



**Titre:** Étude d'un nouveau manipulateur parallèle ayant une plateforme articulée et un engrenage planétaire  
**Title:** articulated and a planetary gear

**Auteur:** Yan Vermette  
**Author:**

**Date:** 2013

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Vermette, Y. (2013). Étude d'un nouveau manipulateur parallèle ayant une plateforme articulée et un engrenage planétaire [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/1107/>  
**Citation:**

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/1107/>  
**PolyPublie URL:**

**Directeurs de recherche:** Luc Baron  
**Advisors:**

**Programme:** Génie mécanique  
**Program:**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE D'UN NOUVEAU MANIPULATEUR PARALLÈLE AYANT UNE  
PLATEFORME ARTICULÉE ET UN ENGRENAGE PLANÉTAIRE

YAN VERMETTE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

AVRIL 2013

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ÉTUDE D'UN NOUVEAU MANIPULATEUR PARALLÈLE AYANT UNE PLATEFORME  
ARTICULÉE ET UN ENGRENAGE PLANÉTAIRE

présenté par : VERMETTE Yan

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. ACHICHE Sofiane, Ph.D., président

M. BARON Luc, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. RAISON Maxime, Ph.D., membre

## **REMERCIEMENTS**

Je remercie mon directeur de recherche M. Luc Baron qui m'a dirigé durant mon travail et mon collègue Hassan pour l'aide qu'il m'a apporté.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une première étude d'une nouvelle architecture de manipulateur parallèle. La particularité de ce manipulateur est l'utilisation d'une plateforme centrale articulée, permettant le positionnement et l'orientation de l'effecteur en utilisant seulement deux membrures, reliées à l'effecteur par un engrenage planétaire.

L'objectif principal de ce mémoire consiste donc à présenter cette architecture novatrice de manipulateur parallèle ainsi que de proposer une première analyse.

Afin d'atteindre cet objectif, une recherche a d'abord été effectuée afin de présenter un historique des travaux déjà effectués sur d'autres types de manipulateur parallèle. Cet historique permet ainsi une meilleure présentation du manipulateur étudié.

Une fois l'architecture du manipulateur présenté, l'implémentation du modèle géométrique direct sera détaillée afin de connaître la ou les poses possibles de l'effecteur pour une configuration désirée des actionneurs. Une seconde problématique, concernant le modèle géométrique inverse, sera résolue, permettant de définir la ou les position possibles des actionneurs pour une pose désirée de l'effecteur.

En utilisant les modèles géométrique direct et inverse, une analyse des espaces de travail maximal, dextre et à orientation constante sera fait. Cette analyse permettra d'avoir une idée quant aux possibilités sur la pose de ce type d'architecture de manipulateurs parallèles.

Afin d'obtenir une première analyse du manipulateur, il est nécessaire de résoudre le problème de cinématique, c'est-à-dire de connaître le mouvement qu'aura l'effecteur en fonction des changements de configurations des actionneurs. La solution à cette problématique sera résolue par la définition et le calcul des matrices Jacobiennes propre à cette architecture de manipulateur.

Finalement, l'utilisation des matrices Jacobiennes permettra de définir une méthodologie servant à la conception de configurations isotropes.

## ABSTRACT

This thesis presents a first analysis of a novel parallel manipulator architecture. The main particularity of this architecture is the use of an articulated platform, which is used for the positioning and the orientation of the end effector solely connected by two links through a planetary gearbox.

The main objective of this thesis is to present this novel parallel manipulator architecture and to propose a first analysis.

To achieve this objective, an initial research into past works on different parallel manipulator architectures has been done. This brief historical overview provides a better understanding of the this present work.

Once the manipulator architecture has been described, the study of the direct kinematics will be detailed. This determines the possible positions and orientations from a known actuators configuration. The inverse kinematics will then be solved in order to resolve the possible actuators configurations for a desired position and orientation of the end effector.

Using the direct and inverse kinematics, the different workspaces, such as the maximal, dextrous and constant orientation are observed. This analysis will give an idea of this parallel manipulator architecture positioning abilities.

An initial kinetic analysis of this manipulator is solved through Jacobian matrices. These matrices will define the end effector movement in relation with the actuators positions modification.

Finally, using the Jacobian matrices previously computed, a methodology will be defined in order to design isotropic configurations for this manipulator architecture.

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                      |      |
|------------------------------------------------------|------|
| REMERCIEMENTS .....                                  | III  |
| RÉSUMÉ.....                                          | IV   |
| ABSTRACT .....                                       | V    |
| TABLE DES MATIÈRES .....                             | VI   |
| LISTE DES TABLEAUX.....                              | VIII |
| LISTE DES FIGURES.....                               | IX   |
| LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....               | X    |
| LISTE DES ANNEXES .....                              | XI   |
| CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....                         | 1    |
| 1.1 Définitions .....                                | 4    |
| 1.2 Objectifs .....                                  | 6    |
| CHAPITRE 2 PRÉSENTATION DU MANIPULATEUR.....         | 7    |
| 2.1 Conception cinématique.....                      | 7    |
| 2.2 Modèle géométrique direct.....                   | 12   |
| 2.3 Vérification du modèle géométrique direct.....   | 16   |
| 2.4 Modèle géométrique inverse .....                 | 19   |
| 2.5 Vérification du modèle géométrique inverse ..... | 23   |
| Récapitulatif .....                                  | 27   |
| CHAPITRE 3 ESPACE DE TRAVAIL .....                   | 28   |
| 3.1 Espace de travail théorique .....                | 28   |
| 3.2 Espace de travail expérimental.....              | 31   |
| 3.3 Espace de travail dextre.....                    | 34   |
| 3.4 Récapitulatif .....                              | 35   |

|            |                                                    |    |
|------------|----------------------------------------------------|----|
| CHAPITRE 4 | CINÉMATIQUE DU MANIPULATEUR.....                   | 36 |
| 4.1        | Matrices Jacobiennes.....                          | 36 |
| 4.2        | Vérification des matrices Jacobiennes .....        | 40 |
| 4.3        | Récapitulatif .....                                | 44 |
| CHAPITRE 5 | ISOTROPIE .....                                    | 45 |
| 5.1        | Méthode d'obtention de matrices isotropes .....    | 45 |
| 5.2        | Isotropie de la matrice Jacobienne parallèle ..... | 46 |
| 5.3        | Isotropie de la matrice Jacobienne sérielle.....   | 52 |
| 5.4        | Configurations isotropes du manipulateur .....     | 54 |
| 5.5        | Récapitulatif .....                                | 55 |
| CONCLUSION | .....                                              | 56 |
| RÉFÉRENCES | .....                                              | 58 |
| ANNEXES    | .....                                              | 62 |



## LISTE DES TABLEAUX

|                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tableau 1-1 Différence entre les manipulateurs sériels et parallèles .....                            | 2  |
| Tableau 2-1 Comparaison des valeurs de l'algorithme MGD à celles d'un modèle CATIA.....               | 18 |
| Tableau 2-2 Solutions du modèle géométrique direct pour différentes configurations articulaires ..... | 24 |
| Tableau 2-3 Solutions du modèle géométrique inverse pour différentes poses du manipulateur ..         | 25 |

## LISTE DES FIGURES

|                                                                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 1-1 Exemple de manipulateur sériel : Robot IRB 2600 de ABB.....                                                                        | 1  |
| Figure 1-2 Exemple de manipulateur parallèle : Simulateur de vol de la compagnie CAE .....                                                    | 3  |
| Figure 2-1 Présentation du manipulateur. ....                                                                                                 | 7  |
| Figure 2-2 Chaîne cinématique du manipulateur .....                                                                                           | 8  |
| Figure 2-3 Exemple d'utilisation de l'engrenage planétaire .....                                                                              | 9  |
| Figure 2-4 Angles de contrôle ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) et de positionnement ( $\theta_{ee}$ ).....                                  | 10 |
| Figure 2-5 Diagramme vectoriel du manipulateur .....                                                                                          | 11 |
| Figure 2-6 Mode d'assemblage du manipulateur.....                                                                                             | 15 |
| Figure 2-7 Configurations du manipulateur pour une configuration articulaire donnée.....                                                      | 17 |
| Figure 2-8 Positionnement du manipulateur pour une configuration articulaire donnée.....                                                      | 17 |
| Figure 2-9 Exemple de solutions du modèle géométrique inverse .....                                                                           | 22 |
| Figure 3-1 Espace de travail théorique accessible .....                                                                                       | 30 |
| Figure 3-2 Espace de travail du joint $G_9$ .....                                                                                             | 31 |
| Figure 3-3 Espace de travail pour une orientation constante de l'effecteur de 0 à 1 degré .....                                               | 32 |
| Figure 3-4 Espace de travail pour une orientation constante de l'effecteur de 360 à 361 degrés ..                                             | 32 |
| Figure 3-5 Espace de travail pour une orientation constante de l'effecteur de 0 à 1 degré avec<br>orientation borné selon $[-\pi, \pi[$ ..... | 33 |
| Figure 3-6 Représentation de l'espace de travail dextre (bleu) à l'intérieur de l'espace de travail<br>maximal.....                           | 34 |
| Figure 4-1 Position de départ pour validation du calcul des matrices Jacobiennes .....                                                        | 41 |
| Figure 4-2 Position finale pour la validation du calcul des matrices Jacobiennes.....                                                         | 43 |
| Figure 5-1 Exemples de configurations isotropes du manipulateur.....                                                                          | 54 |

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

|                       |                                                                                          |
|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R_i$                 | Désigne un joint passif, $i = 4, 5, 6, 7, 8$                                             |
| $\underline{R}_i$     | Désigne un joint actif, $i = 1, 2, 3$                                                    |
| $\mathbf{p}$          | Désigne le vecteur position $[p_x, p_y]^t$ de l'effecteur                                |
| $p_x, p_y$            | Désigne les composante selon l'axe x et l'axe y du vecteur position de l'effecteur       |
| $\boldsymbol{\theta}$ | Désigne la configuration articulaire $[\theta_1, \theta_2, \theta_3]^t$ du manipulateur  |
| $\theta_i$            | Désigne l'angle de rotation du joint actif $i$ selon l'axe x, $i = 1, 2, 3$              |
| $\theta_{ee}$         | Désigne l'orientation de l'effecteur selon l'axe x                                       |
| $\mathbf{a}_i$        | Désigne le vecteur le long de la membrure $A_i$ associée, $i = 1, 2, 3$                  |
| $a_i$                 | Désigne la longueur de la membrure $A_i$ associée, $i = 1, 2, 3$                         |
| $\mathbf{b}_i$        | Désigne le vecteur le long de la membrure $B_i$ associée, $i = 2, 3$                     |
| $b_i$                 | Désigne la longueur de la membrure $B_i$ associée, $i = 2, 3$                            |
| $\mathbf{c}_i$        | Désigne le vecteur le long de la membrure $C_i$ associée, $i = 2, 3, 4, 5$               |
| $\alpha_i$            | Désigne l'orientation de la membrure $B_i$ associée, $i = 2, 3$                          |
| $\beta_i$             | Désigne l'orientation de la membrure $C_i$ associée, $i = 2, 3$                          |
| $\mathbf{k}$          | Désigne un vecteur unitaire selon l'axe z                                                |
| $\mathbf{u}_i$        | Désigne un vecteur positionnant l'intersection des membrures $A_i$ et $B_i$ , $i = 2, 3$ |
| $\mathbf{v}_i$        | Désigne un vecteur positionnant l'intersection des membrures $B_i$ et $C_i$ , $i = 2, 3$ |
| $t_i$                 | Désigne un vecteur entre deux cercle, centre à centre                                    |
| $\mathbf{J}_p$        | Désigne la matrice Jacobienne parallèle du manipulateur                                  |
| $\mathbf{J}_s$        | Désigne la matrice Jacobienne sérielle du manipulateur                                   |
| $\mathbf{E}$          | Désigne une matrice de rotation autour de l'axe z de $-\frac{\pi}{2}$                    |
| atan2                 | Fonction permettant de déterminer l'angle d'un vecteur selon ses deux coordonnées        |

## **LISTE DES ANNEXES**

Annexe 1 - « Robot manipulateur SCARA Toshiba »

Annexe 2 - « Planar 3 Degrees of freedom Parallel Manipulator with an articulated Platform  
Featuring a Planetary Gearbox »

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Depuis l'avènement de l'ère industrielle, les méthodes de fabrication et d'assemblage ont évolué à une vitesse fulgurante. L'arrivée des robots industriels a créé une véritable révolution. Ils ont su assister aux tâches difficiles et augmenter la productivité de façon significative. En industrie, trois types de manipulateurs sont utilisés : les manipulateurs sériels, parallèles et hybrides. Tout d'abord, les plus répandus sont sans aucun doute les manipulateurs sériels. Formé d'une chaîne cinématique ouverte où les actionneurs sont positionnés à un à la suite de l'autre (Figure 1-1). Une quantité phénoménale de travaux de recherche ont porté sur les robots sériels afin d'augmenter leurs précisions [1, 2], leurs espaces de travail [3, 4, 5], leurs vitesses et parcours [6, 7, 8], etc.



Figure 1-1 Exemple de manipulateur sériel : Robot IRB 2600 de ABB

Les manipulateurs parallèles, deuxième type de manipulateur, sont beaucoup moins utilisés en industrie. Étant formé de plusieurs chaînes cinématiques, reliant la base à l'effecteur où les actionneurs sont positionnés sur chacune des chaînes, sont de plus en plus utilisés en industrie pour leurs propriétés différentes de celle des manipulateurs sériels (Tableau 1-1).

Tableau 1-1 Différence entre les manipulateurs sériels et parallèles

| Caractéristique   | Manipulateur Sériel | Manipulateur Parallèle |
|-------------------|---------------------|------------------------|
| Espace de travail | Grande              | Limité                 |
| Charge éligible   | Faible              | Élevé                  |
| Rigidité          | Faible              | Élevé                  |
| Précision         | Faible              | Élevé                  |

En 1956-1957 parut l'un des premiers articles concernant un manipulateur parallèle [9], une plateforme, actionnée par 6 actionneurs prismatiques, ayant 6 degrés de liberté, utilisée pour tester les propriétés des pneus. Ce même manipulateur fut l'objet d'un deuxième article en 1962 [10]. Quelques années plus tard, une nouvelle application pour ce type de manipulateur a été proposée par Stewart [11]. La plateforme de Stewart, quelque peu différente de celle de Gough, est proposée pour la fabrication d'un simulateur de vol, permettant ainsi de recréer les conditions d'un vol (Figure 1-2). Cet article révolutionna le domaine de la robotique et depuis ce jour, le nombre de recherches portant sur ce type de manipulateur ne cesse d'augmenter. Que ce soit pour analyser l'espace de travail [12, 13, 14], analyser l'isotropie [15, 16] ou analyser les singularités [17, 18], plusieurs nouvelles architectures de manipulateur parallèle ont été introduites, telles que l'architecture Y-Star [19], le Delta [20], le Manta [21] ou le Kanuk [21].

Le troisième type de manipulateur, les manipulateurs hybrides, sont plutôt rare et combinent des segments parallèles et sériels.

Les manipulateurs sériels et parallèles peuvent évoluer dans l'espace selon six degrés de libertés, soit: positionnement selon l'axe x, positionnement selon l'axe y, positionnement selon l'axe z, orientation autour de l'axe x, orientation autour de l'axe y et orientation autour de l'axe z. Les robots manipulateurs peuvent posséder un, plusieurs ou tout ces degrés de libertés selon leurs conception. Les manipulateurs ayant seulement deux degrés de libertés en positions sont décrit comme étant des manipulateurs planaire. Ils peuvent cependant avoir un troisième degré de liberté selon l'orientation dans le plan. Les manipulateurs planaires industriels sont cependant

tous sériels et sont nommées manipulateurs SCARA [annexe 1]. Tel que démontré [22] ce type de manipulateur peut posséder un espace de travail dextre circulaire ou annulaire selon la configuration des différentes membrures, ce qui leur permet d'être intéressant pour des applications industrielles. Plusieurs recherches concernant des manipulateurs parallèles planaires ont été effectuées afin d'obtenir des manipulateurs ayant des meilleures propriétés notamment une meilleure dextérité [23], de meilleure précision [24] et de plus grandes vitesses [25]. Par contre, l'espace de travail de ces manipulateurs planaires est très limité en orientation, par exemple, le manipulateur présenté en [24] est borné en orientation entre  $-35$  et  $35$  degrés, donc il ne possède aucun espace de travail dextre. Il est donc intéressant de concevoir de nouvelles architectures de manipulateurs parallèles planaires pouvant atteindre un maximum d'orientation et ce pour un maximum de positions.



Figure 1-2 Exemple de manipulateur parallèle : Simulateur de vol de la compagnie CAE

Les manipulateurs Manta et Kanuk représentent une catégorie de manipulateur parallèle peu fréquente, c'est à dire des manipulateurs à plateforme articulée. La particularité de ces manipulateurs est d'avoir une plateforme intermédiaire entre les jambes et l'effecteur permettant le contrôle d'un ou plusieurs degrés de liberté [26, 27]. Plutôt que de contrôler directement l'effecteur, les jambes servent à contrôler une nacelle qui, à son tour, contrôle l'effecteur.

L'utilisation de ce type de manipulateur à notamment permis d'obtenir des manipulateurs ayant de très grandes vitesses de déplacement ainsi que des orientations possibles complètes [28].

## 1.1 Définitions

**Manipulateur sériel :** Manipulateur ayant une chaîne cinématique en boucle ouverte de la base jusqu'à l'effecteur où les actionneurs sont positionnés le long cette chaîne.

**Manipulateur parallèle :** Manipulateur ayant autant de chaîne cinématique de la base vers l'effecteur que de degrés de libertés, où les actionneurs sont fixés à la base selon chacune des chaînes cinématiques du manipulateur.

**Jambe :** La jambe d'un manipulateur est la chaîne cinématique reliant la base à l'effecteur. Dans le cas d'un manipulateur sériel, elle sera unique. Par contre, le manipulateur parallèle aura plusieurs jambes symétriques ou non.

**Joint actif :** Joint entre deux membrures du manipulateur étant contrôlé par un actionneur, pouvant être rotatif ou prismatique.

**Joint passif :** Joint entre deux membrures du manipulateur étant contrôlé que par la position des deux membrures.

**Pose :** La pose  $x = [p_x \quad p_y \quad \theta_{ee}]^T$  d'un manipulateur est décrit par l'ensemble des coordonnées généralisées permettant de positionner et orienter l'effecteur.

**Configuration articulaire :** La configuration articulaire  $\theta = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$  représente les valeurs angulaires des actionneurs. Une configuration articulaire ne permet pas de déterminer la pose du manipulateur s'il possède plusieurs solutions au modèle géométrique direct.



**Configuration du manipulateur :** La configuration du manipulateur représente la position et l'orientation de l'ensemble des membrures du manipulateur.

