur une précédente étude expérimentale réalisée au sein du laboratoire par E-R.Fotsing et al. [57]

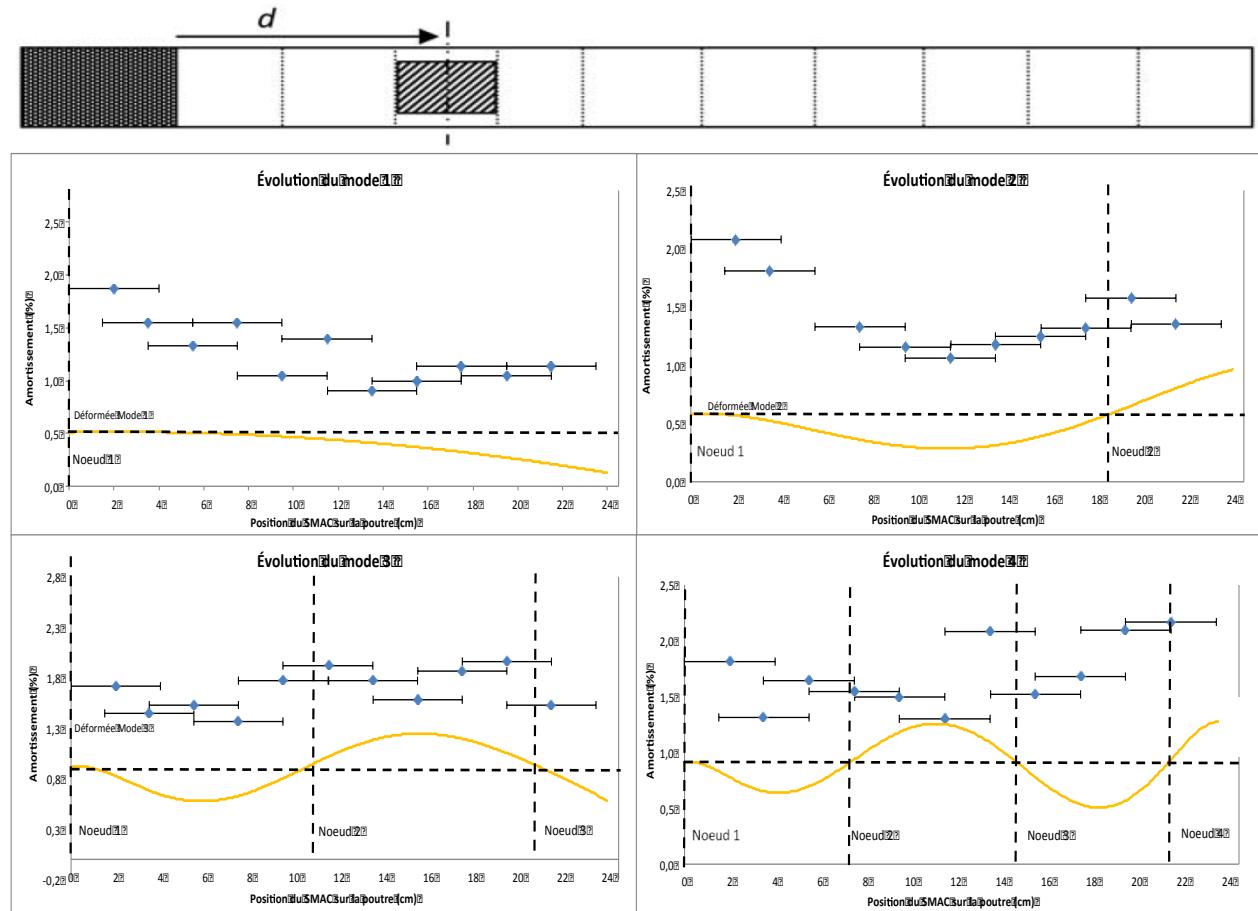


Figure 4.6 : Évolution du facteur d'amortissement selon la position de la couche viscoélastique pour les 4 premiers modes par E.Fotsing et al.[57]

Dans cette étude, un traitement par insertion d'un patch viscoélastique entre les plis les plus internes du sandwich a été réalisé. Le traitement de 4cm de longueur est déplacé par pas de 2cm

tout le long de la poutre. Les résultats d'amortissement sont présentés par la Figure 4.6. Les graphes illustrent la déformée de la poutre pour chaque mode (courbe jaune), la position des nœuds modaux (lignes pointillées verticales) ainsi que la longueur du traitement (ligne horizontale autour de chaque point expérimental). Le graphe du mode 1 montre que l'amortissement est fort à l'encastrement puis diminue progressivement. Pour le mode 2, il est fort à l'encastrement, diminue, puis augmente autour du nœud modal. Suivant le même principe, on déduit des graphes des modes 3 et 4 que l'amortissement est meilleur proche de l'encastrement et autour des nœuds. Les résultats de cette étude mettent donc en évidence le fait que le facteur d'amortissement augmente lorsque la couche viscoélastique se situe dans une zone de cisaillement maximale c'est-à-dire à l'encastrement ou sur un nœud modal.

Alors, les traitements amortissants retenus pour notre panel consistent pour l'essentiel au traitement de l'encastrement. Le premier nœud du mode 3, situé à 10.8 cm de l'encastrement, sera également visé. L'ensemble des configurations étudiées sont données dans le Tableau 4.2. La première colonne recense les dénominations des poutres qui seront utilisées dans le reste de ce chapitre. La seconde donne la description du traitement réalisé : la longueur du patch et sa position le long de la poutre, les plis entre lesquels il est inséré, s'il est symétrique ou non, et enfin son épaisseur. Les 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> colonnes illustrent le traitement. La 3<sup>e</sup> indique la longueur ainsi que la position du patch représenté par une zone bleue. La ligne rouge épaisse en 4<sup>e</sup> colonne illustre quant à elle la position du patch entre les 4 plis des peaux ainsi que la symétrie du traitement.

La répétabilité de fabrication est assurée par l'utilisation d'un processus de mise en forme certifié par l'industrie. Ainsi, les poutres « P0 », « P1 » et « P2 » n'ont été fabriquées qu'en un seul exemplaire, dans l'unique but de confirmer les résultats fournis dans une précédente étude par E.R. Fotsing *et al* [57]. A des fins de répétabilité, tous les autres types de traitement ont été fabriqués en 2 exemplaires.

Tableau 4.2 : Traitement viscoélastique des poutres

Dénomination		Traitement Viscoélastique	
Ref-1			
Ref-2	• Référence		
Ref-3			
Comp-1	• Complet		
Comp-2	• Couche 1-2 • Symétrique • SMAC 0.2mm		
P0	• 5 cm à 0 cm • Couche 1-2 • Symétrique • SMAC 0.2mm		
P1	• 5 cm à 4 cm • Couche 1-2 • Symétrique • SMAC 0.2mm		
P2	• 5 cm à 8 cm • Couche 1-2 • Symétrique • SMAC 0.2mm		
Base-1	• 4 cm à 0 cm • Couche 1-2 • Symétrique • SMAC 0.2mm		
Base-2			
Double-1	• 4 cm à 0 cm • Couches 1-2 & 2-3 • Symétrique • SMAC 0.15mm		
Double-2			
C23-1	• 4 cm à 0 cm • Couche 2-3 • Symétrique • SMAC 0.2mm		
C23-2			
C34-1	• 4 cm à 0 cm • Couche 3-4 • Symétrique • SMAC 0.2mm		
C34-2			

## 4.3 Banc d'essai

### 4.3.1 Description du banc d'essai

Une fois les poutres fabriquées, elles doivent être testées de manière efficace et répétable. Ce travail sur la validation du banc d'essai ainsi que les tests et la création de l'algorithme d'analyse ont été réalisés conjointement avec un stagiaire, C. Leclerc [70], durant 3 mois.

Le banc d'essai, présenté à la Figure 4.7 et Figure 4.8, se compose d'une structure massive en acier permettant l'encastrement des poutres et l'isolation des vibrations extérieures. Les poutres sont excitées par un marteau instrumenté relié au système d'acquisition. La réponse vibratoire de la poutre est quant à elle mesurée par un vibromètre laser. La solution par accéléromètres piézoélectriques collés sur la poutre n'a pas été retenue afin de se libérer des erreurs induites par la masse ajoutée, la raideur du câble, etc. En conséquence, la mesure se fait en vitesse et non en accélération.

Le vibromètre laser utilisé est doté d'une tête de capteur OFV-505 Polytec et d'une lentille longue portée. Le contrôleur Polytec OFV-5000 permet la liaison à l'ordinateur.

Le marteau instrumenté est un PCB Piezotronics 086C01 avec en embout de nylon.

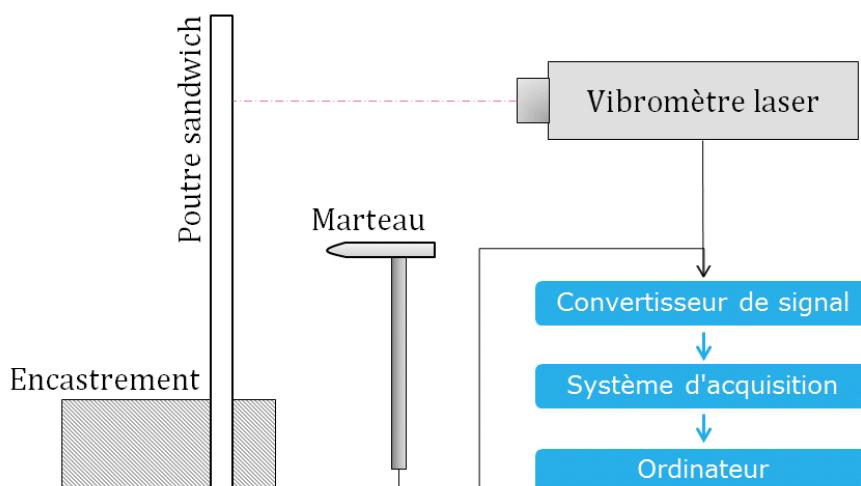


Figure 4.7 : Schéma banc d'essai

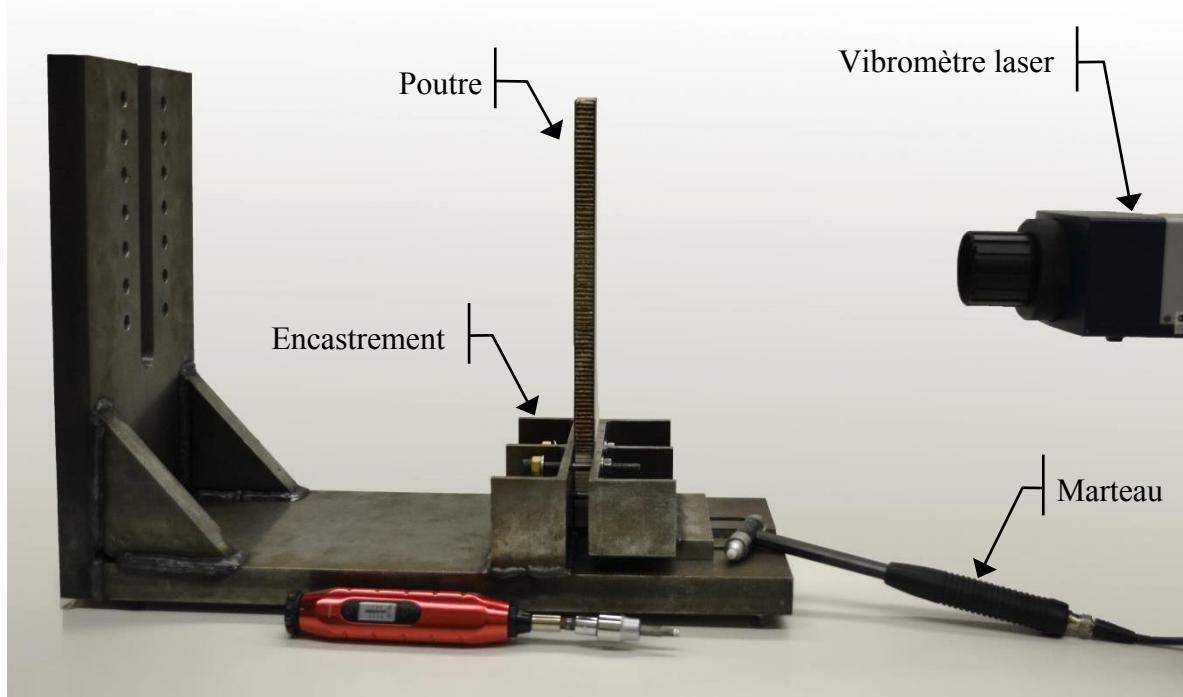


Figure 4.8 : Photo du banc d'essai

### 4.3.2 Protocole expérimental

De bonnes mesures d'amortissement étant relativement complexes à obtenir, une méthodologie expérimentale a été mise en place.

- Protocole de montage :
1. Installer la poutre sur le banc d'essai, encastrement de 5cm, serrage des vis à 40lb-po.
  2. Marquer la poutre à 5.5cm du sommet de la poutre, sur la ligne centrale – position du laser. Cette position doit respecter les spécifications du laser. Si on tape trop près de l'extrémité libre de la poutre, les amplitudes seront trop importantes pour être bien captées par le laser. De plus, cette position permet d'éviter les nœuds des cinq premiers modes.
  3. Marquer la poutre à 2 cm de la base de la poutre, sur la ligne centrale – position de l'impact. Ce point est choisi afin d'exciter une large gamme de modes de flexion et d'éviter les nœuds des cinq premiers modes.
  4. Positionner le laser à 64cm de la poutre et l'aligner sur la marque « Position du laser ».
  5. Opérer l'autofocus du laser.

- Paramètres d'acquisition :

Un programme LabView, créé par un ancien étudiant [71], [72], permet d'enregistrer les signaux temporels du marteau (force) et du vibromètre laser (réponse) pour chacun des impacts. Il permet d'accepter ou non l'impact réalisé, de moyenner les signaux, de les filtrer (Hanning ou hamming) et d'afficher la fonction réponse en fréquence (FRF). Les paramètres d'acquisition retenus sont regroupés au Tableau 4.3. L'enregistrement se fait sur une durée de 1s à la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  de 8192Hz. L'enregistrement débute lorsque la force d'excitation dépasse un seuil fixé. Puisque l'on veut enregistrer la totalité de l'impact, un pré-échantillonnage est réalisé.

Tableau 4.3 : Paramètres d'acquisition

Fréquence d'échantillonnage : $f_s$	8192 échantillons/s
Nombre total d'échantillons : N	8192 échantillons
Pré-échantillonnage	16 échantillons

- Manipulations :

Pour chaque poutre, deux expériences sont réalisées. Chaque expérience consiste au montage de la poutre, 20 impacts réalisés au marteau instrumenté, démontage. Les impacts sont réalisés de manière à appliquer une force constante de  $50N \pm 10\%$  afin d'assurer la répétabilité des résultats. Si l'impact n'est pas net (double impact par exemple) ou si la force n'est pas correcte, l'impact est rejeté. Sachant que le temps de stabilisation de la poutre est inférieur à la seconde, un temps d'attente minimal de 10s est respecté entre chaque impact. Au total, 32 montages/démontages ou encore 640 impacts (réussis) sont réalisés.

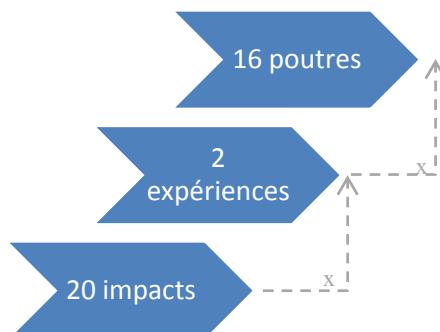


Figure 4.9 : Plan d'expérience

## 4.4 Analyse des données

L'analyse des données consiste en l'obtention des fréquences naturelles et du taux d'amortissement des poutres. Les fréquences naturelles sont issues des spectres de réponse en fréquence. Ceux-ci sont obtenus par division des signaux réponse (vibromètre) et force (marteau) transcrits dans le domaine fréquentiel par transformée Fourier rapide (FFT) [73]. La Figure 4.10 présente un spectre typique obtenu. On y observe plusieurs pics correspondants chacun à la fréquence naturelle d'un mode vibratoire. Les matériaux utilisés se déformant dans le domaine linéaire, les pics restent symétriques [74]. L'abscisse du maximum de chaque pic peut donc être associée à la fréquence naturelle du mode. L'amortissement est quant à lui proportionnel à l'évasement du pic.

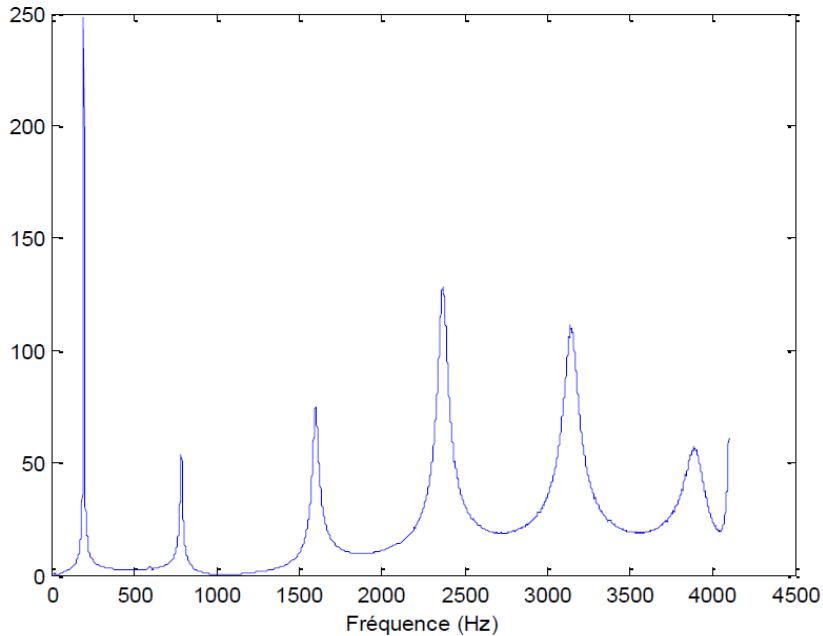


Figure 4.10 : FRF typique de poutre sandwich – poutre de « Référence »

La précision des résultats est donc directement liée au pas fréquentiel, calculé par l'équation (4.1). Plus il est petit, meilleure sera la résolution.

$$df = \frac{f_s}{N} \quad (4.1)$$

Pour réduire ce paramètre, on peut soit diminuer la fréquence d'échantillonnage  $f_s$ , soit augmenter le nombre d'échantillons N. Dans ces 2 cas, ceci implique d'augmenter le temps d'acquisition. Or, ceci est incompatible avec le caractère transitoire de l'impact au marteau. Le temps d'impact est de l'ordre de 0.1ms. Ainsi, un temps d'acquisition trop grand entraînera l'enregistrement de données rapidement constituées de bruit. Le faible rapport signal sur bruit résultant viendrait fausser les résultats.

