

Titre: Planification stratégique d'une mine souterraine avec teneur de
Title: coupure variable

Auteur: Jean Collard
Author:

Date: 2013

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Collard, J. (2013). Planification stratégique d'une mine souterraine avec teneur de
Citation: coupure variable [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].
PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/1177/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/1177/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Michel Gamache
Advisors:

Programme: Génie industriel
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PLANIFICATION STRATÉGIQUE D'UNE MINE SOUTERRAINE AVEC TENEUR DE
COUPURE VARIABLE

JEAN COLLARD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE INDUSTRIEL)
AOÛT 2013

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

PLANIFICATION STRATÉGIQUE D'UNE MINE SOUTERRAINE AVEC TENEUR DE
COUPURE VARIABLE

présenté par : COLLARD Jean

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. ANJOS Miguel F., Ph.D., président

M. GAMACHE Michel, ing., Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MARCOTTE Denis, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier Michel Gamache qui m'a fait découvrir la recherche opérationnelle et qui a éveillé ma curiosité pour ce fascinant domaine. Je le remercie aussi de m'avoir permis de terminer la rédaction de mon mémoire à temps partiel. Merci aussi aux gens de Mine Raglan qui m'ont offert ce projet de recherche. Je remercie plus particulièrement Geneviève Auger, Kenny Cheong Youne et Philémon Desrochers Gagnon qui ont donné de leur temps ainsi que des conseils indispensables à la réalisation de ce projet de maîtrise. La combinaison de vos expériences a été des plus profitable.

Merci aux Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies (FQRNT) et au Conseil de recherches en sciences naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) de m'avoir choisi pour la bourse en milieu pratique. Grâce à cette bourse, j'ai pu mettre toute mon énergie sur ce projet.

Merci aussi à Rafael Martinelli pour son aide dans l'écriture du modèle et dans l'élaboration de stratégies d'accélération. Je le remercie aussi pour ses idées qui ont permis de perfectionner le modèle.

Je remercie mes parents, Mario et Ginette, qui m'ont soutenu tout au long de mes études universitaires. Votre support m'a permis de repousser mes limites en me facilitant l'accès aux études supérieures. Enfin, je remercie Andrée-Ann, qui partage mon quotidien, de m'avoir encouragé et avoir cru en moi durant tout le processus.

RÉSUMÉ

La planification stratégique d'une mine souterraine est une activité complexe qui nécessite plusieurs étapes. Comme son nom l'indique, ce niveau de planification sert à définir la stratégie de l'entreprise durant les prochaines années. L'horizon de planification est relativement long, mais il dépend des ressources géologiques et des réserves minières. Lors de la construction de l'échéancier d'une mine souterraine, plusieurs aspects doivent être évalués tels le départ et la fin de la mine, le taux de production, l'ordonnancement des activités, la teneur de coupure, etc. Lorsque plusieurs mines peuvent débiter en même temps et qu'elles consomment les mêmes ressources humaines et matérielles, la difficulté du problème augmente. Dans ces conditions, les méthodes manuelles ne permettent pas d'obtenir de bonnes solutions rapidement. La teneur de coupure fait aussi partie des décisions stratégiques et est intimement liée à la planification. Il est donc nécessaire de l'incorporer au plan d'exploitation. Une fois de plus, la complexité augmente puisque la durée des tâches est liée à la teneur de coupure sélectionnée.

La planification stratégique pour les mines à ciel ouvert est largement documentée mais, elle l'est très peu pour ce qui est des mines souterraines. Dans ce mémoire, un programme linéaire en nombres entiers (PLNE) est proposé pour résoudre un problème de planification stratégique d'une mine souterraine. Le modèle est spécifiquement développé pour Mine Raglan située dans le nord québécois. Le modèle servira d'outil d'aide à la décision aux ingénieurs de Mine Raglan. Le site possède plusieurs mines en opération et plusieurs projets miniers potentiels. Il devient difficile de déterminer quel projet débiter et quand il est propice de le faire. À l'aide du modèle, plusieurs scénarios pourront être testés. Il est à noter que le modèle est général et peut facilement être modifié pour s'adapter à d'autres mines.

Ce mémoire peut se diviser en deux grands thèmes soit : l'évaluation des paramètres et le modèle mathématique. L'évaluation des paramètres est importante, car de nombreuses étapes doivent être effectuées avant de planifier une mine. Normalement, la conception doit être faite pour pouvoir définir les activités et construire un échéancier. Dans ce mémoire, la conception minière est évaluée par des courbes statistiques. Cette méthode permet, entre autres, d'obtenir rapidement une solution selon les critères de conception établis dans le passé. Lorsque la conception d'une mine est faite, les activités peuvent être ajoutées au modèle pour obtenir une meilleure estimation du profit réalisé par la mine. Une fois les paramètres évalués, le modèle permet de définir l'échéancier optimal ainsi que la meilleure teneur de coupure. La théorie actuelle sur la teneur de coupure est difficilement applicable au contexte de Mine Raglan. En effet, chaque mine de Mine Raglan possède plusieurs gisements de tonnage et

teneur différents. Le choix de la teneur de coupure est donc fait par le modèle qui permet à chaque gisement d'avoir sa propre teneur de coupure.

ABSTRACT

Strategic planning of an underground mine is a complex activity that requires several steps. This level of planning defines the strategy of the company for the next years. The planning horizon is relatively long but it depends on the resources and reserves of the mine. During the scheduling of an underground mine, several aspects must be evaluated such as the start and the end of the mine, the production rate, the cut-off grade, etc.. When several mines can begin at the same time and are using the same human and material resources, the difficulty of the problem increases. Under these conditions, it is hard to get a good solution quickly with manual methods. The cut-off grade is also a strategic decision and is closely related to planning. It is therefore necessary to incorporate this decision into the strategic plan. Once again, the complexity increases as the duration of the work is related to the content of selected cut-off grade.

Strategic planning for open pit mining is well documented but the application of the operational research in underground is newer. In this paper, a mixed integer program (MIP) is proposed to solve a problem of strategic planning of an underground mine. The model is specifically developed for Raglan Mine in northern Quebec. The model will serve as a tool for decision support for the Raglan Mine's engineers. Raglan Mine has four mines in operation and several potential mining projects. It becomes difficult to determine when a project must start. Using the model, several scenarios can be tested. It should be noted that the model is general and can be easily modified to fit with other mines.

This master thesis can be divided into two main themes: the parameters evaluation and mathematical model. The parameters evaluation is important because many steps must be performed before the planning. Normally, the design must be done before the planning. In this paper, the design for a new mine is evaluated by statistical curves. This method can get a solution to the design criteria established in the past. If a real design is made, the activities can be added to the model to get a better estimate of the mine profit. Once the parameters evaluated, the model is used to define the optimal schedule and the best cut-off grade. The current theory of the cut-off grade is difficult to apply in the context of Raglan Mine. In fact, each deposit at Raglan Mine has its own grade-tonnage curve. The choice of cut-off is made by the model that allows each deposit to have its own cut-off grade.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iii
RÉSUMÉ	iv
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xi
LISTE DES ANNEXES	xii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Mine Raglan	2
1.2 Horizons de planification	4
1.2.1 Planification stratégique	4
1.2.2 Planification à long terme	4
1.2.3 Planification à moyen terme	5
1.2.4 Planification à court terme	5
1.3 Méthodes d'exploitation et types de développement	5
1.3.1 Coupes	6
1.3.2 Long trou	7
1.3.3 Développement des infrastructures communes	7
1.3.4 Développement opérationnel	7
1.4 Étapes	7
1.5 Objectifs	10
1.6 Plan du mémoire	10
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	12
2.1 Planification stratégique d'une mine souterraine	12
2.1.1 Programme linéaire en nombres entiers	13

2.1.2	Autres méthodes	15
2.2	Sélection de la teneur de coupure	16
2.3	Combinaison de la planification et de la sélection d'une teneur de coupure	17
CHAPITRE 3 ESTIMATION DES PARAMÈTRES		19
3.1	Proportion des méthodes d'exploitation	19
3.2	Développement OPEX	22
3.3	Développement CAPEX	23
3.4	Autres paramètres	24
CHAPITRE 4 MODÈLE MATHÉMATIQUE		25
4.1	Modèle de base	25
4.1.1	Indices, ensembles et paramètres	25
4.1.2	Définition des variables	29
4.1.3	Fonction objectif	30
4.1.4	Définition des contraintes	32
4.2	Modèle de base compact	37
CHAPITRE 5 RÉSULTATS ET STRATÉGIES D'ACCÉLÉRATION		39
5.1	Stratégies d'accélération	39
5.1.1	Pré-traitement	39
5.1.2	Recherche dans un voisinage	41
5.1.3	Horizon fuyant (« sliding window »)	41
5.1.4	Profit marginal par lentille	42
5.1.5	Séquence d'ouverture des mines pré-établie	42
5.1.6	Autres stratégies	43
5.2	Résultats	43
CHAPITRE 6 CONCLUSION		46
RÉFÉRENCES		47
ANNEXES		50

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Indices	26
Tableau 4.2	Ensembles	26
Tableau 4.3	Paramètres : mines, temps et autres	27
Tableau 4.4	Paramètres : CAPEX et OPEX	28
Tableau 4.5	Paramètres : coupes et long trou	28
Tableau 5.1	Résultats pour 3 et 5 mines avec horizon de 15 ans	43
Tableau 5.2	Résultats pour 5 mines avec un horizon de 20 ans	44
Tableau A.1	Matrices et vecteurs	50

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Types d'activité dans une mine	8
Figure 3.1	Section d'une lentille selon deux teneurs de coupure.	20
Figure 4.1	Tonnage et teneur en fonction de la teneur de coupure	31

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

<i>Termes</i>	<i>Définition</i>
Bloc :	Prisme de roche de dimensions variables.
Modèle de blocs :	Ensemble des blocs associés à une enveloppe minéralisée
Teneur moyenne :	Proportion d'une substance contenue dans une quantité de roche. Pour les métaux de base, l'unité pour définir la teneur le %. Pour les métaux précieux, la teneur s'exprime en g/t.
Teneur de coupure :	Teneur qui délimite le minerai du stérile.
Minerai :	Roche ayant une teneur moyenne plus élevée que la teneur de coupure et qui est économiquement exploitable.
Stérile :	Roche ayant une teneur moyenne plus faible que la teneur de coupure.
Dilution minière :	Proportion de stérile ajoutée au minerai de la lentille lors de l'exploitation.
Dilution géologique :	Proportion de stérile ajoutée au minerai de la lentille lors de la construction de l'enveloppe.
Récupération minière :	Proportion de minerai récupérée dans un chantier ou dans une lentille.
Lentille :	Enveloppe contenant du matériel minéralisé et ayant son propre modèle de bloc.
Coupe long trou :	Développement dans le minerai donnant accès aux équipements de forage long trou.
Coupe et remblai :	Méthode de minage utilisant le développement latéral pour exploiter le minerai.
Longs trous :	Méthode de minage en vrac utilisant des foreuses verticales.
OPEX :	Du terme anglais : « opérationnal expenditure ». Dans le cas d'une mine souterraine, il s'agit des segments de développement directement associés à l'extraction du minerai.
CAPEX :	Du terme anglais : « capital expenditure ». Dépenses associées aux infrastructures. Dans le cas d'une mine souterraine, les dépenses CAPEX proviennent du développement des galeries permanentes (rampes, accès de ventilation, etc.) et des installation permettant l'exploitation de la mine (salle de ventilation, refuge, etc.).

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	ANGLE DES LENTILLES	50
----------	-------------------------------	----

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

La planification stratégique d'une mine est une tâche complexe qui demande beaucoup de travail. Comme son nom l'indique, le but de cet exercice vise à ordonnancer les activités pour définir la stratégie d'une compagnie. Dans le cas d'une compagnie exploitant une mine souterraine, les décisions stratégiques peuvent être : l'ouverture et la fermeture d'une mine, le choix de la teneur de coupure (cette notion sera définie au prochain paragraphe), l'augmentation du taux de production, l'achat de nouveaux équipements, l'exploitation d'un chantier ou d'une zone, le développement d'une rampe, etc. Lorsque plusieurs mines peuvent ouvrir simultanément et qu'elles dépendent de la même usine de traitement, une solution optimale est difficilement atteignable par des méthodes manuelles de type essai et erreur.

La teneur de coupure est un concept utilisé dans le domaine minier afin d'établir si un bloc de roche doit être considéré comme du minerai (bloc de roches économiquement exploitable) ou du stérile (bloc de roches ne contenant pas une quantité suffisante de métaux pour justifier son exploitation). Le calcul de la teneur de coupure est une décision stratégique qui est problématique dans les mines souterraines. En effet, les théories développées par Lane et Taylor ne sont pas adaptées à ce type d'exploitation. Contrairement aux mines à ciel ouvert, les mines souterraines ont la flexibilité de laisser des chantiers de faible teneur en place. À ciel ouvert, tous les blocs doivent être extraits afin d'accéder aux blocs inférieurs. Le matériel non traité est donc transporté jusqu'aux haldes à stérile. Les méthodes d'exploitation souterraines peuvent aussi varier d'un gisement à l'autre. Il faut donc trouver une alternative permettant de définir la teneur de coupure optimale. Le problème augmente en difficulté lorsque plusieurs mines sont simultanément en opération.

Habituellement, la sélection de la teneur de coupure et la planification stratégique sont effectuées de façon séquentielle. La teneur de coupure est tout d'abord fixée. Ensuite, la conception et la planification sont effectuées selon cette teneur. Enfin, une analyse économique est faite. Comme ce processus est itératif, l'exercice doit être refait en modifiant la teneur de coupure. Cette méthodologie n'est pas optimale si la teneur de coupure reste fixe. En effet, la teneur de coupure devrait normalement diminuer avec le temps afin que la quantité de minerai soit égale à la capacité de l'usine de traitement.

Afin d'incorporer la teneur de coupure à la planification, une nouvelle méthode a été dé-

veloppée dans ce projet de maîtrise. La méthode s'applique spécifiquement aux particularités de Mine Raglan mais pourrait facilement s'adapter à d'autres mines. Cette section permet de mettre en contexte ce projet. Tout d'abord, une description de Mine Raglan est faite. Les horizons de planification, les méthodes d'exploitation et les types de développements effectués sont aussi décrits. Ensuite, l'objectif du projet et une description du problème sont présentés. Cette section se conclut par une explication détaillée du plan de ce mémoire.

1.1 Mine Raglan

Glencore Xstrata est une des plus grandes compagnies de ressources naturelles au monde et un chef de file dans la production de nickel. La compagnie possède des opérations minières dans plusieurs pays dont le Canada, l'Australie, la Nouvelle-Calédonie et la République Dominicaine. Mine Raglan est située dans la région du Nunavik au nord de la province de Québec au Canada. Plus précisément, Mine Raglan se situe près du 62^e parallèle à environ 1800 km de Montréal. L'ensemble des concessions minières de Mine Raglan s'étend sur une distance d'environ 70 kilomètres d'est en ouest. Quatre mines y sont présentement en production, soit : Katinniq, Mine 2, Mine 3 et Kikialik. La mise en production d'une nouvelle mine, nommé Qakimajurq, est prévue pour 2014. Il est à noter que ces mines font parties de la première phase de Mine Raglan. En effet, la seconde phase contient d'autres projets qui sont prévus pour les prochaines décennies. Ce projet de maîtrise se concentre principalement sur les éventuelles mines de la phase 2.

Les ressources minéralisées de Mine Raglan sont regroupées sous forme de gisement et sont réparties dans toute la propriété. Puisque la forme des gisements est allongée et finie, les ingénieurs et géologues de Mine Raglan utilisent le terme « lentille » pour définir ces gisements. Ces lentilles sont de tonnage et teneur différentes. Certaines lentilles sont très petites alors que les plus massives peuvent contenir plusieurs millions de tonnes de minerai. Une mine peut donc se définir comme un ensemble de lentilles étant situées relativement près les unes des autres. De plus, les lentilles d'une mine partagent les mêmes infrastructures tels que la rampe principale, les salles de ventilation, les refuges, etc.