**Mode d'assemblage :** Le mode d'assemblage définit la position de l'effecteur pour une configuration articulaire donnée, c'est-à-dire que pour une même configuration articulaire, la position et l'orientation de l'effecteur peuvent différer selon le mode d'assemblage. Le manipulateur aura donc plusieurs solutions au modèle géométrique direct [29].

**Mode opératoire :** Le mode opératoire du manipulateur définit la configuration articulaire pour une position et orientation donnée, c'est-à-dire que pour une même position et orientation de l'effecteur, la configuration articulaire peut différer. Le manipulateur aura donc plusieurs solutions au modèle géométrique inverse [29].

## 1.2 Objectifs

L'objectif principal de ce mémoire est de vérifier si la nouvelle architecture de manipulateur planaire parallèle permet l'obtention d'un espace de travail maximal majoritairement dextre ainsi que d'offrir des outils pour optimiser cet espace de travail. Pour ce faire, les modèles géométrique direct et inverse seront développés afin de déterminer les espaces de travail. De plus, les matrices Jacobiennes seront calculées permettant de générer des configurations isotropiques du manipulateur étudié. Tout d'abord, il sera important de décrire de façon précise le fonctionnement de ce nouveau manipulateur, ses caractéristiques ainsi que les raisons de l'utilisation d'une plateforme articulée ainsi que d'un engrenage planétaire. Ensuite, il sera intéressant de se pencher sur le modèle géométrique direct et inverse afin de déterminer le positionnement de l'effecteur par rapport aux configurations articulaires. Ces deux modèles permettront de déterminer les espaces de travail maximal et dextre du manipulateur. Puisque les manipulateurs planaires parallèles ont des espaces de travail dextre limités, il sera intéressant de déterminer si le manipulateur étudié possède un espace de travail dextre intéressant, c'est-à-dire pour une majorité de position. Ces deux modèles générés, il sera intéressant de s'attaquer à la cinématique de ce manipulateur en déterminant l'équation cinématique. Déterminer cette équation permettra d'obtenir les matrices Jacobienne sérielle et parallèle. Ces deux matrices permettront finalement d'obtenir une méthodologie permettant la génération de configurations isotropes pour cette nouvelle architecture de manipulateur parallèle. Cette méthodologie permettra, lors de travaux futurs, à optimiser l'espace de travail de ce manipulateur.

## CHAPITRE 2 PRÉSENTATION DU MANIPULATEUR

Le manipulateur étudié dans ce mémoire est un manipulateur planaire à plateforme articulée possédant 3 degrés de liberté : positionnement en x, positionnement en y et orientation selon l'axe z. Ce manipulateur, présenté à la Figure 2-1, peut être décrit comme étant un mécanisme à dix membrures, où l'orientation de l'effecteur est contrôlée par un engrenage planétaire, relié aux deux dernières membrures passives. Ces deux dernières membrures appartiennent à la plateforme articulée, constituée de quatre membrures formant un parallélogramme. Cette plateforme articulée et l'engrenage planétaire sont utilisés afin d'améliorer l'espace de travail en orientation du manipulateur. La position et l'orientation de cette plateforme sont contrôlées par trois actionneurs rotatifs situés à l'extrémité des trois premières membrures.

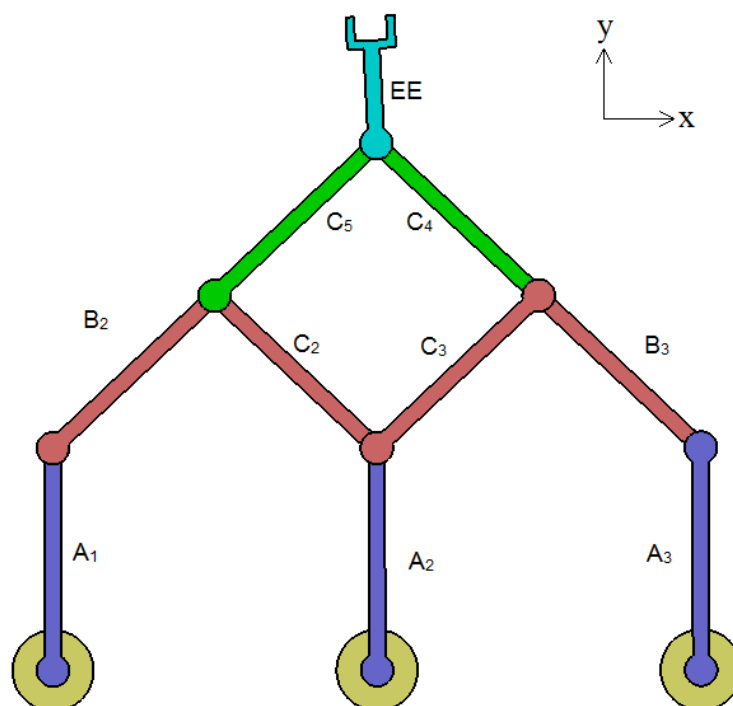


Figure 2-1 Présentation du manipulateur.

### 2.1 Conception cinématique

Selon les définitions vues précédemment, le manipulateur étudié est un manipulateur parallèle ayant trois jambes non identiques. D'après le schéma cinématique présenté à la Figure 2-2, les jambes peuvent être décrites comme étant deux chaînes cinématiques  $\underline{RRR}$  et une  $\underline{RR}$  reliées à un

mécanisme à quatre barres, composé des éléments C2-C3-C4-C5, formant la nacelle articulée. Ce mécanisme permet le contrôle de la position et de l'orientation de l'effecteur EE. En utilisant seulement des joints rotatifs passifs, l'orientation de l'effecteur ne peut être contrôlé, car seulement deux membrures sont utilisées pour contrôler trois dimensions : la position en x, la position en y et l'orientation selon l'axe z. Pour surmonter ce problème, le joint passif rotatif  $G_9$  est remplacé par un engrenage planétaire. L'orientation de l'effecteur peut donc être contrôlée par la différence d'angle entre les membrures passives C4 et C5 tel que présenté à la Figure 2-3. Le comportement du manipulateur peut aussi être modifié en utilisant un différent ratio du train d'engrenage épicycloïdal.

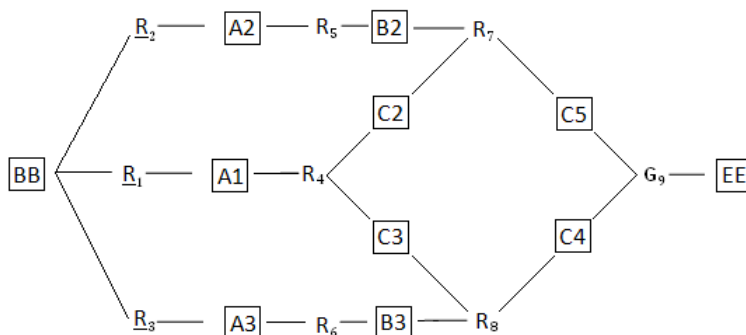


Figure 2-2 Chaîne cinématique du manipulateur

Tel que décrit par la chaîne cinématique, la première jambe du manipulateur est actionnée par le joint rotatif actif  $R_1$ . Cet actionneur oriente la membrure  $A_1$  selon un angle  $\theta_1$  par rapport à l'axe horizontal de la base BB et est positionné selon le vecteur  $\mathbf{o}_1$  ayant les coordonnées généralisées arbitraires (0,0,0). La membrure  $A_1$  est ensuite reliée aux membrures C2 et C3 par deux joints rotatifs passifs. Du fait que ces deux joints rotatifs sont coaxiaux, ils seront toujours positionnés au même endroit, ce qui nous permet de les identifier de la même façon et seront nommés  $R_4$ . Les deux membrures C2 et C3 font partie intégrante du mécanisme à quatre membrures permettant le positionnement et l'orientation de l'effecteur.

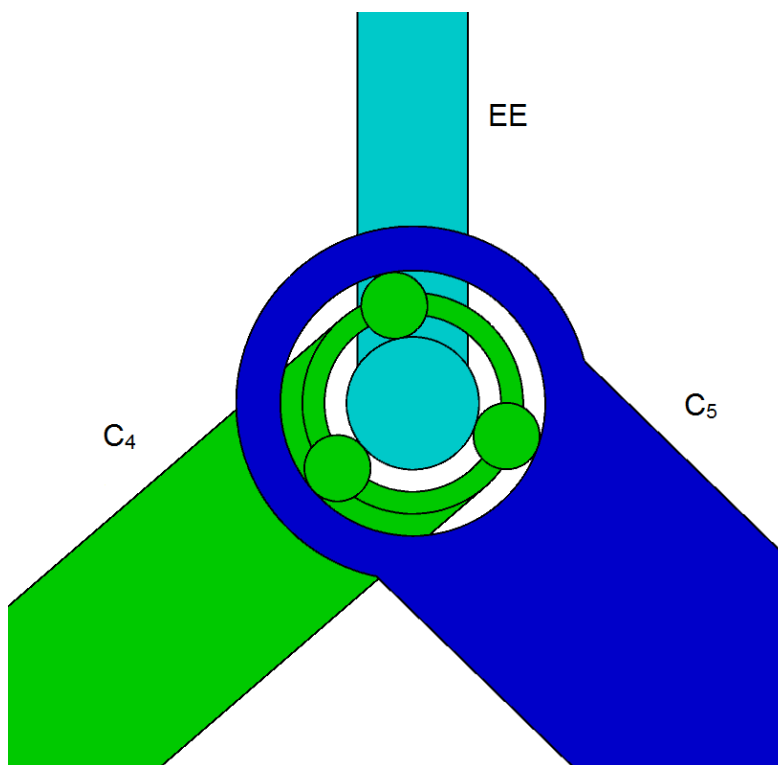


Figure 2-3 Exemple d'utilisation de l'engrenage planétaire

La seconde jambe est actionnée par le joint rotatif  $\underline{R}_2$ , qui permet de contrôler l'orientation de la membrure A2 selon l'angle  $\theta_2$  par rapport à l'axe horizontal de la base BB. Pour un premier exemple, le joint actif  $\underline{R}_2$  est positionné arbitrairement selon le vecteur  $\mathbf{o}_2$  (-10, 0, 0). La membrure A2 est ensuite reliée à la membrure B2 par un joint rotatif passif  $R_5$ . L'extrémité de cette membrure est ensuite reliée au mécanisme à quatre membrures par deux joints rotatifs passifs et coaxiaux  $R_7$  reliant la membrure B2 aux membrures C2 et C5.

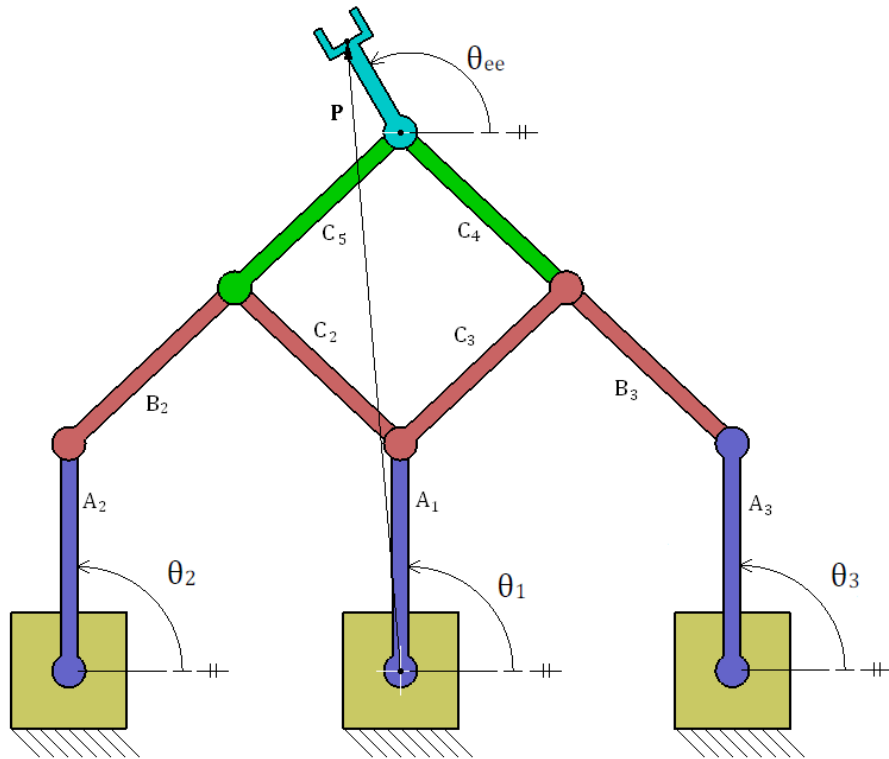


Figure 2-4 Angles de contrôle ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ) et de positionnement ( $\theta_{ee}$ )

La troisième jambe est composée de façon symétrique à la seconde et est actionnée par le joint rotatif  $\underline{R}_3$ , situé arbitrairement selon le vecteur  $\underline{o}_3$  (10, 0, 0), permettant le contrôle de l'orientation de la membrure A3 selon l'angle  $\theta_3$  par rapport à l'axe horizontal de la base BB. La membrure A3 est ensuite reliée à la membrure B3 par le joint rotatif passif  $\underline{R}_6$ . Cette dernière membrure est reliée au mécanisme à quatre barres principal par les deux joints rotatifs passifs et coaxiaux  $\underline{R}_8$ .

Afin de simplifier les équations, le mécanisme à quatre barres principal, composé des membrures C2-C3-C4-C5, est un parallélogramme, où C2 et C4 sont de longueur équivalente et les membrures C3 et C5 sont aussi de longueur équivalente. Cette simplification permet aux membrures opposées de toujours être parallèles, donc de même orientation.

Afin de contrôler l'orientation de l'effecteur, le joint passif reliant le parallélogramme principal à celui-ci est un train d'engrenage planétaire passif nommé  $\underline{G}_9$ . Ce joint passif permet la liaison entre les membrures C4, C5 et l'effecteur (EE). Le choix du train d'engrenage peut être fait en fonction des besoins spécifiques en orientation de l'effecteur, c'est-à-dire qu'un changement de ratio modifiera le comportement de l'effecteur.

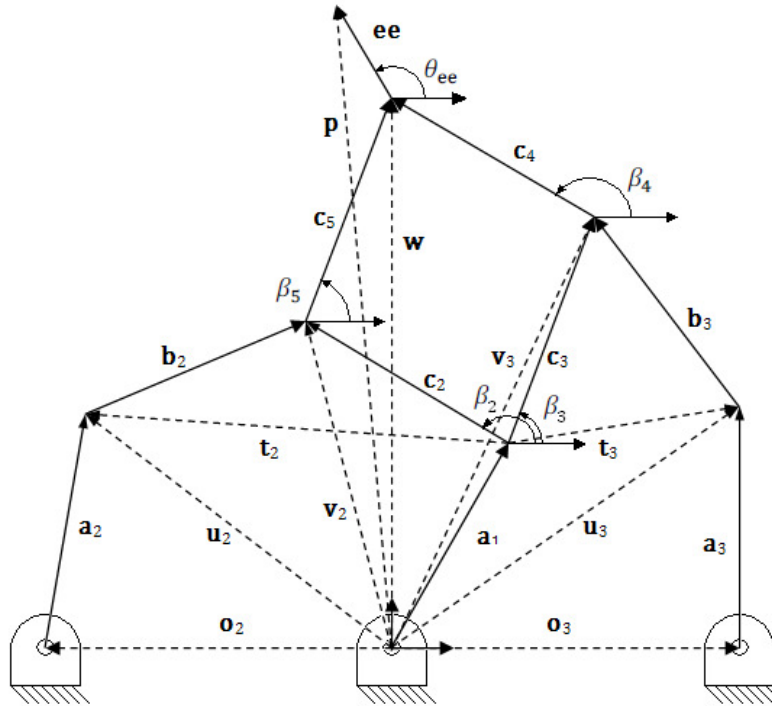


Figure 2-5 Diagramme vectoriel du manipulateur

Tels que présentés par le diagramme vectoriel présenté à la Figure 2-5, les vecteurs partant de l'origine du référentiel aux actionneurs sont représentés par l'appellation  $\mathbf{o}_i$  où la lettre  $i$  est remplacé par le numéro de la jambe. Dans le même contexte, le vecteur allant de l'origine du référentiel aux premiers joints passifs, aux extrémités des membrures A1, A2 et A3, sont représentés par l'appellation  $\mathbf{u}_i$ . Les vecteurs représentant la position des joints passifs R7 et R8 sont appelés  $\mathbf{v}_i$  où  $i$  représente la jambe 2 ou 3 associée. Le vecteur de positionnement du train d'engrenage planétaire G9 est représenté par  $\mathbf{w}$ . Le dernier vecteur, représentant la position de l'effecteur, est nommé  $\mathbf{p}$ .

La nomenclature utilisée pour représenter la longueur des différentes membrures est la représentation minuscule des membrures, par exemple :  $a_1, a_2, a_3$ . Cette même nomenclature est utilisée en caractères gras pour représenter les vecteurs le long de ces membrures, par exemple :  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ .

## 2.2 Modèle géométrique direct

Afin de contrôler la configuration d'un manipulateur, il est nécessaire d'être en mesure de générer la ou les position(s) et orientation(s) possible(s) de celui-ci selon la configuration articulaire. Tel que défini au chapitre 1, il est possible, pour une configuration articulaire donnée, d'avoir plusieurs positions et orientations de l'effecteur, s'il y a plusieurs modes d'assemblages. Ce type d'algorithme se nomme modèle géométrique direct.

Pour le manipulateur étudié dans ce mémoire, l'analyse du modèle géométrique direct peut débiter par l'analyse d'une première boucle cinématique telle que BB-A1-C2-B2-A2-BB. Cette boucle débute et finit par la base BB en utilisant les membrures actives A1 et A2 ainsi que les membrures passive B2 et C2. Ce type de mécanisme est un mécanisme à 5 barres et a été étudié dans multiples de recherches [30, 31]. Les membrures A1 et A2 étant des membrures actives, les vecteurs permettant le positionnement des joints passifs  $R_4$  et  $R_5$  sont aisément calculés par l'équation

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{o}_i + \mathbf{a}_i, \quad i = 2, 3 \quad (2.1)$$

où les vecteurs  $\mathbf{o}_i$  sont connus par la conception du manipulateur et les vecteurs  $\mathbf{a}_i$  sont calculé par l'équation

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_i \cos \theta_i \\ a_i \sin \theta_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Connaissant les vecteurs positions des joints  $R_4$  et  $R_5$  (vecteurs  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$ ), il est facile de déterminer le vecteur positionnant le joint passif  $R_5$  par rapport à la position du joint  $R_4$ . Ce vecteur, nommé  $\mathbf{t}_2$  est calculé selon l'équation (2.3).



$$\mathbf{t}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_1, \quad i = 2, 3 \quad (2.3)$$

Connaissant le vecteur  $\mathbf{t}_2$  ainsi que les longueurs des membrures B2 et C2, il est possible de déterminer la position du joint passif  $R_7$ . Étant le joint reliant les membrures B2 et C2, la solution n'est nul autre que l'intersection entre deux cercles, centrés aux joints  $R_4$  et  $R_5$  de rayon  $b_2$  et  $c_2$ . Il faut d'abord obtenir une solution intermédiaire représentant la distance entre le joint  $R_4$  et le joint  $R_7$  selon la direction du vecteur  $\mathbf{t}_2$ , divisé par la distance entre les deux centres. Cette valeur est obtenue par l'équation

$$q_i = \frac{(\|\mathbf{t}_i\|^2 + \|\mathbf{c}_i\|^2 - \|\mathbf{b}_i\|^2)}{2\|\mathbf{t}_i\|^2}, \quad i = 2, 3 \quad (2.4)$$

À l'aide de toutes ces données, il est maintenant possible de calculer le vecteur  $\mathbf{v}_2$ , servant à positionner le joint  $R_7$ , par l'équation

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_1 + q_i \mathbf{t}_i \pm \left( \sqrt{\frac{\|\mathbf{c}_i\|^2}{\|\mathbf{t}_i\|^2} - q_i^2} \right) \mathbf{E} \mathbf{t}_i, \quad i = 2, 3 \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{E}$  est une matrice de rotation d'un angle de  $-\frac{\pi}{2}$  selon l'axe z tel que

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

L'équation (2.5) fait apparaître une double solution due à la racine carrée. Cette double solution démontre que le manipulateur possède plusieurs solutions au modèle géométrique direct, donc plusieurs modes d'assemblage. Cet algorithme de calcul sert aussi à calculer la position du joint passif  $R_8$  (vecteur  $\mathbf{v}_3$ ). Pour ce faire, la boucle cinématique BB-A1-C3-B3-BB est utilisée.