Les premières expériences ont montré que la fréquence d'échantillonnage nécessaire à la bonne capture de l'impact impliquait un pas fréquentiel insuffisant à la bonne définition des pics des premiers modes. La Figure 4.11 présente le pic associé au mode 1 d'une poutre test en aluminium. L'allure de ce pic défini par 4 points ne correspond vraisemblablement pas au pic réel. Les mesures de la fréquence naturelle et de l'amortissement seront donc faussées.

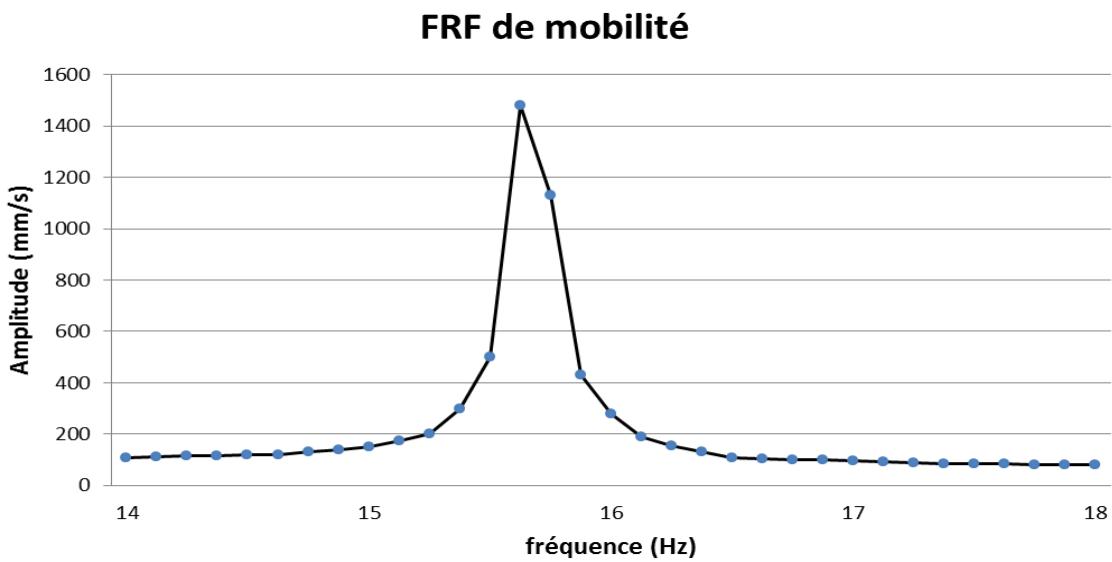


Figure 4.11 : 1er mode de la FRF d'une poutre test

Afin d'obtenir des résultats fidèles, 2 techniques de mesure de l'amortissement ont été utilisées. La première est la méthode très répandue de la demi-puissance, ou dite de “-3dB” [75][76]. Simple de mise en œuvre, cette méthode s'applique directement sur FRF et mesure la largeur du pic fréquentiel. Cependant, cette technique ne s'affranchit pas du problème de la résolution

fréquentielle et ne sera donc applicable que sur des pics bien définis. La seconde méthode dite “de lissage” repose sur l’idée d’un ajustement de courbe. Les paramètres de l’équation d’un pic théorique parfait de réponse à un degré de liberté seront ajustés pour faire correspondre ce dernier aux données expérimentales.

#### 4.4.1 Méthode -3dB

La méthode de la demi-puissance ou du “-3dB” est une méthode simple de mesure de l’amortissement. La Figure 4.12 présente cette méthode.

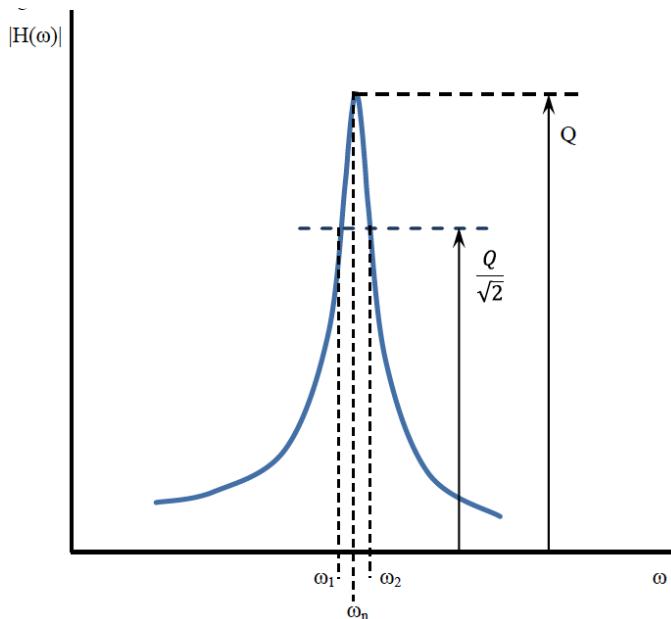


Figure 4.12 : Méthode du -3dB

Le but est de déterminer les 2 points correspondant à une diminution de l’amplitude du pic d’un facteur de  $\sqrt{2}$ . Ceci équivaut à une réduction de  $-3\text{dB}$ . La puissance est divisée par 2. L’amortissement se calcule alors selon la formule (4.2)

$$\eta = 2\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} \quad (4.2)$$

Comme expliqué précédemment, cette méthode est efficace pour des pics fréquentiels parfaitement définis. Il était donc nécessaire de développer une solution alternative.

#### 4.4.2 Méthode de lissage

La méthode de lissage repose sur l'association d'un pic théorique avec les données expérimentales. L'extraction des paramètres de la courbe nous donnera alors le facteur d'amortissement.

L'équation théorique d'un pic fréquentiel isolé peut être déduite de l'étude d'un système masse ressort à un degré de liberté, Figure 4.13.

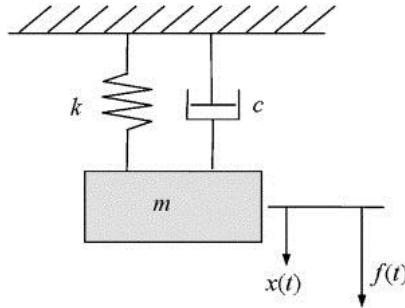


Figure 4.13 : Système à 1 degré de liberté

L'équation (4.3) présente l'équation de mouvement de ce système. En posant les constantes modales classiques  $\omega_n$  la fréquence naturelle et  $\zeta$  le taux d'amortissement, l'équation peut se réécrire sous la forme (4.6):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \quad (4.3)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.4)$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (4.5)$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{1}{m}f \quad (4.6)$$

L'expression de la fonction de transfert associée au système donne, après passage dans le domaine fréquentiel par FFT, l'équation de mobilité (4.7). Cette équation peut être réécrite sous

la forme (4.8). Elle dépend alors des 3 paramètres  $a$ ,  $\omega_n$  et  $\zeta$ . Se sont les 3 paramètres d'ajustement.

$$\left| \frac{\dot{X}(\omega)}{F(\omega)} \right| = \left( \frac{1}{k} \right) \frac{\omega \omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega\omega_n)^2}} \quad (4.7)$$

$$y = \frac{a \cdot \omega}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega\omega_n)^2}} \quad (4.8)$$

Afin de réaliser l'ajustement de courbe, il faut d'abord isoler le pic. L'ajustement des paramètres de courbe est alors réalisé sous Matlab par la méthode des moindres carrés associée à l'estimateur « bisquare ». Afin de limiter le temps de calcul, la fonction initiale de Matlab a été modifiée (pour empêcher les amortissements négatifs par exemple).

La formule étant développée pour un système à un seul degré de liberté, il faut veiller à ce qu'il n'y ait pas trop de couplage entre les différents pics. En effet, lorsque les pics sont proches ou que l'amortissement est grand, le pic peut ne pas redescendre proche de zéro comme l'impose le modèle. C'est la principale contrainte de cette méthode.

Cependant de manière générale, les FRF de nos échantillons présentent des pics bien séparés. La Figure 4.14 montre un exemple de traitement. La ligne rouge représente la courbe ajustée tandis que les points bleus sont les données expérimentales. La courbe représente parfaitement les données, le sommet réel du pic qui était situé entre 2 points expérimentaux est maintenant bien localisé.

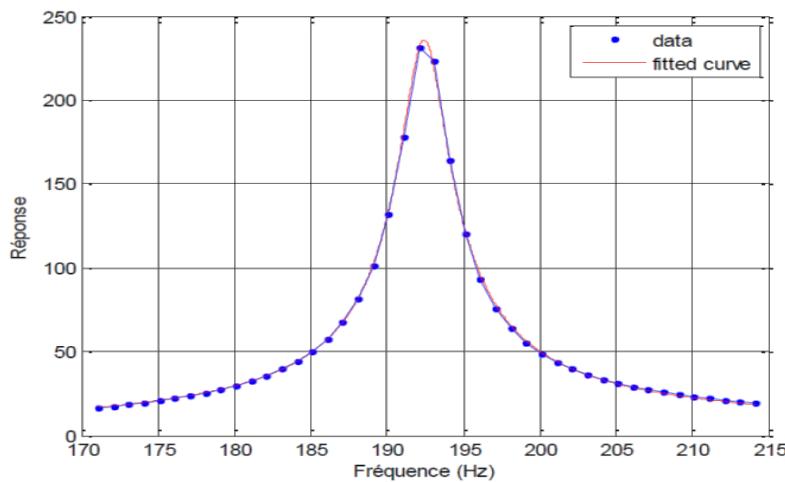


Figure 4.14 : Pic du 1er mode de la poutre test

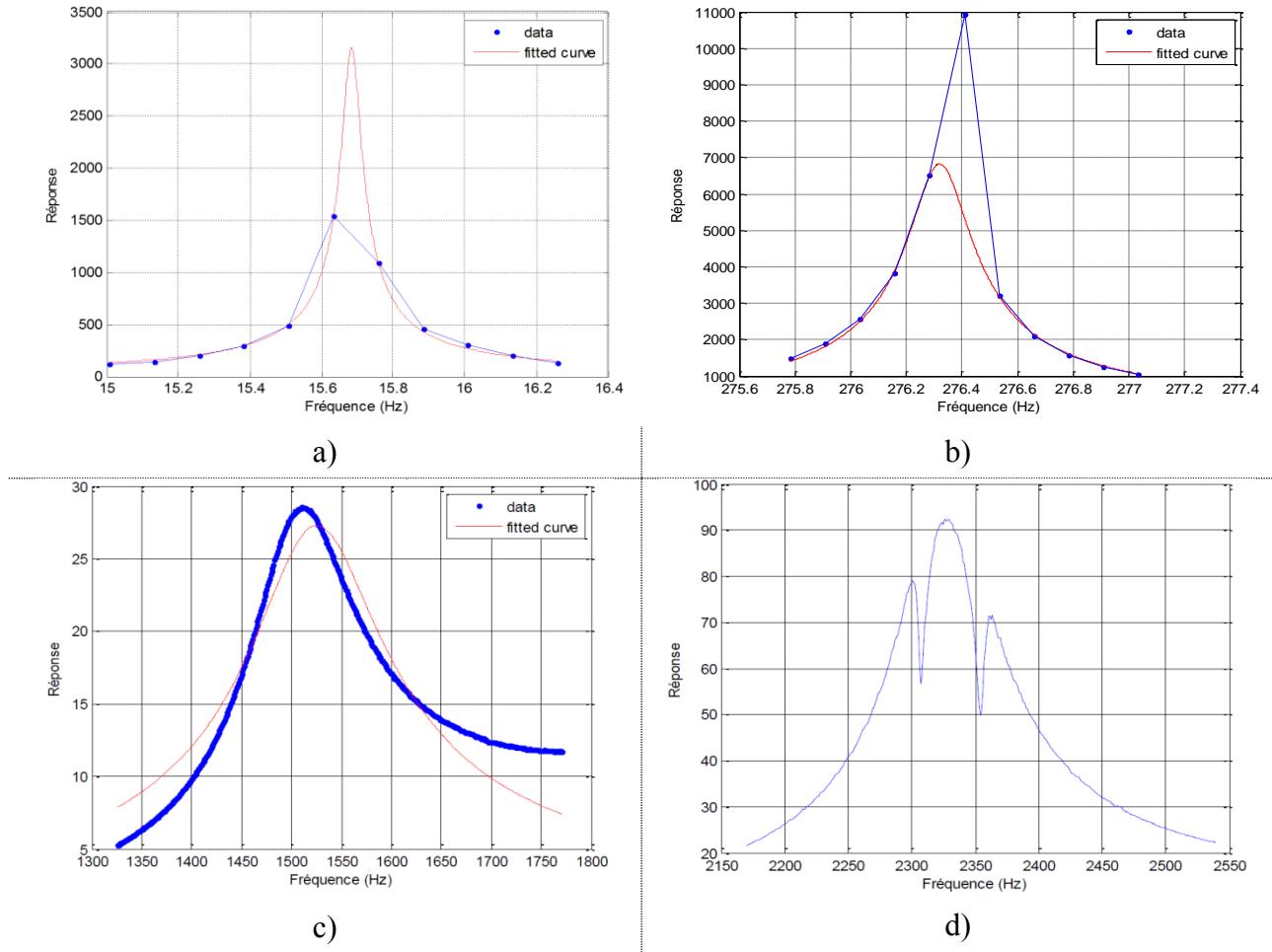


Figure 4.15 : Exemples de résultats obtenus par la méthode de lissage

La Figure 4.15 présente différents exemples de résultats particuliers obtenus. L'intérêt est ici de pointer quelques résultats marginaux montrant l'efficacité ou les limites de la méthode de lissage.

La figure a) montre un pic expérimentalement de mode 1 définis par 6 points. Dans ce cas, la mauvaise résolution aurait entraîné de faux résultats par la méthode classique du  $-3\text{dB}$ . En revanche, la courbe ajustée rouge semble bien représenter l'allure du pic réel. La méthode de lissage apporte donc un réel gain pour la détermination de facteur de perte en basses fréquences.

Sur la figure b), on observe que la courbe ajustée ne suit pas l'ensemble des points expérimentaux. Le point extrême a été écarté par l'algorithme et les résultats obtenus par la méthode du lissage seront donc faux. La méthode de lissage n'est donc pas fiable à 100%. Même si de tels résultats sont marginaux, une confirmation visuelle est préférable.

Le pic observé à la figure c) ne correspond pas à un 1er mode, la résolution est donc meilleure. On observe que ce pic n'est pas symétrique et qu'il ne revient pas autour de zéro. Ceci est dû au fait qu'il existe un couplage avec le pic suivant. Dans ce cas, la méthode -3dB sera à privilégier.

Enfin, certains pics observés, d), présentent des creux dont l'origine nous reste inconnue. Il peut s'agir d'une erreur dans la chaîne d'acquisition et de traitement ou encore un couplage avec les modes de torsion. Dans ce cas, la différence entre les données expérimentales et la courbe théorique d'un pic est trop grande pour appliquer la méthode du lissage. La méthode de la demi-puissance sera donc utilisée avec une sélection manuelle des facteurs de perte à -3dB (le programme ayant le choix entre 2 valeurs)

Afin de s'assurer de la cohérence de la méthode créée, un test de reproductibilité a été réalisé. La poutre de référence a été testée et analysée 3 fois avec montage et démontage. Les fréquences naturelles, les facteurs de perte et les pourcentages d'erreurs pour les 5 premiers modes sont présentés dans le Tableau 4.4. Pour les amortissements le taux d'erreur maximal est d'environ 6% (i.e. 1,35 vs 1,28) ce qui, compte tenu des conditions d'expérience, est très acceptable. De plus, ce maximum est atteint pour le 1er mode dont la résolution fréquentielle est faible. Il n'est donc pas étonnant d'observer plus de divergence dans ce cas. Les fréquences naturelles sont quant à elles extrêmement bien déterminées puisque l'erreur maximale ne dépasse pas 1%. La reproductibilité de la méthode est donc validée.

Tableau 4.4 : Test de reproductibilité de la poutre test

		Expérience 1	Expérience 2	Expérience 3	Erreur (%)
Mode 1	$\omega_n$ (Hz)	201.9	202.1	203.2	0.6
	$\eta$ (%)	1.28	1.3	1.35	6.04
Mode 2	$\omega_n$ (Hz)	799.1	799.3	801.4	0.29
	$\eta$ (%)	1.7	1.7	1.72	1.08
Mode 3	$\omega_n$ (Hz)	1625.8	1626.9	1630.3	0.28
	$\eta$ (%)	2.29	2.41	2.36	4.85
Mode 4	$\omega_n$ (Hz)	2373.6	2376.1	2378.7	0.22
	$\eta$ (%)	2.62	2.77	2.75	5.8
Mode 5	$\omega_n$ (Hz)	3147	3146.6	3152.23	0.18
	$\eta$ (%)	2.91	3.01	3.06	4.9

### 4.4.3 Conclusion sur les méthodes

Les méthodes –3dB et de lissage présentent chacune ses avantages et ses inconvénients. La méthode -3dB est simple et rapide mais ne permet pas d'obtenir de bons résultats en faible résolution fréquentielle, c'est-à-dire, en basse fréquence. La méthode de lissage apporte une bonne solution à ce problème mais est limitée par l'efficacité des techniques d'ajustement des courbes ou le couplage entre les pics intervenant en haute fréquence. De plus, cette méthode induit des calculs beaucoup plus longs.

Dans la pratique, afin de s'assurer de nos résultats, les 2 méthodes ont été appliquées à chacun des 5 pics (associés aux 5 premiers modes) des 32 expériences réalisées. Si la différence entre les 2 résultats excédait 3%, une observation visuelle du pic était réalisée afin de déterminer qu'elle méthode approchait au mieux de la réalité.