L'éloignement du site apporte plusieurs défis logistiques à Mine Raglan. Comme les services normalement offerts à proximité des villes ne sont pas disponibles, Mine Raglan doit produire son électricité à l'aide de génératrices. Le transport du personnel est assuré par avion alors que le transport du matériel, du diesel et du concentré de nickel se fait par bateau. Pour ce faire, Mine Raglan possède deux avions de type Boeing 737, un aéroport et un port de

mer situé à proximité de Mine Raglan. Enfin, un complexe d'hébergement est présent sur le site afin de loger et nourrir les quelques 800 travailleurs. Les horaires de travail sont de 14 ou 21 jours au site suivis de 14 ou 21 jours de congé hors site. La production, quant à elle, s'effectue 24 heures par jour et 365 jours par année.

Jusqu'en 2006, Mine Raglan était la propriété de la Société Minière Raglan du Québec. Avant la construction de Mine Raglan, en 1995, les dirigeants de l'époque ont conclu l'entente Raglan avec cinq partenaires inuits, soit la Société Makivik, les villages de Salluit et de Kangisujauq appuyés par leur corporation foncière respective. Cette entente a permis et permet encore de faire bénéficier toutes les parties prenantes de l'exploitation des richesses naturelles de la région. Deux ans après la signature de l'entente, la production de concentré de nickel débutait à Mine Raglan.

Un des points de l'entente Raglan stipule que la quantité maximale annuelle de minerai envoyée à l'usine de traitement ne doit pas excéder 1.32 millions de tonnes. Comme toutes les mines, Mine Raglan a comme objectif de maximiser ses profits. Avec la contrainte de production maximale, la compagnie doit explorer d'autres avenues pour engendrer des profits supplémentaires. De façon simple, deux paramètres permettent de calculer les profits, soit les revenus et les coûts. Une diminution des coûts est une activité complexe à effectuer car elle implique l'utilisation de nouvelles technologies, un meilleur suivi des opérations, etc. L'augmentation des revenus est plus accessible car ceux-ci sont liés, pour Mine Raglan, à la vente du concentré de nickel. Une option serait d'augmenter la capacité de l'usine de traitement. Comme dit précédemment, cette option doit être exclue. Une autre possibilité est d'améliorer la sélection du minerai à traiter. En effet, choisir le minerai contenant plus de nickel par tonne de minerai permet de respecter toutes les contraintes en augmentant la quantité de métal produit. Ce projet de maîtrise se concentre sur cet aspect afin d'augmenter les profits de Mine Raglan.

Pour répondre à la demande de l'usine de traitement, les tonnes de minerai sont réparties parmi toutes les mines de Mine Raglan. La production d'une mine est relativement constante durant sa vie afin de minimiser les fluctuations d'utilisation des ressources (équipements, personnel, etc.). Lorsque la production d'une mine diminue avant sa fermeture, il faut soit augmenter la production des autres mines, soit en ouvrir une nouvelle. L'ouverture d'une nouvelle mine est l'option la plus souvent sélectionnée. La mise en opération d'une nouvelle mine implique de nombreux investissements qui doivent être retardés le plus longtemps possible. Cependant, celle-ci doit se faire au bon moment afin d'éviter une diminution de la

production et une perte de profits.

1.2 Horizons de planification

Comme la plupart des exploitations minières, la planification de la production de Mine Raglan est divisée en plusieurs horizons. Chaque horizon possède un niveau de précision différent qui offre une vision plus ou moins détaillée des activités. Pour définir la séquence de ces activités, un ingénieur de planification et un ingénieur de production sont attitrés à chaque mine. Ceux-ci ont comme tâche d'effectuer la planification à long, moyen et court terme de leur mine. Cette section donne une description sommaire des horizons de planification utilisés par les ingénieurs de Mine Raglan.

1.2.1 Planification stratégique

La planification stratégique s'étend sur un horizon d'au moins 20 ans. En fait, la durée dépend des nouvelles découvertes car toutes les réserves et ressources connues sont prises en compte. Le terme utilisé par les ingénieurs pour décrire ce niveau de planification est « Life Of Mine » ou « LOM ». Son objectif est de déterminer quand débiter les travaux liés à l'ouverture d'une nouvelle mine. Cette planification permet aussi de déterminer s'il est avantageux de changer le niveau de production d'une mine et quels sont les meilleurs investissements à effectuer. L'exercice s'effectue à très haut niveau et les années sont utilisées comme échelle de temps. La planification à long terme de chaque mine en production est réutilisée. Une estimation de la production et des investissements des nouvelles mines est ensuite ajoutée au plan global. Aucune séquence n'est construite pour les projets potentiels. L'analyse s'effectue au niveau économique. Les personnes en charge de cet exercice sont les ingénieurs en planification stratégique et à long terme. Par contre, les décisions sont prises par la direction. Ce projet se situe dans cet horizon de planification.

1.2.2 Planification à long terme

La planification à long terme, dans le cadre de Mine Raglan, est l'activité qui vise à définir la durée de vie de chaque mine en production ou à l'étape de projet. L'horizon de planification est variable puisqu'il dépend des réserves et des ressources de la mine à l'étude. En effet, les ressources géologiques sont aussi considérées à ce niveau. L'exercice est effectué annuellement par les ingénieurs en planification de chaque mine. Lorsque le design est fait, toutes les activités sont introduites dans le logiciel de planification Enhanced Production Scheduler

(EPS) similaire à MS Project. Les taux de production et d'utilisation des ressources (humaines et matérielles) peuvent être modifiés. Ensuite, les ingénieurs utilisent leur expérience pour définir une séquence réalisable qui minimise la déviation entre la production réelle et la production ciblée par la planification stratégique. Il est à noter que la planification est plus détaillée pour les trois premières années. Par la suite, les tâches sont plus générales et donnent une estimation de la production. Enfin, une analyse financière est effectuée pour toutes les mines afin de vérifier si les séquences sont économiques. Étant donné le temps nécessaire pour réaliser ce travail, peu de scénarios sont analysés. Il est à noter que la solution retenue est réalisable mais pas nécessairement optimale.

1.2.3 Planification à moyen terme

La planification à moyen terme ou tactique s'étend sur une durée d'un an à trois mois. Se basant sur la planification à long terme, les ingénieurs de chaque mine définissent les activités à réaliser en respectant les décisions de la planification à long terme. La précision de cette planification est, une fois de plus, meilleure que la planification à long terme car l'unité de temps utilisée est le mois. Le suivi est effectué sur ce plan. Si un écart se creuse entre ce plan et les opérations, les ingénieurs peuvent rapidement trouver le problème et le résoudre. Comme dans la planification à long terme, l'unité d'extraction est plus petite que dans la planification stratégique. En effet, les lentilles sont divisées en chantier afin d'obtenir une meilleure estimation.

1.2.4 Planification à court terme

La planification à court terme ou opérationnelle est d'une durée de une semaine à un mois. C'est sur ce plan que l'équipe des opérations se base pour définir les tâches à réaliser. Puisque l'échelle de temps est petite, la marge de manœuvre est faible.

1.3 Méthodes d'exploitation et types de développement

Trois méthodes d'exploitation sont présentement utilisées à Mine Raglan, soit la méthode par coupe long trou, par coupe et remblai et par long trou. Dans le passé, la méthode d'exploitation à ciel ouvert a été utilisée. Par contre, celle-ci n'est pas considérée dans ce mémoire car toutes les lentilles près de la surface ont été exploitées au début de Mine Raglan. Le développement dans le stérile est aussi divisé en deux types soit ; le développement opérationnel et le développement des infrastructures communes. Dans cette section, une description des chacune des méthodes est faite. Une illustration est aussi ajoutée afin d'expliquer la séquence des

opérations de chaque méthode. La figure 1.1 illustre les différentes méthodes d'exploitation et développements existant dans une mine.

1.3.1 Coupes

Une coupe est un segment de développement horizontal effectué dans le minerai. La largeur d'une coupe peut être différente de la largeur normalement observée pour les segments de développement dans le stérile. En effet, une coupe peut avoir la largeur de la lentille. Dans cette situation, le toit est supporté par des piliers naturels ou artificiels. La hauteur des coupes est cependant la même des galeries dans le stérile. Cette contrainte provient de la limite opérationnel des équipements utilisés et du support de terrain. À Mine Raglan, il existe deux types de coupes soit : coupe long trou et coupe et remblai. Dans ce mémoire, il n'y a pas de distinction entre les différents types de coupes. En effet, les coûts de production et les taux d'avancement sont semblables pour les deux types de coupes. Une description est cependant faite afin de comprendre la séquence des opérations de Mine Raglan.

Coupe long trou

Une coupe dans le minerai, nommée coupe long trou (CLT), est un ensemble de développements latéraux donnant un accès aux chantiers. Avant d'effectuer le forage long trou, l'équipement doit pouvoir se rendre aux zones minéralisées. Normalement, une coupe pour le forage long trou est effectuée à tous les 25 mètres de profondeur. Ces coupes doivent être considérées dans le modèle de planification puisqu'elles diminuent la vitesse de production dans la lentille.

Coupe et remblai

La méthode par coupe et remblai (CR) est semblable à la méthode par coupe long trou. La seule différence dans la séquence est le remblayage à la fin de la coupe. Lorsqu'une coupe est complétée, celle-ci est remblayée avec de la roche stérile provenant des autres galeries de la mine. L'équipe de développement est ensuite prête à débiter la seconde coupe sur le remblai. Ce type d'opération, bien que sélectif, offre de nombreux inconvénients. La présence de travailleurs dans les chantiers et le faible taux de production sont deux aspects qui justifient l'utilisation de la méthode long trou. De plus, les coupes dans le minerai et le développement dans le stérile sont effectués par les mêmes équipements.

1.3.2 Long trou

La méthode d'exploitation long trou est une méthode en vrac. Celle-ci utilise des foreuses verticales spécialement conçue. Lorsqu'un chantier est complètement foré, les trous sont chargés d'explosif et dynamités. Le minerai fragmenté est soutiré au niveau inférieur par des chargeuses navettes télécommandées. La méthode long trou est moins dispendieuse, plus productive et plus sécuritaire. En effet, les équipements de forage sont utilisés uniquement pour la production. Le forage des chantiers peut donc être effectué sans retarder les autres activités de la mine. De plus, en aucun temps il y a présence de travailleurs dans les chantiers. Pour toutes ces raisons, la méthode long trou a été privilégiée à Mine Raglan.

1.3.3 Développement des infrastructures communes

Les opérations CAPEX (**CAP**ital **EX**penditure) sont des activités de développement qui s'effectuent dans la roche stérile. Ces opérations font parties des investissements nécessaires à l'exploitation de la mine. Habituellement, ces segments de développement sont utilisés pendant toute la durée de la mine. Par exemple, la rampe principale, les accès de ventilation, les entrepôts et autres infrastructures sont considérés comme des développements CAPEX. Dans ce mémoire, les termes « développement CAPEX » ou seulement « CAPEX » seront utilisés pour décrire ce type d'opération.

1.3.4 Développement opérationnel

Le développement opérationnel, appelé OPEX (**OP**érationnal **EX**penditure) dans ce mémoire, est effectué également dans la roche stérile. Contrairement au développement CAPEX, les développements OPEX sont attribués à des activités spécifiques. Par exemple, une quantité de développement est nécessaire pour exploiter une certaine lentille. Si la lentille n'est pas exploitée, le développement ne sera pas effectué. De plus, la quantité de développement OPEX par lentille est fonction de la grosseur de la lentille. En effet, une lentille avec un tonnage élevé nécessite plus de développement OPEX.

1.4 Étapes

Une lentille peut être définie comme une zone du massif rocheux contenant une quantité élevée d'une substance économique comme le nickel. La roche entourant une lentille est de la roche stérile. Cette roche ne contient pas une concentration suffisante pour être extraite. De façon similaire, une lentille peut être composée uniquement de roche stérile. En effet, une concentration plus élevée d'une substance économique ne garantit pas une extraction

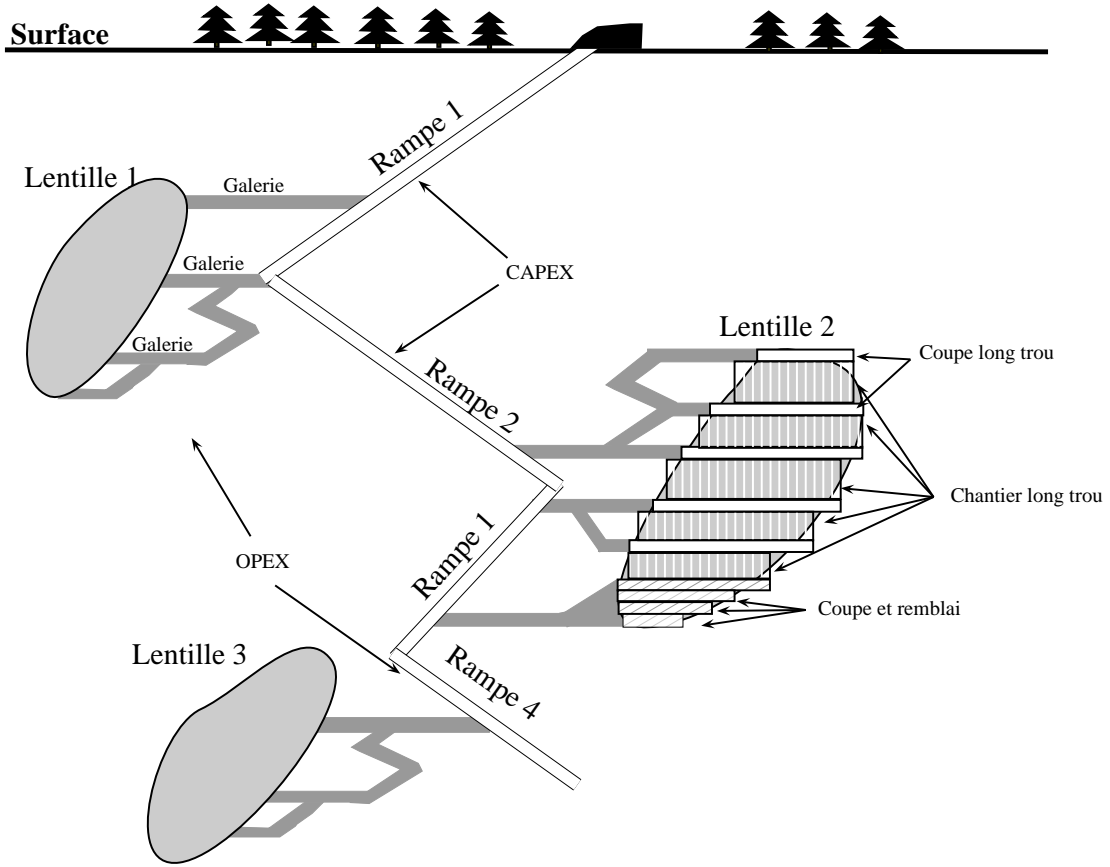


Figure 1.1 Types d'activité dans une mine

avec profit. La méthode d'exploitation et la séquence des activités déterminent si une lentille peut être exploitée de façon profitable. Par exemple, certains gisements sont extraits par une méthode d'exploitation à ciel ouvert. Il serait impossible d'exploiter, avec profit, ce même gisement en souterrain puisque le coût d'exploitation par tonne est plus élevé.

Afin d'obtenir une bonne caractérisation du minerai à exploiter, un modèle de blocs est créé par lentille. Pour ce faire, une enveloppe est d'abord construite par les géologues. Cette enveloppe a la fonction de déterminer les forages à inclure lors du calcul. Ensuite, un logiciel utilisant une méthode géostatistique, comme le krigeage, est utilisé. La méthode géostatistique utilise l'information provenant des forages d'exploration et un modèle mathématique pour évaluer l'information de chacun des blocs. Un modèle de blocs est en fait une base de données qui contient de l'information sur chaque bloc de la lentille. La dimension normale des blocs de Mine Raglan est de 5mX5mX5m. Des blocs de plus petites dimensions sont aussi utilisés pour permettre un meilleur ajustement avec l'enveloppe. Il est à noter qu'une lentille est définie selon l'information disponible. Lorsque les galeries s'approchent de la lentille, des forages aux diamants supplémentaires sont effectués à partir de galeries. Ces forages permettent d'augmenter la précision dans l'évaluation des blocs et de la lentille.