L'obtention de la position de l'engrenage planétaire  $G_9$ , représenté par le vecteur  $\mathbf{w}$ , se fait de façon similaire et en utilisant les mêmes équations. Puisque la position des joints passifs  $R_4$  et  $R_5$  représente les centres des deux cercles formés par les membrures  $C_4$  et  $C_5$ , il est possible d'obtenir l'intersection entre ceux-ci, qui représente la position de l'engrenage  $G_9$ . Le vecteur  $\mathbf{w}$  est donc calculé par l'équation

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_2 + p \mathbf{s} \pm \left( \sqrt{\frac{\|\mathbf{c}_5\|^2}{\|\mathbf{s}\|^2} - p^2} \right) \mathbf{E} \mathbf{s} \quad (2.7)$$

où les valeurs intermédiaires  $\mathbf{s}$  et  $p$  sont déterminés par les équations

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 \quad (2.8)$$

et

$$p = \frac{(\|\mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{c}_5\|^2 - \|\mathbf{c}_4\|^2)}{2\|\mathbf{s}\|^2} \quad (2.9)$$

De façon similaire aux calculs des vecteurs  $\mathbf{v}_i$ , le calcul du vecteur  $\mathbf{w}$  possède aussi deux solutions, et ce pour chacune des combinaisons de  $\mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{v}_3$ . Par contre, une seule des solutions du vecteur  $\mathbf{w}$  sera considérée dans chaque cas. En effet, parce que les membrures  $C_2$ - $C_5$  et  $C_3$ - $C_4$  sont de mêmes longueurs, une des solutions à l'équation (2.7) sera toujours égale au vecteur  $\mathbf{a}_1$ . Dans ce cas, l'hypothèse voulant que le mécanisme à 4 membrures soit un parallélogramme n'est plus satisfaite, puisque les paires de membrures  $C_2$ - $C_4$  et  $C_3$ - $C_5$  ne sont plus parallèles, les résultats seront erronés. Tel que présenté à la Figure 2-6, le manipulateur possède huit modes d'assemblage.

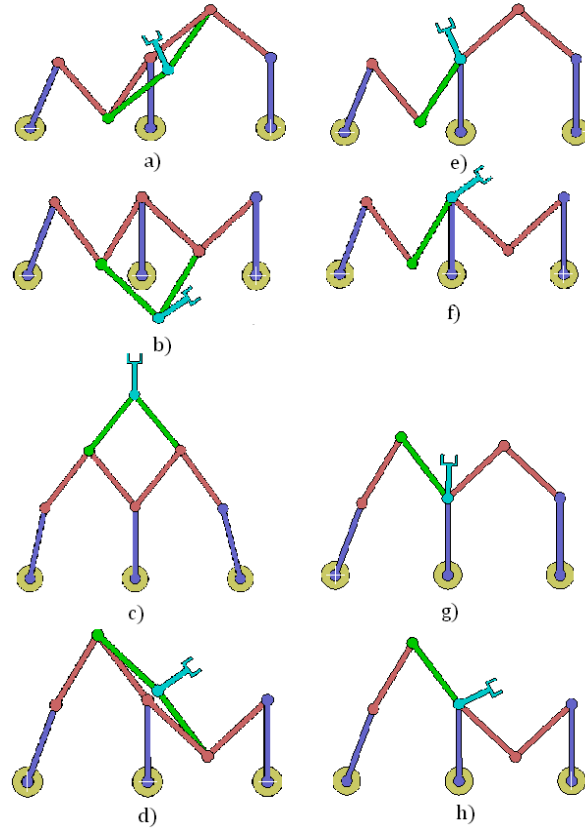


Figure 2-6 Mode d'assemblage du manipulateur

Pour connaître la position de l'effecteur, l'orientation de celui-ci doit être connue. Telle que montrée dans le diagramme vectoriel de la Figure 2-4, l'orientation de l'effecteur est déterminée selon un angle nommé  $\theta_{ee}$  entre l'axe des x et l'effecteur. Tel que décrit précédemment, la solution proposée afin de contrôler cet angle est l'utilisation d'un train d'engrenage planétaire. Ce type d'engrenage peut être conçu de façon à avoir un ratio  $r$  différent selon l'utilité. L'orientation de l'effecteur sera donc déterminée par l'orientation respective des membrures C4 et C5, ainsi que par le ratio  $r$  utilisé. L'orientation des membrures du parallélogramme principal est nommée  $\beta_i$  et est calculée par l'équation

$$\beta_i = \text{atan2}(c_{iy}, c_{ix}) , \quad i = 2, 3, 4, 5 \quad (2.10)$$

L'orientation de l'effecteur peut varier selon que l'armature de l'engrenage soit assemblée à la membrure C4 ou C5. Arbitrairement, notre cas suppose que l'armature soit assemblée à la membrure C4, ce qui permet de calculer l'orientation de l'effecteur par l'équation

$$\theta_{ee} = \beta_4 + r(\beta_4 - \beta_5) \quad (2.11)$$

Le vecteur  $ee$  peut donc être calculé par l'équation

$$ee = \begin{bmatrix} ee \times \cos(\theta_{ee}) \\ ee \times \sin(\theta_{ee}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

La position  $p$  finale selon l'origine est donc obtenue de la façon suivante

$$p = w + ee \quad (2.13)$$

## 2.3 Vérification du modèle géométrique direct

Afin de valider le modèle géométrique direct, un script MATLAB a été produit. Celui-ci permet d'obtenir les 8 configurations du manipulateur, selon la configuration articulaire imposée, de façon visuelle telle que présentée à la Figure 2-7. De cette façon, il est possible de vérifier rapidement si les positions calculées semblent possibles. Ensuite, il est possible de valider, de façon empirique, à l'aide d'un modèle CATIA, si le vecteur  $w$  est positionné correctement. Le modèle présenté à la Figure 2-8 est positionné dans la même configuration articulaire que celle calculée par le résultat du script MATLAB, présenté à la Figure 2-7. De cette façon, une série de configurations est calculée et comparée au modèle CATIA. Les résultats, présentés dans le Tableau 2-1, démontrent que l'algorithme est valide.

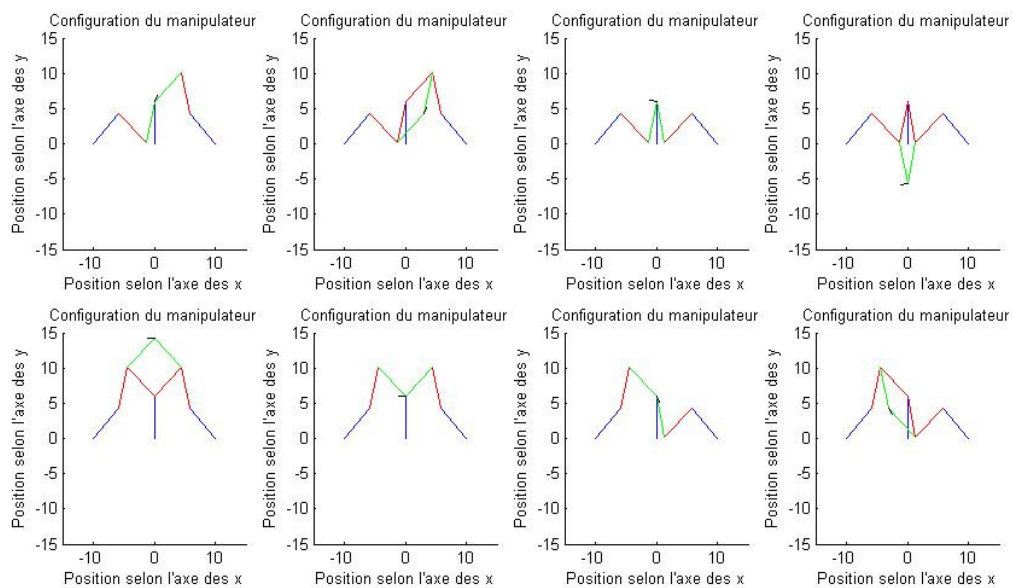


Figure 2-7 Configurations du manipulateur pour une configuration articulaire donnée

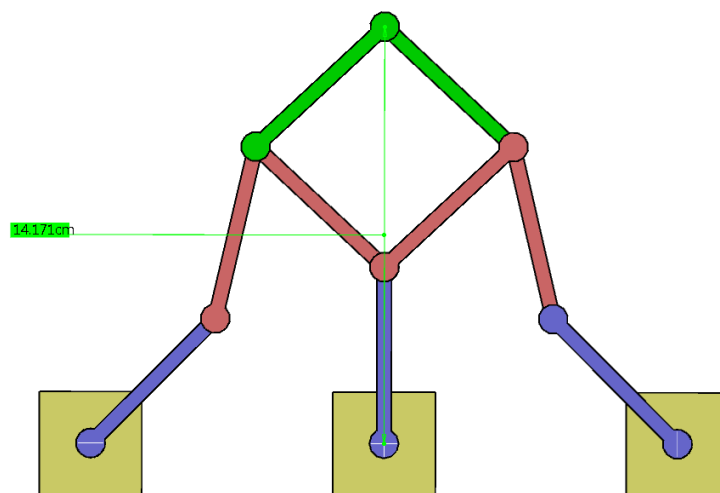


Figure 2-8 Positionnement du manipulateur pour une configuration articulaire donnée

Tableau 2-1 Comparaison des valeurs de l'algorithme MGD à celles d'un modèle CATIA

|                                                                                         |        | Position #1 |         | Position #2 |        | Position #3 |        | Position #4 |         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------------|---------|-------------|--------|-------------|--------|-------------|---------|
|                                                                                         |        | x           | y       | x           | y      | x           | y      | x           | y       |
| $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$<br>$\theta_2 = \frac{\pi}{4}$<br>$\theta_3 = \frac{3\pi}{4}$ | MATLAB | 0           | 14.1714 | 3.0306      | 4.2426 | -3.0306     | 4.2426 | 0           | -5.6861 |
|                                                                                         | CATIA  | 0           | 14.171  | 3.031       | 4.243  | -3.031      | 4.243  | 0           | -5.686  |
| $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$<br>$\theta_2 = \frac{\pi}{5}$<br>$\theta_3 = \frac{3\pi}{4}$ | MATLAB | -4.9729     | 9.3660  | -5.2813     | 3.3105 | 5.8927      | 4.4589 | 5.5843      | -1.5967 |
|                                                                                         | CATIA  | -4.973      | 9.366   | -5.281      | 3.31   | 5.893       | 4.459  | 5.584       | -1.597  |
| $\theta_1 = 0$<br>$\theta_2 = 0$<br>$\theta_3 = \frac{\pi}{2}$                          | MATLAB | -0.9904     | 8.9769  | -0.9904     | 2.3436 | 6.9904      | 3.6564 | 6.9904      | -2.9769 |
|                                                                                         | CATIA  | -0.990      | 8.977   | -0.990      | 2.344  | 6.990       | 3.656  | 6.990       | -2.977  |
| $\theta_1 = -\frac{\pi}{5}$<br>$\theta_2 = 0$<br>$\theta_3 = \frac{\pi}{2}$             | MATLAB | 2.0733      | 7.6163  | -0.6249     | 0.8423 | 6.6249      | 5.1577 | 3.9267      | -1.6163 |
|                                                                                         | CATIA  | 2.073       | 7.616   | -0.625      | 0.842  | 6.625       | 5.158  | 3.927       | -1.616  |
|                                                                                         |        | mm          | mm      | mm          | mm     | mm          | mm     | mm          | mm      |

## 2.4 Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse est un outil permettant de connaître les configurations articulaires selon la position et l'orientation désirées de l'effecteur. L'algorithme débute donc par déterminer les paramètres du manipulateur, c'est-à-dire tous les paramètres connus tel que la position des actionneurs (vecteurs  $\mathbf{o}_i$ ), la longueur des membrures, le ratio de l'engrenage planétaire et finalement la position (vecteur  $\mathbf{p}$ ) et l'orientation ( $\theta_{ee}$ ) désirée.

Connaissant le vecteur  $\mathbf{p}$ , l'orientation de l'effecteur ainsi que la longueur de celui-ci, il est possible de déterminer le vecteur  $\mathbf{w}$  par la relation suivante

$$\mathbf{w} = \mathbf{p} - \begin{bmatrix} ee \times \cos(\theta_{ee}) \\ ee \times \sin(\theta_{ee}) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Connaissant  $\mathbf{w}$ , il est intéressant de vérifier si la position est accessible par les trois jambes. Par exemple, la somme des longueurs des membrures constituant la première jambe (A1-C2-C5) doit être supérieure à la norme du vecteur  $\mathbf{w}$ . Cette validation se fait en vérifiant les trois inégalités suivantes

$$\begin{aligned} a_1 + c_2 + c_5 &\geq \|\mathbf{w} - \mathbf{o}_1\| \\ a_2 + b_2 + c_5 &\geq \|\mathbf{w} - \mathbf{o}_2\| \\ a_3 + b_3 + c_4 &\geq \|\mathbf{w} - \mathbf{o}_3\| \end{aligned} \quad (2.15)$$

Lorsque ces inéquations sont vérifiées, l'étape suivante est de déterminer l'orientation des membrures C4 et C5. Sachant que celles-ci déterminent l'orientation de l'effecteur selon l'équation (2.11), il est possible d'obtenir une relation permettant de calculer  $\beta_5$  en fonction de  $\beta_4$  et  $\theta_{ee}$  tel que

$$\beta_5 = \frac{\beta_4(1+r) - \theta_{ee}}{r} \quad (2.16)$$

De plus, la somme des vecteurs  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{c}_4$  et  $\mathbf{c}_5$  doivent être équivalents au vecteur  $\mathbf{w}$ . Il suffit donc d'obtenir  $\beta_4$  en calculant les racines de la fonction suivante

$$erreur = \left\| \mathbf{w} - c_4 \begin{bmatrix} \cos(\beta_4) \\ \sin(\beta_4) \\ 0 \end{bmatrix} - c_5 \begin{bmatrix} \cos(\frac{\beta_4(1+r) - \theta_{ee}}{r}) \\ \sin(\frac{\beta_4(1+r) - \theta_{ee}}{r}) \\ 0 \end{bmatrix} \right\| - a_1 \quad (2.17)$$

sachant que  $\beta_4$  est borné tel que

$$\beta_4 \in [-\pi, \pi[ \quad (2.18)$$

Aucune, une ou deux solutions de  $\beta_4$  peuvent être obtenues. Sachant  $\beta_4$ ,  $\beta_5$  peut être facilement obtenus par l'équation (2.16) et doit être aussi borné tel que

$$\beta_5 \in [-\pi, \pi[ \quad (2.19)$$

À ce point, il est donc possible de déterminer le vecteur  $\mathbf{a}_1$  ainsi que son orientation  $\theta_1$  par les deux équations suivantes



$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{w} - c_4 \begin{bmatrix} \cos(\beta_4) \\ \sin(\beta_4) \\ 0 \end{bmatrix} - c_5 \begin{bmatrix} \cos(\beta_5) \\ \sin(\beta_5) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(a_{1y}, a_{1x}) \quad (2.21)$$

Afin de déterminer l'orientation de la membrure A2 ( $\theta_2$ ) ainsi que celle de la membrure A3 ( $\theta_3$ ) il est possible d'utiliser la même méthode que celle utilisée pour le modèle géométrique direct, c'est-à-dire la méthode d'intersection de deux cercles. Par exemple, en prenant comme centre des cercles les vecteurs  $\mathbf{o}_2$  et  $\mathbf{v}_2$ , ainsi que les longueurs  $a_2$  et  $b_2$  comme rayons, il est possible de déterminer la ou les deux solutions possibles, si elles existent. Tout d'abord, nous devons calculer les vecteurs  $\mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{v}_3$  tels que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{w} - c_5 \begin{bmatrix} \cos(\beta_5) \\ \sin(\beta_5) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{w} - c_4 \begin{bmatrix} \cos(\beta_4) \\ \sin(\beta_4) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

En utilisant les mêmes étapes décrites aux équations (2.3) à (2.6), les équations suivantes sont obtenues

$$\mathbf{t}_{i+2} = \mathbf{v}_i - \mathbf{o}_i, \quad i = 2, 3 \quad (2.23)$$

$$q_{i+2} = \frac{a_i^2 + \|\mathbf{t}_{i+2}\|^2 - b_i^2}{2\|\mathbf{t}_i\|^2}, \quad i = 2, 3 \quad (2.24)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{o}_i + q_{i+2} \mathbf{t}_{i+2} \pm \left( \sqrt{\frac{a_i^2}{\|\mathbf{t}_{i+2}\|^2} - q_{i+2}^2} \right) \mathbf{Et}_{i+2}, \quad i = 2, 3 \quad (2.25)$$

avec la matrice  $E$  tel que défini à l'équation (6).

Les vecteurs  $a_2$  et  $a_3$  peuvent être calculés facilement par l'équation

$$a_i = u_i - o_i, \quad i = 2, 3 \quad (2.26)$$

Et les orientations des joints actifs  $\underline{R}_2$  ( $\theta_2$ ) et  $\underline{R}_3$  ( $\theta_3$ ) sont calculées par l'équation

$$\theta_i = \text{atan2}(a_{iy}, a_{ix}) \quad , \quad i = 2, 3 \quad (2.27)$$

Lorsque toutes les solutions sont réelles, le modèle géométrique inverse possède huit solutions distinctes telles que montrées à la Figure 2-8.