Le programme Matlab réalisé est pleinement automatisé, de la lecture des données temporelles à l'enregistrement des résultats. Une interface utilisateur simple permet son contrôle sans connaissances spéciales en programmation. Ses tâches sont :

- Lecture du fichier texte créé par le programme d'acquisition LabView
- Calcul de la FRF
- Moyennage RMS avec l'estimateur H2
- Calcul des fréquences de résonnance et de l'amortissement avec les méthodes -3 dB et de lissage
- Affichage des résultats (plusieurs options)
- Affichage de graphiques (plusieurs options)
- Sauvegarde des résultats

## 4.5 Résultats et discussion

Au total, ce sont 9 types de poutres dont 8 avec traitement amortissant qui ont été analysés. Pour chacun de ces traitements, 2 poutres ont été testées (sauf « P0 », « P1 » et « P2 » dont les traitements de 5cm répartis le long de la poutre se réfèrent aux traitements réalisés par E-

R.Fotsing et al. [57]). Pour chacune, 2 expériences ont été réalisées, soit 32 résultats en fréquence et amortissement et ce, pour chacun des 5 premiers modes. Afin de ne pas surcharger la présentation, une première analyse écartant certains résultats aberrants et faisant un moyennage des valeurs a permis de conserver un seul résultat de fréquence et d'amortissement pour chacun des 9 traitements. Ainsi, nous pourrons les comparer et identifier les traitements les plus performants.

Nous retiendrons de cette première étude que la fabrication des poutres et les tests d'impacts sont des processus répétables. En effet, pour chacun des traitements les résultats en fréquences se conservaient à 2% près tandis que les facteurs de perte se tenaient dans un écart acceptable de l'ordre de 11%. Afin de nuancer l'erreur sur l'amortissement, il faut noter que l'erreur relative maximale est obtenue entre des valeurs faibles (i.e. 4.23 vs 4.69). Encore une fois, un tel pourcentage d'erreur n'est pas surprenant aux vues des conditions de fabrication des poutres, des tests expérimentaux et techniques d'analyses.

Les résultats présentés font référence aux noms donnés aux différents traitements amortissants tel que détaillés en Tableau 4.2.

#### 4.5.1 Analyse préliminaire temporelle

Les réponses temporelles enregistrées à l'aide du vibromètre laser permettent d'avoir une première approximation visuelle des résultats. Après l'impact, le traitement viscoélastique dissipe de l'énergie ce qui a pour effet d'atténuer les vibrations. Ainsi, le temps d'immobilisation de la poutre est directement proportionnel à la capacité amortissante de la structure. En revanche, cette méthode ne permet pas d'accéder au coefficient d'amortissement par mode. L'effet observé est principalement dû à l'amortissement du premier mode.

La Figure 4.16 présente les réponses temporelles de la poutre de « Référence », du traitement « Complet », et du traitement « P0 » (patch de 5cm à l'encastrement). On observe que c'est la poutre de « Référence », associée au signal bleu, qui est la moins amortie alors que la poutre avec le traitement « Complet » (signal vert) est très efficace. En terme de temps d'immobilisation (i.e. le temps nécessaire pour que la vitesse de la poutre passe en dessous de 3mm/s), la poutre de « Référence » vibre pendant 0.65s, la poutre avec le traitement « P0 » pendant 0.4s et celle avec

le traitement « Complet » pendant 0.3s. Cette première approximation confirme donc le fait intuitif que le traitement « Complet » est plus efficace que le traitement par patch. Cependant l'ajout de masse par ce type de traitement est conséquent et peut donc rendre la technique inadaptée aux applications aéronautiques pour lesquelles la minimisation du poids est cruciale.

Afin de déterminer le meilleur traitement du point de vue efficacité versus poids, une étude plus approfondie est donc nécessaire.

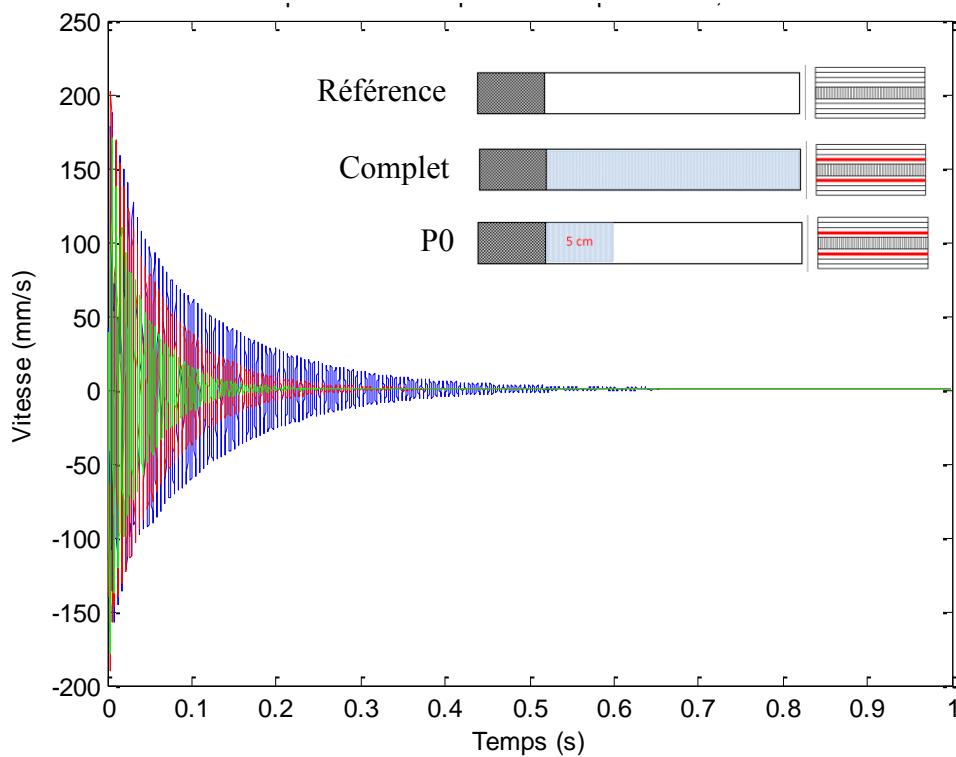


Figure 4.16 : Réponses temporelles des poutres de « Référence » (bleu), avec traitement « Complet » (vert) et avec traitement « P0 » (rouge)

#### 4.5.2 Analyse des fréquences naturelles

Les Figure 4.17 à Figure 4.19 présentent les spectres fréquentiels de l'ensemble des traitements réalisés. Il s'agit des FRF moyennées pour chacun des traitements. A chaque pic fréquentiel est associée la fréquence naturelle d'un mode de vibration.

La Figure 4.17 montre les FRF des poutres « Référence » et « Complet ». A des fins de comparaisons des résultats, le Tableau 4.5 regroupe les masses ajoutées aux poutres par les traitements viscoélastiques. On observe que les pics fréquentiels se superposent bien pour les modes inférieurs mais que le traitement « Complet » tend à décaler la FRF vers la droite aux plus hautes fréquences. La masse ajoutée par ce traitement est de 3,3g soit environ 4% de plus que la poutre de référence. D'après la formule usuelle de la fréquence naturelle d'un système à un degré de liberté,  $\omega = \sqrt{K/M}$ , plus on ajoute de masse plus la fréquence propre doit diminuer, le résultat est donc cohérent. On observe également que les pics ont une amplitude plus faible et sont plus évasés ce qui démontre une plus forte capacité amortissante. Le traitement complet semble donc efficace du point de vue amortissement mais la forte masse ajoutée implique un déplacement des fréquences naturelles.

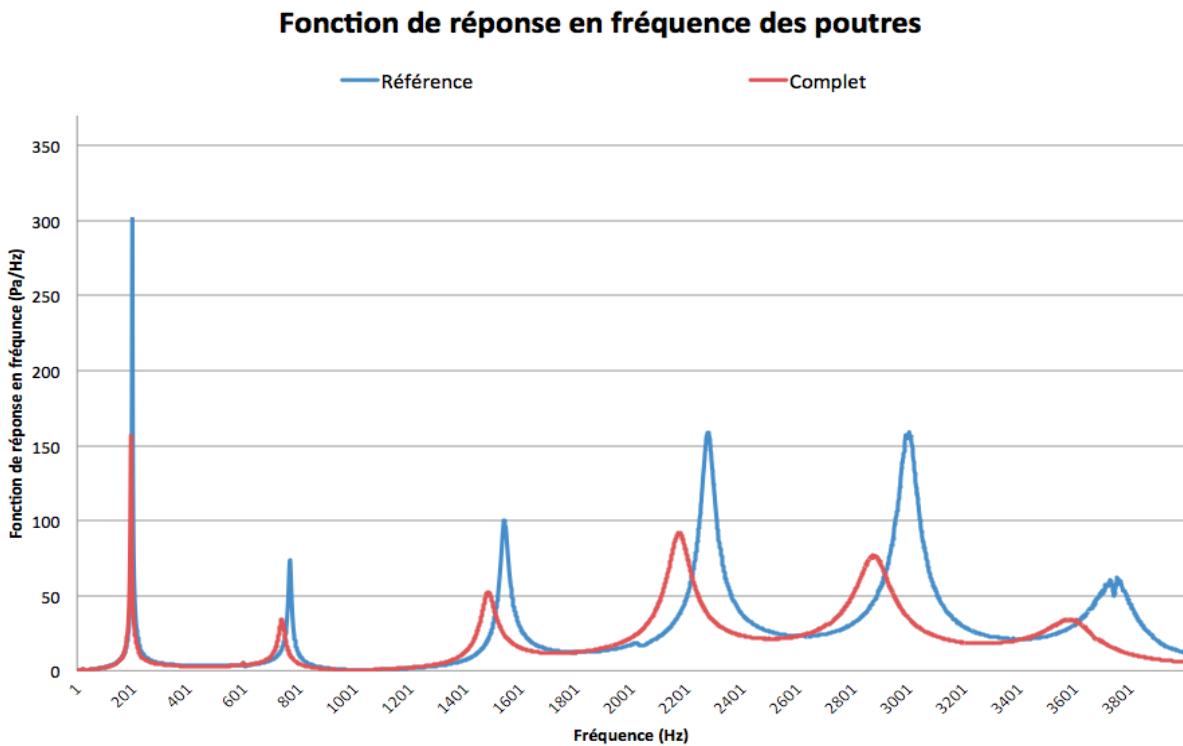


Figure 4.17 : FRF des poutres « Référence » et « Complet »

Tableau 4.5 : Masse ajoutée par les traitements viscoélastique

	Référence	Complet	P0, P1, P2	Base, C23, C34	Double
Masse (g)	85	86.65	87.12	87.49	85.56
Masse ajoutée (g)		3.3	0.47	0.37	0.56
Masse ajoutée (%)		3.88%	0.55%	0.44%	0.66

Les poutres « P0 », « P1 » et « P2 » visent à mettre en évidence l'effet de la position du patch. La Figure 4.18 montre que les FRF associées à ces traitements sont très similaires. Ceci semble logique puisque l'ajout de masse induite par ses traitements; patchs de 5cm, est la même, de l'ordre de 0.55% (Tableau 4.5 : Masse ajoutée par les traitements viscoélastiqueTableau 4.5). Cependant, théoriquement, si on insere sur une poutre une masse localisée en un point de la poutre qui ne vibre pas (i.e. nœud), l'augmentation d'inertie est nulle et donc la masse dynamique est inchangée. La réponse en fréquence devrait donc être modifiée en fonction de la position du patch. Les résultats nous montrent donc que la masse ajoutée est trop faible (0.37g) pour avoir un impact conséquent sur les fréquences.

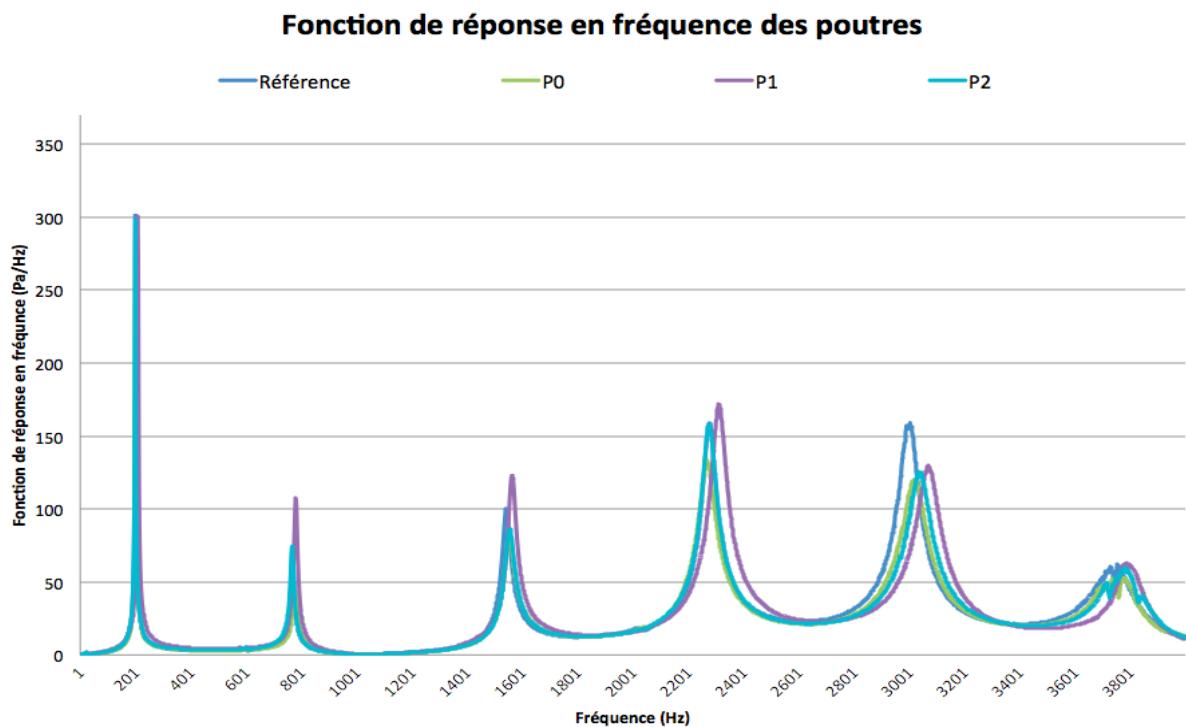


Figure 4.18 : FRF des poutres « P0 », « P1 » et « P2 »

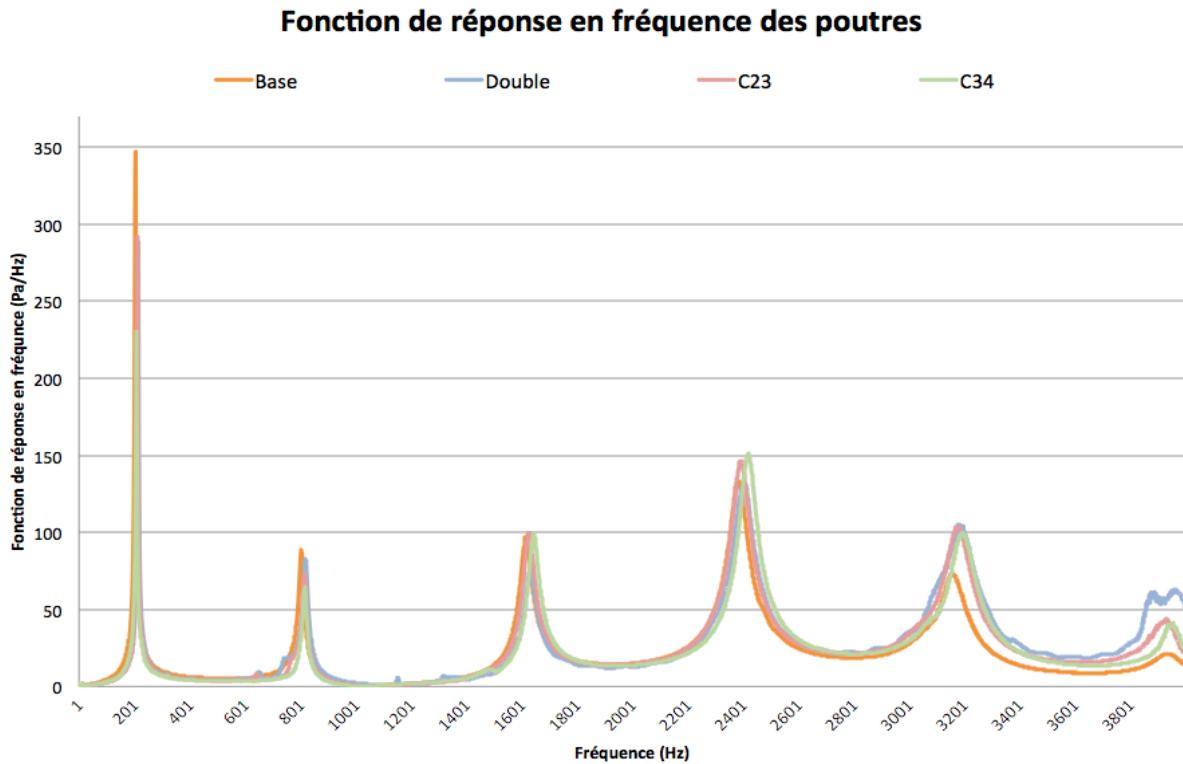


Figure 4.19 : FRF des poutres « Base », « Double », « C23 » et « C34 »

La Figure 4.19 présente les FRF des traitements « Base », « Double », « C23 » et « C34 » mettant en avant l'effet de la position du patch entre les plis des peaux. Cette fois encore, les graphes se superposent parfaitement. Les patchs de 4cm des traitements « Base », « C23 » et « C34 », situés à l'encastrement, ajoutent une masse de 0.44% tandis que le traitement « Double » ajoute 0.66% par rapport à la poutre de référence. Ceci montre donc que la position du patch viscoélastique à un très faible impact sur les fréquences naturelles. Ceci semble logique à la vue des faibles épaisseurs de peaux considérées (0.2mm); déplacer le patch viscoélastique dans une couche supérieure ne modifiera quasiment pas son inertie.

Les fréquences naturelles obtenues par mode sont présentées dans le Tableau 4.6.

Tableau 4.6 : Fréquences naturelles (Hz) par mode

	Ref	Complet	P0	P1	P2	Base	Double	C23	C34	Écart maximal
<b>Mode 1</b>	201.1	190.3	200.1	207.8	199.1	204.3	214.0	203.5	205.3	11.10%
<b>Mode 2</b>	771.7	729.8	779.5	779.3	766.4	804.0	818.0	796.0	800.7	10.78%
<b>Mode 3</b>	1539.5	1465.6	1552.9	1560.9	1553.9	1618.3	1631.0	1609.5	1615.7	10.14%
<b>Mode 4</b>	2267.9	2154.8	2269.3	2306.8	2277.3	2385.0	2405.0	2375.0	2375.0	10.40%
<b>Mode 5</b>	3002.2	2861.6	3021.7	3137.0	3034.8	3162.3	3183.0	3144.0	3139.3	10.10%

De manière générale, on observe également qu'il n'y pas beaucoup de couplage entre les pics des modes 1 et 2, la symétrie est assurée. Ceci implique que la méthode par lissage devrait donner de bons résultats pour l'amortissement. Le couplage plus important pour les modes supérieurs ne pose pas de problèmes majeurs puisque, dans ce cas, la résolution fréquentielle est bonne et la méthode par  $-3\text{dB}$  efficace. Enfin, on notera que les pics sont bien droits et non incurvés vers la droite ou la gauche. Ceci démontre le comportement linéaire du matériau [74] et confirme donc cette hypothèse utilisée dans la résolution analytique.