Lorsque les modèles de blocs sont construits, l'étape suivante consiste à faire la conception des accès de la mine. Comme mentionné précédemment, les segments de développement peuvent se diviser en deux catégories soit : le développement OPEX et le développement CAPEX. Le OPEX est le développement attribué à une lentille alors que le CAPEX est le développement principal de la mine. La conception des galeries se fait à l'aide d'un logiciel adapté aux mines souterraines. L'emplacement des rampes est fortement influencé par la géologie. En effet, puisque ces galeries sont utilisées durant une bonne partie de la vie de la mine, le concepteur essaie d'éviter les failles et les zones de faible résistance. Le développement OPEX, est quant à lui, lié aux méthodes d'exploitation utilisées dans la lentille.

L'étape suivante consiste à définir les méthodes d'exploitation à utiliser. Dans le cadre de ce projet, deux méthodes peuvent être utilisées. La première méthode est la méthode par coupes qui réunit la méthode coupe long trou et la méthode coupe et remblai. La deuxième méthode est la méthode long trou. Normalement, la proportion de ces méthodes est évaluée par l'ingénieur en conception qui se base sur les caractéristiques de la lentille et sur son expérience. Dans le prochain chapitre, une méthode empirique est proposée afin d'estimer le pourcentage de la lentille qui sera exploité par chacune des méthodes. Cette méthode empirique permet d'éviter le travail de conception à cette étape-ci de la planification tout en

ayant une bonne approximation des méthodes utilisées.

Il est à noter que la conception d'une mine est un processus itératif. Les étapes énumérées précédemment doivent donc être répétées afin de sélectionner le meilleur scénario. De plus, l'information sur le massif rocheux est en constante évolution. En effet, l'ajout de nouveaux forages permet d'avoir une meilleure définition et implique l'ajout ou le retrait de tonnes de minerai. Malgré que l'information soit incomplète, la conception et la planification doivent être effectuées avec l'information disponible.

1.5 Objectifs

L'objectif de ce projet de maîtrise est de développer un outil d'aide à la décision qui permettra d'optimiser la valeur actuelle nette d'une ou de plusieurs mines souterraines de Mine Raglan. Pour ce faire, l'outil doit pouvoir déterminer la séquence des activités et la teneur de coupure de chaque lentille. Les activités à définir sont

- le départ et fin d'une mine ;
- le départ des segments de développement CAPEX ;
- et le départ des activités sur les lentilles.

Le modèle proposé est un programme linéaire en nombres entiers (PLNE). Le but de ce modèle est de permettre aux ingénieurs de Mine Raglan de tester plusieurs scénarios. Le modèle doit aussi offrir une flexibilité afin de modifier facilement les valeurs d'entrées. En effet, si une nouvelle méthode de minage est utilisée, elle pourra être incorporée aisément au modèle.

Le problème étudié est similaire au problème d'ordonnancement de projet avec contrainte de ressources multimode (RCPSM). En effet, choisir une teneur de coupure par lentille modifie la durée des activités. Contrairement au RCPSM standard, les tâches dans ce projet ont des durées variables. En effet, si l'emphase est mise sur une tâche, celle-ci peut être effectuée très rapidement. Comme le problème RCPSM est un problème NP-difficile, le problème décrit ici est, lui aussi, NP-difficile.

1.6 Plan du mémoire

Ce mémoire est divisé en six sections qui couvrent les différents aspects du projet. Ce chapitre a permis de donner une description de Mine Raglan. Des explications sur les horizons de planification, les méthodes de minage, les types de développement et le problème ont été fournies. Cette mise en contexte a permis de mieux comprendre les difficultés de Mine

Raglan et de positionner ce mémoire dans les horizons de planification utilisés. Une revue de la littérature est effectuée au chapitre 2. Plus spécifiquement, les articles traitant de la planification stratégique des mines souterraines et de l'optimisation de la teneur de coupure y sont couverts. Par la suite, une explication sur le calcul des paramètres utilisés dans le programme linéaire mixte est effectuée au chapitre 3. Il y est proposé, entre autres, une stratégie pour déterminer dans quel pourcentage les méthodes d'exploitation seront utilisées dans chacune des lentilles. Au chapitre 4, le modèle de base est expliqué de façon détaillée. La fonction objectif, les variables et les contraintes y sont décrites. Le chapitre 5 affiche les résultats de la résolution pour le modèle de base. Des améliorations sont ensuite ajoutées pour diminuer le temps de résolution du modèle. Une conclusion et des recommandation sont finalement faites au dernier chapitre.

CHAPITRE 2

REVUE DE LITTÉRATURE

La recherche opérationnelle est appliquée à différents problèmes de l'industrie minière depuis maintenant plusieurs années. Tous les aspects de ce secteur d'activités ont été étudiés : la ventilation minière, la planification, la conception, l'environnement, etc. Avec le nombre croissant d'articles sur le sujet, il peut être difficile de s'y retrouver. Certains auteurs ont recensés les articles traitant de la recherche opérationnelle appliquée au domaine minier. Bjørndal *et al.* (2012) ont revu les articles traitant de l'exploitation des matières premières. La revue comprend, outre le domaine minier, l'agriculture, la pêche et la foresterie. Alford *et al.* (2007) ont effectué une revue des articles traitant de l'optimisation dans les mines souterraines. Plus récemment, Newman *et al.* (2010) ont recensé les articles portant sur la planification dans les mines. Plusieurs techniques de résolution sont utilisées par les différents auteurs et sont appliquées dans des mines souterraines et à ciel ouvert. De plus, tous les horizons de planification sont couverts dans l'article.

Malgré que les revues de la littérature énumérées précédemment contiennent plusieurs articles intéressants, d'autres articles en lien avec ce mémoire doivent être cités. Le projet présenté dans ce mémoire peut se diviser en deux sujets principaux, soit la planification stratégique de mines souterraines et la sélection de la teneur de coupure optimale. Dans un premier temps, une revue des articles traitant de la planification à long terme et stratégique dans les mines souterraines est faite. Ensuite, les méthodes de calcul existantes pour sélectionner la teneur de coupure optimale sont décrites. Enfin, une revue des articles traitant des deux sujets combinés complète ce chapitre.

2.1 Planification stratégique d'une mine souterraine

Contrairement aux mines à ciel ouvert, la littérature pour l'optimisation de la planification stratégique ou à long terme dans les mines souterraines est relativement restreinte. Comme le mentionnent Newman *et al.* (2010), la principale raison de cette faible quantité d'articles est la grande diversité des méthodes d'exploitation en souterrain. En effet, il existe peu d'algorithmes adaptés aux mines souterraines comparables à celui développé par Lerchs et Grossmann (1965) (ou l'algorithme "max flow") pour évaluer le contour ultime d'une mine à ciel ouvert. Bai *et al.* (2013) propose une adaptation de l'algorithme "max flow" afin

d'optimiser la conception des chantiers d'une mine souterraine. Cependant, l'algorithme est spécifiquement conçu pour les mines utilisant la méthode par sous-niveaux abattus (*sublevel stoping*). Cette section présente les modèles de planification stratégique ou à long terme de mines souterraines. La première sous-section explore les modèles utilisant la programmation linéaire en nombres entiers alors que la deuxième sous-section contient d'autres types de modèles.

2.1.1 Programme linéaire en nombres entiers

Plusieurs auteurs utilisent la programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) pour modéliser et résoudre leur problème de planification. La popularité des PLNE provient probablement de l'avancée technologique des algorithmes de résolution adaptés à ce type de problème. Malgré cette avancée, plusieurs instances restent difficiles à résoudre et nécessitent des stratégies supplémentaires. Cette sous-section présente des modèles de planification dans les mines souterraines utilisant des PLNE.

Barbaro et Ramani (1986) présentent un modèle utilisant un PLNE pour déterminer le calendrier de production d'une usine de traitement. Ils déterminent aussi le type de minerai à traiter et la position de l'usine de traitement. L'objectif est de maximiser la valeur actuelle nette en minimisant les coûts de traitement et de transports, les pénalités, etc. Cependant, ce modèle ne tient pas compte de la séquence des activités.

Carlyle et Eaves (2001) déterminent la meilleure séquence de production qui maximise la valeur actuelle nette de la nouvelle expansion de la mine Stillwater. Les auteurs utilisent un PLNE pour effectuer la planification à moyen terme. De plus, le modèle détermine la séquence des segments de développement mais aussi de la préparation, du forage et du soutirage des chantiers.

Dagdelen *et al.* (2002) minimisent la déviation entre la production ciblée et la production réelle d'une mine souterraine. Le modèle est appliqué sur une mine contenant 525 chantiers et sur une durée de 7 ans. Comme la production est évaluée par mois, le nombre de variables est très élevé. Pour réduire le problème, celui-ci est divisé par année et les sept problèmes sont considérés indépendamment les uns des autres.

Epstein *et al.* (2012) maximisent la valeur actuelle nette du plus gros gisement de cuivre au monde. Deux méthodes d'exploitation sont utilisées : à ciel ouvert et en souterrain par une méthode de blocs foudroyés. La minéralisation du gisement exploité permet d'obtenir une bonne relaxation du PLNE. Certaines variables binaires sont relaxées et une heuristique est utilisée pour arrondir les fractions. La vitesse de résolution est donc augmentée. Ce modèle fait aussi le suivi des tonnes extraites le long du réseau de production. Cependant, l'auteur ne semble pas tenir compte du développement des galeries et rampes dans son modèle.

Martinez et Newman (2011) minimisent la différence mensuelle entre la production ciblée et planifiée. La mine est exploitée par sous-niveaux foudroyés. La durée de planification du modèle de base est de 3 ans et l'unité de discrétisation est le mois. Le modèle positionne aussi les équipements sur leur niveau de travail. Pour augmenter la vitesse de résolution, les auteurs ont développé une méthode de décomposition heuristique.

McIsaac (2005) effectue la planification à long terme d'une mine souterraine en ayant comme objectif de maximiser les profits. Le modèle est appliqué sur un horizon de quatre ans. Pour obtenir plus de précision, l'auteur divise les années en trimestre. Le modèle contient une contrainte de qualité sur le minerai extrait. Ainsi, la teneur du minerai à chaque période doit être égale ou supérieure à une valeur fixée. Par contre, l'auteur ne tient pas en compte la séquence entre les différents gisements. Ainsi, tous les gisements peuvent débiter à n'importe quel moment.

Menabde *et al.* (2004) maximisent la VAN en optimisant la séquence de minage d'une mine à ciel ouvert. Leur modèle permet de déterminer la teneur de coupure optimale à chaque période. L'avantage de ce modèle est qu'il utilise un sous-ensemble de simulations conditionnelles du gisement. Il permet donc de tenir compte de la variabilité géologique. Pour réduire la taille du problème, les auteurs utilisent un algorithme qui combine les blocs sur un même niveau. Ces niveaux sont ensuite utilisés dans leur PLNE comme variables de décision.

Le modèle de Nehring et Topal (2007) a des similitudes avec le modèle de ce mémoire. En effet, les auteurs divisent chaque chantier en plusieurs tâches qui doivent être effectuées successivement. De plus, ceux-ci optimisent la valeur actuelle nette de leur gisement. Par contre, les investissements ne sont pas considérés dans cet article et l'exemple proposé est trop simple pour savoir si le modèle est applicable à des situations réelles.

Dans leur modèle, Rahal *et al.* (2003) optimisent la séquence d'une mine exploitée par la méthode blocs foudroyés. La nature du gisement permet de créer des liens entre les chantiers et d'obtenir une bonne approximation de la solution par la relaxation du programme linéaire. Le modèle possède deux objectifs. Le premier est de minimiser la différence entre le profil de soutirage idéal et celui planifié. Le second objectif vise à minimiser la différence entre la production ciblée et planifiée.

Comme pour Mine Raglan, Mount Isa Mines est un complexe comptant plusieurs mines en opération. Smith *et al.* (2008) tentent de maximiser la VAN des trois mines de Mount Isa Mines. Dans cet article, la teneur de coupure est préalablement fixée. Les auteurs fusionnent les 1500 chantiers existant en 34 zones. Le but de cette agrégation est de réduire le nombre de variables et de contraintes. Afin d'obtenir une solution rapidement, les auteurs arrêtent le solveur lorsqu'un écart entre la meilleure solution entière et celle du meilleur nœud dans

l'arbre de branchement (GAP) est inférieur à 10%.

2.1.2 Autres méthodes

D'autres méthodes de résolution ou de modélisation sont aussi utilisées par les auteurs. Ces méthodes offrent souvent l'avantage de résoudre des problèmes beaucoup plus complexes et qui se rapprochent davantage de la réalité. Le réalisme est donc la priorité dans ce type de modèles.

Lemelin *et al.* (2006) utilisent les options réelles pour optimiser l'exploitation de la Mine 2 de Mine Raglan. Cette méthode a l'avantage de simuler des décisions normalement prises par la direction. Par exemple, une option possible, lorsque le prix du nickel diminue, est d'arrêter temporairement l'exploitation d'une lentille. Une autre option est de la fermer complètement. Cependant, cette méthode ne détermine pas la séquence des opérations. En effet, une séquence est prédéterminée et les options disponibles sont évaluées à chaque année. Les options peuvent varier selon les paramètres du scénario étudié. Contrairement aux méthodes traditionnelles, cette méthode permet de tenir compte de l'incertitude dans l'analyse financière.

Sarin et West-Hansen (2005) appliquent la technique de décomposition de Bender sur un problème de mine souterraine de charbon. La décomposition permet de tirer avantage de la structure du problème et d'augmenter la vitesse de résolution. L'objectif est de maximiser la VAN en respectant les contraintes de mélange.

Riff *et al.* (2009) proposent la métaheuristique GRASP (Greedy randomized adaptive search procedure) pour optimiser la séquence d'exploitation d'une mine souterraine. La méthode maximise la VAN en gardant toutes les contraintes et toutes les variables. Il s'agit d'un avantage considérable sur les méthodes par PLNE qui nécessitent normalement la relaxation de certaines contraintes et le retrait de variables pour permettre une résolution du problème. Ce modèle ne sélectionne pas la teneur de coupure mais pourrait être adapté pour en tenir compte.

Dans sa thèse de doctorat, McIsaac (2008) propose une méthode heuristique pour calculer la production d'une mine souterraine ainsi que sa durée de vie. Le prix de vente du métal est évalué par une fonction stochastique. Les coûts sont, quant à eux, évalués à l'aide de modèles statistiques. Afin d'évaluer la meilleure stratégie d'exploitation, plusieurs simulations de prix sont effectuées. Selon chaque simulation, une teneur de coupure optimale est définie ainsi que le taux de production quotidien. Les solutions obtenues sont donc des stratégies d'exploitation possibles.

2.2 Sélection de la teneur de coupure

Suite aux travaux de Lane (1964) sur la sélection de la teneur de coupure optimale, plusieurs auteurs ont étudié cet aspect. Par contre, la théorie reste la même dans la plupart des travaux. Il est à noter que plusieurs articles existent sur la teneur de coupure. Seuls les articles jugés pertinents à ce projet sont couverts.

Comme mentionné précédemment, Lane (1964) est un pionnier dans le calcul de la teneur de coupure optimale d'une mine. Selon lui, la teneur de coupure optimale doit satisfaire trois contraintes globales. La première contrainte est la mine qui comprend l'extraction du minerai et du stérile. La deuxième contrainte est associée à la capacité de l'usine de traitement. Cette contrainte considère seulement le minerai. Enfin, la dernière contrainte provient du marché. Dans ce cas-ci, la contrainte utilise le concentré dans le calcul. Les teneurs de coupure associées à chacun de ces facteurs limitatifs se nomment teneurs de coupure limite. Les teneurs de coupure qui limitent deux contraintes globales simultanément se nomment teneurs de coupure d'équilibre. La teneur de coupure optimale est donc celle qui optimise la valeur actuelle nette tout en répondant à toutes les contraintes. Cette méthode est simple et facile d'application dans les mines à ciel ouvert. Par contre, dans les mines souterraines, son application reste difficile car la valeur résiduelle de la mine (*le facteur F dans l'équation de Lane*) varie avec la séquence.