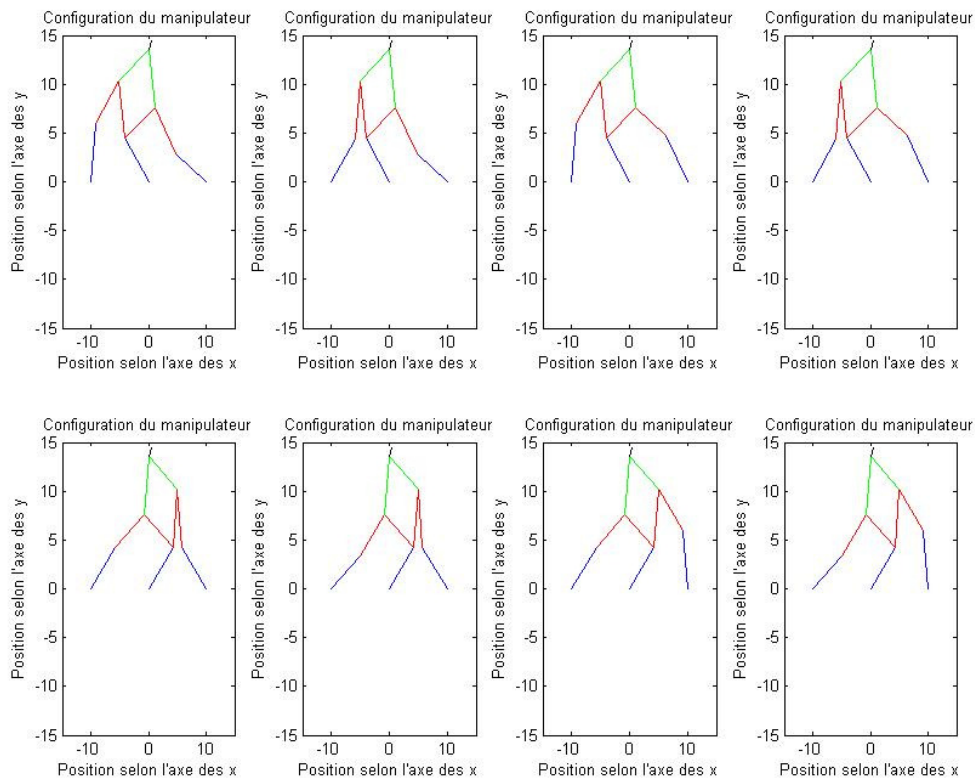


Figure 2-9 Exemple de solutions du modèle géométrique inverse

## 2.5 Vérification du modèle géométrique inverse

Il est maintenant impératif de vérifier l'algorithme du modèle géométrique inverse. Tout d'abord, en utilisant le modèle géométrique direct, des solutions sont calculées pour des configurations articulaires. Ces solutions sont présentées au Tableau 2-2.

En utilisant certaines solutions du Tableau 2-2 choisi aléatoirement, celles représentées dans les cases grises, il est possible d'utiliser le modèle géométrique inverse. Si l'algorithme est adéquat, une des solutions obtenues devrait concorder avec la configuration articulaire utilisée pour le modèle géométrique direct associé. Les différentes solutions obtenues pour les différentes poses du manipulateur sont représentées au Tableau 2-3. Tel que suggéré, chacune des configurations articulaires originales est retrouvée comme une solution possible du modèle géométrique inverse (représenté dans les cases grises). Cette boucle démontre que les deux algorithmes sont consistants et comme l'algorithme du modèle géométrique direct est vérifié. Cette consistance vérifie l'algorithme du modèle géométrique inverse.

Tableau 2-2 Solutions du modèle géométrique direct pour différentes configurations articulaires

|             |                     | Configurations articulaires                                                             |                                                                                          |                                                                    |                                                    |
|-------------|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
|             |                     | $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$<br>$\theta_2 = \frac{\pi}{5}$<br>$\theta_3 = \frac{3\pi}{4}$ | $\theta_1 = -\frac{\pi}{3}$<br>$\theta_2 = \frac{\pi}{5}$<br>$\theta_3 = \frac{3\pi}{4}$ | $\theta_1 = \frac{-\pi}{3}$<br>$\theta_2 = 0$<br>$\theta_3 = -\pi$ | $\theta_1 = 0$<br>$\theta_2 = 0$<br>$\theta_3 = 0$ |
| Solution #1 | $p_x$ (mm)          | 2.6757                                                                                  | -3.3158                                                                                  | -7.8221                                                            | 5.1667                                             |
|             | $p_y$ (mm)          | 4.2309                                                                                  | 5.4141                                                                                   | -3.2900                                                            | -0.5528                                            |
|             | $\theta_{ee}$ (rad) | -33.3989                                                                                | 7.7182                                                                                   | -58.1960                                                           | -33.9718                                           |
| Solution #2 | $p_x$ (mm)          | 0.0909                                                                                  | 3.6259                                                                                   | 2.6173                                                             | 5.0354                                             |
|             | $p_y$ (mm)          | -6.4279                                                                                 | 3.3747                                                                                   | -3.3514                                                            | -6.3694                                            |
|             | $\theta_{ee}$ (rad) | -6.8949                                                                                 | 19.9254                                                                                  | -35.9134                                                           | -22.2581                                           |
| Solution #3 | $p_x$ (mm)          | 2.0001                                                                                  | -1.8840                                                                                  | -1.9703                                                            | 5.0354                                             |
|             | $p_y$ (mm)          | 12.8724                                                                                 | 4.5195                                                                                   | 4.8381                                                             | 6.3694                                             |
|             | $\theta_{ee}$ (rad) | 18.0007                                                                                 | 5.4272                                                                                   | -5.7483                                                            | 22.2581                                            |
| Solution #4 | $p_x$ (mm)          | -1.5983                                                                                 | 4.4107                                                                                   | 7.0681                                                             | 5.1667                                             |
|             | $p_y$ (mm)          | 3.1213                                                                                  | 2.4086                                                                                   | 1.5575                                                             | 0.5528                                             |
|             | $\theta_{ee}$ (rad) | 44.5048                                                                                 | 17.6344                                                                                  | 16.5343                                                            | 33.9718                                            |

Tableau 2-3 Solutions du modèle géométrique inverse pour différentes poses du manipulateur

|             |                  | Pose du manipulateur                                         |                                                             |                                                               |                                                             |
|-------------|------------------|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
|             |                  | $p_x = 2.6757$<br>$p_y = 4.2309$<br>$\theta_{ee} = -33.3989$ | $p_x = -1.8840$<br>$p_y = 4.5195$<br>$\theta_{ee} = 5.4272$ | $p_x = 2.6173$<br>$p_y = -3.3514$<br>$\theta_{ee} = -35.9134$ | $p_x = 5.0354$<br>$p_y = 6.3694$<br>$\theta_{ee} = 22.2581$ |
| Solution #1 | $\theta_1$ (rad) | 1.0472 ( $\pi/3$ )                                           | -1.2286                                                     | -1.0472                                                       | 0                                                           |
|             | $\theta_2$ (rad) | 0.6283 ( $\pi/5$ )                                           | 0.6777                                                      | 0                                                             | 0.5857                                                      |
|             | $\theta_3$ (rad) | 2.3562 ( $3\pi/4$ )                                          | -2.4853                                                     | -0.6468                                                       | 2.5559                                                      |
| Solution #2 | $\theta_1$ (rad) | 1.0472                                                       | -1.2286                                                     | -1.0472                                                       | 0                                                           |
|             | $\theta_2$ (rad) | -0.6031                                                      | -0.8061                                                     | -1.3962                                                       | 0                                                           |
|             | $\theta_3$ (rad) | 2.3562                                                       | -2.4853                                                     | -0.6468                                                       | 2.5559                                                      |
| Solution #3 | $\theta_1$ (rad) | 1.0472                                                       | -1.2286                                                     | -1.0472 ( $\pi/3$ )                                           | 0                                                           |
|             | $\theta_2$ (rad) | 0.6283                                                       | 0.6777                                                      | 0                                                             | 0.5857                                                      |
|             | $\theta_3$ (rad) | 1.4835                                                       | 2.4447                                                      | -3.1416 ( $-\pi$ )                                            | 0                                                           |
| Solution #4 | $\theta_1$ (rad) | 1.0472                                                       | -1.2286                                                     | -1.0472                                                       | 0                                                           |
|             | $\theta_2$ (rad) | -0.6031                                                      | -0.8061                                                     | -1.3962                                                       | 0                                                           |
|             | $\theta_3$ (rad) | 1.4835                                                       | 2.4447                                                      | -3.1416                                                       | 0                                                           |

|                |                  |         |                      |                                 |                                 |
|----------------|------------------|---------|----------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Solution<br>#5 | $\theta_1$ (rad) | 1.0285  | -1.0472              | Seulement 4<br>solutions au MGI | Seulement 4<br>solutions au MGI |
|                | $\theta_2$ (rad) | 0.3904  | 0.6283               |                                 |                                 |
|                | $\theta_3$ (rad) | 2.2014  | -2.4654              |                                 |                                 |
| Solution<br>#6 | $\theta_1$ (rad) | 1.0285  | -1.0472              | Seulement 4<br>solutions au MGI | Seulement 4<br>solutions au MGI |
|                | $\theta_2$ (rad) | -0.4715 | -0.7155              |                                 |                                 |
|                | $\theta_3$ (rad) | 2.2014  | -2.4654              |                                 |                                 |
| Solution<br>#7 | $\theta_1$ (rad) | 1.0285  | -1.0472 ( $-\pi/3$ ) | Seulement 4<br>solutions au MGI | Seulement 4<br>solutions au MGI |
|                | $\theta_2$ (rad) | 0.3904  | 0.6283 ( $\pi/5$ )   |                                 |                                 |
|                | $\theta_3$ (rad) | 1.7693  | 2.3562 ( $3\pi/4$ )  |                                 |                                 |
| Solution<br>#8 | $\theta_1$ (rad) | 1.0285  | -1.0472              | Seulement 4<br>solutions au MGI | Seulement 4<br>solutions au MGI |
|                | $\theta_2$ (rad) | -0.4715 | -0.7155              |                                 |                                 |
|                | $\theta_3$ (rad) | 1.7693  | 2.3562               |                                 |                                 |

## Récapitulatif

Dans ce chapitre, la conception et le fonctionnement du manipulateur ont été présentés. Une description détaillée du manipulateur a été présentée, permettant ainsi de faciliter la compréhension de son fonctionnement. De plus, les modèles géométriques directs et inverses ont été développés. La génération du modèle géométrique direct a permis de définir jusqu'à huit configurations du manipulateur pour chaque configurations articulaires, donc jusqu'à huit modes d'assemblages. La génération du modèle géométrique inverse a aussi généré autant de solutions, soit jusqu'à huit, pour chaque poses du manipulateur, donc jusqu'à huit modes opératoires. Les différents algorithmes présentés dans ce chapitre ont d'ailleurs pu être vérifié par une méthode comparative utilisant un programme de modélisation 3D.

## CHAPITRE 3    ESPACE DE TRAVAIL

Tel que définit dans [13, 32, 33], l'espace de travail d'un manipulateur peut être défini, entre autres, selon trois types : l'espace de travail maximal, l'espace de travail dextre et l'espace de travail à orientation constante. Puisque les manipulateurs parallèles planaires possèdent des espaces de travail dextre nul ou restreint [12, 24], il sera intéressant de déterminer si ce type d'espace de travail est intéressant pour le manipulateur étudié.

L'espace de travail maximal contient toutes les positions où l'effecteur peut se rendre pour au moins une orientation.

Pour ce qui est des positions contenues dans l'espace de travail dextre, toutes les orientations possibles de l'effecteur peuvent être utilisées, et ce, pour chaque point de l'espace de travail.

L'espace de travail à orientation constante définit, quant à lui, l'ensemble des positions accessibles pour une orientation donnée.

Afin de faire une première analyse de l'espace de travail du manipulateur étudié, il est impératif de déterminer les paramètres du manipulateur. Tout d'abord, les positions généralisées des actionneurs seront placées arbitrairement selon

$$\mathbf{o}_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{o}_2 \equiv \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{o}_3 \equiv \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

De plus, toutes les membrures auront une longueur généralisée arbitraire de 6 et le ratio  $r$  du train d'engrenage  $G_9$  sera 10.

### 3.1 Espace de travail théorique

Dans un premier temps, il est possible de déterminer une région atteignable pour le joint  $G_9$ , ce qui constitue un sous-ensemble théorique de l'espace de travail qui ne prend pas en compte l'orientation de l'effecteur. Tel que démontré dans [34], il est possible d'utiliser une méthode géométrique afin de déterminer les régions atteignables par chacune des jambes du manipulateur.



Par exemple, pour la jambe 1 du manipulateur, il est possible de créer une surface bornée par un cercle extérieur de rayon  $r_{\text{ext}}$  et un cercle intérieur de rayon  $r_{\text{int}}$ , tel que

$$r_{\text{ext}} = a_1 + c_2 + c_5 \quad (4.2)$$

et

$$r_{\text{int}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_1 - c_2 - c_5 < 0 \\ a_1 - c_2 - c_5 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

Pour les jambes 2 et 3, ces équations deviennent

$$r_{\text{ext}} = a_i + b_i + c_{i+1}, \quad i = 2, 3 \quad (4.4)$$

et

$$r_{\text{int}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i - b_i - c_{i+1} < 0 \\ a_i - b_i - c_{i+1} & \text{sinon} \end{cases}, \quad i = 2, 3 \quad (4.5)$$

Dans le cas présent, les bornes  $r_{\text{ext}}$  et  $r_{\text{int}}$  sont respectivement de 18 et 0 pour les trois jambes. Il est donc possible de conclure que l'espace de travail théorique atteignable du manipulateur sera l'intersection des surfaces atteignable simultanément par les trois jambes, tel que montré en Figure 3-1.

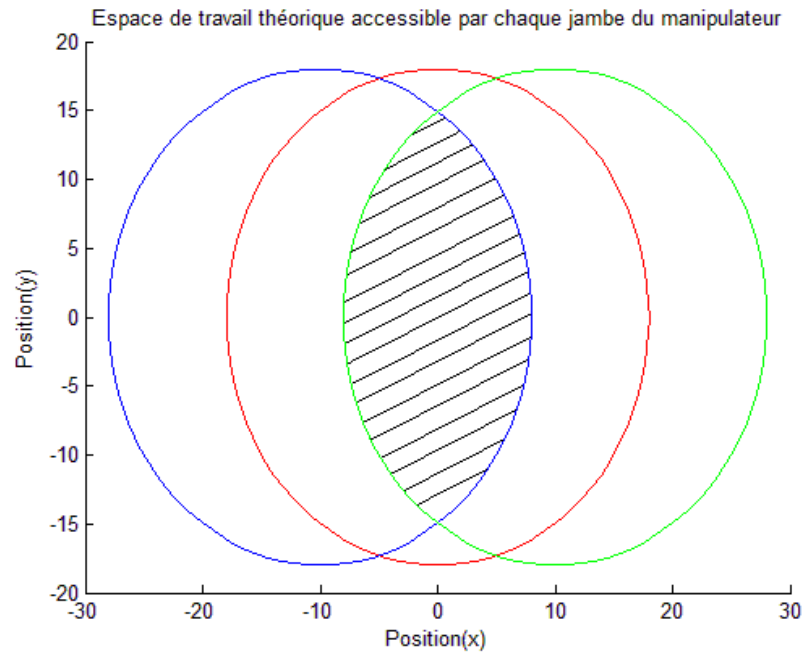


Figure 3-1 Espace de travail théorique accessible

Puisqu'il s'agit d'un manipulateur parallèle et que l'espace de travail est contraint par trois jambes indépendante, il est normal que l'espace de travail maximal soit plus petit comparativement aux manipulateurs SCARA. Il est difficile à ce stade de comparer avec d'autres manipulateurs parallèles planaires à savoir lequel est meilleur.

### 3.2 Espace de travail expérimental

Afin d'obtenir une première estimation de l'espace de travail de ce manipulateur, la position du joint passif  $G_9$  ainsi que l'orientation de l'effecteur sont calculées, à l'aide du modèle géométrique direct, pour plusieurs configurations articulaires. La Figure 3-2 de la position de l'engrenage planétaire à été obtenue.

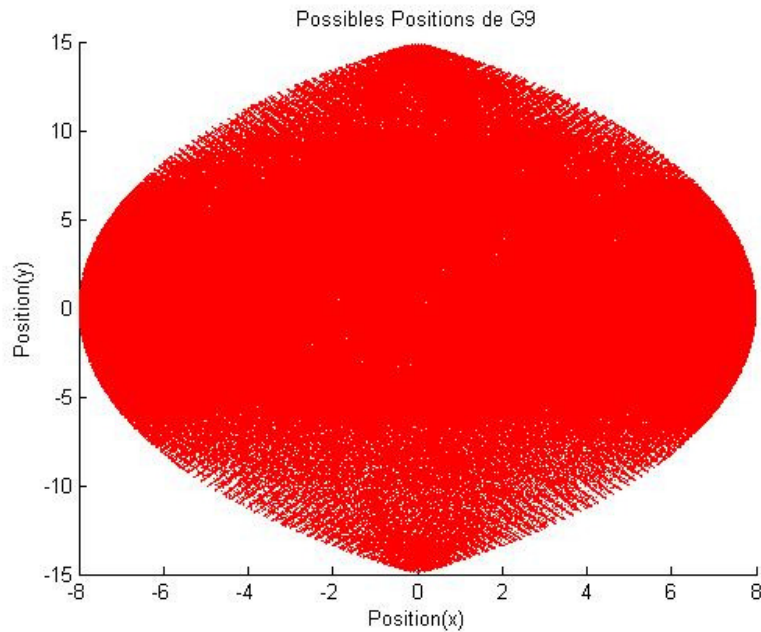


Figure 3-2 Espace de travail du joint  $G_9$

Où l'orientation de l'effecteur  $\theta_{ee}$  est bornée selon

$$-\pi - r(2\pi) \leq \theta_{ee} \leq \pi + r(2\pi) \quad (4.8)$$

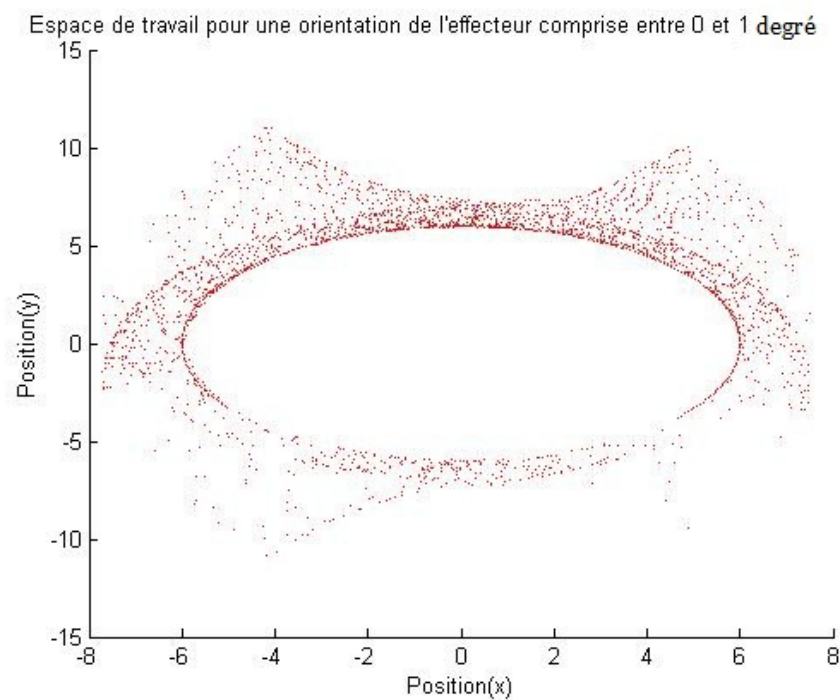


Figure 3-3 Espace de travail pour une orientation constante de l'effecteur de 0 à 1 degré