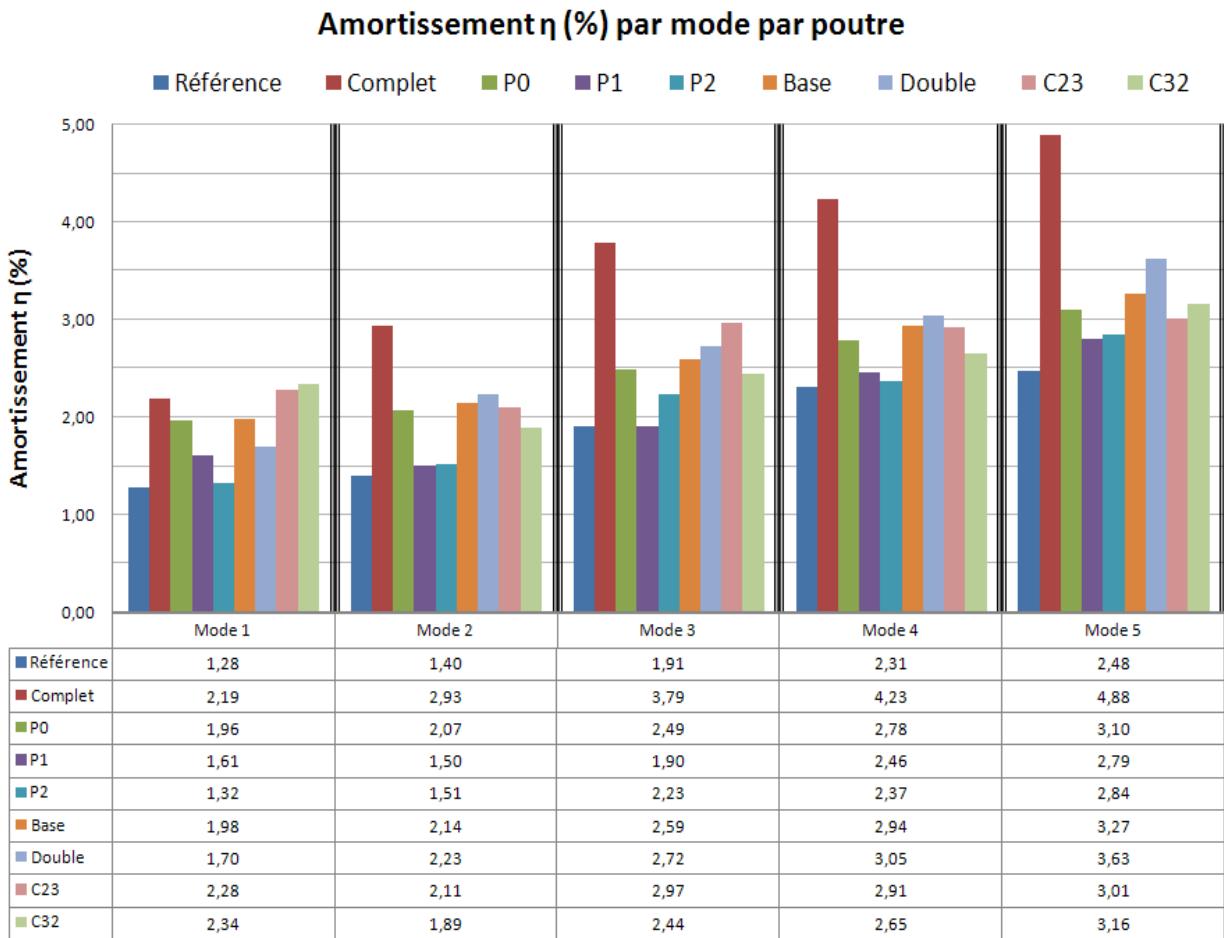
#### 4.5.3 Analyse des amortissements :

La Figure 4.17 met en évidence l'efficacité de l'amortissement par traitement « Complet ». On observe d'abord que l'amplitude des pics a été divisée par 2. Ensuite, la largeur des pics est plus grande pour le traitement « Complet » que pour la poutre de « Référence ». L'énergie dissipée est donc plus grande.

Les résultats sur les amortissements sont regroupés dans le Tableau 4.7 par type de traitement et par mode. Comme supposé et observé en analyse préliminaire, on constate que l'insertion d'une couche viscoélastique entre les peaux sur toute la longueur du sandwich est le traitement amortissant le plus efficace, et ce, pour tous les modes.

Il est bon de rappeler que les résultats d'amortissements sont donnés avec une marge d'erreur de l'ordre de 10%.

Tableau 4.7 : Résultats expérimentaux sur les amortissements par mode



Plusieurs observations peuvent être faites sur ces résultats :

- Globalement, l'amortissement de ce type de structure augmente avec le mode. L'atténuation des hautes fréquences est donc plus efficace. Cependant, les amplitudes d'oscillations considérées sont plus grandes en basse fréquence qu'en haute fréquence, c'est pourquoi nous considérerons le taux d'amortissement du 1<sup>er</sup> mode comme étant le plus crucial (de fortes amplitudes pouvant provoquer bris mécaniques, délamination...)
- Les résultats du traitement « P0 », patch de 5cm à l'encastrement, sont très similaires à ceux du traitement « Base », patch de 4cm à l'encastrement. Ceci montre donc que la longueur du patch peut être réduite, dans une certaine limite, sans réduction significative de l'efficacité. Cette conclusion est importante pour toutes les applications, telle que l'aéronautique, pour qui la masse joue un rôle critique.

- Les traitements viscoélastiques localisés à la base de la poutre, au niveau de l'encastrement, sont les plus efficaces (les échantillons « P1 » et « P2 » ont des valeurs plus faibles que « P0 »). Cette tendance peut s'expliquer par le fait que c'est une zone de cisaillement maximale de par le comportement du nid d'abeille. Le matériau viscoélastique, travaillant uniquement en cisaillement, dissipe donc beaucoup d'énergie.
- Les traitements « Base », « C23 » et « C34 » mettent en évidence l'effet de la position du patch par rapport à l'axe neutre de la poutre. La poutre « Base » possède un patch entre ses couches 1 et 2, les plus internes au sandwich, celui de la poutre « C23 » est entre les plis 2 et 3 et ceux de la poutre « C34 » entre les plis 3 et 4, les plus externes (voir Tableau 4.2). Ces résultats sont proches les uns des autres et ne permettent pas de conclusions claires. Cependant, la théorie implique des déformations en cisaillement plus importante proche de l'axe neutre, le traitement « Base » (le plus interne) semble donc être à privilégier. Les résultats vont en ce sens pour les modes 2,4 et 5.
- Le traitement « Double » visait à analyser l'effet d'avoir 2 patchs viscoélastiques d'épaisseur moitié versus un patch simple de type « Base ». Les résultats montrent de plutôt bonnes performances pour les modes élevés mais moindres pour le mode 1. Cependant, les disponibilités de matériau nous ont obligé, tel qu'indiqué en Tableau 4.2, à utiliser du viscoélastique d'épaisseur 0.15mm et non 0.1mm afin d'avoir une épaisseur moitié. Ainsi, nous comparons un patch de 0.3mm versus un patch de 0.2mm. Alors, d'après ces considérations, nous pouvons conclure que le traitement Double n'apporte pas de réel bénéfice par rapport à un traitement simple.

Il est intéressant de comparer les traitements « Complet » et « Base » par rapport à la poutre de « Référence », Figure 4.20. Ces graphes montrent tout l'intérêt du traitement par patchs. Certes les performances sont moindres mais la masse ajoutée est 8.8 fois plus faible (0.44% au lieu de 3.88%). Pour des applications aéronautiques, cette solution est donc très intéressante.

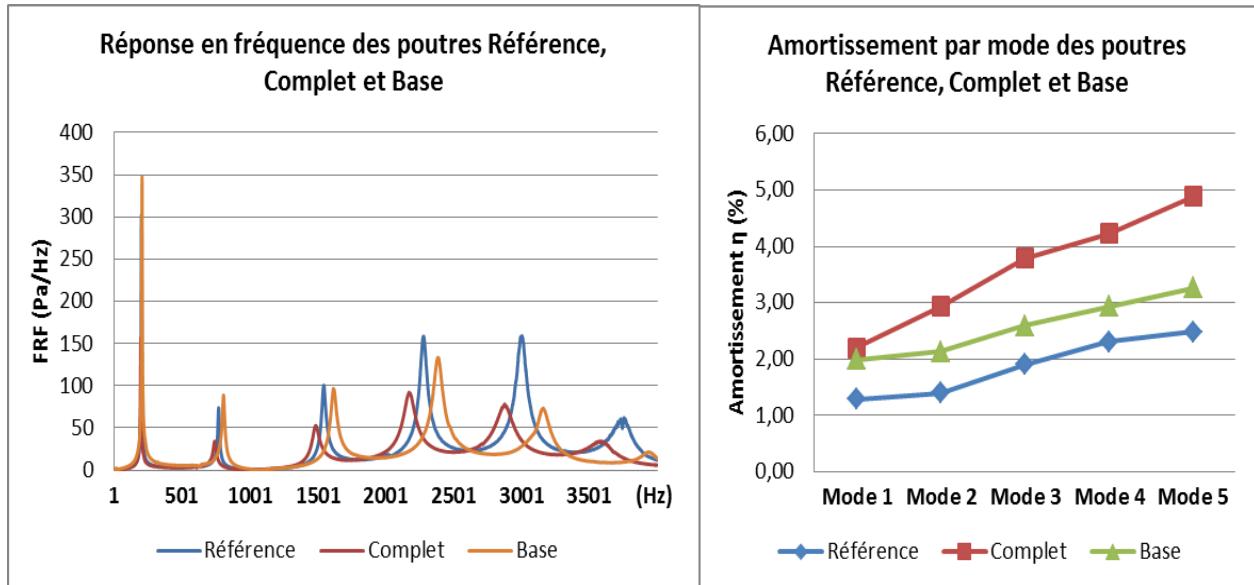


Figure 4.20 : Résultats expérimentaux des traitements Référence, Complet et Base

## 4.6 Conclusion sur la partie expérimentale

Visant à obtenir des résultats fiables d'amortissement de structures sandwichs, cette partie expérimentale nous a d'abord mené à concevoir nos propres poutres. Un protocole de mise en forme et de cuisson a été développé afin d'assurer la fabrication de poutres aux caractéristiques homogènes. Le banc d'essai, couplé à l'algorithme d'analyse spécialement conçu pour se libérer du problème de résolution dû au caractère transitoire de l'impact, a permis la mesure des fréquences naturelles et des amortissements des poutres de manière fiable et répétable.

Plusieurs conclusions peuvent être tirées de ces résultats. Le traitement par patch viscoélastique versus traitement « Complet » constitue une solution efficace pour des applications où la masse joue un rôle important. De manière générale, il semble que le traitement de l'enca斯特rement soit le plus efficace.

Ces conclusions partielles sont déjà intéressantes. Cependant, elles ne constituent pas l'objectif premier de cette étude, obtenir des résultats fiables afin de valider le code analytique développé. C'est le sujet du Chapitre 5 de ce mémoire.

## Chapitre 5 VALIDATION, ANALYSES ET DISCUSSIONS

L'objectif de ce dernier chapitre est, dans un premier temps, de valider le modèle analytique proposé. Les résultats obtenus expérimentalement au Chapitre 4 seront comparés aux estimations proposées par le modèle. Une fois le modèle validé, il pourra alors être mis à profit afin d'exprimer des recommandations pratiques sur l'utilisation et la performance des traitements viscoélastiques des poutres composites sandwich. Notamment, les effets de la longueur et de l'épaisseur des patchs sur les performances du traitement amortissant seront étudiés. Enfin, un exemple de traitement multi-patch sera présenté.

### 5.1 Validation du modèle analytique

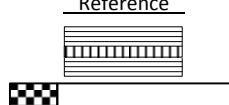
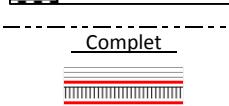
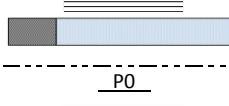
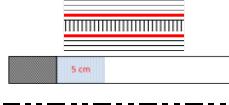
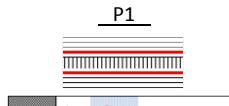
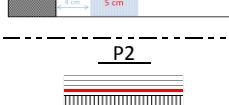
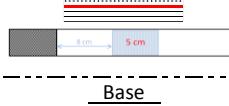
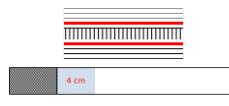
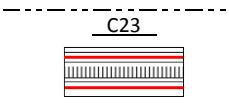
La validation du modèle analytique comporte 2 volets. La première validation utilisera les données expérimentales obtenues au Chapitre 4. La seconde quant à elle se basera sur les résultats obtenus par E.R. Fotsing et M. Sola [57] au sein du laboratoire. Les résultats de cette dernière étude ont déjà été présentés en section 3.2 « Choix du panel de poutre ».

#### 5.1.1 Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

L'ensemble des poutres et traitements présentés au Chapitre 4 a été analysé par le modèle analytique développé dans le Chapitre 3. Les caractéristiques des poutres sont données dans le Tableau 4-1. De même qu'en partie expérimentale, les poutres sont simulées dans les conditions aux limites encastré-libre. Les résultats théoriques en termes de fréquences naturelles et d'amortissement sont donnés dans le Tableau 5.1. Ils sont comparés aux résultats expérimentaux obtenus. Pour les fréquences naturelles, les pourcentages d'erreur relative sont fournis. Une valeur positive indique que le modèle a tendance à surestimer la fréquence propre, et inversement, une valeur négative indique une sous-estimation. Pour les amortissements, les pourcentages d'erreur relative sont également donnés ainsi que les écarts entre les valeurs. Aux vues des faibles valeurs considérées, les écarts peuvent s'avérer plus parlants. Pour chaque cas, la valeur expérimentale sert de référence. Enfin, la partie inférieure du tableau fournit des informations sur l'ensemble des résultats. La moyenne absolue est calculée par la moyenne de

toutes les erreurs relatives (de tous les traitements et pour tous les modes) prises en valeurs absolues. Le maximum d'erreur et l'écart type sont également donnés.

Tableau 5.1 : Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

		Fréquences naturelles			Facteurs de perte			
		Expérimental (Hz)	Modèle (Hz)	Erreur relative (%)	Expérimental (%)	Modèle (%)	Ecart (%)	
	<u>Référence</u>	Mode 1 199.6	202.5	1.4%	1.28	1.37	0.09	6.8%
	Mode 2 771.7	780.5	1.1%	1.40	1.54	0.14	10.2%	
	Mode 3 1547.1	1594.2	3.0%	1.91	1.87	-0.04	-1.9%	
	Mode 4 2281.4	2299.0	0.8%	2.31	2.23	-0.08	-3.4%	
	Mode 5 3020.1	3131.4	3.7%	2.48	2.64	0.16	6.5%	
	<u>Complet</u>	Mode 1 191.2	193.4	1.1%	2.19	2.34	0.15	6.6%
	Mode 2 732.0	754.7	3.1%	2.93	3.01	0.08	2.6%	
	Mode 3 1471.5	1514.1	2.9%	3.79	3.97	0.18	4.7%	
	Mode 4 2160.5	2254.3	4.3%	4.23	4.11	-0.12	-2.8%	
	Mode 5 2874.9	3007.9	4.6%	4.88	5.26	0.38	7.7%	
	<u>P0</u>	Mode 1 200.2	198.9	-0.7%	1.96	2.17	0.21	10.5%
	Mode 2 779.1	784.7	0.7%	2.07	2.19	0.12	5.8%	
	Mode 3 1554.3	1524.3	-1.9%	2.49	2.76	0.27	10.9%	
	Mode 4 2269.9	2251.6	-0.8%	2.78	2.94	0.16	5.7%	
	Mode 5 3019.4	3098.8	2.6%	3.10	3.41	0.31	9.9%	
	<u>P1</u>	Mode 1 207.8	209.2	0.7%	1.61	1.87	0.26	16.1%
	Mode 2 779.3	791.8	1.6%	1.50	1.49	-0.01	-0.7%	
	Mode 3 1560.9	1559.3	-0.1%	1.90	2.06	0.16	8.4%	
	Mode 4 2306.8	2359.8	2.3%	2.46	2.61	0.15	6.1%	
	Mode 5 3137.0	3237.3	3.2%	2.79	3.08	0.29	10.3%	
	<u>P2</u>	Mode 1 199.1	196.7	-1.2%	1.32	1.45	0.13	9.5%
	Mode 2 766.4	763.4	-0.4%	1.51	1.67	0.15	10.1%	
	Mode 3 1553.9	1580.3	1.7%	2.23	2.42	0.19	8.7%	
	Mode 4 2277.3	2338.8	2.7%	2.37	2.49	0.12	5.2%	
	Mode 5 3034.7	3113.7	2.6%	2.84	2.79	-0.05	-1.9%	
	<u>Base</u>	Mode 1 204.3	206.2	0.9%	1.98	2.10	0.12	5.8%
	Mode 2 804.0	797.6	-0.8%	2.14	2.31	0.17	8.2%	
	Mode 3 1618.3	1576.3	-2.6%	2.59	2.58	-0.01	-0.4%	
	Mode 4 2385.0	2332.5	-2.2%	2.94	3.05	0.11	3.7%	
	Mode 5 3162.3	3032.7	-4.1%	3.27	3.50	0.24	7.3%	
	<u>C23</u>	Mode 1 203.5	200.7	-1.4%	2.28	2.12	-0.16	-7.0%
	Mode 2 796.0	797.6	0.2%	2.11	2.35	0.25	11.7%	
	Mode 3 1609.5	1580.5	-1.8%	2.97	3.09	0.12	3.9%	
	Mode 4 2375.0	2303.8	-3.0%	2.91	3.10	0.19	6.4%	
	Mode 5 3144.0	3043.4	-3.2%	3.01	3.11	0.10	3.2%	
	<u>C34</u>	Mode 1 205.3	207.0	0.8%	2.34	2.08	-0.26	-11.0%
	Mode 2 800.7	803.1	0.3%	1.89	2.09	0.20	10.6%	
	Mode 3 1615.7	1586.6	-1.8%	2.44	2.40	-0.03	-1.4%	
	Mode 4 2375.0	2299.0	-3.2%	2.65	2.75	0.10	3.8%	
	Mode 5 3139.3	3023.2	-3.7%	3.16	3.39	0.23	7.3%	
	<u>Double</u>	Mode 1 214.0	213.8	-0.1%	1.70	1.85	0.15	8.9%
	Mode 2 818.0	803.3	-1.8%	2.23	2.44	0.22	9.7%	
	Mode 3 1631.0	1608.2	-1.4%	2.72	2.92	0.20	7.5%	
	Mode 4 2405.0	2349.7	-2.3%	3.05	3.11	0.06	2.1%	
	Mode 5 3183.0	3090.7	-2.9%	3.63	3.54	-0.09	-2.5%	
Moyenne absolue :				2.0%		0.16	6.6%	
Maximum :				4.6%		0.38	16.1%	
Ecart type :				1.2%		0.08	3.5%	

Le Tableau 5.1 montre de bons résultats. En effet, le modèle analytique permet d'estimer les fréquences naturelles avec une erreur moyenne absolue de 2%, l'erreur maximale commise étant de 4.6%. Le modèle permet donc de calculer les fréquences naturelles de manière fidèle. Concernant les amortissements, l'erreur moyenne sur les résultats est de 6.6% avec un maximum de 16.1%. Cependant, aux vues des faibles valeurs considérées, il est intéressant de regarder les écarts absolu. Dans ce cas, on constate que la moyenne des écarts est 0.16, ce qui est excellent. Quelques fortes valeurs viennent dégrader la performance (avec un maximum à 0.38% d'erreur absolue), souvent au mode 5. Compte tenu des approximations faites dans le modèle et de la difficulté d'obtention de résultats expérimentaux sur les amortissements (évoqué en section 4.5), ce taux d'erreur est tout à fait convenable. Le modèle développé permet donc une très bonne estimation des fréquences propres et facteurs de perte de ce type de structures.