Plusieurs années après la parution de son article sur la sélection de la teneur de coupure, Lane (1988) a écrit un livre qui revoit sa théorie de la teneur de coupure. Des extensions à la méthode de calcul sont développées. Par exemple, l'auteur explique comment calculer la teneur de coupure pour un gisement polymétallique. Il propose aussi un algorithme pour calculer la politique de la teneur de coupure sur la durée de la mine. Enfin, Lane donne des exemples d'application pour bien comprendre l'effet de la teneur de coupure sur l'exploitation d'une mine.

À l'instar de Lane, Taylor (1985) propose une méthode de calcul pour évaluer la teneur de coupure optimale d'une exploitation minière. La méthode est semblable à celle de Lane hormis l'inexistence de la valeur actuelle du gisement. Par contre, Taylor considère cette valeur comme implicite dans sa théorie puisqu'il considère que l'exploitation se déroule toujours des zones riches vers les zones plus pauvres.

Minnitt (2004) donne un exemple d'application de la théorie sur la teneur de coupure développée par Lane. Il utilise une mine type d'Afrique du Sud pour illustrer les équations. Bien que cet article n'apporte aucune nouveauté à la théorie, l'exemple permet d'avoir un autre point de vue sur l'application.

Ataei et Osanloo (2003) propose un modèle qui détermine la teneur de coupure lorsque

plusieurs métaux économiques sont présents. L’auteur utilise l’algorithme « Golden Section Search » pour calculer rapidement la teneur de coupure optimale. Cette méthode pourrait être adaptée à Mine Raglan. En effet, les lentilles contiennent du nickel mais aussi d’autres métaux économiques comme du cuivre, de l’or, de l’argent, du palladium, du platine, etc. Ce modèle serait cependant difficile à appliquer étant donné la quantité de lentilles présentes sur le site.

Wang *et al.* (2008) proposent un modèle de programmation dynamique pour évaluer la teneur de coupure optimale d’une mine souterraine. Tel que mentionné précédemment, les mines souterraines ont l’avantage de laisser en place des ressources non économiques. Les décisions sont donc liées avec les choix du passé. La programmation dynamique permet d’évaluer chaque politique et de sélectionner la meilleure option.

Enfin, Horsley (2005) teste l’application de la théorie de la teneur de coupure sur des gisements exploités en souterrain et contenant plusieurs chantiers. Comme il est difficile de séparer le minerai et le stérile à l’intérieur d’un chantier, la teneur de coupure est fixée lors de l’extraction. Cela veut donc dire que la teneur de coupure pour un chantier reste la même tout au long de son exploitation. La même hypothèse est formulée dans ce mémoire hormis le fait que les chantiers sont remplacés par des lentilles qui peuvent contenir plusieurs chantiers. Cette variation de teneur de coupure permet d’augmenter la valeur actuelle nette des gisements. L’auteur utilise une séquence fixe mais teste l’effet d’une séquence optimale sur la valeur actuelle nette. Il en conclut que l’amélioration de la séquence est plus avantageuse que la sélection de la teneur de coupure. Toutefois, déterminer la séquence optimale peut devenir très complexe lorsque le nombre de chantiers augmente.

2.3 Combinaison de la planification et de la sélection d’une teneur de coupure

Cette section présente l’article traitant de l’optimisation de la planification stratégique avec teneur de coupure variable. Dans la section précédente, Horsley (2005) mentionne que la planification a un plus grand impact sur la valeur actuelle nette que la modification de la teneur de coupure. En effet, les résultats obtenus en modifiant la séquence sont, de loin, supérieures aux résultats obtenus lors de l’optimisation de la teneur de coupure.

Le modèle de Smith et O’Rourke (2005) se rapproche de la méthode proposée dans ce mémoire. En effet, les auteurs ont comme objectif d’optimiser la valeur actuelle nette de la mine en sélectionnant les blocs les plus riches en premier. Puisque le modèle contient beaucoup de variables et de contraintes, chaque année est optimisée de façon indépendante. Ainsi, lorsqu’une année est optimisée à l’aide d’un PLNE, les variables associées aux blocs exploités sont fixées. Le programme passe ensuite à l’année suivante et optimise cette année

en tenant compte des variables préalablement fixées. De cette manière, la teneur de coupure est déterminée annuellement pour la mine. Cependant, le fait de planifier chaque année de façon indépendante éloigne la solution de la valeur optimale.

Bley et Terblanche (2011) proposent un programme linéaire en nombres entiers afin de maximiser la valeur actuelle nette d'une mine souterraine. Le modèle est flexible et peut facilement s'adapter à plusieurs types d'exploitation. Le modèle de base comprend une variable binaire pour chaque bloc à extraire. Le modèle contient aussi des contraintes de mélange. Des tests sont effectués sur des instances mensuelles et annuelles. Afin de réduire la complexité du problème, les auteurs créent une courbe du tonnage de métal en fonction du tonnage de minerai et ajoutent une approximation linéaire au modèle. À noter que la teneur de coupure est indirectement utilisée puisqu'un bloc peut être laissé en place. Le problème reste toutefois difficile à résoudre lorsque le temps de l'analyse augmente.

Elkington *et al.* (2009) proposent une méthode pour optimiser la valeur actuelle nette d'une mine souterraine en considérant un teneur de coupure variable. Pour ce faire, les auteurs sélectionnent une teneur de coupure et effectuent une conception préliminaire sur cette teneur de coupure. Des séquences tenant compte des contraintes opérationnelles sont ensuite construites. Ces étapes sont itérées plusieurs fois en variant la teneur de coupure. À la fin, il suffit de sélectionner la séquence offrant la meilleure valeur actuelle nette. Il est à noter que pour diminuer la complexité du problème, les auteurs combinent plusieurs blocs ensemble pour former des zones.

Pour conclure, il n'existe pas de modèle parfaitement adapté aux réalités de Mine Raglan. Le modèle proposé par Smith et O'Rourke (2005) simplifie trop le problème en traitant chaque année de façon indépendante. Aussi, les auteurs ne semblent pas considérer les activités de développement dans leur modèle. L'application de ce modèle serait difficile puisque les méthodes d'exploitation sont différentes. La mine étudiée par Smith et O'Rourke (2005) utilise la méthode par sous-niveaux abattus alors que Mine Raglan utilise les méthodes long trou et coupe et remblai. L'existence de contraintes locales et globales sont aussi des particularités de Mine Raglan qui limitent l'utilisation d'autres modèles. Enfin, l'exploitation simultanée de plusieurs mines augmente la complexité du problème. Pour ces raisons, un modèle de programmation linéaire mixte (MIP) et diverses stratégies d'accélération sont proposés.

CHAPITRE 3

ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Un modèle mathématique a besoin d'informations pour être résolu. Ces informations, nommés paramètres, sont des valeurs d'entrées et sont normalement connues a priori. Par exemple, dans un problème de plus court chemin dans un graphe, le paramètre est la distance entre les nœuds. Dans le cas de ce projet de maîtrise, les paramètres sont nombreux. Comme la plupart sont inconnus, il est nécessaire de les estimer. Il s'agit d'un aspect très important de ce mémoire puisqu'une variation d'un des paramètres peut influencer la solution de façon significative. Une approche possible serait d'utiliser l'opinion d'experts dans le domaine. Par contre, certains paramètres resteraient difficiles à évaluer. Pour palier à ce problème, des relations empiriques utilisant les données historiques de l'entreprise ont été développées. La régression linéaire a été utilisée pour évaluer les méthodes d'exploitation et la quantité de développement OPEX. Une approche trigonométrique a été utilisée pour déterminer les quantités de développement CAPEX. Les prix et les coûts n'ont toutefois pas été évalués. Les mêmes valeurs utilisées par la compagnie sont reprises afin d'avoir une meilleure comparaison entre la méthode de planification actuelle et la méthode développée dans ce mémoire. Ce chapitre montre les méthodes utilisées et les résultats obtenus lors de l'évaluation des paramètres.

3.1 Proportion des méthodes d'exploitation

Cette section décrit la méthodologie utilisée pour définir la proportion de la lentille qui sera exploitée selon chaque méthode d'exploitation ; c'est-à-dire, quelle proportion d'une lentille est exploitée par la méthode long trou et quelle proportion par les méthode de coupes. Il est certain que la meilleure technique pour estimer ces proportions serait de concevoir la mine à l'aide d'un logiciel adapté. Cette tâche est cependant longue à réaliser. Cette conception devient désuète lorsque la teneur de coupure de la lentille change. En effet, en modifiant la teneur de coupure, la dimension de la lentille varie. Plus la teneur de coupure diminue, plus le tonnage augmente. Dans ces conditions, les proportions entre les méthodes d'exploitation peuvent aussi changer. La figure 3.1 illustre le changement de dimension possible lorsque la teneur de coupure change. Dans le cas présenté, la teneur de coupure COG_1 est plus petite que COG_2 . Le pendage de la lentille peut aussi jouer un rôle majeur dans les méthodes utilisées. Puisque le modèle mathématique proposé permet de choisir parmi plusieurs teneurs

de coupure par lentille, il serait difficile de faire la conception de chacune des lentilles pour chaque teneur de coupure.

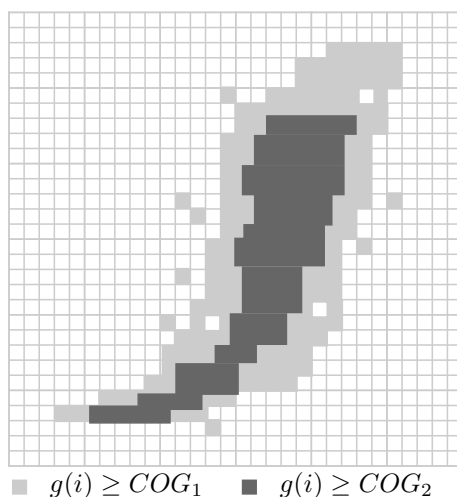


Figure 3.1 Section d'une lentille selon deux teneurs de coupure.

Depuis 2006, Mine Raglan a changé de stratégie dans la sélection des méthodes d'exploitation. En effet, au début du projet, la plupart des lentilles étaient exploitées par la méthode coupe et remblai. Présentement, la méthode long trou est utilisée en priorité. Par contre, la méthode par coupe et remblai n'a pas été totalement exclue de Mine Raglan. Cette méthode est encore utilisée dans les zones moins continues et dans les lentilles de petite dimension. Afin de mieux représenter la réalité actuelle de Mine Raglan, seulement les données à partir de 2006 ont été utilisées.

Tel que mentionné précédemment, l'outil statistique utilisé pour évaluer la proportion de type d'exploitation est la régression linéaire. Cette méthode permet de minimiser la somme des carrés des erreurs. Les attributs explicatifs ont été testés avec des tests d'hypothèses afin de déterminer s'ils étaient significatifs dans l'équation. À un temps « t » donné, une lentille peut se présenter sous trois états. En effet, celle-ci peut être complètement exploitée, débutée ou planifiée. L'information sur les lentilles exploitées provient des données historiques. Lorsque la lentille est planifiée, l'information provient des fichiers de planification à long terme. Enfin, lorsque l'exploitation de la lentilles a débuté, l'information provient des deux sources énumérées précédemment. Chaque lentille exploitée ou planifiée peut être décrite selon plusieurs attributs. Ces attributs permettent de définir les proportions de chaque méthode d'exploitation utilisée lors de l'exploitation d'une lentille. Voici donc la liste des attributs jugés pertinents à inclure dans l'analyse statistique :

1. Pendage;
2. Tonnage;
3. Hauteur.

Le tonnage et la hauteur des lentilles sont relativement faciles à obtenir à partir du modèle de blocs. En effet, le tonnage s'obtient en additionnant la masse de tous les blocs contenus dans l'enveloppe minéralisée appartenant à la teneur de coupure désirée. La hauteur d'une lentille, quant à elle, se calcule en faisant la différence entre le bloc le plus haut et le bloc le plus bas du modèle de blocs. Le pendage d'une lentille est cependant plus difficile à calculer. En effet, l'irrégularité des lentilles pose problème pour la mesure de leur angle. Afin de rester objectif et d'obtenir des résultats relativement fiables, une régression linéaire a aussi été appliquée sur le modèle de blocs. Le but de cette régression est de définir un plan minimisant la somme du carré des erreurs. Une fois les coefficients du plan connus, il est possible de calculer le pendage global de la lentille à l'aide de formules trigonométriques. Les détails de la méthode utilisée sont décrits à l'annexe A. Afin de valider les résultats d'angles obtenus par la régression linéaire, ceux-ci ont été comparés aux résultats obtenus de façon manuelle. Les deux méthodes offrent des résultats équivalents.

Une fois les attributs de chaque lentille connus, il suffit de calculer la relation qui existe entre le pendage, le tonnage et la hauteur pour définir la proportion de chaque type de minage. La relation trouvée s'écrit comme suit :

$$LT\% = \min\{0.196 \times T^{0.084} \times e^{0.0058 \times \theta}, 85\%\} \quad (3.1)$$

Dans dans l'équation précédente, $LT\%$ représente la proportion (%) de la méthode long trou utilisée dans la lentille, T représente le tonnage (tonnes métriques) de la lentille, θ représente le pendage (degrés). À noter que les coefficients ont été calculé sur la relation linéarisée. Le coefficient R^2 obtenu pour cette régression est 0.24. Il est possible d'observer que le pendage d'une lentille est plus significatif sur la méthode d'exploitation lorsque la lentille est de petite dimension. Ce résultat concorde avec les observations faites sur le terrain. En effet, lorsqu'une lentille est très volumineuse, elle peut facilement être divisée en chantier long trou et ce, même avec un faible pendage. La hauteur, quant à elle, est complètement exclue de la relation. Après analyse, il est possible d'observer une relation entre le tonnage et la hauteur. Enfin, une valeur maximale de 85% a été ajoutée à l'équation. Cette valeur est limitée en raison du travail minimum requis pour effectuer les coupes dans le minerai afin d'accéder aux chantiers longs trous.

Comme mentionné dans l'introduction, la méthode par coupe et remblai et la méthode coupe long trou sont relativement semblables. Les deux méthodes ont été regroupées dans la partie coupe de la lentille. La proportion de la lentille qui sera extraite par une méthode de coupe est donc le pourcentage non exploité par la méthode long trou. L'équation est donc :

$$Coupes\% = 100\% - LT\% \quad (3.2)$$

Il est à noter que les équations définies précédemment ont été réalisées à l'aide de 54 lentilles. Dans le futur, il serait intéressant d'ajouter d'autres lentilles afin de diminuer l'erreur commise par la régression et obtenir une meilleur approximation des méthodes à utiliser.

3.2 Développement OPEX

Le développement OPEX est celui effectué dans le stérile avant l'extraction d'une lentille. Ainsi lorsqu'une lentille n'est pas exploitée, le développement OPEX n'est pas effectué. Une certaine quantité de développement CAPEX est aussi liée l'exploitation de la lentille. En effet, certains niveaux et accès de ventilation sont nécessaires seulement si la lentille est exploitée. Cette quantité de développement CAPEX a été fusionnée avec le développement OPEX afin de faciliter la résolution du problème. La longueur du développement (mètres) varie en fonction de la taille de la lentille (i.e. de la teneur de coupure). Une lentille avec une teneur de coupure très élevée nécessite moins de développement que la même lentille avec teneur de coupure plus faible. De façon similaire à la sélection des méthodes de minage, les attributs suivants ont été utilisés pour définir les lentilles :

1. Pendage;
2. Tonnage

La hauteur n'a pas été utilisée dans ce cas étant donné la relation avec le tonnage. La quantité de développement OPEX par lentille provient des mêmes sources utilisées (54 lentilles) pour définir les proportions des méthodes d'exploitation. La relation entre le nombre de mètres de développement OPEX, le tonnage et le pendage s'écrit comme suit :

$$OPEX = 0.078T^{0.7091} \quad (3.3)$$

Dans la relation précédente, le terme *OPEX* représente le nombre de mètres de développement opérationnel alors que *T* représente le tonnage de la lentille. Dans ce cas, le pendage n'a pas d'influence sur la quantité de développement OPEX. Cette relation peut aussi être expliquée par les observations *in situ*. En effet, une lentille inclinée nécessite autant de points d'accès qu'une lentille horizontale. À noter que le coefficient R^2 pour cette régression est

0.65. Une fois de plus, une mise à jour fréquente de cette équation empirique permettrait d'améliorer la précision des solutions obtenues.