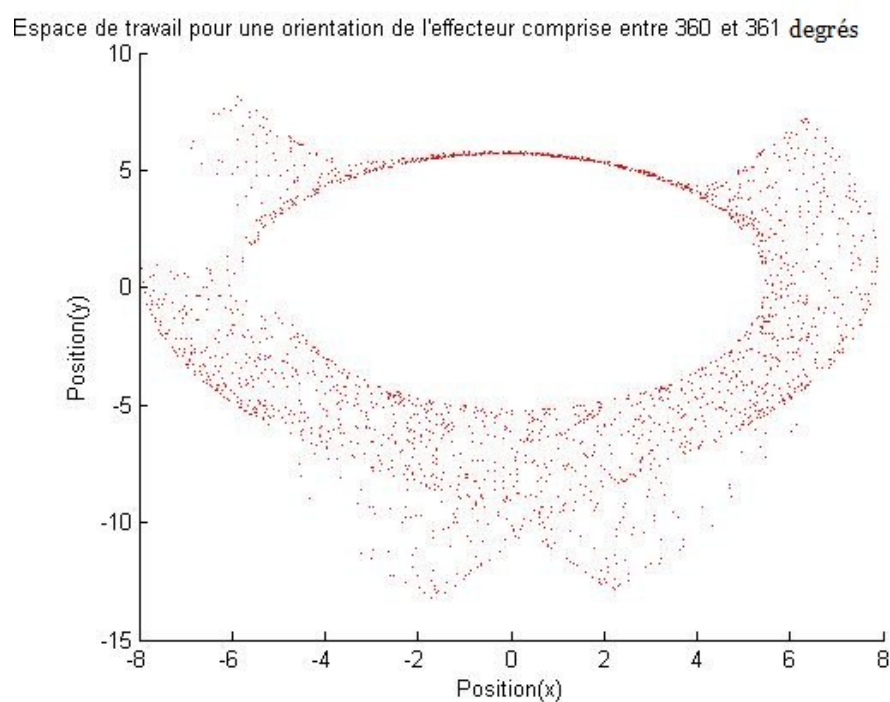


Figure 3-4 Espace de travail pour une orientation constante de l'effecteur de 360 à 361 degrés

Par contre, il est intéressant de vérifier l'orientation de l'effecteur lorsque celle-ci est représentée selon des bornes de  $[-\pi, \pi[$ . Dans un tel contexte, les espaces de travail représenté aux Figures 3-3 et 3-4, représentant respectivement les espaces de travaux du manipulateur pour les orientations 0-1 degré et 360-361 degrés, pourrait être combiné pour former un seul espace de travail. De cette façon, il est possible d'obtenir un espace de travail beaucoup plus grand, où la presque totalité de l'espace de travail maximal est accessible pour une orientation donnée, si celle-ci est bornée selon  $[-\pi, \pi[$ . Un exemple de cet espace de travail est présenté à la Figure 3-5 où il est possible de remarquer que quelque position reste inaccessible, notamment aux extrémités et au centre de l'espace de travail.

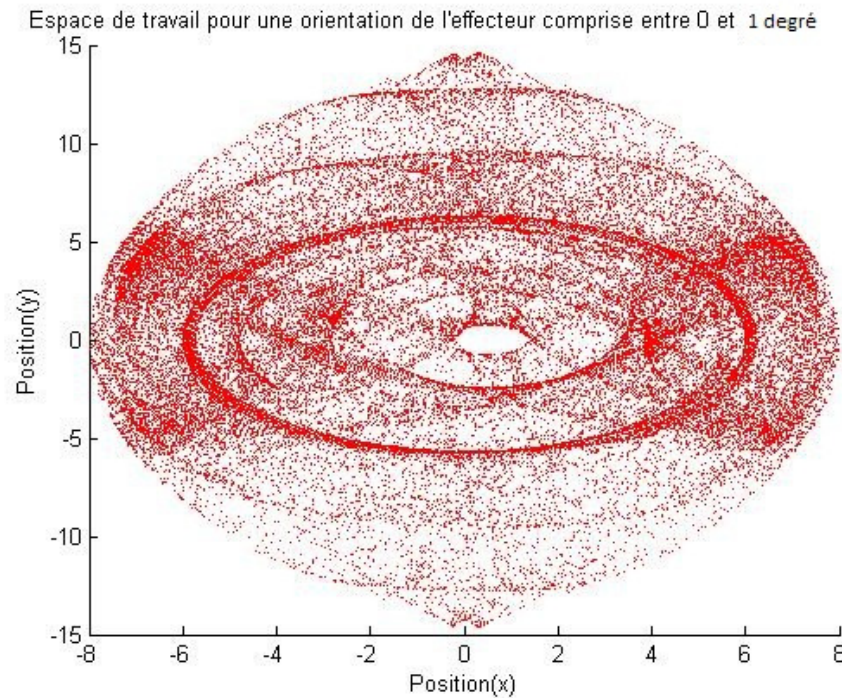


Figure 3-5 Espace de travail pour une orientation constante de l'effecteur de 0 à 1 degré avec orientation borné selon  $[-\pi, \pi[$

### 3.3 Espace de travail dextre

Tel que décrit au chapitre précédent, quelques positions ne peuvent être atteintes par l'effecteur pour certaines orientations, ce qui nous amène à nous interroger sur l'espace de travail dextre du manipulateur. L'espace de travail dextre est, tel que défini en 1.1, l'espace de travail pour lequel toutes les orientations du manipulateur sont possibles. Évidemment, en prenant l'orientation complète du manipulateur, selon les bornes définies à l'équation (4.8), l'espace de travail dextre de celui-ci est un espace nul. Par contre, pour une orientation bornée selon  $[-\pi, \pi]$ , l'espace de travail dextre devient beaucoup plus intéressant puisqu'il recouvre la majorité de l'espace de travail maximal. En utilisant le modèle géométrique inverse, il est possible d'avoir une bonne estimation de l'espace de travail dextre. De façon itérative, l'espace de travail dextre est obtenu tel que présenté à la Figure 3-6.

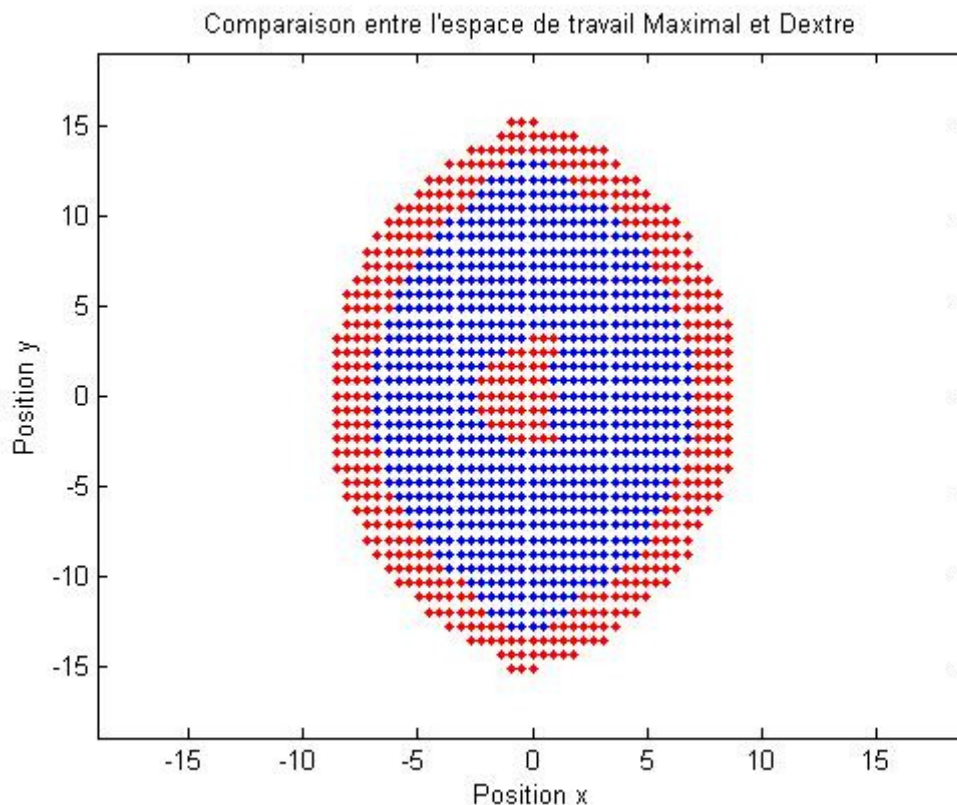


Figure 3-6 Représentation de l'espace de travail dextre (bleu) à l'intérieur de l'espace de travail maximal

### 3.4 Récapitulatif

Dans ce chapitre concernant l'espace de travail du manipulateur concerné, il a d'abord été important de définir les différents types d'espace de travail (maximal, dextre et à orientation constante). Ensuite, il a été possible d'avoir une première estimation de l'espace de travail en déterminant l'espace de travail théorique du manipulateur, incluant toutes les zones accessibles par les trois jambes simultanément. Bien que cet espace de travail soit plus restreint que celui des manipulateurs sériel de type SCARA, il est difficile de se baser seulement sur l'espace de travail maximal afin de comparer différents manipulateurs. Puisque l'utilisation de l'orientation complète du manipulateur mène à un espace de travail dextre nul, il est intéressant de regrouper les orientations multiples de  $\pi/2$  afin de borner l'orientation selon  $[-\pi, \pi[$ . De cette façon, l'espace de travail maximal devient majoritairement dextre, mise à part une bordure extérieure et une section centrale. Dans la majorité des application, ce regroupement d'orientation est sans conséquences, par contre il pourrait y avoir certaines applications industriel spécifique où ce regroupement causerait des problèmes. Cet espace de travail dextre est donc comparable aux espaces de travail dextre des manipulateurs planaires sériels de type SCARA, qui peuvent être circulaire ou annulaire selon la configuration. Puisque les manipulateurs parallèles planaires ont des espace de travail dextre restreint, le manipulateur étudié dans ce mémoire devient intéressant.

## CHAPITRE 4 CINÉMATIQUE DU MANIPULATEUR

Maintenant qu'il est possible de connaître les poses possibles de l'effecteur selon les configurations articulaires, il est intéressant d'évaluer les propriétés cinématiques du manipulateur.

### 4.1 Matrices Jacobiennes

Dans plusieurs recherches, les matrices Jacobiennes sont utilisées afin d'évaluer les configurations des manipulateurs. Elles permettent, notamment, d'identifier les configurations singulières [35, 36, 37] et permettent d'évaluer la notion de dextérité. En effet, tel que décrit dans [38] et tel qu'utilisé dans [39, 40, 41], la dextérité d'un manipulateur peut être déterminée par le conditionnement  $\kappa$  de la matrice Jacobienne. La dextérité est parfois calculée comme étant l'inverse du conditionnement, c'est à dire  $1/\kappa$ , afin d'avoir une valeur incluse entre 0 et 1. Le développement de ces matrices Jacobiennes permettra de générer des configurations isotropes pour ce manipulateur.

Contrairement aux manipulateurs sériels qui n'ont qu'une seule matrice Jacobienne, les manipulateurs parallèles en possèdent deux, connue comme étant la matrice Jacobienne parallèle  $J_p$  et la matrice Jacobienne sérielle  $J_s$ . Ces matrices permettent de connaître la relation entre les mouvements de l'effecteur  $\dot{\mathbf{x}}$  en fonction des mouvements articulaires  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ , ou vice-versa, selon l'équation

$$J_p \dot{\mathbf{x}} = J_s \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.1)$$

où

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\theta}_{ee} \end{bmatrix}, \dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$



Ces deux matrices sont calculées par la méthode géométrique décrite en [41]. Premièrement, trois équations de fermeture doivent être définies pour le manipulateur. La première boucle choisie utilise le joint actif  $R_1$  et est représentée par la boucle BB-A1-C2-C5-EE-BB. Cette première équation de fermeture est donc définie comme étant

$$\mathbf{p} - \mathbf{ee} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_5 \quad (4.3)$$

En utilisant un vecteur  $\mathbf{k}$  unitaire selon l'axe z positif, la dérivée par rapport au temps de l'équation de fermeture (4.3) devient

$$\dot{\mathbf{p}} - (\mathbf{k} \times \mathbf{ee})\dot{\theta}_{ee} = (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_1)\dot{\theta}_1 + (\mathbf{k} \times \mathbf{c}_2)\dot{\beta}_2 + (\mathbf{k} \times \mathbf{c}_5)\dot{\beta}_5 \quad (4.4)$$

De façon similaire, la dérivée par rapport au temps de l'équation (2.11) permet d'obtenir l'équation suivante

$$\dot{\beta}_5 = \frac{\dot{\beta}_4(1+r) - \dot{\theta}_{ee}}{r} \quad (4.5)$$

Il est possible maintenant de simplifier les équations selon l'hypothèse que le mécanisme à 4 membrures principal forme un parallélogramme. Tel que décrit dans le chapitre 2, cette hypothèse est vraie lorsque les joints  $G_9$  et  $R_4$  ne sont pas coïncidents. De ce fait, l'équation suivante est vraie

$$\dot{\beta}_2 = \dot{\beta}_4 \quad (4.6)$$

En substituant les équations (4.5) et (4.6) à l'équation (4.4), l'équation suivante est obtenue

$$\dot{\mathbf{p}} + \left( \mathbf{k} \times \left( \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{c}_5 - \mathbf{ee} \right) \right) \dot{\theta}_{ee} = (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_1) \dot{\theta}_1 + \left( \mathbf{k} \times \left( \mathbf{c}_2 + \left( \frac{1+r}{r} \right) \mathbf{c}_5 \right) \right) \dot{\beta}_4 \quad (4.7)$$

Étant donné que le terme  $\beta_4$  représente un joint passif, il doit être éliminé de l'équation (4.7). Pour ce faire, un produit scalaire est effectué entre chaque côté de l'équation et le terme multipliant

$\dot{\beta}_4$ , c'est-à-dire le terme  $\left( \mathbf{k} \times \left( \mathbf{c}_2 + \left( \frac{1+r}{r} \right) \mathbf{c}_5 \right) \right)$ . Il est donc possible d'éliminer le terme  $\dot{\beta}_4$  de

l'équation et ainsi obtenir le résultat suivant.

$$\left( \mathbf{c}_2 + \left( \frac{1+r}{r} \right) \mathbf{c}_5 \right)^T \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{k}^T \left( \left( \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{c}_5 - \mathbf{ee} \right) \times \left( \mathbf{c}_2 + \left( \frac{1+r}{r} \right) \mathbf{c}_5 \right) \right) \dot{\theta}_{ee} = \mathbf{k}^T \left( \mathbf{a}_1 \times \left( \mathbf{c}_2 + \left( \frac{1+r}{r} \right) \mathbf{c}_5 \right) \right) \dot{\theta}_1 \quad (4.8)$$

De façon similaire, l'équation de la seconde boucle (BB-A2-B-C5-EE-BB) peut être développée.

$$\mathbf{p} - \mathbf{ee} = \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{c}_5 \quad (4.9)$$

$$\dot{\mathbf{p}} - (\mathbf{k} \times \mathbf{ee}) \dot{\theta}_{ee} = (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_2) \dot{\theta}_2 + (\mathbf{k} \times \mathbf{b}_2) \dot{\alpha}_2 + (\mathbf{k} \times \mathbf{c}_5) \dot{\beta}_5 \quad (4.10)$$

où  $\dot{\beta}_5 = \dot{\beta}_3 = 0$ , puisque  $\dot{\mathbf{a}}_1 = \dot{\mathbf{u}}_3 = 0$ .

Afin d'éliminer le terme  $\dot{\alpha}_2$ , représentant l'orientation de la membrure B2, un produit scalaire est effectué entre chaque côté de l'équation (4.10) et le terme  $\mathbf{b}_2$ . L'équation finale de cette boucle devient

$$\mathbf{b}_2^T \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{k}^T (\mathbf{ee} \times \mathbf{b}_2) \dot{\theta}_{ee} = \mathbf{k}^T (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) \dot{\theta}_2 \quad (4.11)$$

La troisième et dernière boucle (BB-A3-B3-C4-EE-BB) est très similaire à la seconde et est développée de la même façon. Le résultat devient

$$\mathbf{b}_3^T \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{k}^T (\mathbf{ee} \times \mathbf{b}_3) \dot{\theta}_{ee} = \mathbf{k}^T (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) \dot{\theta}_3 \quad (4.12)$$

À l'aide des équations développées précédemment, il est maintenant possible de les représenter de façon matricielle et ainsi obtenir les matrices Jacobiennes parallèles et sérielles.

$$\begin{bmatrix} j_{p11} & j_{p12} & j_{p13} \\ b_{2x} & b_{2y} & ee_x b_{2y} - ee_y b_{2x} \\ b_{3x} & b_{3y} & ee_x b_{3y} - ee_y b_{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\theta}_{ee} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{s11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2x} b_{2y} - a_{2y} b_{2x} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3x} b_{3y} - a_{3y} b_{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

où

$$j_{p11} = \left( c_{2x} + \left( \frac{1+r}{r} \right) c_{5x} \right) \quad (4.14)$$

$$j_{p12} = \left( c_{2y} + \left( \frac{1+r}{r} \right) c_{5y} \right) \quad (4.15)$$

$$j_{p13} = \left( \left( \frac{1}{r} \right) c_{5x} - ee_x \right) \left( c_{2y} + \left( \frac{1+r}{r} \right) c_{5y} \right) - \left( \left( \frac{1}{r} \right) c_{5y} - ee_y \right) \left( c_{2x} + \left( \frac{1+r}{r} \right) c_{5x} \right) \quad (4.16)$$

$$j_{s11} = a_{1x} \left( c_{2y} + \left( \frac{1+r}{r} \right) c_{5y} \right) - a_{1y} \left( c_{2x} + \left( \frac{1+r}{r} \right) c_{5x} \right) \quad (4.17)$$

De façon évidente, les variables  $c_{2x}$ ,  $c_{2y}$ , représentent les composantes x et y du vecteur  $\mathbf{c}_2$ . De même pour les autres variables.