Les conclusions pratiques sur ces résultats ont déjà été tirées en 4.5. Cependant, quelques remarques additionnelles peuvent être portées quant au comportement du modèle.

Fréquences :

- D'abord, les résultats montrent que l'estimation des fréquences propres est meilleure en basse fréquence qu'en haute fréquence.

Tableau 5.2 : Erreur moyenne d'estimation des fréquences naturelles

Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
0.93%	1.12%	1.92%	2.40%	3.40%

Ceci peut être expliqué par le fait que, expérimentalement, l'impact excite davantage les premiers modes que les modes supérieurs et que les amortissements sont moindres en basse fréquence. Ceci a pour effet que les pics fréquentiels de basse fréquence sont plus étroits et de plus grande amplitude. La lecture de la fréquence naturelle est alors plus aisée et précise.

Du point de vue théorique, la meilleure représentation des basses fréquences peut être expliquée par certaines hypothèses faites sur les déplacements comme le fait que l'on ait négligé le déplacement longitudinal du nid d'abeille, l'effet du cisaillement dans les peaux, etc.

- Enfin, comme observé à la section 4.5.2, il existe un glissement de la position des pics fréquentiels selon le traitement réalisé. Les fréquences naturelles associées au traitement « Complet » sont décalées vers la gauche (fréquences moindres). Si on utilise le ratio des fréquences des poutres « Référence » sur « Complet » comme indice de glissement, on obtient pour les fréquences expérimentales du mode 1 un glissement de 95.8%. Le même ratio pour les fréquences estimées par le modèle donne 95.5%. Pour le mode 5, on obtient 95.2% expérimentalement contre 96.1% théoriquement. Ceci montre donc que le glissement est bien caractérisé par le modèle développé.

#### Amortissements :

- On observe que la poutre de « Référence » présente un facteur de perte non négligeable bien qu'elle n'intègre aucun traitement. Cet amortissement provient du cisaillement de l'âme en nid d'abeille dont le module de Coulomb est également modélisé par un module complexe. La présence du nid d'abeille apporte donc une composante importante à l'amortissement global de la poutre puisqu'il couvre la totalité des zones cisaillées.
- Ensuite, on observe que les résultats d'amortissements sont souvent un peu mieux évalués par le modèle pour les modes 2, 3 et 4 que pour les modes 1 et 5. En basse fréquence, ceci provient certainement des techniques d'analyse des signaux expérimentaux moins efficaces en basses fréquences tel qu'évoqué en section 4.4 (dû à la mauvaise résolution en fréquence des signaux). Cela peut également être dû à la modélisation du module de cisaillement du viscoélastique. La valeur du facteur de perte de  $\eta = 1.46$  utilisée est controversée, notamment en basse fréquence [77]. Pour le cas des plus hautes fréquences (mode 5), cet effet peut s'expliquer par le fait que le cisaillement devient de plus en plus important en comparaison du mouvement transversal et rotationnel en haute fréquence [7], [23]. Ainsi, une légère erreur d'estimation des modules complexes pour le nid d'abeille et le viscoélastique aura plus d'impact sur le comportement dans cette gamme.

### 5.1.2 Comparaison avec les résultats expérimentaux de la littérature

Cette seconde validation reprend l'étude menée par E.R. Fotsing et M. Sola [57] au sein du laboratoire. L'étude proposée reprend les mêmes poutres que celles présentées dans la partie expérimentale et vise à caractériser l'effet de la position du patch le long de la poutre. Le traitement amortissant consiste en l'insertion d'une couche viscoélastique de 4 cm de longueur entre les plis les plus internes du sandwich. Le traitement est symétrique. Le patch est déplacé de l'encastrement vers l'extrémité libre de la poutre par pas de 2cm. La Figure 5.1 présente ces résultats de manière visuelle. Les losanges bleus représentent les points expérimentaux, situés au centre du patch viscoélastique. Un trait horizontal noir représente la largeur du patch viscoélastique, illustrant ainsi la zone traitée. Puisque l'incertitude sur ces mesures reste grandes, une courbe de tendance a été ajoutée (ligne tiretée bleue). Les carrés rouges sont les résultats issus de la simulation. Les graphes montrent également la forme générale de la déformée de la poutre pour le mode considéré (courbe orange) et la position des nœuds modaux. Seuls les 4 premiers modes ont été étudiés. Le Tableau 5.3 donne les résultats expérimentaux et les résultats obtenus par simulation. Les erreurs relatives et la moyenne des écarts relatifs absolus sont également calculées. On remarque que 2 données expérimentales ont été écartées (facteurs de perte du traitement à 5.5cm pour le mode 2 et traitement à 7.5cm pour le mode3). Il s'agissait des résultats incohérents venant fausser grandement les pourcentages d'erreurs.

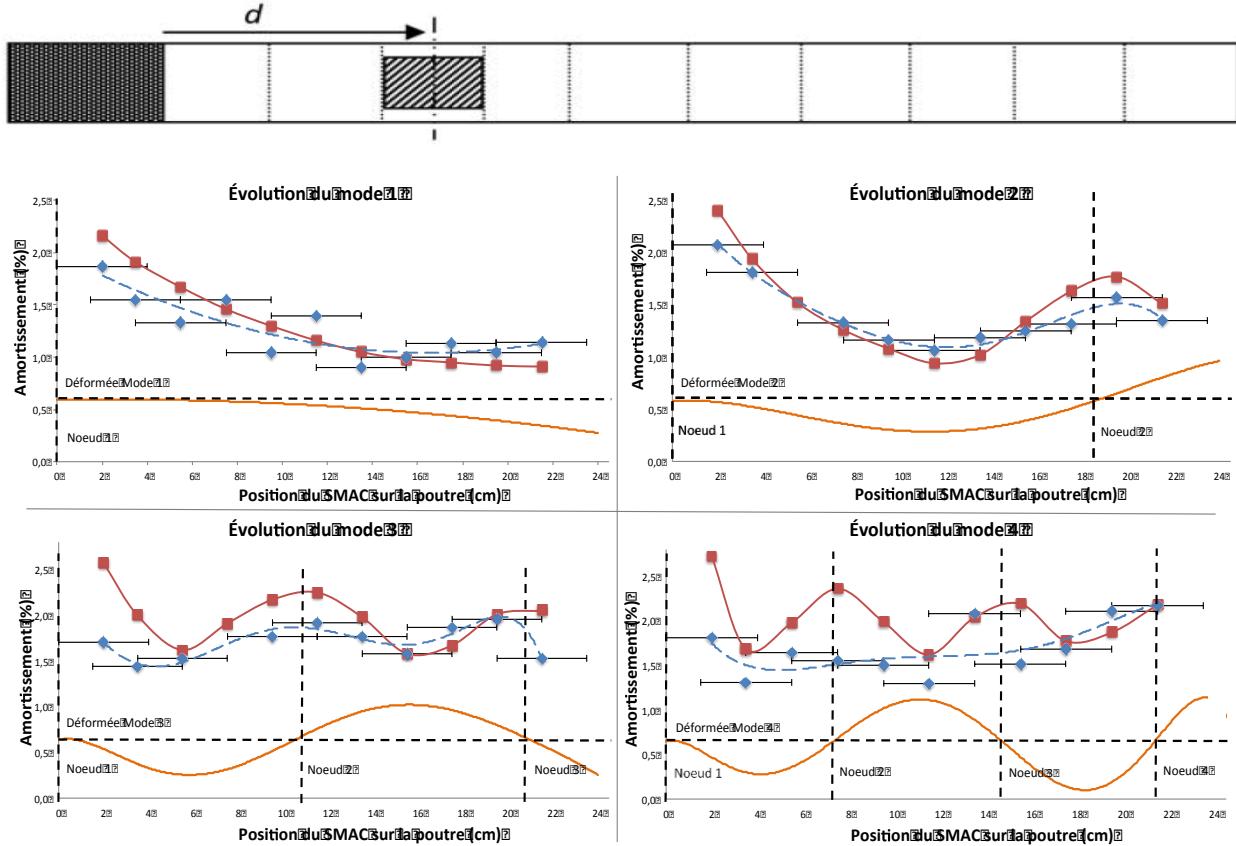


Figure 5.1 : Comparaison des résultats théoriques avec les résultats expérimentaux obtenus par E.R. Fotsing et al [57] : losange bleu → résultat expérimental, carré rouge → résultat analytique.

Tableau 5.3 : Résultats théoriques de notre modèle et expérimentaux obtenus par E.R. Fotsing et al [57]

Position du centre des patchs (cm)	Fréq	Mode 1			Mode 2			Mode 3			Mode 4					
		Facteur de perte EDEC		Ecart absolu	Facteur de perte EDEC		Ecart absolu	Facteur de perte EDEC		Ecart absolu	Facteur de perte EDEC		Ecart absolu			
		Exp	%	%												
2	181	1,87	2,16	0,29	775	2,08	2,41	0,33	1545	1,71	2,57	0,86	2173	1,81	2,72	0,91
3,5	188	1,55	1,91	0,36	806	1,81	1,94	0,13	1610	1,44	2,00	0,56	2290	1,31	1,68	0,37
5,5	189	1,33	1,67	0,34	801		1,50		1600	1,53	1,62	0,09	2281	1,64	1,98	0,34
7,5	189	1,55	1,46	0,09	813	1,33	1,26	0,07	1582		1,91		2257	1,55	2,36	0,81
9,5	190	1,04	1,32	0,28	803	1,16	1,08	0,08	1603	1,77	2,17	0,4	2238	1,50	1,99	0,49
11,5	191	1,40	1,16	0,24	811	1,06	0,94	0,12	1586	1,92	2,25	0,33	2253	1,30	1,62	0,32
13,5	189	0,90	1,04	0,14	808	1,18	1,02	0,16	1589	1,77	1,98	0,21	2296	2,08	2,04	0,04
15,5	193	1,00	0,98	0,02	820	1,25	1,34	0,09	1628	1,58	1,56	0,02	2196	1,52	2,19	0,67
17,5	181	1,13	0,95	0,18	790	1,32	1,58	0,26	1576	1,87	1,67	0,2	2259	1,68	1,77	0,09
19,5	182	1,04	0,92	0,12	786	1,57	1,77	0,2	1567	1,96	2,02	0,06	2255	2,10	1,87	0,23
21,5	177	1,14	0,91	0,23	775	1,35	1,51	0,16	1560	1,53	2,05	0,52	2245	2,17	2,18	0,01
Moyenne des écarts absolus (%)	:	0,21				0,16				0,33			0,39			
Ecart type des écarts absolus (%)	:	0,11				0,08				0,27			0,30			

À première vue, les résultats théoriques de notre modèle et expérimentaux obtenus par E.R. Fotsing semblent cohérents. Les deux premiers modes sont très bien représentés avec un écart moyen de l'ordre de 0.21% (Tableau 5.3). Les courbes de tendances et théoriques (Figure 5.1) ont des tracés très similaires. Pour le premier mode, l'écart absolu moyen est de 0.21% et de 0.16% pour le second, le tout avec un écart type de 0.1%. Les résultats sont donc très bons. Le mode 3 est également bien estimé par le modèle. Mis à part l'encastrement et un point expérimental complètement hors tendances (patch à 7.5cm), que nous considérerons erronés, l'approximation reste très fidèle. En revanche, l'écart relatif moyen atteint 0.39% pour le mode 4, avec des erreurs maximales au niveau de l'encastrement et de la crête du nœud 2. Ces 2 valeurs expérimentales hors tendances font également penser à des données erronées. En les écartant (valeurs manquantes dans le Tableau 5.3), l'erreur absolue tomberait à 0.28 pour un écart type de 0.22, ce qui seraient de bons résultats.

Il faut toutefois noter que ces résultats expérimentaux ne sont pas issus du programme d'analyse présenté en section 4.4 et par conséquent les valeurs présentées ne sont pas forcément fiables. D'ailleurs, une étude réalisée sur ces anciens travaux nous montre que l'obtention de leurs valeurs d'amortissements utilise la méthode du décrément logarithmique dont les résultats dépendent énormément du filtre passe-bande appliqué et de son ordre [6], [70]. Ainsi, les valeurs ne sont pas parfaitement fiables. Nous nous fierons donc plus sur les tendances présentées que sur les résultats.

La Figure 5.1 nous montre que les tendances sont respectées pour les 4 modes. Comme montré en section 4.2, l'amortissement est fort à l'encastrement et aux nœuds modaux alors qu'il est minimal aux ventres. On observe cependant une tendance du modèle à surestimer les amortissements proches de l'encastrement. Ceci n'est cependant pas étonnant puisque les conditions aux limites expérimentales ne sont généralement pas aussi strictes que ne le supposent les modèles, et ce, particulièrement dans le cas d'un encastrement.

### **5.1.3 Vérification des hypothèses :**

L'intérêt est ici de discuter de la validité des hypothèses à refléter ou non la réalité. Nous cherchons à savoir si les hypothèses faites sont des simplifications ou si elles représentent le véritable comportement du système.

La première hypothèse à vérifier est celle de non-glissement entre les couches. Nous parlons ici des couches des peaux aussi bien que de l'interface âme/peau. Les efforts nécessaires à ces glissements entraîneraient des déformations plastiques. Alors, si les déformations restent dans le domaine élastique, la condition de non-glissement peut être considérée comme une caractéristique du sandwich. Les protocoles de mise en forme du fabricant des matériaux ont été respectés et, expérimentalement, aucun décollement n'a été observé. Bien qu'une étude d'adhérence plus poussée serait nécessaire à bonne vérification, nous pouvons considérer cette hypothèse comme acceptable. De plus, tant que le nid d'abeille ne se déforme pas transversalement, ceci valide également l'hypothèse que les différentes couches des peaux subissent le même déplacement transversal).

Le modèle analytique présenté fait l'hypothèse de petits angles de déformation en cisaillement pour le calcul de l'énergie potentielle du viscoélastique. En pratique, la flèche de ce type de structure n'est pas grande puisqu'elles sont conçues pour présenter une grande rigidité en flexion. Expérimentalement, pour des conditions aux limites encastrées/libres et des impacts de 50N, la déformée de la poutre à son extrémité libre ne dépassait pas 0,2mm (estimations visuelles et par intégration de la vitesse mesurée par le vibromètre). Les angles de cisaillement restaient donc petits, de l'ordre du dixième de degré. L'hypothèse faite est acceptable mais se présente comme une simplification.

Le caractère viscoélastique du matériau amortissant est décrit par un module complexe constant, indépendant de la fréquence. Plusieurs auteurs ont montré les limites de cette modélisation surtout en basse fréquence [77], où les modules de cisaillement peuvent être divisés par 2. Cette hypothèse est clairement simplificatrice et explique en partie la tendance du modèle à surestimer l'amortissement du premier mode. Cependant, bien que l'utilisation d'une Série de Prony serait préférable, cela impliquerait un processus itératif sur l'ensemble du code et donc des temps de calcul beaucoup plus longs. La méthode utilisée montre toutefois de bons résultats concernant l'estimation des fréquences propres et permet donc de valider l'hypothèse.

Enfin, il est à noter que plusieurs autres types de dissipation ont été négligés, c'est le cas de l'amortissement structural et l'interaction fluide. L'amortissement structural se traduirait ici par le frottement au niveau des appuis. L'amortissement fluide correspond au frottement de l'air sur le sandwich. La détermination de tels coefficients de dissipation dépend de l'environnement dans

lequel sera placée la structure et nécessite des mesures expérimentales. De plus ils peuvent évoluer dans le temps (changement de température ou d'humidité pour l'amortissement fluide par exemple). Le concepteur n'ayant a priori pas accès à de telles données lors de la conception des panneaux, ces dissipations doivent être négligées. En pratique, elles sont généralement faibles.

Toutefois, un dernier type de dissipation aurait pu être considéré, soit celle due à l'amortissement interne des peaux stratifiées. Cependant, l'ajout de ces effets implique l'estimation du coefficient de perte des couches (non donné par le fabriquant) en plus de ceux du nid d'abeille et des couches viscoélastiques; ceci ajouterait de l'incertitude sur les résultats. Encore une fois, les résultats des simulations, et notamment ceux de la poutre de « Référence », montrent la validité de cette hypothèse simplificatrice.

#### **5.1.4 Discussion sur le modèle**

Les hypothèses ont été vérifiées et les deux études comparatives du modèle analytique avec des données expérimentales montrent de bonnes estimations tant en fréquences naturelles qu'en amortissement. À la vue des résultats, nous pouvons donc affirmer la validité du modèle analytique.