3.3 Développement CAPEX

Déterminer la quantité de mètres nécessaires pour atteindre les lentilles d'une mine par des rampes est un problème plus complexe. En effet, il existe de nombreuses combinaisons possibles pour effectuer ce type de développement. Ce sujet dépasse le cadre de ce mémoire, mais il a été étudié par quelques auteurs dont Brazil et Thomas (2007). Le problème peut se comparer à un arbre de Steiner où l'objectif est de minimiser la somme des distances pondérées. Un exemple simple est de visualiser une mine contenant plusieurs petits gisements et un plus gros. Les ingénieurs ont avantage à positionner la rampe près du gros gisement afin de minimiser la distance de transport. Cette méthode n'a pas été appliquée dans ce mémoire mais serait un choix judicieux pour améliorer les résultats du modèle. Pour simplifier le problème en restant réaliste, des hypothèses ont été posées. Voici les hypothèses formulées pour calculer les distances de développement :

- La rampe passe d'une lentille à la lentille la plus proche en profondeur
- La distance de développement CAPEX entre deux lentilles, notée d , se calcule par la formule trigonométrique suivante :

$$d = \frac{\Delta h}{\sin(\theta)} \quad (3.4)$$

1. Δh représente la distance verticale entre le centroïde d'une lentille et le centroïde de la lentille au-dessus. Si aucune lentille ne se trouve au dessus, Δh est la distance entre le centroïde de la lentille et la surface.
 2. θ représente l'angle (en degrés) de descente de la rampe
- Une distance constante de 150 mètres est ajoutée pour accéder au niveau de la lentille.

Il est à noter qu'une conception préliminaire pourrait aussi être effectuée pour obtenir de meilleurs résultats. En effet, le développement CAPEX est moins sensible à la variation de la teneur de coupure. Si la rampe doit partir de la surface pour se rendre à une lentille située à 100 mètres, la distance de développement sera la même, peu importe le tonnage de cette lentille. Une conception rapide de la rampe principale, des accès aux lentilles et des accès de ventilation serait un excellent compromis. Ces segments pourraient ensuite être ajoutés au modèle avec des liens adéquats.

3.4 Autres paramètres

D'autres paramètres sont nécessaires au modèle. Pour ces paramètres, les valeurs de Mine Raglan ont été utilisées. Le modèle a cependant la flexibilité de modifier ces paramètres pour tester divers scénarios. Le premier paramètre est le prix de vente des métaux. L'estimation de ces prix est très importante lors de la planification stratégique. En effet, une augmentation soudaine du prix des métaux peut rendre économique une lentille qui ne l'était pas. Inversement, une diminution des prix peut provoquer la fermeture de plusieurs lentilles et même d'une mine. Les coûts proviennent aussi de l'historique de Mine Raglan. Le coût de développement CAPEX est en \$/m mais comprend aussi les infrastructures nécessaires à l'exploitation de la mine comme le réseau de ventilation, les salles électriques, les refuges, le garage, etc. Les coûts associés aux lentilles sont exprimés en \$/tonnes. Enfin, la dilution, la récupération minière et la récupération à l'usine de traitement sont les mêmes que ceux de Mine Raglan. Ces deux concepts sont expliqués dans le chapitre suivant. La récupération à l'usine de traitement est constante. Normalement, celle-ci varie en fonction de la teneur du minerai traité. En utilisant une valeur constante, le problème peut être linéarisé plus facilement. Par contre, il serait possible d'utiliser l'équation de récupération simplifiée afin d'augmenter le réalisme du modèle. Le nombre de variables binaires augmenterait afin de linéariser la courbe de récupération.

CHAPITRE 4

MODÈLE MATHÉMATIQUE

Ce chapitre est entièrement consacré à la description du modèle mathématique. Il s'agit du modèle de base sans stratégie d'accélération. Les stratégies sont décrites dans le chapitre 5. La première section donne une description détaillée de toutes les parties du modèle. La deuxième section présente le modèle sous une écriture plus compacte.

4.1 Modèle de base

Cette section permet de décrire le modèle de base en détail. Une description des indices, des ensembles et des paramètres est tout d'abord faite dans la première sous-section. La deuxième sous-section donne une définition des variables. Par la suite, chacune des parties de la fonction objectif est analysée en détail. Enfin, les contraintes sont présentées à tour de rôle pour présenter leur implication dans le modèle.

4.1.1 Indices, ensembles et paramètres

Plusieurs ensembles, indices et paramètres sont utilisés dans le modèle. Les ensembles permettent de réunir des variables qui partagent une ou plusieurs propriétés. Les indices permettent, quant à eux, de simplifier l'écriture du problème. Les paramètres sont nécessaires à la résolution du problème. Les indices utilisés dans le modèle sont décrits dans le tableau 4.1. Il est à noter que les indices R , O , C et L sont utilisés à titre informatif seulement. En effet, ils permettent de distinguer les différentes activités. Dans la version compacte, un indice général est utilisé pour remplacer ces indices.

Les ensembles du modèles sont décrits dans le tableau 4.2. Les ensemble Γ_j , Ω_j et Ψ_m contiennent, dans la plupart des cas, qu'une seule activité. En effet, l'ensemble Γ_j représente le segment de rampe j . Ce dernier a normalement qu'une seule lentille comme successeur direct. De façon similaire, l'ensemble Ω_j est le segment de développement j . Normalement, les segments de développement n'ont qu'un seul segment successeur. Ψ_m peut être considéré comme l'accès à la mine de la surface. Comme cet accès est très dispendieux, il est unique. La taille de l'ensemble Θ_i est variable selon la profondeur de la lentille i . Le nombre de segments de rampe augmente en fonction de la profondeur de la lentille.

Tableau 4.1 Indices

<i>Indices</i>	<i>Définition</i>
i	Lentille minéralisée
j	Segment de développement
g	Teneur de coupure
s	Successeur
k	Partie d'une tâche
m	Zone
R	CAPEX
O	OPEX
C	Coupes
L	Longs trous

Tableau 4.2 Ensembles

<i>Ensembles</i>	<i>Définition</i>
Γ_j	Ensemble des lentilles successeurs au segment de développement j
Ω_j	Ensemble des segments de développement successeurs au segment de développement j
Θ_i	Ensemble des segments de développement faisant parties du chemin pour se rendre à la lentille i .
Ψ_m	Ensemble des segments de développement j débutant la mine m .
Π_m	Ensemble des activités (développements ou lentilles) appartenant à la mine m .

Les tableaux 4.3 à 4.5 présentent la liste des paramètres utilisés par le modèle. Les paramètres sont regroupés selon le type d'activité. Ceux-ci sont indispensables à la résolution du modèle mathématique.

Tableau 4.3 Paramètres : mines, temps et autres

<i>Paramètres</i>	<i>Définition</i>
I_m	Investissement (\$) nécessaire pour débiter la mine m .
K_m	Investissement (\$) nécessaire pour fermer la mine m .
C_m	Coût de maintenance (\$/année) pour garder ouverte la mine m .
LM	Longueur maximale (m) de développement pouvant être effectuée en ligne droite dans une année.
CS	Coût (\$/m ³) pour descendre ou monter du stérile excédentaire.
T_t	Masse maximale (tonnes) de minerai pouvant être exploitée au temps t .
N_t	Masse maximale (tonnes) de nickel équivalent pouvant être traitée au temps t .
L_t	Longueur maximale (mètres) de développement pouvant être effectuée au temps t .
f_t	Facteur d'actualisation au temps t .
P_t	Prix de vente (\$/tonne) du nickel équivalent au temps t .
R_t	Revenu (\$/tonne) du nickel équivalent au temps t .
S_t	Coût de traitement (\$/tonne) de nickel équivalent au temps t .
F	Facteur de foisonnement de la roche stérile.
R	Facteur de remplissage des lentilles exploitées.
U	Récupération à l'usine de traitement. (%)

Tableau 4.4 Paramètres : CAPEX et OPEX

<i>Paramètres</i>	<i>Définition</i>
L_j^R	Longueur (mètres) du segment de développement capital j .
V_j^R	Volume (m ³) de stérile contenu dans le segment de développement capital j .
C_j^R	Coût (\$) pour effectuer le segment de développement capital j .
L_{ikg}^O	Longueur (mètres) de la k^e partie du segment de développement opérationnel associé à la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
V_{ikg}^O	Volume (m ³) de la k^e partie du segment de développement opérationnel associé à la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
T_{ikg}^O	Masse (tonnes) de la k^e partie du segment de développement opérationnel associé à la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
C_{ikg}^O	Coût (\$) de la k^e partie du segment de développement opérationnel associé à la lentille i basée sur une teneur de coupure g .

Tableau 4.5 Paramètres : coupes et long trou

<i>Paramètres</i>	<i>Définition</i>
T_{ikg}^C	Masse (tonnes) du minerai contenue dans la k^e partie des coupes de la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
N_{ikg}^C	Masse équivalente (tonnes) de nickel contenue dans la k^e partie des coupes de la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
V_{ikg}^C	Volume (m ³) du minerai contenu dans la k^e partie des coupes de la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
L_{ikg}^C	Longueur équivalente (m) de la k^e partie des coupes de la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
CM_{ikg}^C	Coût d'exploitation (\$) de la k^e partie des coupes de la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
T_{ikg}^L	Masse (tonnes) du minerai contenue dans la k^e partie long trou de la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
N_{ikg}^L	Masse équivalente (tonnes) de nickel contenue dans la k^e partie long trou de la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
V_{ikg}^L	Volume (m ³) du minerai contenue dans la k^e partie long trou de la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
CM_{ikg}^L	Coût d'exploitation (\$) de la k^e partie long trou de la lentille i basée sur une teneur de coupure g .
Q_{ig}	Masse annuelle (tonnes/année) maximale de minerai pouvant être extrait par méthode long trou de la lentille i basée sur une teneur de coupure g .

4.1.2 Définition des variables

Les variables binaires servent à définir le départ et la fin des activités. Elles permettent aussi de sélectionner la teneur de coupure de chaque lentille. Les variables continues, quant à elles, déterminent l'effort mis sur la tâche par année. Comme mentionné précédemment, la durée des activités est variable. Une lentille à haute teneur en nickel peut donc être exploitée très rapidement contrairement à une lentille de teneur plus faible. Dans ce cas, les lentilles moins riches sont des gisements secondaires et sont exploités lorsque la production diminue. Les variables y_{jt}^R , y_{it}^O , y_{it}^C et y_{ikt}^L définissent le départ des activités et les variables FM_{mt} représentent la fermeture des mines.

$$\begin{aligned}
 y_{jt}^R &= \begin{cases} 1 & \text{si le segment CAPEX } j \text{ débute au temps } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
 y_{it}^O &= \begin{cases} 1 & \text{si le segment OPEX associé à la lentille } i \text{ débute au temps } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
 y_{it}^C &= \begin{cases} 1 & \text{si la coupe de la lentille } i \text{ débute au temps } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
 y_{ikt}^L &= \begin{cases} 1 & \text{si la } k^e \text{ partie long trou de la lentille } i \text{ débute au temps } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
 FM_{mt} &= \begin{cases} 1 & \text{si la mine } m \text{ est fermée au temps } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les variables suivantes définissent l'effort mis sur les tâches. L'indice k permet de diviser une tâche en deux parties. Ces deux parties permettent une flexibilité au modèle sans qu'il soit impossible à résoudre. Les indices supérieurs, R , O , C et L , permettent, comme pour les variables binaires, de séparer les variables selon le type de tâches.

$$\begin{aligned}
 x_{jt}^R &= \text{Fraction (\%)} \text{ du segment de développement capital } j \text{ effectuée au temps } t. \\
 x_{iktg}^O &= \text{Fraction (\%)} \text{ de la } k^e \text{ partie du segment de développement opérationnel associé à la lentille } i \text{ basée sur une teneur de coupure } g \text{ effectuée au temps } t. \\
 x_{iktg}^C &= \text{Fraction (\%)} \text{ de la } k^e \text{ partie des coupes de la lentille } i \text{ exploitée au temps } t \text{ avec } g \text{ comme teneur de coupure.} \\
 x_{iktg}^L &= \text{Fraction (\%)} \text{ de la } k^e \text{ partie long trou de la lentille } i \text{ exploitée au temps } t \text{ avec } g \text{ comme teneur de coupure.}
 \end{aligned}$$

Le volume supplémentaire de stérile monté et descendu par mine est représenté par les variables MS_{mt} et DS_{mt} respectivement. Ces variables permettent de calculer le coût de transport supplémentaire associé au stérile.

MS_{mt} = Volume (m^3) de stérile de la mine m devant être entreposé à la surface au temps t .

DS_{mt} = Volume (m^3) de stérile devant être descendu de la surface pour la mine m au temps t .

La dernière variable à introduire est celle qui sélectionne la teneur de coupure. Chaque lentille peut être définie par un graphique représentant le tonnage et la teneur moyenne en fonction de la teneur de coupure. Ces fonctions pourraient être approximées par des ensembles de droites tangentes. Toutefois, l'information disponible ne permet pas d'obtenir une telle précision. Pour cette raison, les fonctions non-linéaires sont discrétisées et seulement certaines teneurs de coupure sont considérées par le modèle. Dans les tests du chapitre 5, sept teneurs de coupure sont utilisées par lentilles.

$$COG_{ig} = \begin{cases} 1 & \text{si la lentille } i \text{ prend } g \text{ comme teneur de coupure,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La figure 4.1 représente le tonnage et la teneur moyenne en fonction de la teneur de coupure pour une lentille typique de Mine Raglan. Dans cet exemple, les carrés et les cercles définissent respectivement le tonnage et la teneur moyenne associés à des teneurs de coupure spécifiques. Ces tonnages et teneurs sont utilisés par le modèle. Il est possible de noter que plusieurs teneurs sont similaires les unes aux autres. Dans cette situation, plusieurs teneurs de coupure peuvent être retirées pour diminuer le nombre de variables et la complexité du problème.