## 4.2 Vérification des matrices Jacobiennes

Puisque les matrices Jacobiennes du manipulateur permettent de lier les mouvements articulaires aux mouvements de l'effecteur, il est possible d'utiliser ces matrices afin de positionner l'effecteur à un endroit et une orientation désiré. Cette méthode sera donc utilisée afin de valider le calcul des matrices Jacobiennes. En effet, l'utilisation de l'équation (4.1) permet de connaître les mouvements articulaires nécessaires pour un mouvement de l'effecteur selon un vecteur position et orientation. Étant donné que les matrices Jacobiennes sont calculées en fonction de la configuration du manipulateur, celles-ci sont modifiées au cours d'un mouvement, ce qui signifie que plus le vecteur déplacement sera grand, plus l'erreur de position finale sera grande. L'utilisation d'un algorithme itératif permettra d'obtenir la position et l'orientation désirée.

Cet algorithme déterminera d'abord la matrice Jacobienne pour la configuration initiale du manipulateur. En utilisant le vecteur déplacement  $\Delta \mathbf{x}$  entre la position initiale  $\mathbf{x}$  et la position désirée  $\mathbf{x}_{\text{désiré}}$ , un  $\Delta \boldsymbol{\theta}$  est calculé afin d'atteindre la position finale. En ajoutant le  $\Delta \boldsymbol{\theta}$  à la configuration articulaire initiale, une nouvelle configuration articulaire est obtenue. De cette configuration articulaire est obtenue la configuration du manipulateur ainsi que la pose du manipulateur. Puisque le vecteur déplacement est non nul et que les matrices Jacobiennes ne sont pas constante, la nouvelle pose ne sera pas égale à la position désirée  $\mathbf{x}_{\text{désiré}}$ . Il est donc possible de déterminer les nouvelles matrices Jacobiennes de ce manipulateur pour cette nouvelle configuration et d'utiliser un nouveau vecteur déplacement entre cette nouvelle pose et la pose finale. De cette façon, la position calculé devrait converger vers la position désirée  $\mathbf{x}_{\text{désiré}}$ . Une telle convergence vérifiera donc le calcul des matrices Jacobiennes.

Tout d'abord, il faut déterminer une position de départ, qui sera celle présentée à la Figure 4-1, obtenue par la configuration articulaire suivante:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \\ \pi/2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Pour cette configuration, la pose de l'effecteur devient

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.9646 \\ 12.3694 \\ 22.2581 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

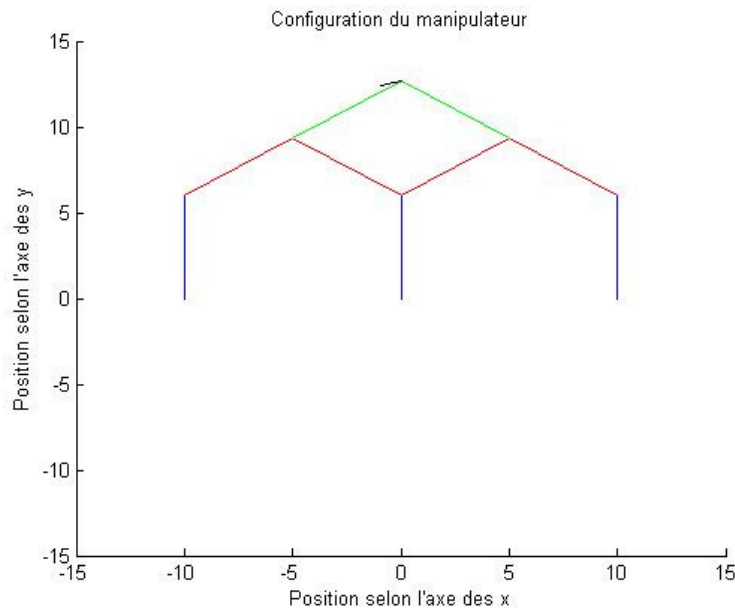


Figure 4-1 Position de départ pour validation du calcul des matrices Jacobiennes

À partir de cette position, il est possible de définir une position et une orientation désirée que le manipulateur devra atteindre. Dans le cas présenté ici, la pose désirée sera

$$\mathbf{x}_{\text{désiré}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 12 \\ 22 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Ce qui donne un vecteur déplacement original de

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.354 \\ -0.3694 \\ -0.2581 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Il est donc possible d'utiliser l'équation suivante, obtenue à partir de l'équation (4.1), afin d'obtenir un  $\Delta \theta$

$$\Delta \theta = J_s^{-1} J_p k \Delta \mathbf{x} \quad (4.22)$$

où  $k$  est un facteur réduisant l'amplitude du vecteur de déplacement. En effet, de grands déplacements peuvent mener à des positions indésirables, surtout à proximité de positions singulières. Dans ce cas-ci, un facteur  $k = 1$  a été utilisé.

Une fois  $\Delta \theta$  calculé, il suffit d'appliquer ce mouvement articulaire à la configuration articulaire précédente et de calculer la nouvelle pose de l'effecteur et de cette nouvelle pose, un nouveau vecteur déplacement sera calculé. Cet algorithme itératif est répété jusqu'à obtenir

$$\|\Delta \mathbf{x}\| \leq 0.001 \quad (4.23)$$

Cette borne peut être modifiée afin d'augmenter ou diminuer la précision de la position finale. L'algorithme a permis d'obtenir la configuration présentée à la Figure 4-2, donnant une position finale de

$$\mathbf{x}_{\text{finale}} = \begin{bmatrix} -0.9991 \\ 12.0003 \\ 22.0000 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

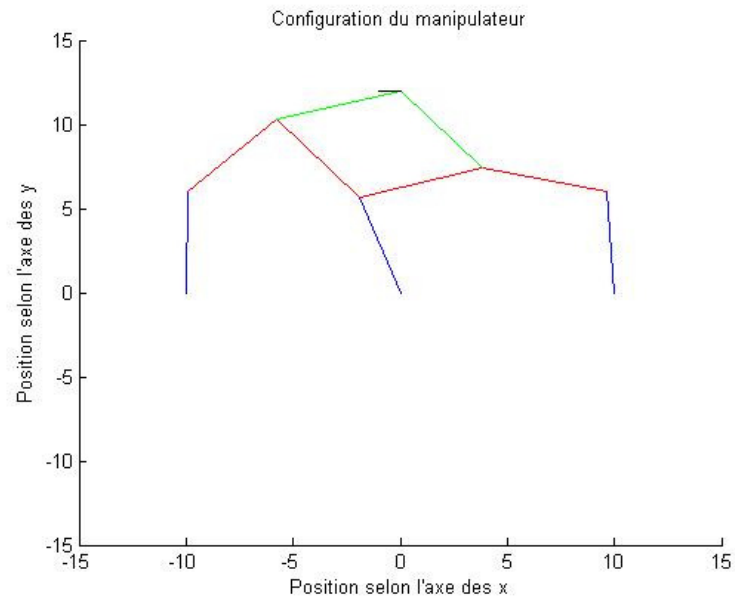


Figure 4-2 Position finale pour la validation du calcul des matrices Jacobiennes permettant ainsi de valider l'algorithme de calcul des matrices Jacobiennes.

### 4.3 Récapitulatif

Dans ce chapitre, il a été question du calcul des matrices Jacobiennes du manipulateur. Il a été d'abord défini que, puisque le manipulateur est parallèle, l'équation cinématique possède deux matrices Jacobiennes. Il a été possible de déterminer la nature de ces matrices en utilisant trois équations de fermetures indépendantes entre la base et l'effecteur du manipulateur, passant chacune par un actionneur différent. Il a été ensuite possible de vérifier ces matrices Jacobiennes en utilisant celles-ci afin d'effectuer un mouvement de l'effecteur du manipulateur. La convergence du déplacement vers des coordonnées d'arrivées vérifie le calcul des matrices Jacobiennes sérielles et parallèles.



## CHAPITRE 5 ISOTROPIE

L'isotropie d'un manipulateur est une propriété intéressante. Un manipulateur étant dans une configuration isotrope peut se mouvoir dans toutes les directions de son espace de travail de façon équivalente. Cette propriété représente donc la meilleure dextérité possible d'un manipulateur. De façon concrète, un manipulateur est dans une configuration isotrope lorsque les conditionnements  $\kappa$  des matrices Jacobiennes sont égaux à un.

### 5.1 Méthode d'obtention de matrices isotropes

Afin d'obtenir une ou plusieurs configurations isotropes du manipulateur étudié, il nous faut contraindre la matrice Jacobienne combinée afin qu'elle soit isotrope, c'est-à-dire que son conditionnement doit être égal à un. Tout d'abord, il est important de connaître que le conditionnement  $\kappa$  d'une matrice Jacobienne est défini selon

$$\kappa(J) = \kappa(J^{-1}) = \|J^{-1}\| \|J\| \quad (5.1)$$

où le choix de la norme utilisée peut modifier la valeur du conditionnement  $\kappa$ .

Un choix de norme largement utilisé dans le domaine de la robotique est la norme euclidienne. Celle-ci correspond à la plus grande valeur propre  $\lambda$  de la matrice telle que

$$\det(J^T J - \lambda I) = 0 \quad (5.2)$$

En utilisant cette norme, le conditionnement de la matrice devient donc le ratio entre la plus grande et la plus petite valeur propre. Pour obtenir un conditionnement égal à un, donc une matrice isotrope, il suffit que la plus grande et la plus petite valeur propres soient égales. Pour ce faire, il est possible de contraindre la matrice que nous voulons isotrope à être proportionnelle à une matrice identité. Pour ce faire, il suffit à contraindre la matrice  $J$  telle que

$$\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (5.3)$$

De cette façon, la matrice  $\mathbf{J}$  sera isotrope.

## 5.2 Isotropie de la matrice Jacobienne parallèle

Une façon d'obtenir l'isotropie de la matrice Jacobienne combinée est d'obtenir l'isotropie des deux matrices Jacobienne, sérielle et parallèle, de façon indépendante. Cette méthode a pour conséquence d'être plus contraignante que l'unique isotropie de la matrice Jacobienne combinée, mais elle est plus simple à obtenir.

L'isotropie de la matrice Jacobienne parallèle est plutôt complexe à effectuer du fait qu'aucun terme n'est nul. En utilisant la contrainte élaborée à l'équation (5.3), il est possible d'obtenir les contraintes suivantes

$$d_x^2 + b_{2x}^2 + b_{3x}^2 = \sigma^2 \quad (5.4)$$

$$d_y^2 + b_{2y}^2 + b_{3y}^2 = \sigma^2 \quad (5.5)$$

$$\left( \mathbf{k} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{ee}) \right)^2 + \left( \mathbf{k} \cdot (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{ee}) \right)^2 + \left( \mathbf{k} \cdot \left( \mathbf{d} \times \left( \mathbf{ee} - \frac{\mathbf{c}_5}{r} \right) \right) \right)^2 = \sigma^2 \quad (5.6)$$

ainsi que les équations

$$b_{2x} b_{2y} + b_{3x} b_{3y} + d_x d_y = 0 \quad (5.7)$$

$$d_x \left( \mathbf{k} \cdot \left( \mathbf{d} \times \left( \mathbf{ee} - \frac{\mathbf{c}_5}{r} \right) \right) \right) - b_{2x} (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{ee})) - b_{3x} (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{ee})) = 0 \quad (5.8)$$

$$d_y \left( \mathbf{k} \cdot \left( \mathbf{d} \times \left( \mathbf{ee} - \frac{\mathbf{c}_5}{r} \right) \right) \right) - b_{2y} (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{ee})) - b_{3y} (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{ee})) = 0 \quad (5.9)$$

avec

$$\mathbf{d} = \mathbf{c}_2 + \left( \frac{1+r}{r} \right) \mathbf{c}_5 \quad (5.10)$$

Puisqu'il y a 6 équations et 12 inconnus, il est nécessaire d'imposer des valeurs à 6 variables de façon arbitraire. En utilisant différentes valeurs, différents manipulateurs seront obtenus. Tout d'abord, les valeurs définissant le vecteur  $\mathbf{d}$ , la valeur  $r$  ainsi que la valeur de  $b_{2x}$  seront imposées de façon arbitraire tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &\equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \\ r &\equiv 10 \\ b_{2x} &\equiv 2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

où il est nécessaire d'imposer la condition suivante

$$b_{2x} \neq 0 \quad (5.12)$$

Il est nécessaire d'imposer une valeur à  $b_{3x}$  tel que l'inéquation suivante soit respectée

$$\left( \frac{4\sigma^2 - 4d_y^2}{b_{2x}^2} \right) b_{3x}^2 + \left( 4\sigma^2 - 4d_y^2 - \frac{4d_x^2 d_y^2}{b_{2x}^2} \right) \geq 0 \quad (5.13)$$

où  $\sigma^2$  est calculé par l'équation (5.4)

Dans le cas étudié ici, la valeur de  $b_{3x}$  sera de 4.

À l'aide des valeurs imposées, il est possible d'obtenir la valeur de  $\sigma^2$  par l'équation (5.4) et sera de 17 dans notre exemple. En utilisant l'équation (5.7), il est possible d'isoler la variable  $b_{2y}$  de telle sorte à obtenir l'équation

$$b_{2y} = \frac{-d_x d_y - b_{3x} b_{3y}}{b_{2x}} \quad (5.14)$$

De par cette équation, il est nécessaire d'imposer la condition (5.12).

En utilisant l'équation (5.12) dans (5.5), il est possible d'obtenir les solutions de  $b_{3y}$  qui satisfont l'équation quadratique suivante

$$\left(1 + \frac{b_{3x}^2}{b_{2x}^2}\right) b_{3y}^2 + \left(\frac{2 d_x d_y b_{3x}}{b_{2x}^2}\right) b_{3y} + \left(d_y^2 + \frac{d_x^2 d_y^2}{b_{2x}^2} - \sigma^2\right) = 0 \quad (5.15)$$

Cette dernière équation justifie l'imposition de la condition (5.13) afin d'éviter des solutions imaginaires.

Pour l'exemple présenté dans ce mémoire, les solutions à l'équation (5.15) sont

$$\begin{aligned} b_{3y\_1} &= -1.3230 \\ b_{3y\_2} &= -3.4770 \end{aligned} \quad (5.16)$$

En insérant ces valeurs dans l'équation (5.14), les valeurs obtenues pour la variable  $b_{2y}$  sont

$$\begin{aligned} b_{2y\_1} &= -3.3541 \\ b_{2y\_2} &= 0.9541 \end{aligned} \quad (5.17)$$

En utilisant les équations (5.6), (5.8) et (5.9), il est maintenant possible de remplacer les valeurs de  $(b_2 \times ee)$ ,  $(b_3 \times ee)$  et  $(d \times (ee - c_5/r))$  par les variables  $u$ ,  $v$  et  $w$  respectivement. de cette façon, les équations suivantes sont obtenues

$$u^2 + v^2 + w^2 = \sigma^2 \quad (5.18)$$

$$d_x w - b_{2x} u - b_{3x} v = 0 \quad (5.19)$$

$$d_y w - b_{2y} u - b_{3y} v = 0 \quad (5.20)$$

Ces équations donnent un système à 3 équations, 3 inconnues, ce qui permet d'obtenir les valeurs de  $u$ ,  $v$  et  $w$  tel que

$$w^2 = \frac{\sigma^2}{1 + \frac{d_x^2}{b_{2x}^2} - \frac{2d_x b_{3x}}{b_{2x}^2} \left( \frac{b_{2y} d_x - b_{2x} d_y}{b_{2y} b_{3x} - b_{2x} b_{3y}} \right) + \left( 1 + \frac{b_{3x}^2}{b_{2x}^2} \right) \left( \frac{b_{2y} d_x - b_{2x} d_y}{b_{2y} b_{3x} - b_{2x} b_{3y}} \right)^2} \quad (5.21)$$

$$v = w \left( \frac{b_{2y} d_x - b_{2x} d_y}{b_{2y} b_{3x} - b_{2x} b_{3y}} \right) \quad (5.22)$$

$$u = \frac{d_x w - b_{3x} v}{b_{2x}} \quad (5.23)$$

Avec deux solutions possibles pour chaque solution préalablement trouvée, ce qui représente 4 solutions tel que

$$\left. \begin{array}{l} u = 3.7081, v = -3.3541, w = -2.0000 \\ u = -3.7081, v = 3.3541, w = 2.0000 \end{array} \right\} \text{ pour } b_{2y} = -3.3541 \text{ et } b_{3y} = -1.3230 \quad (5.24)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = -4.9081, v = 0.9541, w = -2.0000 \\ u = 4.9081, v = -0.9541, w = 2.0000 \end{array} \right\} \text{ pour } b_{2y} = 0.9541 \text{ et } b_{3y} = -3.4770 \quad (5.25)$$

avec

$$u = \mathbf{k} \bullet (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{ee}) = b_{2x} ee_y - b_{2y} ee_x \quad (5.26)$$

$$v = \mathbf{k} \bullet (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{ee}) = b_{3x} ee_y - b_{3y} ee_x \quad (5.27)$$

$$w = \mathbf{k} \bullet \left( \mathbf{d} \times \left( \mathbf{ee} - \frac{\mathbf{c}_5}{r} \right) \right) = d_x \left( ee_y - \frac{c_{5y}}{r} \right) - d_y \left( ee_x - \frac{c_{5x}}{r} \right) \quad (5.28)$$

puisque  $b_{2x}$  n'est pas égal à 0 de par la condition (5.12), il est possible d'isoler  $ee_y$  dans l'équation (5.26) de sorte à obtenir l'équation

$$ee_y = \frac{u + b_{2y} ee_x}{b_{2x}} \quad (5.29)$$

En substituant l'équation (5.29) dans (5.27) il est possible d'obtenir la valeur de  $ee_x$  par l'équation

$$ee_x = \frac{v^* b_{2x} - u^* b_{3x}}{b_{2y} b_{3x} - b_{2x} b_{3y}} \quad (5.30)$$

Dans l'exemple présenté jusqu'à présent, les valeurs de  $ee_x$  et  $ee_y$  deviennent

$$\left. \begin{array}{l} ee_{x-1} = 2 \\ ee_{x-2} = -2 \end{array} \right\} \text{avec } b_{2y-1} \text{ et } b_{3y-1} \quad (5.31)$$

$$\left. \begin{array}{l} ee_{x-3} = 2 \\ ee_{x-4} = -2 \end{array} \right\} \text{avec } b_{2y-2} \text{ et } b_{3y-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} ee_{y-1} = -1.5 \\ ee_{y-2} = 1.5 \end{array} \right\} \text{avec } b_{2y-1} \text{ et } b_{3y-1} \quad (5.32)$$

$$\left. \begin{array}{l} ee_{y-3} = -1.5 \\ ee_{y-4} = 1.5 \end{array} \right\} \text{avec } b_{2y-2} \text{ et } b_{3y-2}$$

Afin de déterminer les valeurs de  $c_{5x}$  et  $c_{5y}$ , il faut imposer une valeur à l'une de ces valeurs. Dans le cas présenté, la valeur de  $c_{5x}$  sera imposée tel que

$$c_{5x} \equiv 4 \quad (5.33)$$

ce qui permet d'obtenir la valeur de  $c_{5y}$  tel que

$$c_{5y} = -r \left( \frac{w + d_y \left( ee_x - \frac{c_{5x}}{r} \right)}{d_x} - ee_y \right) \quad (5.34)$$

où les valeurs que prennent  $c_{5y}$  dans l'exemple présenté précédemment deviennent,

$$\begin{aligned} c_{5y_1} &= -29.6667 \\ c_{5y_2} &= 40.3333 \\ c_{5y_3} &= -29.6667 \\ c_{5y_4} &= 40.3333 \end{aligned} \quad (5.35)$$

En utilisant l'équation (5.10), il est possible de déterminer les valeurs du vecteur  $c_2$  aisément. Dans l'exemple présenté, les valeurs seront de

$$c_{2x} = -1.4 \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} c_{2y_1} &= 36.6333 \\ c_{2y_2} &= -40.3667 \\ c_{2y_3} &= 36.6333 \\ c_{2y_4} &= -40.3667 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Par la méthodologie décrite précédemment, il est maintenant possible de positionner les vecteurs  $b_2$ ,  $b_3$ ,  $c_2$ ,  $c_5$  et  $ee$  permettant ainsi de connaître 4 configurations isotropes du manipulateur. En utilisant les vecteurs calculés, il est possible d'obtenir les quatre matrices Jacobienne suivantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{p-1} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & -3.3541 & -3.7081 \\ 4 & -1.3230 & 3.3541 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{p-2} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3.3541 & 3.7081 \\ 4 & -1.3230 & -3.3541 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{p-3} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 0.9541 & 4.9081 \\ 4 & -3.4770 & -0.9541 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{p-4} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0.9541 & -4.9081 \\ 4 & -3.4770 & 0.9541 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

où le conditionnement de chaque matrice est égal à 1.