Nous avons développé un modèle viable capable d'estimer avec une bonne précision les fréquences naturelles et amortissement des poutres composites sandwichs. Le modèle se veut polyvalent, plusieurs éléments peuvent être modifiés :

- Le nombre de couches par peau ainsi que chacune de leurs caractéristiques : épaisseur, masse volumique, modules, coefficient de Poisson, orientation. Elles peuvent être symétriques ou non;
- Les propriétés du nid d'abeille : épaisseur, masse volumique, modules, coefficient de Poisson;
- Les conditions aux limites : Encastré/Encastré – Encastré/Libre – Libre/Libre – Simplement supporté / Simplement supporté;
- Les patchs viscoélastiques : nombre, longueur, position le long de la poutre, position entre les plis, module, facteur de perte,

Le modèle permet également de simuler des plaques composites (sans nid d'abeille) possédant un traitement viscoélastique contraint.

Toutefois, dans le cadre des structures sandwich, l'âme considérée ne peut qu'être un nid d'abeille de maille hexagonale. Ceci provient du fait que Nilsson ne développe pas l'ensemble de ses travaux dans ses articles [23], [60]. Une meilleure compréhension de son modèle permettrait de s'affranchir de cette contrainte et d'intégrer la description de peaux composites. Ainsi, le sandwich au complet pourrait être modélisé par cette théorie.

Le modèle pourrait aussi être amélioré en incluant l'énergie cinétique de la couche viscoélastique qui a été négligée. Bien que la masse ajoutée soit très faible, l'ajout d'une masse locale vient modifier le comportement vibratoire du système. Bien que l'on ne connaisse pas exactement le champ de déplacement du viscoélastique, sa composante longitudinale aurait pu être approchée comme la moyenne des déplacements longitudinaux des couches voisines et sa composante rotationnelle déduite de l'angle de cisaillement  $\gamma$ . La composante transversale de son déplacement est quant à elle connue puisqu'elle est supposée commune à l'ensemble des plis.

Le modèle se limite également à des couches viscoélastiques minces. Puisque l'angle de cisaillement de ces matériaux varie dans l'épaisseur de manière non linéaire [21] (Figure 5.2), l'approximation d'un facteur de perte constant n'est valable que pour de faibles épaisseurs.

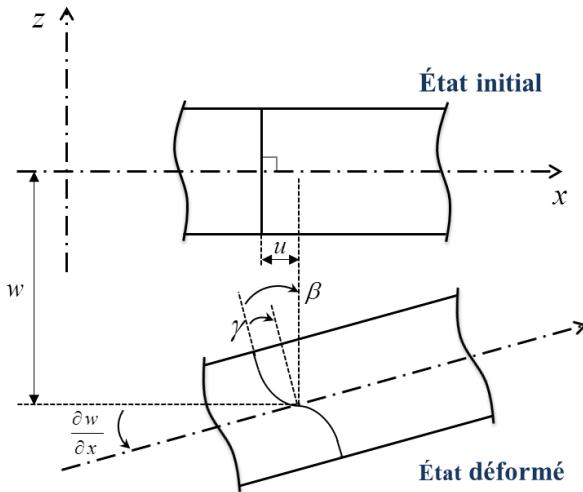


Figure 5.2 : Théorie de Reddy [21]

Enfin, un phénomène n'a pas été pris en compte dans cette étude, celui de la cocuisson qui intervient lorsque le traitement amortissant est placé au sein du composite avant l'étape de polymérisation. Il a été montré que les propriétés viscoélastiques sont diminuées par la cocuisson [78]. En effet, lors de la mise en forme, le matériau sera soumis à une température élevée et à l'attaque de la résine qui viendront modifier son facteur de perte. L'effet peut d'autant plus être non négligeable que le viscoélastique le plus utilisé dans cette étude à une épaisseur de 0.2mm soit la même épaisseur que les plis des peaux. Toutefois, il est encore difficile de caractériser l'impact de ce phénomène sur le facteur de perte. Seul Johnson et Maly ont cherché à caractériser 3 matériaux viscoélastiques en cisaillement avant et après cocuisson sur une large plage de fréquence [79]. Notamment, le module de cisaillement effectif d'un matériau viscoélastique peut être grandement affecté par la cocuisson. La Figure 5.3 par M. Sola [6] montre que le matériau cocuit a un module environ 3 fois plus grand que le matériau cuit, et 4,5 fois plus grand que le matériau brut (sans cuisson).

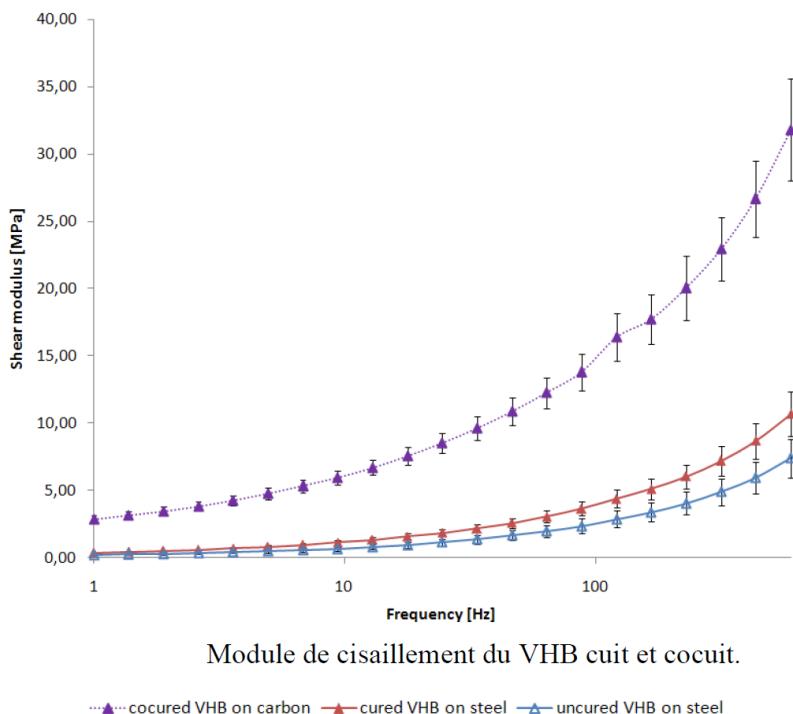


Figure 5.3 : Effet de la cocuisson sur le module de cisaillement [6]

## 5.2 Étude paramétrique à l'aide du modèle

La validité du modèle étant démontrée, celui-ci peut être utilisé afin d'obtenir les caractéristiques optimales du patch viscoélastique pour un amortissement efficace et une faible masse ajoutée. L'effet de la position du traitement le long de la poutre a déjà été traité. Nous pouvons désormais nous intéresser à la longueur du patch ainsi qu'à son épaisseur.

### 5.2.1 Effet de la longueur du patch sur l'amortissement

Le traitement considéré consiste en l'insertion de patchs viscoélastiques symétriques de longueur variable entre les plis les plus internes d'un composite sandwich semblable à ceux précédemment étudiés. Le patch est centré sur le 1<sup>er</sup> nœud du mode 3 et les conditions aux limites sont Encastré/Libre (Figure 5.4). Son épaisseur est fixée à 0.2mm. Sa longueur  $d$  varie de 2 à 70mm par pas de 2mm. La Figure 5.5 présente les résultats des simulations. La courbe bleue représente les amortissements du mode 3, la courbe rouge les masses ajoutées, en pourcentage.

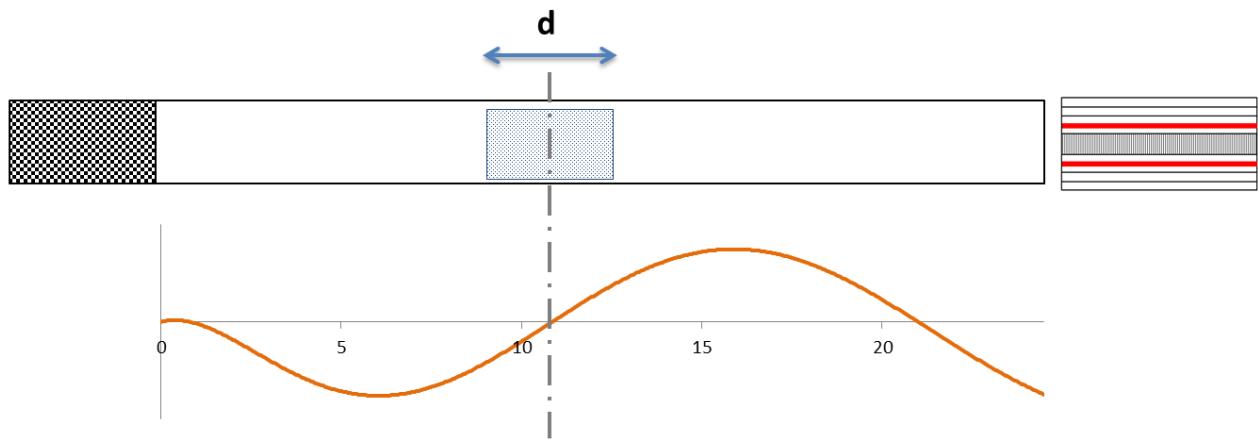


Figure 5.4 : Effet de la longueur du patch

Les résultats sont conformes avec l'intuition. Un nœud est une zone de cisaillement important, par conséquent, le traitement est très efficace autour du nœud. Plus on s'éloigne du nœud, plus l'angle de cisaillement devient faible et plus la contribution apportée à l'amortissement diminue. Ainsi, plus un élément du patch est éloigné du nœud, moins il contribue à l'amortissement. L'industrie aéronautique cherchant à limiter les ajouts de masses au maximum, on observe qu'un traitement de 2cm autour des nœuds assure le meilleur compromis entre ajout de masse et

performance, la distance entre la courbe de masse et la courbe d'amortissement est alors maximale. Dans ce cas, le gain sur l'amortissement est de 17% par rapport à la poutre de référence et représente 68% du gain apporté par le traitement de 7cm. Cependant, cette valeur de 2cm est associée à ce type de poutre, pour ce mode, et pour ces conditions aux limites particulières.

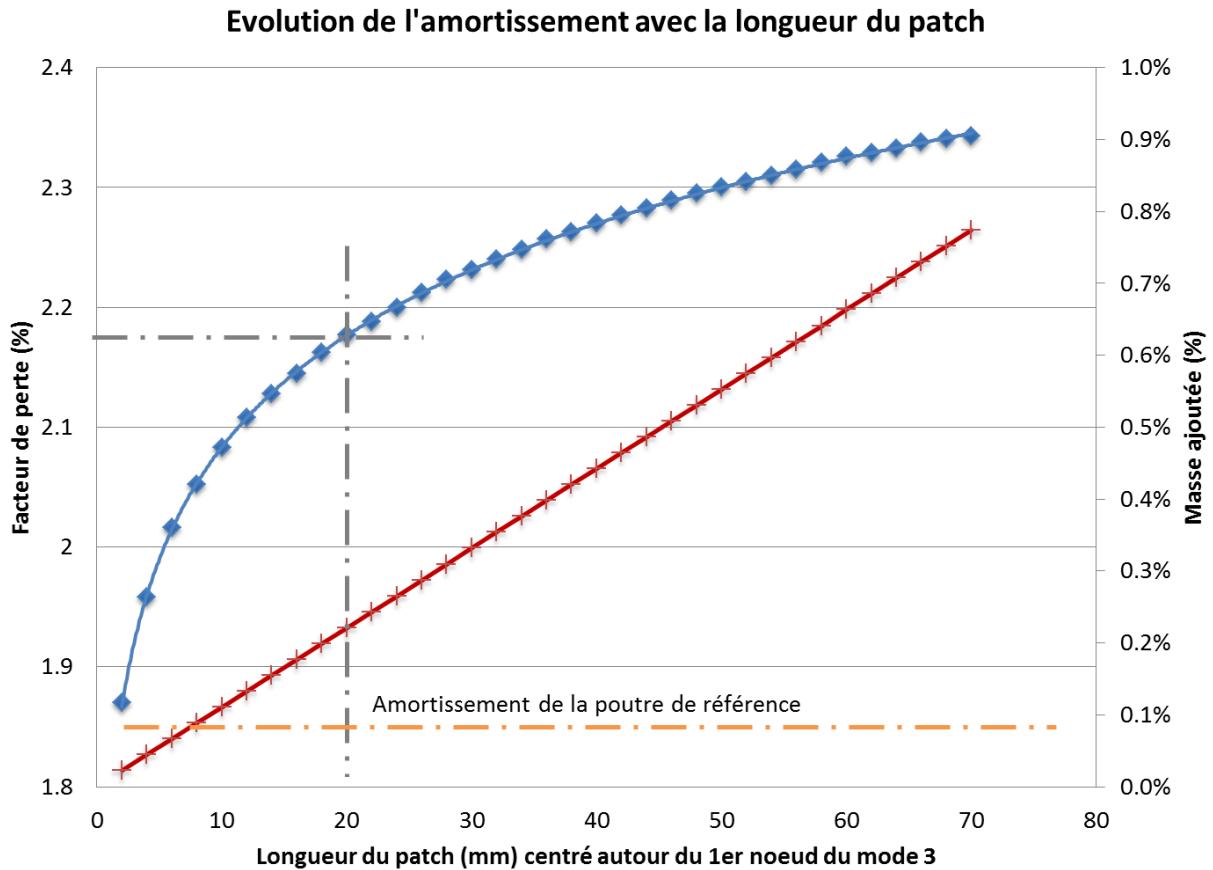


Figure 5.5 : Évolution de l'amortissement du mode 3 avec la longueur du patch – 1<sup>er</sup> nœud du mode 3

### 5.2.2 Effet de l'épaisseur du patch sur l'amortissement

Le traitement présenté ici concerne toujours le 1<sup>er</sup> nœud du 3<sup>e</sup> mode. Sa longueur est fixée à 2cm et son épaisseur est variable. Les conditions aux limites sont Encastré/libre. La Figure 5.6

présente en bleu, les résultats simulés de l'amortissement du 3<sup>e</sup> mode, et en pointillé rouge la valeur de l'amortissement de la poutre de référence.

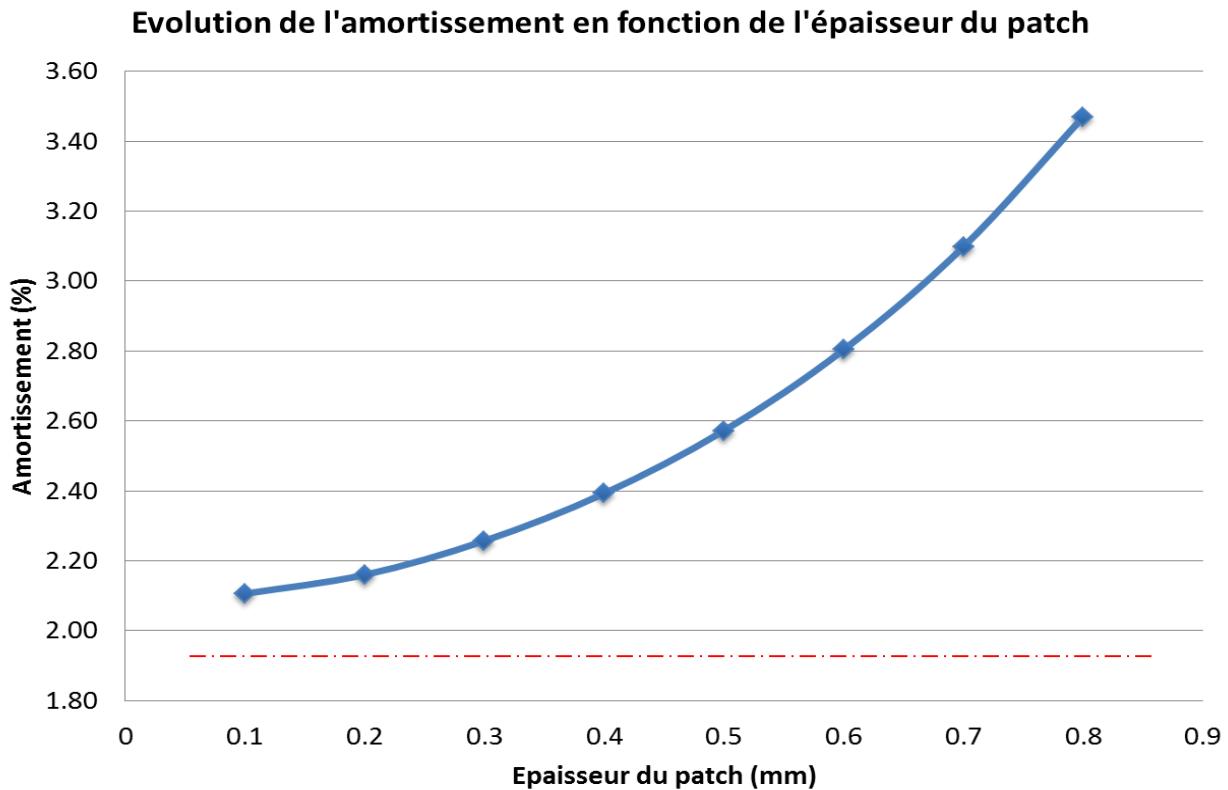


Figure 5.6 : Évolution de l'amortissement du 3e mode en fonction de l'épaisseur du patch - longueur 2 cm

On constate logiquement que l'amortissement augmente avec l'épaisseur du viscoélastique. Cette augmentation n'est cependant pas linéaire. En effet, lorsque l'on augmente l'épaisseur du patch, le déplacement longitudinal relatif des plis voisins du viscoélastique augmente et donc l'angle de cisaillement  $\gamma$  augmente. Alors puisque l'angle  $\gamma$  est compté au carré dans l'énergie de déformation, sa contribution n'est pas linéaire. Cependant, le code analytique développé fait l'hypothèse d'une faible épaisseur de la couche viscoélastique dans le but de négliger la surépaisseur locale, induite par le patch, qui viendrait modifier le champ de déplacement des plis. De plus, le calcul de l'angle de cisaillement se base sur l'hypothèse de faibles angles. Les résultats obtenus pour des épaisseurs épaisses peuvent donc s'avérer très approximatifs.

### 5.2.3 Traitement multi-patchs

Des analyses précédentes, nous pouvons déduire que les traitements localisés, de faible longueur, sont une solution efficace d'amortissement passif lorsqu'ils sont localisés dans des zones de fort cisaillement. Il semble donc intéressant de traiter les nœuds principaux. L'exemple donné ici consiste à traiter les nœuds du mode 3. Ceux-ci présentent l'avantage d'être assez bien espacés et, selon la longueur du traitement, de couvrir les nœuds des modes 2, 4 et 5. Deux traitements sont proposés ici, le premier avec des patchs de 2cm, l'autre avec des patchs de 3cm, centrés autour des nœuds tel que décrit à la Figure 5.7. La courbe orange représente la déformée de la poutre au mode 3, elle permet de localiser la position des nœuds. Le traitement est symétrique, d'épaisseur 0.2mm. Les conditions aux limites sont Encastré/Libre.