4.1.3 Fonction objectif

L'objectif est de maximiser la valeur actuelle nette de Mine Raglan. Pour ce faire, la fonction objectif 4.1 peut se diviser en plusieurs parties. La partie 1 représente les revenus obtenus de la vente du nickel équivalent contenu dans le minerai. Comme il s'agit de gisements polymétallique, tous les autres métaux économiques sont transformés en nickel équivalent à l'aide des prix actuels. De plus, cette quantité de nickel équivalent tient compte de la dilution et de la récupération minière. Avant d'aller plus loin, il est important de décrire ces deux concepts. Lors de l'exploitation d'un chantier, il est possible qu'une quantité de stérile se mélange avec le minerai. Ce stérile ne peut pas être séparé du minerai. Pour cette raison, le

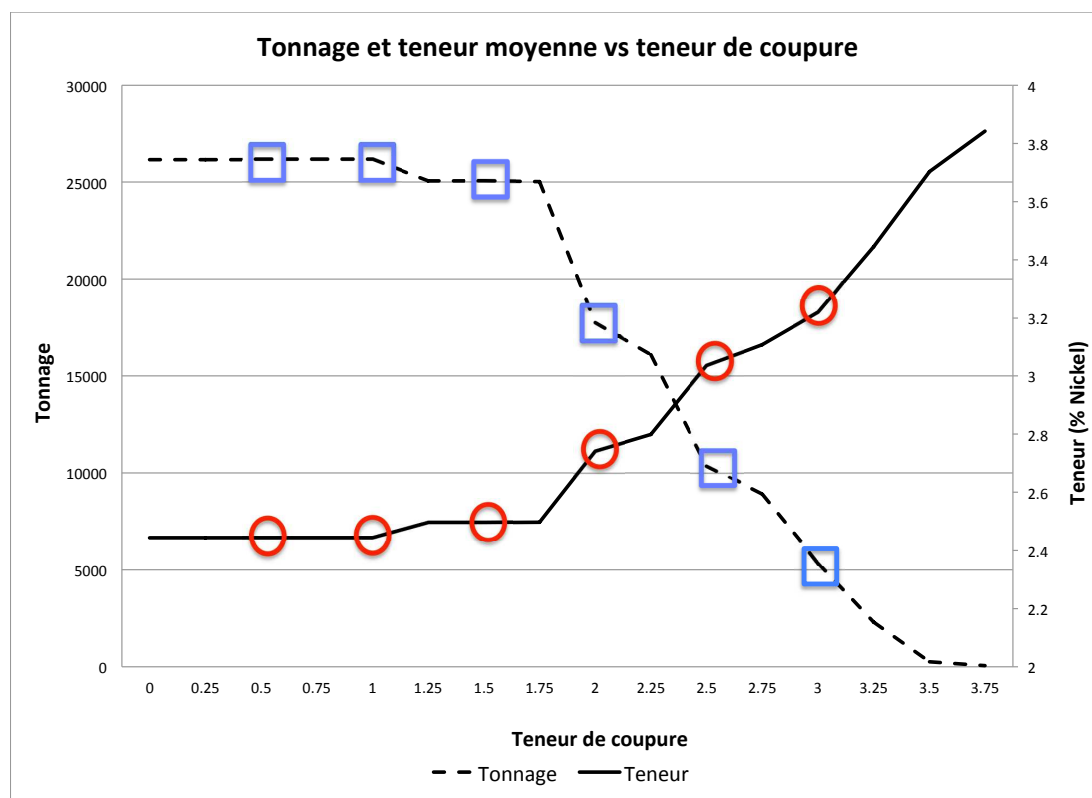


Figure 4.1 Tonnage et teneur en fonction de la teneur de coupure

terme dilution est utilisé et est exprimé en pourcentage. Le deuxième concept à être expliqué est la récupération minière. Lors du soutirage, une certaine quantité de minerai peut être laissée en place pour différentes raisons comme un mauvais sautage. La récupération est donc toujours plus petite ou égale à 100%. La partie 2 représente la somme des coûts du CAPEX et du OPEX. La partie 3 représente les coûts de production pour les méthodes d'exploitation par coupe et par long trou. Les coûts d'ouverture et de fermeture sont représentés par la partie 4. Les coûts fixes pour maintenir une mine ouverte sont représentés par la partie 5 de la fonction objectif. Enfin, les coûts liés au déplacement supplémentaire du stérile sont représentés par la partie 6. Comme le seul revenu est la vente de nickel, cette partie est positive. Les autres parties de l'équation sont des coûts et doivent être soustrait. Finalement, les flux monétaires sont actualisés pour déterminer la valeur actuelle nette. Le facteur d'actualisation f_t peut être calculé par l'équation $f_t = (1 + d)^{-t}$.

$$\begin{aligned}
\max \sum_{\forall t} f_t \{ & \overbrace{R_t \times \sum_{\forall i} \sum_{\forall g} \sum_{k=1}^2 (N_{ikg}^C \times x_{iktg}^C + N_{ikg}^L \times x_{iktg}^L)}^{\text{partie1}} \\
& - \overbrace{\sum_{\forall j} C_j^R \times x_{jt}^R - \sum_{\forall i} \sum_{\forall g} \sum_{k=1}^2 C_{ikg}^O \times x_{iktg}^O}^{\text{partie2}} \\
& - \overbrace{\sum_{\forall i} \sum_{\forall g} \sum_{k=1}^2 (CM_{ikg}^C \times x_{iktg}^C + CM_{ikg}^L \times x_{iktg}^L)}^{\text{partie3}} \\
& - \overbrace{\sum_{\forall m} \sum_{\forall j \in \Psi_m} I_m \times y_{jt}^R - \sum_{\forall m} K_m \times FM_{mt}}^{\text{partie4}} \\
& - \overbrace{\sum_{\forall m} C_m \times (\sum_{u=1}^t \sum_{j \in \Psi_m} y_{ju}^R - \sum_{u=1}^t FM_{mu})}^{\text{partie5}} \\
& \left. - \overbrace{\sum_{\forall m} CS \times (MS_{mt} + DS_{mt})}^{\text{partie6}} \right\} \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Dans la fonction objectif 4.1, le revenu par tonne de métal R_t est calculé selon l'équation suivante :

$$R_t = (P_t - S_t) \times U \quad (4.2)$$

Les termes P_t et S_t représentent respectivement le prix de vente et le coût de mise en marché d'une tonne de métal au temps t . Le terme U représente, quant à lui, la récupération obtenue par l'usine de traitement. Normalement, U varie en fonction de la teneur du minerai traité et rend le problème non-linéaire. U a donc été fixé afin de simplifier le problème.

4.1.4 Définition des contraintes

Cette sous-section donne une description des contraintes dans le modèle. Celles-ci sont regroupées en sous-ensemble de même nature afin de simplifier les explications et de faciliter la compréhension globale du modèle.

Contraintes globales

Il existe trois contraintes globales qui s'appliquent à toutes les mines en production ou en développement. La contrainte (4.3) limite la quantité de minerai extraite par année. Cette

contrainte provient de l'entente Raglan signée par les parties prenantes lors du départ du projet. La contrainte (4.4) limite la quantité de métal extraite par année. Cette contrainte provient de l'usine de traitement qui a une limite de capacité. À noter que cette contrainte est spécifique à Mine Raglan. Enfin, la contrainte (4.5) limite la quantité de développement horizontal par année. Cette contrainte est due à la quantité limitée d'équipement de forage et au nombre d'équipes de travail disponible sur le site.

$$\sum_{\forall i} \sum_{\forall g} \sum_{k=1}^2 (T_{ikg}^C \times x_{iktg}^C + T_{ikg}^L \times x_{iktg}^L) \leq T_t \quad \forall t \quad (4.3)$$

$$\sum_{\forall i} \sum_{\forall g} \sum_{k=1}^2 (N_{ikg}^C \times x_{iktg}^C + N_{ikg}^L \times x_{iktg}^L) \leq N_t \quad \forall t \quad (4.4)$$

$$\sum_{\forall j} L_j^R \times x_{jt}^R + \sum_{\forall i} \sum_{\forall g} \sum_{k=1}^2 (L_{ikg}^O \times x_{iktg}^O + L_{ikg}^C \times x_{iktg}^C) \leq L_t \quad \forall t \quad (4.5)$$

Contraintes sur les tâches successives

Les contraintes (4.6) à (4.8) limitent la vitesse permise pour des tâches successives. Même si la contrainte globale de développement permet d'accéder à une lentille profonde au temps t , la vitesse d'avancement peut être le facteur limitatif. La même logique s'applique pour les activités d'une lentille. En effet, sans ces contraintes, une lentille volumineuse pourrait être complètement exploitée pendant la même année.

$$\sum_{j \in \Theta_i} (L_j^R / LM) \times x_{jt}^R + \sum_{\forall g} \sum_{k=1}^2 (L_{ikg}^O / LM) \times x_{iktg}^O \leq 1 \quad \forall i, \forall t \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Theta_i} (L_j^R / LM) \times x_{jt}^R + \sum_{\forall g} (L_{i1g}^O / LM) \times x_{i1tg}^O \\ + \sum_{\forall g} \sum_{k=1}^2 (L_{ikg}^C / LM) \times x_{iktg}^C \leq 1 \quad \forall i, \forall t \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Theta_i} (L_j^R / LM) \times x_{jt}^R + \sum_{\forall g} (L_{i1g}^O / LM) \times x_{i1tg}^O \\ + \sum_{\forall g} (L_{i1g}^C / LM) \times x_{i1tg}^C + \sum_{\forall g} \sum_{k=1}^2 (T_{ikg}^L / Q_{ig}) \times x_{iktg}^L \leq 1 \quad \forall i, \forall t \end{aligned} \quad (4.8)$$

Conservation de flot

L'équation (4.9) est une contrainte de conservation de flot pour la quantité de stérile produite et utilisée. Pour respecter cette contrainte, il faut que la quantité de stérile produite plus la quantité descendue de la surface soit égale à la quantité utilisée comme remblai plus la quantité montée à la surface. Étant donné que les quantités supplémentaires de stérile descendue ou montée engendrent un coût, il est impossible d'obtenir une valeur positive pour ces deux quantités dans la même année.

$$\begin{aligned}
 F \times \left\{ \sum_{\forall j \in \Pi_m} V_j^R \times x_{jt}^R + \sum_{\forall i \in \Pi_m} \sum_{\forall g} \sum_{k=1}^2 V_{ikg}^O \times x_{iktg}^O \right\} + DS_{mt} \\
 - R \times \left\{ \sum_{\forall i \in \Pi_m} \sum_{\forall g} \sum_{k=1}^2 (V_{ikg}^C \times x_{iktg}^C + V_{ikg}^L \times x_{iktg}^L) \right\} - MS_{mt} = 0 \quad \forall m, \forall t \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Départ des tâches

Les équations (4.10) à (4.12) limitent les tâches à débiter au plus une seule fois. Si une lentille n'est pas économiquement exploitable, celle-ci sera laissée sur place. Cependant, cette liberté supplémentaire augmente la difficulté du problème. En effet, le nombre de combinaisons est plus grand lorsque les tâches ont la possibilité d'être effectuées ou non.

$$\sum_{\forall t} y_{it}^O \leq 1 \quad \forall i \quad (4.10)$$

$$\sum_{\forall t} y_{it}^C \leq 1 \quad \forall i \quad (4.11)$$

$$\sum_{\forall t} y_{ikt}^L \leq 1 \quad \forall i, k = 1, 2 \quad (4.12)$$

Fermeture de mine

L'équation (4.13) limite une seule fin par mine. Si cette contrainte n'était pas présente, le modèle pourrait cesser temporairement les activités dans une mine pour y retourner plus tard. Cette option est possible mais ne fait pas partie du mandat. Dans cette situation, d'autres coûts seraient nécessaires. En effet, fermer une mine temporairement n'élimine pas tous les coûts fixes. Un coût de réouverture devrait aussi être ajouté. Dans ce mémoire, si la décision de fermer la mine est prise, il devient impossible d'y retourner.

$$\sum_{\forall t} FM_{mt} \leq 1 \quad \forall m \quad (4.13)$$

Teneur de coupure

Comme mentionné lors de la présentation de la variable, une seule teneur de coupure peut être sélectionnée par lentille. Cette condition est respectée par la contrainte (4.14). Contrairement aux contraintes de départ d'activités, celle-ci est une égalité et oblige chaque lentille à avoir une seule teneur de coupure. Cette restriction ne modifie pas la solution puisqu'une lentille peut avoir une teneur de coupure sans toutefois être exploitée. Elle resserre cependant le modèle et facilite légèrement la résolution.

$$\sum_{\forall g} COG_{ig} = 1 \quad \forall i \quad (4.14)$$

Liens entre les variables de production et la teneur de coupure

Les contraintes (4.15) à (4.17) lient les variables de production avec la teneur de coupure. L'ajout de ces contraintes et des variables COG_{ig} a permis de réduire le nombre de variables binaires. Le premier modèle développé utilisait des variables binaires qui choisissaient quand débiter l'activité et avec quelle teneur de coupure. En utilisant des contraintes liantes, le nombre de variables binaires est réduit de l'ordre de 30% pour une instance de 20 lentilles et 7 teneurs de coupure et d'une durée de 15 ans. Cette proportion croît avec l'augmentation du nombre de lentilles et d'années. Par contre, le nombre de contraintes augmente de l'ordre de 10% avec l'ajout des contraintes liantes.

$$\sum_{\forall t} x_{iktg}^O \leq COG_{ig} \quad \forall i, \forall g, k = 1, 2 \quad (4.15)$$

$$\sum_{\forall t} x_{iktg}^C \leq COG_{ig} \quad \forall i, \forall g, k = 1, 2 \quad (4.16)$$

$$\sum_{\forall t} x_{iktg}^L \leq COG_{ig} \quad \forall i, \forall g, k = 1, 2 \quad (4.17)$$

Liens entre les variables de production et les variables binaires

Les contraintes (4.18) à (4.24) lient les variables de production aux variables binaires. Si la décision de débiter une tâche est prise, la variable binaire associée à cette tâche aura une valeur de 1 au temps t . Une des variables continues de production associée à cette tâche pourra donc être supérieure à 0 durant les périodes de t à T . Autrement dit, si la décision de débiter une tâche est prise, cette tâche peut être effectuée l'année de la décision et pendant les années suivantes. À noter que la sommation du temps pour les variables continues pourrait être enlevée sans changer les contraintes. Cependant, comme le mentionne Epstein et al (2012),

la sommation de ces variables améliore la relaxation linéaire du problème.

$$\sum_{u=1}^t FM_{mu} \leq \sum_{u=1}^t \sum_{j \in \Psi_m} y_{ju}^R \quad \forall m, \forall t \quad (4.18)$$

$$\sum_{u=1}^t x_{ju}^R \leq \sum_{u=1}^t y_{ju}^R \quad \forall j, \forall t \quad (4.19)$$

$$\sum_{\forall g} \sum_{u=1}^t x_{i1ug}^O \leq \sum_{u=1}^t y_{iu}^O \quad \forall i, \forall t \quad (4.20)$$

$$\sum_{\forall g} \sum_{u=1}^t x_{i2ug}^O \leq \sum_{u=1}^t y_{iu}^C \quad \forall i, \forall t \quad (4.21)$$

$$\sum_{\forall g} \sum_{u=1}^t x_{i1ug}^C \leq \sum_{u=1}^t y_{iu}^C \quad \forall i, \forall t \quad (4.22)$$

$$\sum_{\forall g} \sum_{u=1}^t x_{i2ug}^C \leq \sum_{u=1}^t y_{i1u}^L \quad \forall i, \forall t \quad (4.23)$$

$$\sum_{\forall g} \sum_{u=1}^t x_{ikug}^L \leq \sum_{u=1}^t y_{iku}^L \quad \forall i, \forall t, k = 1, 2 \quad (4.24)$$

Liens entre les variables de production et la fermeture de la mine

Les contraintes (4.25) à (4.28) permettent aux activités d'être effectuées seulement si la mine n'est pas fermée.

$$x_{jt}^R \leq 1 - \sum_{u=1}^t FM_{mu} \quad \forall m, \forall j \in \Pi_m, \forall t \quad (4.25)$$

$$\sum_{\forall g} x_{iktg}^O \leq 1 - \sum_{u=1}^t FM_{mu} \quad \forall m, \forall i \in \Pi_m, \forall t, k = 1, 2 \quad (4.26)$$

$$\sum_{\forall g} x_{iktg}^C \leq 1 - \sum_{u=1}^t FM_{mu} \quad \forall m, \forall i \in \Pi_m, \forall t, k = 1, 2 \quad (4.27)$$

$$\sum_{\forall g} x_{iktg}^L \leq 1 - \sum_{u=1}^t FM_{mu} \quad \forall m, \forall i \in \Pi_m, \forall t, k = 1, 2 \quad (4.28)$$

Préséances

Les contraintes (4.29) à (4.34) représentent les préséances entre les différentes activités. Par exemple, un segment de rampe doit être effectué avant d'effectuer celui qui suit. Comme pour les liens entre les variables binaires et continues, la sommation des variables binaires

n'est pas nécessaire.

$$\sum_{u=1}^t y_{su}^R \leq \sum_{u=1}^t x_{ju}^R \quad \forall j, \forall t, \forall s \in \Omega_j \quad (4.29)$$

$$\sum_{u=1}^t y_{su}^O \leq \sum_{u=1}^t x_{ju}^R \quad \forall j, \forall t, \forall s \in \Gamma_i \quad (4.30)$$

$$\sum_{u=1}^t y_{iu}^C \leq \sum_{\forall g} \sum_{u=1}^t x_{i1ug}^O \quad \forall i, \forall t \quad (4.31)$$

$$\sum_{u=1}^t y_{i1u}^L \leq \sum_{\forall g} \sum_{u=1}^t x_{i1ug}^C \quad \forall i, \forall t \quad (4.32)$$

$$\sum_{u=1}^t y_{i1u}^L \leq \sum_{\forall g} \sum_{u=1}^t x_{i2ug}^O \quad \forall i, \forall t \quad (4.33)$$

$$\sum_{u=1}^t y_{i2u}^L \leq \sum_{\forall g} \sum_{u=1}^t x_{i2ug}^C \quad \forall i, \forall t \quad (4.34)$$

4.2 Modèle de base compact

Cette section comprend une écriture plus compacte du problème. En effet, toutes les activités peuvent être combinées dans un même ensemble nommé A . L'ensemble B contient toutes les activités reliées à une même lentille. Les teneurs de coupure nommées g sont incluses dans l'ensemble G . Toutes les ressources telles le minerai, le concentré, le développement et le temps peuvent être combinées dans l'ensemble R . La limite pour chacune des ressources r est notée Q_r^t . Le paramètre associé à la quantité de ressources consommée par activité est nommée q_{mr}^a . Les deux derniers paramètres, p_{mt}^a et k_t^a , sont présents dans la fonction objectif et déterminent le profit de chacune des activités. À noter que le paramètre p_{mt}^a peut être positif ou négatif alors que le paramètre k_t^a peut être nul ou négatif.