### 5.3 Isotropie de la matrice Jacobienne sérielle

L'isotropie de la matrice Jacobienne sérielle est plus simple que celle de la matrice Jacobienne parallèle du fait que celle-ci est une matrice diagonale. En utilisant la contrainte de l'équation (5.3), il devient évident que tous les termes de la matrice doivent être égaux. De cette façon, les équations suivantes sont obtenues

$$\mathbf{k} \bullet (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{d}) = \tau^2 \tag{5.39}$$

$$\mathbf{k} \bullet (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) = \tau^2 \tag{5.40}$$

$$\mathbf{k} \bullet (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) = \tau^2 \tag{5.41}$$

Puisque les vecteurs  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{b}_2$  et  $\mathbf{b}_3$  sont déjà connus de par la méthodologie présentée en 5.2, il nous faut seulement imposer les valeurs de  $a_{1x}$ ,  $a_{1y}$ ,  $a_{2x}$  et  $a_{3x}$  afin d'obtenir un système à 3 équations 3 inconnus. Pour l'exemple présenté, ces valeurs seront de

$$\begin{aligned}
a_{1x} &\equiv 0 \\
a_{1y} &\equiv 5 \\
a_{2x} &\equiv 3 \\
a_{3x} &\equiv 2
\end{aligned} \tag{5.42}$$



de cette façon,  $\tau^2$  peut être calculée par l'équation (5.39) et est égale à -15. En utilisant cette solution, il est maintenant possible de déterminer la valeur de  $a_{2y}$  en utilisant l'équation (5.40).

$$a_{2y} = \frac{a_{2x} b_{2y} - \tau^2}{b_{2x}} \quad (5.43)$$

où, dans l'exemple présenté,  $a_{2y}$  prend les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} a_{2y_1} &= 2.4689 \text{ avec } b_{2y_1} \\ a_{2y_2} &= 8.9311 \text{ avec } b_{2y_2} \end{aligned} \quad (5.44)$$

De façon similaire, l'utilisation de l'équation (5.41) permet de déterminer les valeurs possibles de  $a_{3y}$ . Celles-ci seront

$$\begin{aligned} a_{3y_1} &= -1.3230 \text{ avec } b_{3y_1} \\ a_{3y_2} &= -3.4770 \text{ avec } b_{3y_2} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Évidemment, les matrices Jacobiennes sérielles deviendront, dans les deux cas,

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

où le conditionnement est égal à 1.

## 5.4 Configurations isotropes du manipulateur

En utilisant les deux méthodologies présentées en 5.2 et 5.3, il est possible d'obtenir quelques configurations isotropes pour le manipulateur étudié. En effet, le calcul des différents paramètres permettant l'obtention de matrices Jacobiennes isotropes, permettent de définir la position et l'orientation des différentes membrures. Il est donc maintenant possible de connaître les configurations isotropes du manipulateur obtenu pour les différents paramètres imposés. Par cette méthode, il est possible d'obtenir quatre différentes configurations isotropes. Les configurations obtenues dans l'exemple présenté dans ce mémoire sont présentées à la figure 5-1.

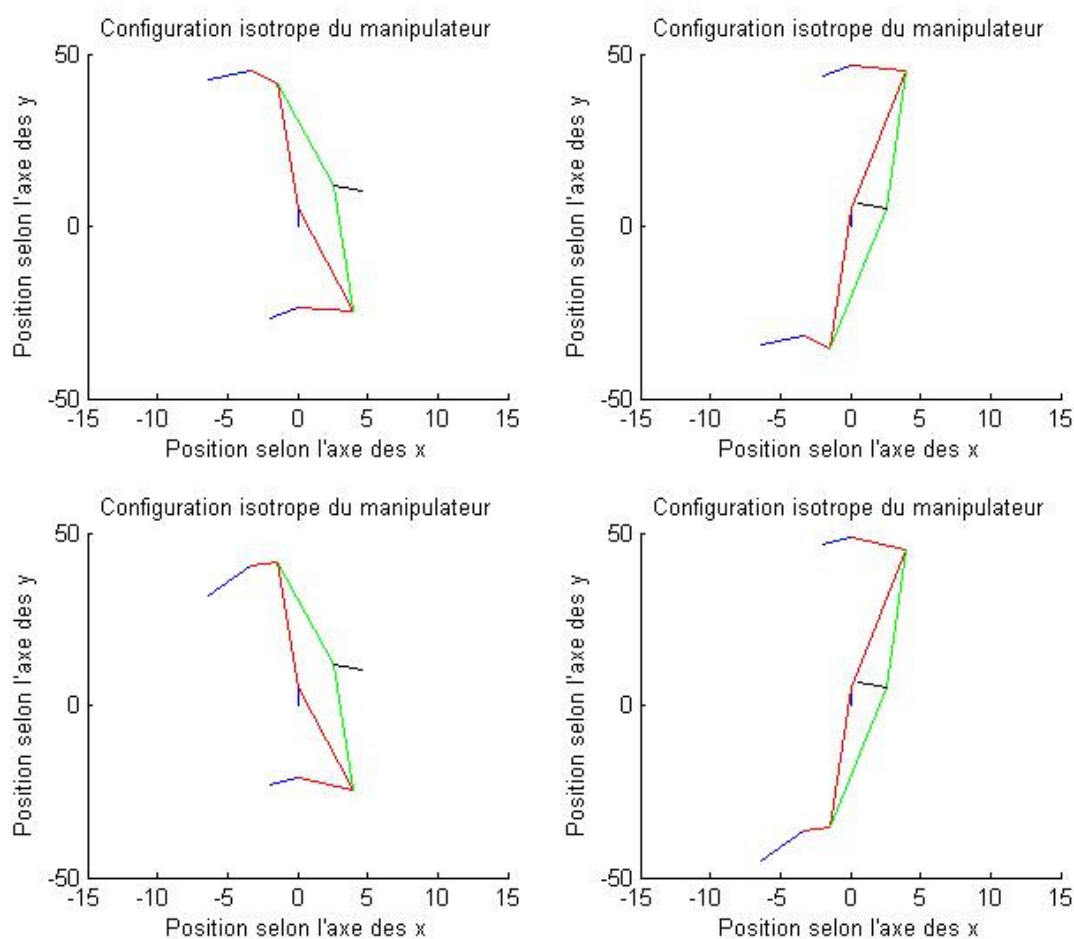


Figure 5-1 Exemples de configurations isotropes du manipulateur

## 5.5 Récapitulatif

Dans ce chapitre, il a été question de l'isotropie du manipulateur. En effet, une première définition a permis de définir l'isotropie d'une matrice comme étant une configuration dans laquelle l'effecteur du manipulateur peut se mouvoir de façon équivalente selon tous les degrés de liberté. Un manipulateur est dit dans une configuration isotrope lorsque le conditionnement de ses deux matrices Jacobienne ont un conditionnement égale à 1. Puisque ce type de conditionnement est obtenu pour tout type de matrice scalaire, il a été possible de définir une méthodologie permettant l'isotropie de la matrice Jacobienne parallèle et sérielle. Bien que ces méthodologies ne sont pas uniques, celles présentées dans ce chapitre ont été vérifiées par un exemple ayant permis de générer quatre configurations isotropes. Bien que les manipulateurs générés soit isotropes, ils n'ont pas forcément de bon manipulateurs. En effet, ils peuvent avoir un espace de travail restreint ou même un mauvais conditionnement pour la majorité son espace de travail. Cette méthodologie se veut donc un outils permettant la génération et l'optimisation de ce nouveau type de manipulateur pour des recherches à venir.

## CONCLUSION

L'objectif principal de ce mémoire étant de développer des outils permettant l'analyse et l'optimisation d'une nouvelle architecture de manipulateur parallèle planaire a été accompli. En effet, il a été possible de déterminer le positionnement et l'orientation de l'effecteur selon les configurations articulaires par la résolution du modèle géométrique direct. Il a aussi été possible, à l'inverse, de déterminer les configurations articulaires nécessaires à un positionnement précis de l'effecteur par la résolution du modèle géométrique inverse. La vérification de ces deux algorithmes a permis d'assurer qu'aucune erreur n'a été faite.

L'utilisation des modèles géométriques directs et inverse ont ensuite permis d'obtenir une première vérification de l'espace de travail. Puisque les manipulateurs parallèles plans ont des espaces de travail dextre limités et que le manipulateur étudié cherche à régler cette problématique, ce type d'espace de travail est le plus important à vérifier. Il a donc été déterminé que le manipulateur permet un espace de travail majoritairement dextre si l'orientation de l'effecteur est représentée selon un spectre réduit de  $2\pi$ , par exemple borné selon  $[-\pi, \pi[$ , ce qui permet de joindre les espaces de travail où les différences d'orientation sont des multiples de  $2\pi$  ( $-2\pi, 2\pi, 4\pi$ , etc.). Malgré le fait que l'espace de travail dextre de ce manipulateur soit comparable à celui des manipulateurs sériels SCARA, pour des applications où les orientations multiples de  $2\pi$  ne sont pas considérées équivalentes, l'espace de travail dextre de ce manipulateur devient nul dans le cas étudié.

Ensuite, une étude cinématique a permis d'obtenir une relation entre les mouvements des actionneurs et le positionnement et l'orientation de l'effecteur. Cette relation, obtenue en déterminant les matrices Jacobiennes parallèles et sérielles, permet notamment de générer une trajectoire et un mouvement de l'effecteur en continu.

Finalement, l'utilisation des matrices Jacobienne parallèle et sérielle a permis d'obtenir une méthodologie permettant de générer des configurations isotropes pour ce manipulateur. En effet, quatre configurations isotropes ont été générées. Lors de recherches futures, il sera possible d'optimiser l'espace de travail ou la dextérité à l'aide de cette méthodologie.

Dans des travaux futurs, il sera intéressant de définir les domaines d'unicité de ce manipulateur afin d'approfondir les connaissances concernant l'espace de travail de celui-ci. De plus, il serait

intéressant d'analyser différentes configurations afin de déterminer l'impact de la modification de certains paramètres, tel que le ratio de l'engrenage planétaire, sur le comportement du manipulateur ou des différents espaces de travail.

Finalement, un prototype pourrait être construit afin de démontrer la faisabilité de ce manipulateur.

## RÉFÉRENCES

- [1] S. Hayati et M. Mirmirani, "Improving the Absolute Positioning Accuracy of Robot Manipulators," *Journal of Robotic Systems*, vol. 2, no. 4, pp. 397-413, 1985.
- [2] Z.S. Roth, B.W. Mooring, B. Ravani, "An Overview of Robot Calibration," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 2, no. 5, pp. 377-385, 1987.
- [3] K.C. Gupta et B. Roth, "Design Considerations for Manipulator Workspace," *Journal of Mechanical Design*, vol. 104, no. 4, pp. 704-711, 1982.
- [4] D.C.H. Yang et T.W. Lee, "Heuristic Combinatorial Optimization in the Design of Manipulator Workspace," *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 14, no. 4, 1985
- [5] Z. Lai et X. Menq, "The Dexterous Workspace of Simple Manipulator," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, no. 1, pp. 99-103, 1988.
- [6] J. Hollerbach, "Dynamic scaling of manipulator trajectories," in *proceedings of American Control Conference*, 1983, pp. 752-756.
- [7] R. Paul, "Manipulator Cartesian Path Control," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 9, no. 11, pp. 702-711, 1979.
- [8] B. Siciliano, "Kinematic Control of Redundant Robot Manipulator: A Tutorial," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 3, no. 3, pp. 201-212, 1990.
- [9] V.E. Gough, "Contribution to discussion of papers on research in Automobile Stability, Control and Tyre performance," in *Proc. Auto Div. Inst. Mech. Eng.*, 1956-1957, pp. 392-394.
- [10] V.E. Gough and S.G. Whitehall, "Universal Tyre Test Machine," in *Proceeding of 9th International Technical Congress FISITA*, 1962, pp.117-137.
- [11] D. Stewart, "A Platform with Six Degrees of Freedom," in *Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 180, 1965, pp. 371-386.
- [12] J-P. Merlet, C.M. Gosselin et N. Mouly, "Workspaces of planar parallel manipulator," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, no. 1-2, pp. 7-20, 1998.

- [13] J-P. Merlet, "Determination of the orientation workspace of parallel manipulators," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 13, no. 2, pp. 143-160, 1995.
- [14] S. Brunet et L. Baron, "Workspace Computation of Parallel Manipulators Using 2K-Trees with Collision Detection," in *Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science*, 2004.
- [15] A. Fattah et A.M. Hasan Ghasemi, "Isotropic Design of Spatial Parallel Manipulators," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 21, no. 9, pp. 811-824, 2002.
- [16] B. Rousseau et L. Baron, "Kinematic Isotropy of the H4 Class of Parallel Manipulators," *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 33, no. 4, pp. 701-714, 2009.
- [17] I.A. Bonev, D. Zlatanov et C.M. Gosselin, "Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via Screw Theory," *Journal of Mechanical Design*, vol. 125, no. 3, pp. 573-581, 2003.
- [18] A. Degani et A. Wolf, "Graphical Singularity Analysis of Planar Parallel Manipulators," *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2006.
- [19] J. Hervé, "Dispositif pour le déplacement en translation spatiale d'un élément dans l'espace, en particulier pour robot mécanique," Brevet Européen, no. EP 0494565A1, 15 Juillet 1992, Disponible : <https://data.epo.org/publication-server/rest/v1.0/publication-dates/19920715/patents/EP0494565NWA1/document.html>
- [20] R. Clavel, "DELTA, a fast robot with parallel geometry," *International Symposium on Industrial Robots*, 1988, pp. 91-100.
- [21] L.H. Rolland, "The Manta and the Kanuk Novel 4-DOF Parallel Mechanisms for Industrial Handling," *Proceeding of the International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 1999,
- [22] W.Z. Guo, F. Gao et S. Mekid, "A new analysis of workspace performances and orientation capability for 3-DOF planar manipulators," *International Journal of Robotics and Automation*, Vol. 25, no. 2, pp. 89-101, 2010

- [23] S. Kucuk, "A dexterity comparison for 3-DOF planar parallel manipulators with two kinematic chains using genetic algorithms," *Mechatronics*, Vol. 19, no. 6, pp. 868-877, 2009.
- [24] A. Joubair, M. Slamani et I.A. Bonev, "A novel XY-Theta precision table and a geometric procedure for its kinematic calibration," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 28, no. 1, pp. 57-65, 2012
- [25] O. Company, F. Pierrot, S. Krut, C. Baradat et V. Nabat, "Par2: a spatial mechanism for fast planar two-degree-of-freedom pick-and-place applications", *Meccanica* 46, pp. 239-248, 2011
- [26] S. Liu, T. Huang, J. Mei, X. Zhao, P. Wang et D. Chetwynd, "Optimal Design of a 4-DOF SCARA Type Parallel Robot Using Dynamic Performance Indices and Angular Constraints", *Journal of Mechanisms and Robotics*, Vol. 4, Août 2012.
- [27] S. Amine, D. Kanaan, S. Caro et P. Wenger, "Singularity Analysis of Lower-Mobility Parallel Robots with an Articulated Nacelle," *Advances in Robot Kinematics: Motion in Man and Machine*, part 5, pp. 273-282, 2010.
- [28] V. Nabat, O. Company, S. Krut, M. Rodriguez et F. Pierrot, "Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place", *IEEE IROS: International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Edmonton, Canada, Août 2005
- [29] S. Caro, P. Wenger et D. Chablat, "Non-Singular Assembly Mode Changing Trajectories of a 6-DOF Parallel Robot", *The ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, 2012
- [30] J.J. Cervantes-Sanchez, J.C. Hernandez-Rodriguez et J. Angeles, "On the kinematic design of the 5R planar, symmetric manipulator," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, vol. 36, no. 11-12, pp. 1301-1313, 2001.
- [31] G. Alici, "An inverse position analysis of five-bar planar parallel manipulators," *Robotica*, vol. 20, no. 2, pp. 195-201, 2002.
- [32] L.-W. Tsai, *Robot Analysis - The mechanics of serial and parallel manipulators*, Wiley-Interscience, 1999.



- [33] D. Chablat, "Domaines d'unicité et parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles," Ph.D., Université de Nantes, Nantes, France, 1998.
- [34] J.-P. Merlet, *Les robots parallèles 2<sup>nd</sup> édition*, Hermes Science Publication, 1997.
- [35] C.M. Gosselin et J. Angeles, "Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains," *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, vol. 6, no. 3, pp. 281-290, 1990.
- [36] H.R. Mohammadi Daniali, P.J. Zsombor-Murray et J. Angeles, "Singularity Analysis of Planar Parallel Manipulators," *Journal of Mechanism and Machine Theory*, vol. 30, no. 5, pp. 665-678, 1995.
- [37] I. Bonev et C.M. Gosselin, "Singularity Loci of Planar Parallel Manipulators with Revolute Joints," in *Proc. 2nd workshop on Computational Kinematics*, 2001, pp. 291-299.
- [38] J.P. Merlet, "Jacobian, Manipulability, Condition Number, and Accuracy of Parallel Robots," *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, no. 1, pp. 199-206, 2006.
- [39] A.B. Koteswara Rao, P.V.M. Rao et S.K. Saha, "Workspace and Dexterity Analysis of Hexaslide Machine Tools," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2003.
- [40] R.E. Stamper, L.-W. Tsai et G.C. Walsh, "Optimization of a Three DOF Translational Platform for Well-Conditioned Workspace," *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1997.
- [41] R.S. Stoughton et T. Arai, "A Modified Stewart Platform Manipulator with Improved Dexterity," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, no. 2, pp. 166-173, 1993.