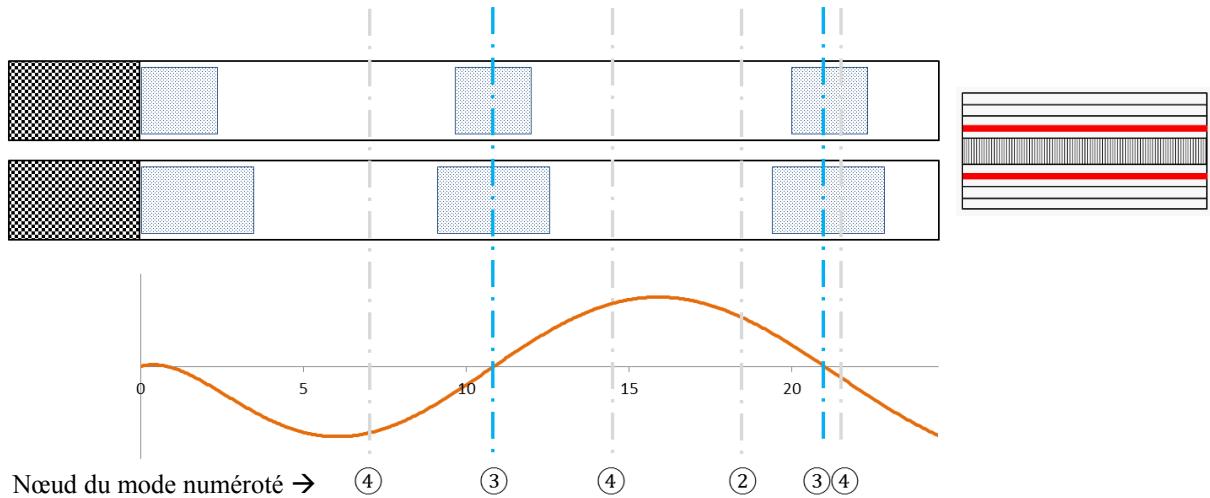


Figure 5.7 : Traitements multi-patchs sur les nœuds du mode 3

La Figure 5.8 présente les résultats d'amortissement par mode. Les résultats pour la poutre non traitée (« Référence »), pour la poutre avec traitement simple à l'encastrement (« Base ») et pour la poutre avec traitement complet (« Complet ») ont été ajoutés à des fins de comparaison.

On observe que les traitements « Multi-patchs » sont efficaces. L'amortissement du mode 1 est légèrement inférieur pour les traitements « Multi-patchs » que pour le traitement « Base ». Ceci est cohérent puisque la seule zone cisaillée dans ce cas est l'encastrement. Le traitement de « Base » correspond à un patch de 4cm à l'encastrement, ainsi, il couvre mieux la zone cisaillée que les « Multi-patchs » 2cm et 3cm. Pour le mode 3, les résultats sont très bons et s'approchent

du maximum obtenu avec le traitement « Complet ». C'est l'effet attendu puisque les patchs sont placés sur les nœuds de ce mode. Alors les traitements couvrent largement les zones de cisaillement maximal et l'efficacité est très bonne.

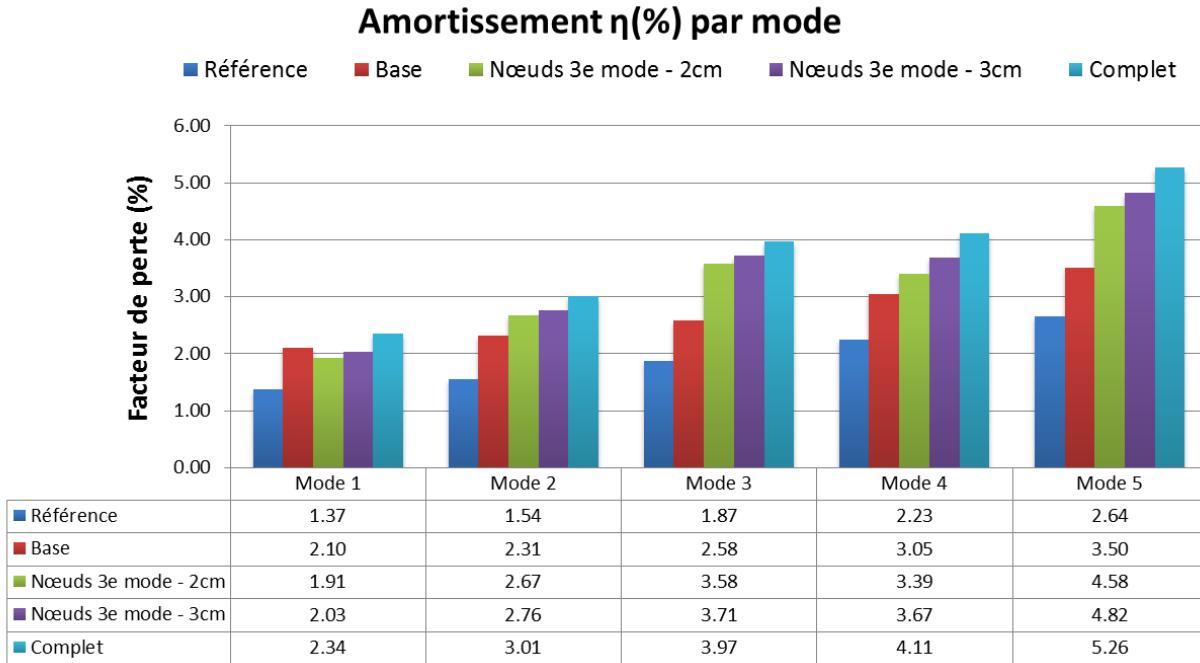


Figure 5.8 : Traitement Référence, Base, multi-patchs et Complet - amortissement par mode

Les masses ajoutées pour chacun des traitements présentées sont :

- Base : 0.37g soit 0.44% d'ajout par rapport à la poutre de référence
- Nœuds 3<sup>e</sup> mode – 2cm : 0.56g soit 0.66% d'ajout
- Nœuds 3<sup>e</sup> mode – 3cm : 0.85g soit 0.99% d'ajout
- Complet : 3.30g soit 3.88% d'ajout

On observe ainsi que les traitements « Multipatchs » permettent d'atteindre des facteurs de perte importants, proche du traitement « Complet » et pour un gain de masse de l'ordre de 4 par rapport à ce même traitement. L'objectif du traitement amortissant par patch viscoélastique est de réduire autant que possible la masse ajoutée à la structure. Une étude comparative de l'efficacité des traitements par rapport à leur masse ajoutée est donc intéressante. Le Tableau 5.4 présente ces

données. L'augmentation de l'amortissement par rapport à la poutre de référence  $\Delta\eta$  est exprimée en pourcentage ainsi que le taux de masse ajoutée  $\Delta m$ . Le rapport  $\Delta\eta/\Delta m$  donne alors un indice sur la performance du traitement selon le critère efficacité sur masse. La moyenne est calculée pour chacun des traitements.

Tableau 5.4 : Performances relatives des traitements Référence, Base, multi-patchs et Complet - par mode

	Référence		Base		Nœuds 3e mode - 2cm		Nœuds 3e mode - 3cm		Complet				
	$\eta$	$\Delta m$ (%)	$\Delta\eta$ (%)	$\Delta\eta/\Delta m$	$\Delta m$	$\Delta\eta$ (%)	$\Delta\eta/\Delta m$	$\Delta m$	$\Delta\eta$ (%)	$\Delta\eta/\Delta m$	$\Delta m$	$\Delta\eta$ (%)	$\Delta\eta/\Delta m$
<b>Mode 1</b>	1.37	0.44	53.3	120.6	0.66	39.4	59.4	0.99	48.2	48.4	3.88	70.8	18.2
<b>Mode 2</b>	1.54	⋮	50.1	113.4	⋮	73.4	110.6	⋮	79.2	79.6	⋮	95.5	24.6
<b>Mode 3</b>	1.87	⋮	38.2	86.3	⋮	91.4	137.9	⋮	98.4	98.9	⋮	112.3	28.9
<b>Mode 4</b>	2.23	⋮	36.6	82.9	⋮	52.0	78.4	⋮	64.6	64.9	⋮	84.3	21.7
<b>Mode 5</b>	2.64	⋮	32.7	74.0	⋮	73.5	110.8	⋮	82.6	83.0	⋮	99.2	25.6
<b>Moyenne :</b>		<b>95.4</b>		<b>99.4</b>		<b>75.0</b>		<b>23.8</b>					

On vise un rapport  $\Delta\eta/\Delta m$  élevé. Les résultats moyennés confirment le fait que le traitement partiel est une solution viable face au traitement « Complet ». Le traitement le plus efficace semble être le traitement « Multi-patchs » de 2cm. D'autres simulations, ainsi que les méthodes de calcul, montrent que plus le traitement sera de faible longueur plus son indice d'efficacité sur masse ajoutée sera grand. Cependant, dans des conditions réelles et selon le procédé de mise en forme, il est difficile d'assurer un positionnement précis des patchs autour des nœuds. Le traitement « Multi-patchs » 2 cm semble donc être un bon compromis. Il permet d'atteindre en moyenne 83% du gain en amortissement du traitement « Complet » pour un ajout de masse 6 fois moindre.

Pour des applications où l'amortissement est un peu moins critique, on retiendra que le traitement « Base » apporte un gros gain d'efficacité pour une masse ajoutée très faible.

### 5.2.4 Conclusion sur les traitements amortissants

Les résultats de la partie expérimentale et les analyses précédemment présentées permettent de donner plusieurs informations sur le comportement des traitements amortissants par insertion de couches viscoélastiques. Une étude plus approfondie à l'aide du modèle analytique développé permettrait de déterminer les paramètres optimaux d'amortissement pour différentes situations mais l'objectif de ce mémoire tient plus à donner des recommandations pratiques d'ordre général.

Tout d'abord, nous pouvons conclure que les traitements viscoélastiques partiels apportent une réponse efficace face aux traitements complets pour des applications où le poids est une contrainte importante, tel l'aéronautique. De manière générale, le traitement des zones d'encastrement est la méthode la plus efficace pour augmenter significativement l'amortissement sans pour autant augmenter la masse. Cette technique vise principalement les 2 premiers modes pour lesquels les amplitudes de déformées peuvent être fortes. Pour des applications nécessitant plus de dissipation, le traitement des nœuds dominants, notamment ceux du mode 3, est une solution efficace. Le modèle permet de déterminer le meilleur rapport longueur du patch viscoélastique sur masse. Selon le même principe, si une fréquence particulière est critique pour le système, le problème peut être corrigé par le traitement des nœuds principaux du mode dont la fréquence naturelle se rapproche le plus de la fréquence critique.

Afin d'améliorer les performances des patchs viscoélastiques, leurs épaisseurs peuvent être augmentées. Cependant, les lois d'évolution du facteur de perte avec l'épaisseur sont mal connues. De plus, une plus grande épaisseur de matériau viscoélastique entre 2 couches de stratifiés autorise des déplacements longitudinaux locaux plus importants entre les couches et le risque de délamination ou de plissement des peaux s'accroît.

Enfin, à la vue des faibles épaisseurs de peaux (0,2mm), ni les études expérimentales ni le modèle ne mettent en évidence l'importance de la position du patch dans les couches du stratifié. Cependant, la théorie (Reddy [21]) indique que le cisaillement est légèrement plus important proche de l'axe neutre. Ainsi, il est préférable de placer les patchs viscoélastiques entre les couches plus internes du stratifié. Le traitement de l'axe neutre du sandwich, à savoir le centre du nid d'abeille, pourrait être une solution intéressante à envisager.

## CONCLUSION

Afin de combler les lacunes de la littérature, l'objectif de cette étude était de développer un modèle analytique fiable permettant de déterminer les fréquences naturelles et les facteurs de perte de structures composites sandwichs à âme en nid d'abeille contenant des couches viscoélastiques dans ses peaux. Cet objectif a été divisé en 4 parties :

- Développer un modèle analytique permettant de déterminer les facteurs de perte et les fréquences naturelles de poutres composites sandwich avec inserts viscoélastiques.
- Fabriquer un panel de poutre contenant des inserts viscoélastiques. Concevoir un banc d'essai et mettre en place un protocole de mesure. Vérifier la fiabilité et la répétabilité du montage expérimental.
- Valider le modèle analytique développé grâce aux mesures expérimentales réalisées ainsi que des résultats de la littérature.
- Utiliser le modèle afin d'étudier l'effet de différents paramètres (longueur du traitement, position, épaisseur) sur le facteur de perte et les fréquences naturelles.

Le modèle développé se base sur la théorie classique des stratifiés et le modèle de Nilsson pour exprimer les énergies cinétiques et potentielles de la structure sandwich de base. L'énergie dissipée par le matériau viscoélastique est déduite de l'expression de son angle de cisaillement. Son comportement viscoélastique ainsi que celui du nid d'abeille sont modélisés par des modules complexes constants, en connaissance des limites de cette technique. Le système est discrétisé par la méthode des modes assumés donnant directement les équations de mouvement par les équations de Lagrange. La résolution du problème aux valeurs propres permet alors l'obtention des fréquences naturelles et facteurs de perte du sandwich. Le modèle se veut complet et polyvalent. L'ensemble des caractéristiques du nid d'abeille, des plis des peaux et des inserts viscoélastiques peuvent être variés. Les conditions aux limites supportées sont : Encastré/Encastré – Encastré/Libre – Libre/Libre – Simplement supporté / Simplement supporté.

Ainsi, le modèle respecte l'objectif fixé même si l'étude a été restreinte au cas des âmes en nid d'abeille.

Le panel de 16 poutres aux traitements viscoélastiques variés a été fabriqué selon un protocole strict assurant des caractéristiques homogènes entre les poutres. De même, les mesures ont été soigneusement réalisées et répétées afin de s'assurer de la cohérence des résultats. Les contraintes expérimentales (faible résolution en basse fréquence) ont rapidement montré les limites de la technique de la demi-puissance pour déterminer les facteurs de perte. Ceci a conduit au développement d'une nouvelle méthode d'analyse utilisant un ajustement de courbe venant combler ces lacunes en basses fréquences. Une étude de fiabilité et de répétabilité a été pratiquée afin de s'assurer de la validité du banc d'essai et des techniques d'analyse. Nous avons ainsi obtenu des valeurs fiables de fréquences naturelles et de facteurs de perte nécessaires à la validation du modèle.

La validation du modèle s'est déroulée en 2 étapes. La première à partir des valeurs expérimentales obtenues, la deuxième par la littérature. La comparaison des résultats théoriques issus du modèle et expérimentaux a permis de montrer que les fréquences naturelles sont très bien estimées avec une moyenne absolue des écarts relatifs de 2% et un écart type de 1.2%. Les facteurs de perte sont également bien déterminés avec une moyenne des écarts absolu de 0.16% avec un maximum de 0.38%. Quelques résultats notamment aux modes 1 et 5 présentent les écarts les plus importants. Cependant, compte tenu des approximations faites dans le modèle et de la difficulté d'obtention de résultats expérimentaux sur les amortissements, cette erreur est tout à fait convenable. La seconde validation, par la littérature, a montré des résultats similaires avec une très bonne concordance pour les modes 1 à 3. Le modèle développé permet donc une estimation très précise des fréquences naturelles et facteurs de perte des poutres sandwichs avec inserts viscoélastiques.

La validation du modèle a alors permis son utilisation pour juger de l'efficacité des traitements amortissant et de différentes caractéristiques des inserts sur les facteurs de perte. Plusieurs conclusions peuvent être tirées :

- Tout d'abord, les poutres sandwich à âme en nid d'abeille présentent initialement un facteur de perte non négligeable (1.37% pour le mode 1 de la poutre de « Référence » par

exemple). En effet, la structure alvéolaire du nid d'abeille travaille fortement en cisaillement et permet donc de dissiper de l'énergie sous forme de chaleur. Ensuite, le traitement « Complet » par insertion d'une couche viscoélastique sur toute la longueur de la poutre est extrêmement efficace. Les facteurs de perte sont presque doublés sur l'ensemble des modes étudiés. Toutefois, bien que l'ajout de masse généré par une couverture totale ne soit pas si important (de l'ordre de 3%), il peut être un frein à l'utilisation de cette méthode dans des domaines tels que l'aéronautique. Les traitements partiels seront alors privilégiés.

- Les résultats des études expérimentales et paramétriques montrent que pour un maximum d'efficacité, il faut placer les inserts dans les zones les plus fortement cisaillées. Si la poutre est encastrée, le traitement de la zone d'encastrement assurera une augmentation significative du facteur de perte sans ajout de masse important. Pour les autres conditions aux limites, les nœuds seront visés.
- L'étude paramétrique présentée en section 5.2.1 montre comment le modèle permet la détermination de la longueur optimale de traitement.
- L'étude en section 5.2.3 conclut que, pour le cas étudié, un traitement « Multipatch » des nœuds du mode 3 avec des inserts de 2cm seulement permet d'atteindre en moyenne 83% du gain en amortissement du traitement « Complet » pour un ajout de masse 6 fois moindre. De telles caractéristiques sont excellentes.

Ces recommandations d'utilisation ont un impact industriel direct. En effet, les concepteurs pourront optimiser de manière simple et efficace leurs structures du point de vue de l'amortissement en déterminant les zones de cisaillement maximal à partir de leur code d'élément finis puis en les traitants.

Un modèle analytique fiable et complet a donc été développé et validé par des données expérimentales et par la littérature. Son utilisation a permis de caractériser l'effet des propriétés des inserts viscoélastiques sur le facteur de perte des structures sandwichs. Des recommandations pratiques d'utilisation de ces traitements ont été données. Les objectifs fixés sont donc atteints.