La première variable à être introduite est la variable binaire y_t^a qui vaut 1 si l'activité a débute au temps t . La variable x_{gt}^a représente le pourcentage de l'activité a effectué durant le temps t avec la teneur de coupure g . La dernière variable, COG_g^b , vaut 1 si la teneur de coupure g est sélectionnée pour la lentille b . Le modèle compact peut donc s'écrire comme suit :

$$\max \sum_{t \in T} \sum_{a \in A} \sum_{m \in M} p_{mt}^a x_{mt}^a + k_t^a y_t^a \quad (4.35)$$

sous les contraintes :

$$x_{gt}^a \leq \sum_{u \leq t} y_u^a \quad \forall a \in A, \forall g \in G, \forall t \in T \quad (4.36)$$

$$y_t^a \leq \sum_{u \leq t} x_{gu}^{a'} \quad \forall a \in A, a' \in \alpha(a), \forall g \in G, \forall t \in T \quad (4.37)$$

$$\sum_{t \in T} y_t^a \leq 1 \quad \forall a \in A \quad (4.38)$$

$$\sum_{t \in T} x_{gt}^a \leq COG_g^b \quad \forall a \in B, \forall g \in G \quad (4.39)$$

$$\sum_{g \in G} COG_g^b = 1 \quad \forall b \in B \quad (4.40)$$

$$\sum_{a \in A} \sum_{m \in M} q_{mr}^a x_{mt}^a \leq Q_t^r \quad \forall r \in R, \forall t \in T \quad (4.41)$$

La fonction objectif (4.35) maximise le profit p_{mt}^a de chaque activité. Les équations (4.36) permettent la production de l'activité a seulement si elles ont débuté. L'équation (4.37) représente les contraintes de préséance entre les activités où $\alpha(a)$ est un ensemble d'activité qui précèdent l'activité a . L'équation (4.38) permet à chaque activité de débiter qu'une seule fois. L'équation (4.39) lie les activités à la teneur de coupure. L'équation (4.40) contraint chaque lentille à avoir une teneur de coupure. Enfin, l'équation (4.41) limite la quantité de chacune des ressources.

CHAPITRE 5

RÉSULTATS ET STRATÉGIES D'ACCÉLÉRATION

Ce chapitre présente les résultats obtenus par le modèle. Des stratégies d'accélération sont aussi décrites. Certaines stratégies ne garantissent pas l'optimalité mais permettent d'obtenir rapidement de bonnes solutions. Deux instances sont testées pour valider les stratégies. La première instance contient trois mines alors que la deuxième en contient cinq. L'ordinateur utilisé pour effectuer les tests est un *Intel Core i7 2.8 GHz quad-core avec 4GB de RAM*. Le solveur utilisé est la version 12.5 de CPLEX.

5.1 Stratégies d'accélération

Le modèle décrit dans le chapitre précédent peut être directement résolu par un solveur. Par contre, le temps de résolution augmente rapidement avec l'ajout de contraintes et de variables. Des stratégies doivent donc être utilisées pour résoudre les instances de plus grande taille. Cette section est divisée en plusieurs parties. Dans la première partie, les méthodes de pré-traitement sont expliquées. Ensuite, les stratégies d'accélération sont présentées dans les sous-sections suivantes.

5.1.1 Pré-traitement

La première stratégie, notée S1, utilise deux algorithmes pour fixer la valeur de certaines variables en calculant le moment au plus tôt et au plus tard où les tâches peuvent débuter. Topal (2008) propose une méthode similaire afin d'éliminer les variables inutiles dans un programme linéaire de très grande taille. En effet, l'auteur a développé deux algorithmes qui tirent avantage de la structure du problème. Le premier algorithme définit le départ au plus tôt alors que le second algorithme définit le départ au plus tard. Toutes les variables dont l'indice « t » ne se retrouve pas entre ces valeurs sont exclues. Les deux mêmes algorithmes ont été utilisés avec quelques différences.

Plus spécifiquement, l'algorithme de départ au plus tôt calcule le moment au plus tôt où les tâches peuvent débuter. Les contraintes utilisées pour effectuer ce calcul sont celles des tâches successives qui peuvent aussi être appelées contraintes de chemins (voir contraintes 4.6 à 4.8 dans le chapitre précédent). En effet, il est impossible de dire quelle lentille sera exploitée en premier puisqu'il n'existe pas de liens directs entre les lentilles. Les contraintes globales ne sont donc pas utilisées dans le calcul. L'algorithme considère chaque lentille comme unique

et détermine quand elle peut débuter.

L'algorithme de départ au plus tard est différent de l'algorithme de départ au plus tôt. En effet, il est impossible de calculer, a priori, la fin d'une mine puisque le début de celle-ci fait partie des variables de décision. Par contre, le temps minimal pour qu'une mine soit rentable (« payback period ») peut être calculé. Le temps optimal est connu lorsqu'une seule mine est exploitée. Il faut donc résoudre le problème associé à chaque mine de façon indépendante. Le temps pour devenir rentable est ensuite utilisé dans le problème complet. Par exemple, si une mine devient rentable après 3 ans, la variable binaire associée au départ de cette mine peut être fixée à 0 du temps $T - 3$ à T , où T est le temps total de la simulation. Cette méthode est logique puisque l'ajout d'une nouvelle mine doit apporter un profit au problème global dans le temps de la simulation. De plus, en évaluant chaque mine, une à une, il est possible de dire si elle sera ouverte ou non. En effet, si une mine seule n'est pas rentable, elle peut être retirée entièrement du modèle global. La vitesse de résolution mine par mine est rapide puisqu'il existe généralement peu de combinaisons entre les lentilles d'une même mine. La même logique et le même algorithme peuvent être appliqués par lentille. Ainsi, certaines variables de départ des lentilles peuvent être fixées. À noter que cette méthode s'applique aux lentilles de grande dimension qui nécessitent plusieurs années d'exploitation.

La seconde stratégie, notée S2, s'applique sur le départ des mines. En effet, si la production de nickel diminue, il est certain qu'une nouvelle mine sera ouverte afin de maintenir le plus haut niveau de production possible. Laisser l'usine de traitement sous sa production maximale élimine un profit considérable. Ainsi, forcer la mise en opération d'une mine dans les premières années de la simulation permet de diminuer l'écart entre la solution relaxée et la solution entière.

La troisième stratégie, notée S3, fait intervenir de nouvelles contraintes dans le programme linéaire. Ces nouvelles contraintes créent des liens directs entre les variables d'une même lentille. Normalement, les tâches ont avantage à être effectuées le plus près possible les unes des autres. Ces contraintes forcent l'exécution successive des tâches associées à une même lentille. Cela permet de réduire l'arbre de branchement et d'accélérer la résolution du problème. Cependant, certaines solutions peuvent être éliminées lors de l'ajout de ces contraintes. Ces solutions éliminées sont réalisables en théorie, mais moins intéressantes en pratique. En effet, il est avantageux de terminer l'exploitation d'une lentille avant de débuter l'exploitation d'une nouvelle. De plus, la solution optimale pourrait contenir plusieurs années d'inactivité dans une lentille. Ces arrêts peuvent affecter la sécurité des employés puisqu'une lentille ouverte

diminue la résistance du massif rocheux.

5.1.2 Recherche dans un voisinage

Cette méthode consiste à éliminer du modèle de base certaines variables binaires. Cette stratégie diminue le domaine des solutions admissibles et accélère la résolution du problème. En partant d'une solution courante admissible, la stratégie consiste à explorer le voisinage de cette solution. Par exemple, dans la solution courante, si une activité débute au temps α alors un nouveau programme linéaire en nombres entiers est construit. Dans ce programme, uniquement les variables associées à cette activité sont conservées telles que $t \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$. Dans cet intervalle, δ est un paramètre qui permet de dimensionner la fenêtre de temps. La grandeur de la fenêtre influence la qualité de la solution, mais aussi le temps de résolution. Cette méthode est utilisée conjointement avec des méthodes heuristiques pour améliorer la solution.

5.1.3 Horizon fuyant (« sliding window »)

Cette stratégie permet de limiter le nombre de variables binaires lors de la résolution. Seulement les variables binaires associées à une fenêtre de temps donnée sont gardées dans le modèle et les autres sont soit relaxées, soit retirées. Une fois le problème avec cette fenêtre résolu, certaines variables binaires sont fixées et la fenêtre de temps est déplacée vers le futur. Habituellement, la nouvelle fenêtre de temps chevauche en partie l'ancienne. Ce processus est répété jusqu'à ce que toutes les variables binaires soient fixées. La largeur de la fenêtre à chaque itération dépend du temps de résolution du problème et nécessite un ajustement. Cette stratégie n'est pas nouvelle et a été utilisée à plusieurs reprises dans divers contextes. Toutefois, cette méthode n'est pas adaptée au type de problème étudié dans ce mémoire. Tout d'abord, l'algorithme de fenêtre changeante a été développé pour les problèmes ne contenant que des variables binaires. De plus, dans ce problème, les variables associées aux tâches coûteuses (CAPEX) ont tendances à être repoussées dans le futur alors que les variables associées aux tâches profitables (long trou) cherchent à être devancées. La relaxation linéaire des variables hors de la fenêtre est relativement mauvaise. En effet, des tests ont été effectués avec cette stratégie et ont démontré l'inefficacité de celle-ci. Afin de simplifier la présentation des résultats, les solutions et temps de résolution associés à cette stratégie ne sont pas inclus dans les tableaux présentés à la section suivante.

5.1.4 Profit marginal par lentille

Comme les lentilles possèdent leurs propres teneurs de coupure, il est possible de calculer le profit obtenu dans des situations parfaites. Une situation parfaite se présente lorsqu'une lentille est exploitée le plus rapidement possible. En effet, les premières tâches à être effectuées dans les lentilles sont le développement OPEX. Ces tâches qui occasionnent des coûts sont nécessaires pour accéder au minerai. Ensuite, les coupes sont effectuées. Ces activités rapportent un profit relativement faible. Enfin, les chantiers longs trous sont exploités. Ces tonnes de minerai sont les plus profitables puisque leur coût d'exploitation est le plus faible. La vitesse d'exploitation est aussi beaucoup plus grande. Puisque l'actualisation fait diminuer les profits obtenus, il est logique d'effectuer les tâches rapidement pour augmenter les profits. Une fois ces profits connus, ceux-ci peuvent être utilisés dans le branchement ou en fixant la teneur de coupure au meilleur profit obtenu. La première méthode permet de contrôler le branchement et ne modifie pas la solution. Par contre, la deuxième méthode est une heuristique qui ne garantit pas l'optimalité. À noter que le calcul du profit obtenu par lentille n'inclut pas le développement CAPEX préalable à l'exploitation. Les seules contraintes considérées dans ce calcul sont les contraintes de tâches successives. La quatrième stratégie, notée S4, est donc liée à ce calcul et permet de diminuer le nombre de combinaisons lors de la résolution du programme. La stratégie consiste à fixer la teneur de coupure selon la teneur de coupure offrant la meilleure valeur actuelle nette calculée précédemment.

5.1.5 Séquence d'ouverture des mines pré-établie

Cette méthode de résolution est relativement simple et intuitive. En effet, elle consiste à ajouter les mines de façon séquentielle au modèle global. Le modèle débute avec une seule mine. Dans cette situation, le solveur trouve la meilleure séquence rapidement puisqu'il existe peu de combinaisons entre les lentilles d'une même mine. Lorsque la séquence optimale est définie, les variables binaires sont fixées à leur valeur de la solution courante. Les variables d'une nouvelle mine sont ensuite ajoutées au modèle. Le programme est une fois de plus résolu. Ces étapes sont répétées jusqu'à ce qu'il ne reste plus de mine. Le choix de l'ordre d'ajout des mines au problème peut se faire de différentes façons. En effet, le choix pourrait être arbitraire. Cependant, la valeur actuelle nette maximale par mine peut être facilement calculée. L'ordre d'ajout des mines dans le modèle est donc fait par valeur actuelle nette. Lorsque toutes les variables sont fixées, une recherche dans un voisinage est effectuée afin d'améliorer la solution. Cette stratégie est notée S5.

5.1.6 Autres stratégies

Plusieurs stratégies ont été testées sans toutefois être retenues. En effet, puisque le type de problème étudié dans ce mémoire est différent des problèmes de la littérature, les stratégies développées par d'autres auteurs étaient souvent inefficaces. L'ajout de coûts supplémentaires sur les développements en profondeur a été testé. Cet ajout avait pour but de briser la symétrie entre les différents segments de développement. Cependant, cette méthode s'est avéré peu efficace. Une autre stratégie non retenue est la relaxation des variables associées au développement stérile (CAPEX et OPEX). Le problème a aussi été modélisé de plusieurs façons. Il semble toutefois que le modèle plus facile à résoudre soit celui présenté dans ce mémoire.

5.2 Résultats

Les tests sont effectués sur des instances de trois et cinq mines. L'horizon de planification des deux instances est de quinze ans. Le problème de trois mines contient 20 lentilles alors que celle de 5 mines en contient 47. Une limite de temps de résolution de 7200 secondes a été ajoutée. Les résultats obtenus par le modèle de base et par les stratégies de *S1* à *S5* pour 3 et 5 mines avec un horizon de 15 ans sont affichés dans le tableau 5.1. Les résultats pour les mêmes stratégies avec un horizon de 20 ans sont affichés dans le tableau 5.2. Pour des raisons de confidentialité sur les revenus de l'entreprise, la valeur de la solution de la méthode de base pour trois mines sert de jalon. La valeur présente nette pour ce problème a été ramenée à une valeur 1000. Les autres résultats ont aussi été convertis sur cette échelle. Les écarts indiqués représentent la différence entre la meilleure solution en nombres entiers et le nœud ayant la plus grande valeur présente nette dans l'arbre de branchement. À noter aussi que les solutions présentées dans les tableaux sont des solutions entières.