Toutefois, le modèle développé se confronte à différentes limites. D'abord, le modèle prévoit un comportement linéaire du matériau, pour de grandes amplitudes de vibrations des phénomènes non-linéaires pourraient venir modifier le comportement de la structure. A cause de la supposition d'angle de cisaillement constant dans l'épaisseur, le modèle se limite également à des couches viscoélastiques de faibles épaisseurs. Aussi, la modification des propriétés du matériau viscoélastique pendant la coccion n'a pas été investiguée. Par la suite, la modélisation du nid d'abeille et des peaux pourrait être unifiée par le redéveloppement complet du modèle de Nilsson. Le modèle pourrait également être enrichi en incluant certains phénomènes négligés tels que l'énergie cinétique des inserts, le cisaillement dans les peaux ou encore les déplacements longitudinaux du nid d'abeille. Des séries de Prony pourraient être utilisées afin de représenter plus fidèlement le comportement viscoélastique des matériaux. Enfin, le modèle pourrait être utilisé pour des études paramétriques plus poussées afin d'étoffer les recommandations ici présentées.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. Gendre, “Les grandes familles de matériaux composites,” Document de cours, Ecole Nationale Supérieure de Cachan, France, 2011.
- [2] J.-M. Berthelot, *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*, 4e édition. Tec & Doc Lavoisier, 2005.
- [3] K. Salihas, “Etude de l’effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique de poutres composites,” thèse, Université Mentouri - Constantine, Algérie, 2010.
- [4] D. Gay, *Matériaux composites*. France: Hermès Science Publications : Lavoisier, 2005.
- [5] C. Binétruy, “Structures sandwiches,” *Techniques de l’ingénieur Matériaux composites : présentation et renforts*, vol. base documentaire : TIB142DUO., no. ref. article : am5141, 2008.
- [6] M. Sola, “Caractérisation de matériaux composites à structures sandwich comportant des modifications,” mémoire, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada, 2011.
- [7] S. Han, H. Benaroya, and T. Wei, “Dynamic of transversaly vibrating beams using four engineering theories,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 225, no. 5, pp. 935 – 988, 1999.
- [8] S. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, Dover Publications, Inc. USA, 1953.
- [9] J. W. Strutt and B. Rayleigh, *Theory of Sound*. London: Macmillan Publications Co., 1877.
- [10] S. Timoshenko, “On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section,” *Philosophical Magazine*, Londres, pp. 744–746, 1921.
- [11] S. Timoshenko, “On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section,” *Philosophical Magazine*, Londres, pp. 125–131, 1922.
- [12] E. T. Kruszewski, “Effects of transverse shear and rotary inertia on the natural frequencies of a uniform beam,” *National Advisory Committee for Aeronautics*, 1949.
- [13] R. W. Traill-Nash and A. R. Collar, “The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams,” *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*

*Mathematics*, vol. 6, pp. 186–222, 1953.

- [14] C. L. Dolph, “On the Timoshenko theory of transverse beam vibrations,” *Quarterly of Applied Mathematics*, pp. 175–187, 1954.
- [15] T. C. Huang, “The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams With Simple End Conditions,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 28, no. 4, p. 579, 1961.
- [16] R. D. Mindlin and H. Deresiewicz, “Timoshenko’s shear coefficient for flexural vibrations of beams,” *National Congress of Applied Mechanics*, New York, USA, 1953.
- [17] G. R. Cowper, “The shear coefficient in Timoshenko’s beam theory,” *Journal of Applied Mechanics*, pp. 335–340, 1966.
- [18] H. G. Allen, *Analysis and design of structural sandwich panels*. Pergamon Press, 1993.
- [19] D. Zenkert, *An introduction to sandwich construction*. UK, 1995.
- [20] P. Cartraud, *Mécanique des Structures Etude des Poutres*, Ecole Centrale de Nantes. France, 2010.
- [21] C. Florens, “Modeling of the viscoelastic honeycomb panel equipped with piezoelectric patches in view of vibroacoustic active control design,” thèse, Ecole Centrale Paris, France, 2010.
- [22] Y. Frostig, M. Baruch, O. Vilnay, and I. Sheinman, “High-order theory for sandwich-beam behavior with transversely flexible core,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 118, no. 5, pp. 1026–1043, 1992.
- [23] E. Nilsson and A. C. Nilsson, “Prediction and measurement of some dynamic properties of sandwich structures with honeycomb and foam cores,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 251, no. 3, pp. 409–430, Mar. 2002.
- [24] L. J. Gibson and M. F. Ashby, *Cellular Solids: Structure and Properties*. Cambridge University Press, 1999.
- [25] G. Shi and K. Lam, “Finite element vibration analysis of composite beams based on higher-order beam theory,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 219, no. 4, pp. 707–721, 1999.
- [26] P. R. Cunningham, R. G. White, and G. S. Aglietti, “The effects of various design

parameters on the free vibration of doubly curved composite sandwich beams," *Journal of Sound and vibration*, pp. 617–648, 2000.

[27] K. Liew, L. Jiang, M. Lim, and S. Low, "Numerical evaluation of frequency responses for delaminated honeycomb structures," *Computers & structures*, vol. 55, no. 2, pp. 191–203, 1995.

[28] A. K. Noor, C. W. Bert, and W. S. Burton, "Computational Models for Sandwich Panels and Shells," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 49, no. 3, pp. 155–199, Mar. 1996.

[29] K. Lingaiah and B. G. Suryanarayana, "Strength and stiffness of sandwich beams in bending," *Experimental Mechanics*, vol. 31, no. 1, pp. 1–7, 1991.

[30] C. Schwingshakel, P. R. Cunningham, and G. S. Aglietti, "Honeycomb elastic properties: a review of some existing theories and a new dynamic approach," in *Proceedings of ISMA*, Belgique: ISMA Publications, 2004, pp. 1353–1366.

[31] S. Kelsey, R. A. Gellatly, and B. W. Clark, "The shear modulus of foil honeycomb cores: a theoretical and experimental investigation on cores used in sandwich construction," *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 30, no. 10, pp. 294–302, Dec. 1958.

[32] B. Nakra, "Vibration control in machines and structures using viscoelastic damping," *Journal of sound and vibration*, vol. 211, no. 3, pp. 449–465, 1998.

[33] G. Wang and N. M. Wereley, "Analysis of Bending Vibration of Rectangular Plates Using Two-Dimensional Plate Modes," *Journal of Aircraft*, pp. 542–550, 2005.

[34] C. W. de Silva, *Vibration Damping, Control, and Design*. CRC Press, 2007.

[35] I. C. Finegan and R. F. Gibson, "Analytical modeling of damping at micromechanical level in polymer composites reinforced with coated fibers," *Composites science and technology*, vol. 60, no. 7, pp. 1077–1084, 2000.

[36] S. Suarez, R. Gibson, C. Sun, and S. Chaturvedi, "The influence of fiber length and fiber orientation on damping and stiffness of polymer composite materials," *Experimental Mechanics*, vol. 26, no. 2, pp. 175–184, 1986.

[37] S. Hwang and R. Gibson, "Contribution of interlaminar stresses to damping in thick laminated composites under uniaxial extension," *Composite structures*, vol. 20, no. 1, pp. 29–35, 1992.

- [38] M. Areias Trindade, “Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes,” thèse, Ecole nationale supérieure d’arts et métiers-ENSAM, France, 2000.
- [39] M. D. Rao, “Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 262, no. 3, pp. 457–474, 2003.
- [40] C. D. Johnson, “Design of passive damping systems,” *Journal of mechanical design*, vol. 117, pp. 171–171, 1995.
- [41] A. Lall, N. Asnani, and B. Nakra, “Damping analysis of partially covered sandwich beams,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 123, no. 2, pp. 247–259, 1988.
- [42] P. R. Mantena, R. F. Gibson, and S. J. Hwang, “Optimal constrained viscoelastic tape lengths for maximizing damping in laminated composites,” *AIAA journal*, vol. 29, no. 10, pp. 1678–1685, 1991.
- [43] J. D. Ferry, *Viscoelastic properties of polymers*, vol. 3. New York, USA: Wiley, 1980.
- [44] D. Granger, “Amortissement d’une poutre par traitement viscoélastique contraint et analyse du régime transitoire suite à un impact,” mémoire, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada, 2008.
- [45] E. Barkanov, “Transient response analysis of structures made from viscoelastic materials,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 44, no. 3, pp. 393–403, 1999.
- [46] C. Cai, H. Zheng, and G. Liu, “Vibration analysis of a beam with PCLD patch,” *Applied Acoustics*, vol. 65, no. 11, pp. 1057–1076, 2004.
- [47] H. Zheng, X. Tan, and C. Cai, “Damping analysis of beams covered with multiple PCLD patches,” *International journal of mechanical sciences*, vol. 48, no. 12, pp. 1371–1383, 2006.
- [48] S.-W. Kung and R. Singh, “Vibration analysis of beams with multiple constrained layer damping patches,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 212, no. 5, pp. 781–805, 1998.
- [49] B. Khalfi, “Modélisation analytique pour l’étude du comportement vibratoire en régime transitoire d’une plaque avec tampon amortissant contraint,” thèse, École Polytechnique de Montréal, Canada, 2012.

- [50] A. D. Nashif, "Golf club having vibration damping device and method for making same," 5,655,975. Aug-1997.
- [51] Y. Chen, Y. Xia, Z. Ren, Z. Lu, and E. Wang, "An optimum analysis method of sandwich structures made from elastic-viscoelastic materials," *Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed.*, vol. 19, no. 2, pp. 76–78, 2004.
- [52] G. Wang, "Analyses of sandwich beams and plates with viscoelastic cores," thèse, University of Maryland, USA, 2001.
- [53] L. Rogers, "A new algorithm for interconversion of the mechanical properties of viscoelastic materials," DTIC Document, 1984.
- [54] S.-W. Kung and R. Singh, "Vibration analysis of beams with multiple constrained layer damping patches," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 212, no. 5, pp. 781–805, mai 1998.
- [55] J.-M. Berthelot and Y. Sefrani, "Damping Analysis of Unidirectional Glass Fiber Composites with Interleaved Viscoelastic Layers: Experimental Investigation and Discussion," *Journal of Composite Materials*, vol. 40, no. 21, pp. 1911–1932, Nov. 2006.
- [56] J. . Schultze and J. B. Kosmatka, "Vibration Reduction via Constrained-Layer Damping Techniques," 1989.
- [57] E. Fotsing, M. Sola, A. Ross, and E. Ruiz, "Lightweight damping of composite sandwich beams: Experimental analysis," *Journal of Composite Materials*, vol. 47, no. 12, pp. 1501–1511, Jun. 2012.
- [58] S. He and M. D. Rao, "Residual Stresses and Delamination Problems Induced by Cocuring of Damped Composite Laminates," *Journal of Composite Materials*, vol. 28, no. 2, pp. 112–129, Jan. 1994.
- [59] Y. C. Fung, *Foundations of solid mechanics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965.
- [60] E. Nilsson, "Some dynamic properties of honeycomb structures," *Department of vehicle Engineering, KTH*, Sweden, 2000.
- [61] G. Wang, S. Veeramani, and N. M. Wereley, "Analysis of sandwich plates with isotropic face plates and a viscoelastic core," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 122, no. 3, pp. 305–312, Jan. 1999.

- [62] M. Sainsbury and Q. Zhang, “The Galerkin element method applied to the vibration of damped sandwich beams,” *Computers & structures*, vol. 71, no. 3, pp. 239–256, 1999.
- [63] D. Dawe and O. Roufaeil, “Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 69, no. 3, pp. 345–359, 1980.
- [64] A. Ross, “MEC4100 - Théorie des vibrations des systèmes continus,” Document de cours, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada, 2006.
- [65] J.-C. Pascal, “Vibrations et Acoustique 2,” Document de cours, Université du Maine, France, 2008.
- [66] “MECH416 - Advanced Dynamics,” Document de cours, Iniversité McGill, Canada, 2012.
- [67] “LU decomposition,” *Wikipedia, the free encyclopedia*. 19-Nov-2013.
- [68] Technique de l’ingénieur, Ed., *Comportement mécanique des matériaux*, vol. 42179210. Editions T.I., 2013.
- [69] A. Saouab, J. Bréard, and Bouquet, *Mise en forme des matériaux composites*, vol. 15. Hermès / lavoisier, 2006.
- [70] C. Leclerc, “Mesure expérimentale des propriétés modales de poutres en composites de type sandwich,” Ecole Polytechnique de Montréal, Canada, Rapport de Stage, 2012.
- [71] S. Charbonneau-Laliberté, “Conception d’un banc d’essai pour analyse modale des poutres composites à structure sandwich,” Ecole Polytechnique de Montréal, Canada, Rapport de Stage, 2011.
- [72] S. Charbonneau-Laliberté, “Conception d’un système de mesure et d’analyse modale en utilisant LabVIEW,” Ecole Polytechnique de Montréal, Canada, Rapport de Stage, 2012.
- [73] N. Belbekri, *Etude de la réponse fréquentielle des systèmes linéaires*, vol. 5. Algérie: Université Constantine 1, 2010.
- [74] D. Demainly, “Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel --- Application à la dynamique du rotor,” thèse, Ecole Centrale de Lyon, France, 2003.
- [75] D. Langlois, “Étude du phénomène d’amortissement des structures dans les assemblages

en vue de réduire le rayonnement acoustique,” thèse, École de technologie supérieure, Canada, 2005.

[76] B. Guo, “Identification simultanée des paramètres de rigidité et d’amortissement de plaques isotropes minces en vibration par la méthode des champs virtuels,” thèse, Ecole nationale supérieure d’arts et métiers-ENSAM, France, 2008.

[77] E. Barkanov, “Transient response analysis of structures made from viscoelastic materials,” *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 44, no. 3, pp. 393–403, 1999.

[78] J. M. Biggerstaff and J. B. Kosmatka, “Damping Performance of Cocured Graphite/Epoxy Composite Laminates with Embedded Damping Materials,” *Journal of Composite Materials*, vol. 33, no. 15, pp. 1457–1469, Aug. 1999.

[79] J. R. Maly and C. D. Johnson, “Cocured viscoelastic composites,” 1996, vol. 2720, pp. 365–376.

## ANNEXE 1 – Théorie classique des stratifiés

La théorie générale des stratifiés utilise un schéma de déformation du premier ordre, celui de Hencky-Mindlin ou Kirchhoff, pour décrire le comportement des plaques [2]. Le champ de déplacement s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{A1.1})$$

Le champ de déformation associé s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{A1.2})$$

La théorie classique fait également l'hypothèse que le cisaillement transverse est négligeable. Ainsi, les déformations en cisaillement sont nulles.

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{A1.3})$$

D'où, d'après (A1.2) :

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \text{et} \quad \varphi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{A1.4})$$

Le champ de déplacement se résume donc à :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x(x, y)} \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y(x, y)} \\
 w(x, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{A1.5}$$

et le champ de déformation à :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 \varepsilon_{zz} &= \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \\
 \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{A1.6}$$

En un point quelconque M, le tenseur des déformations s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A1.7}$$

résumé sous la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{A1.8}$$

On peut exprimer le champ de déplacement total comme la superposition du champ de déformation en membrane  $\varepsilon_m$  (A1.9), dépendant des déplacements  $(u_0, v_0)$ , et du champ de déformation en flexion-torsion  $\varepsilon_f$  (A1.10), s'exprimant en fonction des angles rotation et de la hauteur  $z$  [2]. Ce dernier se réécrit généralement sous la forme (A1.11) avec  $\kappa$  la matrice des courbures.

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} = z\kappa(x, y) \quad (\text{A1.9})$$

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = z\kappa(x, y) \quad (\text{A1.10})$$

$$\varepsilon_f(M) = z\kappa(x, y)$$

$$\kappa(x, y) = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.11})$$

Au final, le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon(M) &= \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A1.12})$$

avec

$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y)$	$\varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y)$	$\gamma_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$
$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y)$	$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y)$	$\kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y)$

(A1.13)

Comme la théorie élémentaire des plaques, la théorie des stratifiés fait l'hypothèse que les contraintes normales  $\sigma_{zz}$  sont négligeables, hypothèse largement vérifiée en pratique [2].

Ainsi,  $\sigma_{zz} = 0$ . Les contraintes et déformations en cisaillement étant également supposées négligeables, le champ de contrainte dans une couche  $k$  s'exprime sous la forme (3.32), où  $Q'_k$  est la matrice des coefficients de rigidité réduite de la couche.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = Q'_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.14})$$

Etant donné les hypothèses sur le cisaillement et la contraintes normale la matrice de rigidité se réduit à :

$$Q'_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \quad (\text{A1.15})$$

L'indice « ' » signifie que les coefficients de rigidité sont exprimés dans le repère de la poutre. Ils sont déduits des constantes de rigidité dans les axes principaux des couches par les relations [2] :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - 2Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - 2Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (\text{A1.16})$$

avec

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \nu_{LT} Q_{22} \\ Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (\text{A1.17})$$

Le champ de contrainte pour la couche  $k$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= Q'_{11}\varepsilon_{xx} + Q'_{12}\varepsilon_{yy} + Q'_{16}\gamma_{xy} \\
\sigma_{yy} &= Q'_{12}\varepsilon_{xx} + Q'_{22}\varepsilon_{yy} + Q'_{26}\gamma_{xy} \\
\sigma_{xy} &= Q'_{16}\varepsilon_{xx} + Q'_{26}\varepsilon_{yy} + Q'_{66}\gamma_{xy} \\
\sigma_{yz} &= 0 \\
\sigma_{xz} &= 0
\end{aligned} \tag{A1.18}$$

Ou, d'après (3.30) et (3.32) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{A1.19}$$

Ceci est le champ de contrainte d'une seule couche, afin d'obtenir les contraintes globales il nous faut intégrer selon  $z$ , sur l'ensemble des couches. Cette opération consiste en fait à calculer les résultantes en membrane (A1.20) et les moments de flexion et torsion (A1.22). Lors de cette étape apparaît 3 nouvelles matrices définies en (A1.21) et (A1.23). La matrice  $A$  est la matrice de rigidité en membrane,  $D$  est la matrice de rigidité en flexion et  $B$  est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

$$\begin{aligned}
N(x, y) &= \sum_{k=1}^{N_i} \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k \kappa(x, y)] dz \\
N(x, y) &= \sum_{k=1}^{N_i} \left[ Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz + Q'_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \\
N(x, y) &= \underbrace{\left[ \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right]}_A \varepsilon_m(x, y) + \underbrace{\left[ \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right]}_B \kappa(x, y)
\end{aligned} \tag{A1.20}$$

$$N(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B \kappa(x, y) \tag{A1.21}$$

$$\begin{aligned}
M(x, y) &= \sum_{k=1}^{N_i} \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 Q'_k \kappa(x, y)] dz \\
M(x, y) &= \sum_{k=1}^{N_i} \left[ Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz + Q'_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \\
M(x, y) &= \underbrace{\left[ \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right]}_B \varepsilon_m(x, y) + \underbrace{\left[ \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right]}_D \kappa(x, y)
\end{aligned} \tag{A1.22}$$

$$M(x, y) = A \varepsilon_m(x, y) + B \kappa(x, y) \tag{A1.23}$$

Ces matrices  $A$ ,  $B$  et  $D$  sont intéressantes puisqu'elles permettent une homogénéisation des caractéristiques de la peau.