Tableau 5.1 Résultats pour 3 et 5 mines avec horizon de 15 ans

Modèle	3 mines			5 mines		
	Solution	Écart (%)	Temps (s)	Solution	Écart (%)	Temps (s)
Base	1000.0	0.0	5863.6	1795.9	15.5	7200.0
S1	1000.0	0.0	3980.3	1751.7	13.6	7200.0
S2	1000.0	0.0	1816.9	1787.6	10.2	7200.0
S3	996.1	0.0	375.0	1609.7	7.3	7200.0
S4	961.7	0.0	780.4	1769.0	9.7	7200.0
S5	956.4	-	513.0	1867.7	-	2133.0
Teneur fixe	960.7	0.0	199.3	1793.5	9.9	7200.0

Tableau 5.2 Résultats pour 5 mines avec un horizon de 20 ans

Modèle	5 mines		
	Solution	Écart (%)	Temps (s)
Base	1917.8	29.5	7200.0
S1	1932.0	29.5	7200.0
S2	1975.5	17.0	7200.0
S3	1940.0	22.4	7200.0
S4	2011.2	8.9	7200.0
S5	2042.0	-	7200.0
Teneur fixe	1972.9	10.22	7200

Les résultats pour l'instance avec trois mines montrent que le temps de résolution est grandement diminué par l'ajout des stratégies *S1* et *S2*. À noter que la stratégie *S2* comprend aussi la stratégie *S1*. Cela veut donc dire que les algorithmes de départ au plus tôt et au plus tard sont inclus dans la stratégie *S2*. La stratégie *S3* permet de réduire le temps de résolution par un facteur d'environ 5 par rapport à la stratégie *S2*. Toutefois la VAN diminue d'environ 0,4%. Cette diminution est tout de même négligeable étant donnée la marge d'erreur dans l'estimation des paramètres. La stratégie *S4* est celle qui fixe la teneur de coupure à celle offrant la meilleure VAN par lentille. Les résultats sont inférieurs pour l'instance de trois mines mais la vitesse de résolution est augmentée. L'application de la stratégie *S5* diminue la valeur présente nette de 4%. Cette stratégie n'est pas intéressante comparativement à la stratégie *S3* pour l'instance de 3 mines. À noter que dans cette instance, une des mines n'est pas profitable. Elle est donc rejetée par toutes les stratégies. Cette situation diminue grandement la complexité du problème.

Dans le cas de cinq mines pour une période de 15 ou 20 ans, le modèle de base ainsi que les quatre premières stratégies ne permettent pas de trouver une meilleure solution que celle trouvée par la stratégie *S5*. De plus, la stratégie *S5* trouve la solution en moins de 2 heures pour l'instance de 15 ans. La stratégie *S5* est donc elle qui obtient le meilleur résultat lorsque la complexité du problème augmente. Il est certain que résoudre cinq petits problèmes de suite est plus simple qu'un seul gros problème.

La solution pour trois mines avec la teneur de coupure fixée (noté Teneur de coupure fixe dans les tableaux 5.1 et 5.2) montre qu'une teneur de coupure variable permet un gain maximal d'environ 4% sur la solution optimale. Cette proportion est du même ordre de grandeur pour l'instance avec 5 mines. Une variation de la teneur de coupure est donc une approche intéressante pour augmenter la valeur actuelle nette d'une ou plusieurs mines. Un gain de 4% peut paraître faible, par contre, lorsque les flux monétaires sont de plusieurs

centaines de millions de dollars, la plus petite des augmentations est à considérer.

Dans un autre test, le modèle de base avec 5 mines et un horizon de 20 ans a été soumis à un ordinateur plus puissant (*Intel(R) Core(TM) i7-3960X CPU @ 3.30GHz avec 12 cores et 64GB de RAM*). Le temps de résolution, calculé en temps de processeurs, dépasse les 7 jours. La meilleure borne obtenue est de 2095.3. Avec le niveau d'incertitude que les paramètres du modèle contiennent, obtenir une solution avec un écart de 2.5% en deux heures est acceptable.

Puisqu'il est impossible de comparer les solutions obtenues avec la méthode manuelle, le gain réel de la nouvelle méthode est difficile à évaluer. Par contre, comme le mentionne Horsley (2005), l'augmentation de la valeur actuelle nette est plus importante lors de l'ordonancement des activités que lors de la sélection de la teneur de coupure.

Une teneur de coupure fixe est une approche logique de la part de Mine Raglan. Puisque le territoire est trop grand pour être complètement exploré, la valeur actuelle nette réelle du site est inconnu. De nouvelles découvertes sont fréquemment ajoutées aux ressources géologiques de Mine Raglan. Ces ajouts font en sorte que la quantité de ressources géologiques et de réserves minières ne diminue pas. Si la méthode de Lane (1988) est appliquée, la valeur actuelle nette du gisement (les lentilles dans le cas de Mine Raglan) doit être utilisée. Or, si la quantité de minerai ne diminue pas, la teneur de coupure demeure constante. C'est pourquoi, une teneur de coupure fixe est un bon compromis pour diminuer la complexité du problème tout en ayant une bonne valeur actuelle nette. Cependant, cette méthode est applicable seulement si les nouvelles lentilles sont découvertes dans les mines déjà existantes. La plupart des nouvelles lentilles sont situées dans des zones inexploitées. Comme l'exploitation de ces lentilles nécessite des investissements importants, la teneur de coupure devrait varier afin de rentabiliser l'exploitation de ces nouvelles lentilles.

CHAPITRE 6

CONCLUSION

Dans ce projet de maîtrise, un programme linéaire en nombres entiers a été présenté. Celui-ci permet d'optimiser la valeur actuelle nette de Mine Raglan. Des courbes statistiques ont aussi été développées pour estimer les méthodes d'exploitations à utiliser ainsi que la quantité de développement. Les résultats expérimentaux n'ont pas pu être validés avec des données réelles puisque les mines étudiées ne sont pas encore planifiées. Afin d'augmenter la vitesse de résolution, des stratégies d'accélération ont été développées. Le modèle et les courbes statistiques permettront aux ingénieurs en planification stratégique d'évaluer rapidement la VAN d'une mine sans avoir à faire la conception. De plus, il sera facile d'ajouter de nouvelles découvertes aux mines et de les ré-évaluer.

Comme mentionné dans le chapitre précédemment, le modèle comporte des limites en ce qui concerne la vitesse de résolution. De plus, pour des problèmes de plus grande taille, il est impossible d'obtenir une solution optimale dans un temps raisonnable. Pour palier ce problème, diverses méthodes ont été proposées. Aussi, le modèle n'est pas conçu pour la planification à court ou moyen terme car le niveau de détail n'est pas suffisant. Il faut donc rester vigilant dans l'utilisation du modèle. Celui-ci devrait être utilisé davantage comme un outil permettant aux ingénieurs de débiter une étude de pré-faisabilité.

Plusieurs améliorations peuvent être apportées au modèle décrit dans ce mémoire. Le développement d'une heuristique permettrait d'obtenir de bonnes réponses plus rapidement. Aussi, une amélioration du modèle serait de permettre l'entreposage (« stockpile ») de minerai moins riche dans le but de le traiter plus tard. Cet entreposage permettrait d'augmenter le profit et la durée de vie de la mine. L'estimation des ressources et des réserves est aussi un aspect qui pose problème. Il serait intéressant de développer une approche qui augmente le niveau de confiance dans l'évaluation des réserves. Enfin, une mise à jour des courbes statistiques permettrait d'augmenter la précision de l'estimation et par le fait même, les profits.

RÉFÉRENCES

- ALFORD, C., BRAZIL, M. et LEE, D. (2007). Optimisation in underground mining. A. Weintraub, C. Romero, T. Bjorndal, R. Epstein, J. Miranda, F. S. Hillier et C. C. Price, éditeurs, *Handbook Of Operations Research In Natural Resources*, Springer US, vol. 99 de *International Series in Operations Research and Management Science*. 561–577.
- ATAEI, M. et OSANLOO, M. (2003). Determination of optimum cutoff grades of multiple metal deposits by using the golden section search method. *Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy*, 103, 493 – 499.
- BAI, X., MARCOTTE, D. et SIMON, R. (2013). Underground stope optimization with network flow method. *Computers & Geosciences*, 52, 361 – 371.
- BARBARO, R. W. et RAMANI, R. V. (1986). Generalized multiperiod mip model for production scheduling and processing facilities selection and location. *Society for Mining, Metallurgy, and Exploration*, 38, 107–114.
- BJØRNDAL, T., HERRERO, I., NEWMAN, A., ROMERO, C. et WEINTRAUB, A. (2012). Operations research in the natural resource industry. *Int. Trans. Oper. Res.*, 19, 39–62.
- BLEY, A. et TERBLANCHE, S. (2011). An improved formulation of the underground mine scheduling optimization problem when considering selective mining.
- BRAZIL, M. et THOMAS, D. (2007). Network optimization for the design of underground mines. *Networks*, 49, 40–50.
- CARLYLE, W. M. et EAVES, B. C. (2001). Underground planning at stillwater mining company. *Interfaces*, 31, 50–60.
- DAGDELEN, K., KUCHTA, M. et TOPAL, E. (2002). Linear integer programming model applied to scheduling of iron ore production at the kiruna mine, kiruna, sweden. *Transactions of Society for Mining, Metallurgy, and Exploration*, 312, 194 – 198.
- ELKINGTON, T., DURHAM, R. et MYERS, P. (2009). Optimising value for an underground project configuration. *Publication Series - Australasian Institute of Mining and Metallurgy*, 2/2009, 249 – 256.
- EPSTEIN, R., GOIC, M., WEINTRAUB, A., CATALAN, J., SANTIBANEZ, P., URRUTIA, R., CANCINO, R., GAETE, S., AGUAYO, A. et CARO, F. (2012). Optimizing long-term production plans in underground and open-pit copper mines. *Operations Research*, 60, 4 – 17.

- HORSLEY, T. P. (2005). Differential cut-off grades. *9th AusIMM Underground Operators Conference 2005*. AUSTRALASIAN INST MINING & METALLURGY, CLUNIES ROSS HOUSE 191 ROYAL PARADE, PARKVILLE VICTORIA, 3052, AUSTRALIA, vol. 2005 de *AUSTRALASIAN INSTITUTE OF MINING AND METALLURGY PUBLICATION SERIES*, 103–109. 9th Australasian-Institute-of-Mining-and-Metallurgy Underground Operators Conference 2005, Perth, AUSTRALIA, MAR 07-09, 2005.
- LANE, K. (1964). Choosing optimum cut-off grade. *Colorado School of Mines – Quarterly*, 59, 811 – 829.
- LANE, K. F. (1988). *The economic definition of ore : cut-off grades in theory and practice*. Mining Journal Books.
- LEMELIN, B., ABDEL SABOUR, S. et POULIN, R. (2006). Valuing mine 2 at raglan using real options. *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, 20, 46 – 56.
- LERCHS, H. et GROSSMANN, I. (1965). Optimum design of open-pit mines. *Canadian Mining and Metallurgical Bulletin*, 58, 47 – 54.
- MARTINEZ, M. A. et NEWMAN, A. M. (2011). A solution approach for optimizing long- and short-term production scheduling at Icab’s kiruna mine. *European Journal of Operational Research*, 211, 184 – 197.
- MCISAAC, G. (2005). Long-term planning of an underground mine using mixed-integer linear programming. *CIM Bulletin*, 98, 89–89.
- MCISAAC, G. (2008). *Strategic Design of an Underground Mine under Conditions of Metal Price Uncertainty*. Canadian theses, Queen’s University.
- MENABDE, M., FROYLAND, G., STONE, P. et YEATES, G. (2004). Mining schedule optimisation for conditionally simulated orebodies. *Proceedings of the international symposium on orebody modelling and strategic mine planning : uncertainty and risk management*, 347–352.
- MINNITT, R. C. A. (2004). Cut-off grade determination for the maximum value of a small wits-type gold mining operation. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, 104, 277–283.
- NEHRING, M. et TOPAL, E. (2007). Production schedule optimisation in underground hard rock mining using mixed integer programming. *Australasian Institute of Mining and Metallurgy Publication Series*, 169 – 175.
- NEWMAN, A. M., RUBIO, E., CARO, R., WEINTRAUB, A. et EUREK, K. (2010). A review of operations research in mine planning. *Interfaces*, 40, 222–245.

- RAHAL, D. C., SMITH, M. L., VAN HOUT, G. et VAN JOHANNIDES, A. (2003). The use of mixed integer linear programming for long term scheduling in block caving mines.
- RIFF, M.-C., OTTO, E. et BONNAIRE, X. (2009). A new strategy based on grasp to solve a macro mine planning. J. Rauch, Z. Ras, P. Berka et T. Elomaa, éditeurs, *Foundations of Intelligent Systems*, Springer Berlin/Heidelberg, vol. 5722 de *Lecture Notes in Computer Science*. 483–492.
- SARIN, S. C. et WEST-HANSEN, J. (2005). The long-term mine production scheduling problem. *IIE Transactions*, 37, 109–121.
- SMITH, M. et O'ROURKE, A. (2005). The connection between production schedule and cut-off optimization in underground mines. *Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry - Proc. of the 32nd Int. Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, APCOM 2005*, 643 – 654.
- SMITH, M. L., SHEPPARD, I. et KARUNATILLAKE, G. (2008). Using mip for strategic life-of-mine planning of the lead/zinc stream at mount isa mines.
- TAYLOR, H. (1985). Cutoff grades - some further reflections. *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section A : Mining Technology*, 94, 204 – 216.
- TOPAL, E. B. (2008). Early start and late start algorithms to improve the solution time for long-term underground mine production scheduling. *Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy*, 108, 99–107. Cited By (since 1996) 9.
- WANG, Q., GU, X. et CHU, D. (2008). A dynamic optimization method for determining cutoff grades in underground mines. *GOSPODARKA SUROWCAMI MINERALNYMI-MINERAL RESOURCES MANAGEMENT*, 24, 133–142.

ANNEXE A

ANGLE DES LENTILLES

Le calcul du pendage des lentilles s'effectue à l'aide du modèle de blocs. Dans ce cas, l'objectif est de minimiser la distance des blocs à un plan. Une fois les coefficients du plan connus, il est facile de calculer le pendage. Comme dit précédemment, cette méthode offre l'avantage d'être objective. En effet, il est possible de mesurer manuellement le pendage d'une lentille à l'aide d'un logiciel approprié. Par contre, il est difficile de définir un pendage global lorsqu'une lentille est irrégulière. La technique décrite ci-dessous permet de calculer rapidement et efficacement le pendage et la direction d'une lentille. De plus, des poids peuvent être associés aux blocs. Les blocs les plus riches auront un plus grand impact dans le calcul. Dans le cas présent, le poids utilisé est le volume des blocs. L'écriture matricielle sera utilisée dans ce chapitre afin de diminuer l'espace.

<i>Définition</i>	
P	Matrice des pondérations (volume, tonnage, etc).
X	Matrice des valeurs explicatives (coordonnées Nord et Est).
Y	Matrice des valeurs expliquées (Élévation).
e	Vecteur des erreurs commises par la régression.
b	Coefficients calculés par la régression.
SCE	Somme des carrés des erreurs.

Tableau A.1 Matrices et vecteurs

Soit l'équation usuelle de régression linéaire suivante :

$$Y = Xb + e \tag{A.1}$$

La réécriture de l'équation précédente permet d'isoler l'erreur commise par la régression :

$$e = Y - Xb \quad (\text{A.2})$$

La somme des carrés des erreurs pondérées s'écrit :

$$SCE = e^T P e \quad (\text{A.3})$$

$$SCE = (Y - Xb)^T P (Y - Xb) \quad (\text{A.4})$$

Où P est une matrice diagonale de dimension $n \times n$ qui définit le poids de chaque bloc dans la régression.

En réorganisant ces valeurs, il est possible d'obtenir cette équation :

$$SCE = (Y^T P - b^T X^T P)(Y - Xb) \quad (\text{A.5})$$

$$SCE = Y^T P Y - Y^T P X b - b^T X^T P Y + b^T X^T P X b \quad (\text{A.6})$$

Comme le but de minimiser la somme des erreurs, il faut que les dérivées partielles s'annulent.

$$\frac{\delta SCE}{\delta b} = 0 = X^T P X b - X^T P Y \quad (\text{A.7})$$

Les paramètres du plan minimisant la distance pondérée entre les blocs et le plan s'obtient en isolant b .

$$b = (X^T P X)^{-1} X^T P Y \quad (\text{A.8})$$

Le vecteur b contient trois valeurs. La première valeur (b_1) correspond à l'ordonnée à l'origine. Les deux autres valeurs (b_2 et b_3) sont les paramètres du plan. Une fois ces paramètres connues, il est possible de calculer le pendage de ce plan à l'aide de la formule trigonométrique suivante :

$$\text{pendage} = \arctan \left(\sqrt{b_2^2 + b_3^2} \right) \quad (\text{A.9})$$