# ANNEXE 1 – « Robot manipulateur SCARA Toshiba »

## High payload mass type SCARA robot TH1050A

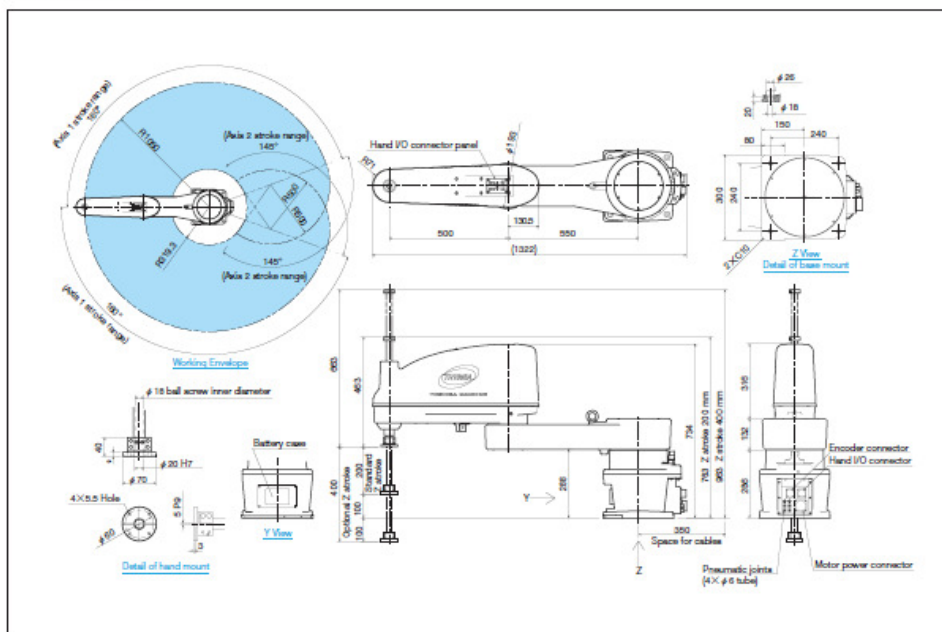
### TH1050A



|                                       |                                                                                                                                           |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Model                                 | TH1050A                                                                                                                                   |
| Type                                  | Horizontal multi-joint                                                                                                                    |
| Cleanliness (optional)                | Class 10 (0.1 $\mu$ m)                                                                                                                    |
| No. of controlled axes                | 4 axes                                                                                                                                    |
| Arm length                            | 1050 mm (550 mm + 500 mm)                                                                                                                 |
| Working Envelope                      | Axis 1 $\pm 160^\circ$<br>Axis 2 $\pm 145^\circ$<br>Axis 3 (Z-axis) 200 mm (optional: 400 mm)<br>Axis 4 (Z-axis rotation) $\pm 360^\circ$ |
| Maximum speed                         | Axis 1 300°/s<br>Axis 2 420°/s<br>Axis 3 (Z-axis) 2050 mm/s<br>Axis 4 (Z-axis rotation) 1200°/s<br>Composite 9.15 m/s                     |
| Standard cycle time (under 2 kg load) | 0.39 s                                                                                                                                    |
| Maximum payload mass                  | 20 kg                                                                                                                                     |
| Allowable moment of inertia           | 0.2 kgm <sup>2</sup> *3                                                                                                                   |
| Positioning repeatability             | X-Y $\pm 0.01$ mm *4<br>Axis 3 (Z-axis) $\pm 0.01$ mm *4<br>Axis 4 (Z-axis rotation) $\pm 0.004^\circ$ *4                                 |
| Hand wiring                           | 5 inputs / 4 outputs                                                                                                                      |
| Hand piping                           | 4 pcs. ( $\phi$ 6)                                                                                                                        |
| Position detection                    | Absolute detection                                                                                                                        |
| Robot-Controller Cable                | 5 m (optional: max. 25 m)                                                                                                                 |
| Mass                                  | 80 kg                                                                                                                                     |

For \*1, \*2, \*3 and \*4, see page 5.

### External view



# ANNEXE 2 – « Planar 3 Degrees of freedom Parallel Manipulator with an articulated Platform Featuring a Planetary Gearbox »

13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, México, 19-25 June, 2011

A12-488

## Planar 3 Degrees of freedom Parallel Manipulator with an Articulated Platform Featuring a Planetary Gearbox

Yan Vermette\*  
École Polytechnique  
Montreal, Canada

L. Baron†  
École Polytechnique  
Montreal, Canada

**Abstract**— In order to develop new architectures of parallel manipulators, this paper presents the analysis of a new 3 degrees of freedom planar parallel manipulator. The innovative feature of this design is the integration of a planetary gearbox with an articulated platform. The addition of this gearbox reduces the number of links controlling the end-effector. This manipulator can be described as a ten-bar mechanism with three active revolute joints, 5 passive revolute joints and a passive planetary gearbox joint. First, the architecture design of the manipulator will be described in detail. Then, the direct kinematic analysis will be presented. Finally, the workspace analysis will be performed.

**Keywords:** Articulated platform, Planetary gearbox, Planar parallel manipulator, Ten-bar mechanism

### I. Introduction

In the last few decades, several parallel kinematic designs have been studied for their interesting properties. Most of the previous architectures were design where all the limbs are identical, as presented in papers [1, 2]. The proposed mechanism presents an original design, which combines three actuated limbs in an articulated platform, where only two passive links drive the end-effector, which still has three degrees of freedom. Yet, very few parallel manipulator architectures present an articulated platform, as those presented in papers [3, 4].

### II. The Kinematic Design

The design presented in this paper is a ten-bar linkage mechanism, as shown in Fig. 1. The legs of the mechanism are not identical and can be described as a three kinematic chain, 2-RRR and 1-RR, connected to a four-bar linkage (C2-C3-C4-C5). This four-bar linkage controls the position of the end-effector. With this architecture, the orientation of the end-effector cannot be controlled by revolute joints only. However the utilization of a planetary gearbox at the C4, C5 and EE junction, instead of a revolute joint, can solve this problem and controls the orientation of the end-effector. The Kinematic Chain of this mechanism is shown in Fig. 2.

\* Yan.Vermette@polymtl.ca

† Luc.Baron@polymtl.ca

13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, México, 19-25 June, 2011

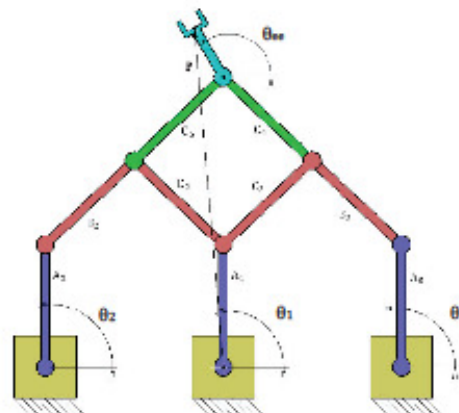


Figure 1 - Planar 3-DOF with articulated PLATFORM

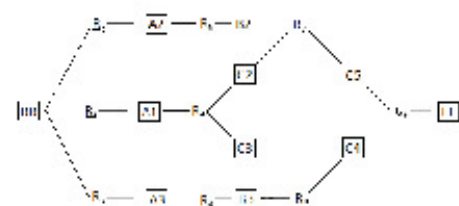


Figure 2 - Kinematic chain

The first limb is actuated by the revolute joint  $R_1$  (angle  $\theta_1$ ), which is connected to the base BB and the body A1. The position of this joint is positioned at the coordinate (0, 0, 0). The link A1 is then connected to the link C2 and C3 by a passive revolute joint  $R_4$ . These two links are part of the four-bar linkage, which controls the position and orientation of the end-effector.

The second limb is actuated by the revolute joint  $R_2$  (angle  $\theta_2$ ), which controls the orientation of the link A2 and is placed arbitrarily at the coordinate (-10, 0, 0). The link A2 is then connected to the link B2 by a passive revolute joint  $R_5$ , which is then connected to the links C2 and C5 by a passive revolute joint  $R_7$ .

The third limb is symmetrical with respect to the second limb and is actuated by the revolute joint  $R_3$  (angle  $\theta_3$ ), placed arbitrarily at the coordinate (10, 0, 0), which connects the link A3 to the base BB. The link A3 is then connected to the link B3 by a passive revolute joint  $R_6$ . This link is then connected to the links C3 and C4 by a passive revolute joint  $R_9$ .

To simplify the equations, the four-bar mechanism is a parallelogram, where C2 and C4 are chosen to be the same length and similarly C3 and C5 are the same length.

In order to achieve the control of the orientation of the end-effector, a passive planetary gearbox  $G_9$  connects the end effector to C4 and C5. Moreover, the gear ratio can be adjusted to satisfy specific needs in terms of orientation.

As shown in Fig. 3, the vectors from the origin to the actuated joints are called  $\mathbf{o}_i$  where "i" is the limb number. The vector from the origin to the first set of passive joint is called  $\mathbf{u}_i$ . The vectors from the origin to the passive joints  $R_7$  and  $R_8$  are called  $\mathbf{v}_i$  where "i" is associated to the 2<sup>nd</sup> or 3<sup>rd</sup> limb. The vector to the planetary gearbox  $G_9$  is called  $\mathbf{w}$ . The last vector, from the origin to the end effector is called  $\mathbf{p}$ . The nomenclature used to name the length of each link is the lowercase link's name ( $a_1, b_2, c_2$ ). This same nomenclature define the vector along each link when it is in bold ( $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2, \mathbf{ee}$ ).

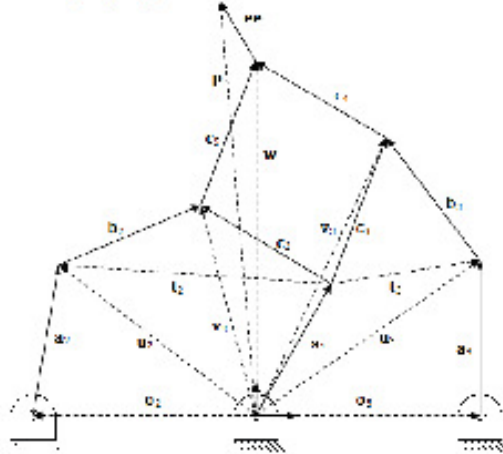


Figure 3 - Vectors diagram

### III. Direct Kinematics

The direct kinematic analysis can start with the kinematic loop BB-A1-C2-B2-A2-BB. This is a five-bar linkage mechanism with the passive revolution joint  $R_7$  as the end-effector. This kind of mechanism has been studied in many different papers [5, 6]. The position of the passive joint  $R_7$  can be calculated by the intersection

of two circles of radius  $c_2$  and  $b_2$ , for which two possible solutions exist. The centers of these circles are at the joints  $R_4$  and  $R_5$ . The positions of these joints are known as

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{o}_i + \mathbf{a}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

where

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_i \cos \theta_i \\ a_i \sin \theta_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

The position of joint 5 relative to 4 is computed as

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_1, \quad i = 2, 3 \quad (3)$$

$$q_i = \frac{(\|\mathbf{t}_i\|^2 + \|\mathbf{c}_1\|^2 - \|\mathbf{b}_1\|^2)}{2\|\mathbf{t}_i\|^2}, \quad i = 2, 3 \quad (4)$$

The two possible positions of the joint  $R_7$  ( $\mathbf{v}_2$ ) is calculated as

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_1 + q_i \mathbf{t}_i \pm \left( \frac{\|\mathbf{c}_1\|^2}{\|\mathbf{t}_i\|^2} - q_i^2 \right) \mathbf{E} \mathbf{t}_i, \quad i = 2, 3 \quad (5)$$

with

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Using the loop BB-A1-C3-B3-A3-BB, the same equations are used to find the two possible positions of the joint  $R_8$  ( $\mathbf{v}_3$ ).

To obtain the vector  $\mathbf{w}$ , the same equations can be used, since the position of the passive joints  $R_4$  and  $R_5$  are known as the center of the two circles formed by the links C4 and C5.

In this particular case, there are two possible positions for each combination of  $\mathbf{v}_2$  and  $\mathbf{v}_3$ . These different positions are known as operating modes. As shown in Fig. 4, this manipulator architecture has eight assembly configurations. However, four of them are always singular (Fig 4, e to h). This singularity occurs because the position of the joint  $G_9$  is always at the same position as the passive joint  $R_4$ . These configurations are not of interest and are discarded because the assumption of a parallelogram is no longer valid (links C2 and C4 are not parallel anymore and the same happens for links C3 and C5).



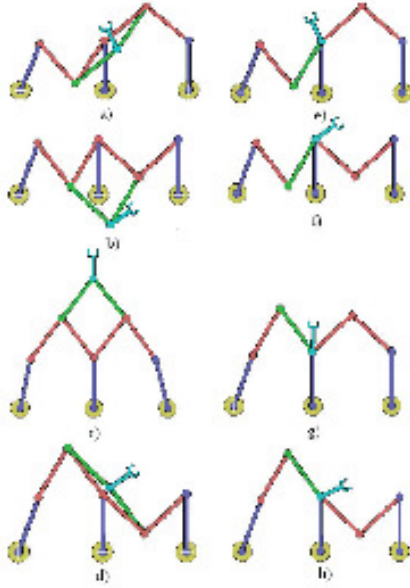


Figure 4 – Operating modes: a) to d) non-singular, e) to h) singular

To know the position of the end effector, the orientation of this one must be known and will be called  $\theta_{ee}$ . As described in the introduction and since there are only two links attached to the end effector, the proposed solution to control the orientation is a planetary gearbox. This kind of gearbox can be designed for different ratio  $r$ . The orientation of the end effector is then defined by the orientation of the links C4 and C5. These orientations are called  $\beta_4$  and are calculated as

$$\beta_i = \cos^{-1} \left( \frac{c_{ix}}{\|c_i\|} \right), \quad i = 4, 5 \quad (7)$$

The orientation of the end effector can then be calculated as

$$\theta_{ee} = \beta_4 + r(\beta_4 - \beta_5) \quad (8)$$

The final vector  $ee$  can be calculated as

$$ee = \begin{bmatrix} ee \cos \theta_{ee} \\ ee \sin \theta_{ee} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

The final coordinate are calculated as

$$p = w + ee \quad (10)$$

#### IV. Jacobian Matrix

One of the most significant methods to evaluate parallel manipulator properties is the Jacobian matrix. As described in [7], parallel manipulators have two of such matrices, known as the parallel Jacobian  $J_p$  and the serial Jacobian  $J_s$ . The end effector velocity equation in terms of the actuated joint velocities is

$$J_p \dot{x} = J_s \dot{\theta} \quad (11)$$

where

$$\dot{x} \equiv \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\theta}_{ee} \end{bmatrix}, \quad \dot{\theta} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

These Jacobian matrices are calculated with the geometrical method described in [7]. First of all, three loop-closure equations must be defined for this mechanism. The first loop should involve  $R_1$ , which can be BB-A1-C2-C5-EE-BB. This first loop-closure equation is defined as

$$p - ee = a_1 + c_2 + c_5 \quad (13)$$

Let  $k$  be a unit vector along the positive  $z$  axis. The time derivative of the Eq. (13) becomes

$$\dot{p} - (k \times ee) \dot{\theta}_{ee} = (k \times a_1) \dot{\theta}_1 + (k \times c_2) \dot{\beta}_2 + (k \times c_5) \dot{\beta}_5 \quad (14)$$

Similarly, the time derivative of Eq. (8) gives the following

$$\dot{\beta}_5 = \frac{\beta_4(1+r) - \theta_{ee}}{r} \quad (15)$$

Furthermore, if the four-bar mechanism forms a parallelogram, as described in section II, the following equation is true

$$\dot{\beta}_2 = \dot{\beta}_4 \quad (16)$$

Substituting Eqs. (15) and (16) in Eq. (14) yields

$$\begin{aligned} \dot{p} + \left( k \times \left( \left( \frac{1}{r} \right) c_5 - ee \right) \right) \dot{\theta}_{ee} = \\ (k \times a_1) \dot{\theta}_1 + \left( k \times \left( c_2 + \left( \frac{1+r}{r} \right) c_5 \right) \right) \dot{\beta}_4 \end{aligned} \quad (17)$$

The term  $\beta_4$  represents a passive revolute joint and should be eliminated. To do so, both side of Eq. (17) is dot multiplied by the  $\beta_4$  term, which finally leads to

$$\left(c_2 + \left(\frac{1+r}{r}\right)c_4\right)^T \dot{p} + k^T \left( \left(\frac{1}{r}\right)c_4 - ee \right) \times \left(c_2 + \left(\frac{1+r}{r}\right)c_4\right) \dot{\theta}_{ee} = k^T \left( a_4 \times \left(c_2 + \left(\frac{1+r}{r}\right)c_4\right) \right) \dot{\theta}_4 \quad (18)$$

The second loop (BB-A2-B2-C5-EE-BB) equation is developed similarly

$$p - ee = a_2 + b_2 + c_5 \quad (19)$$

$$\dot{p} - (k \times ee) \dot{\theta}_{ee} = (k \times a_2) \dot{\theta}_2 + (k \times b_2) \dot{\alpha}_2 + (k \times c_5) \dot{\beta}_5 \quad (20)$$

where  $\beta_5 = \dot{\beta}_5 = 0$  since  $\dot{\alpha}_1 = \dot{u}_3 = 0$ .

To eliminate the last passive joint  $\dot{\alpha}_2$ , which is the orientation of link B2, both side of Eq. (20) are dot multiplied by  $b_2$  and the final equation for this loop becomes

$$b_2^T \dot{p} - k^T (ee \times b_2) \dot{\theta}_{ee} = k^T (a_2 \times b_2) \dot{\theta}_2 \quad (21)$$

The third loop (A3-B3-C4-EE) equation is similar to the second and is

$$b_3^T \dot{p} - k^T (ee \times b_3) \dot{\theta}_{ee} = k^T (a_3 \times b_3) \dot{\theta}_3 \quad (22)$$

Both Jacobian matrices are developed from Eqs. (18), (21) and (22) as

$$J_p = \begin{bmatrix} j_{p11} & j_{p12} & j_{p13} \\ b_{2x} & b_{2y} & ee_x b_{2y} - ee_y b_{2x} \\ b_{3x} & b_{3y} & ee_x b_{3y} - ee_y b_{3x} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$J_s = \begin{bmatrix} j_{s11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2x} b_{2y} - a_{2y} b_{2x} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3x} b_{3y} - a_{3y} b_{3x} \end{bmatrix} \quad (24)$$

where

$$j_{p11} = \left(c_{2x} + \left(\frac{1+r}{r}\right)c_{5x}\right) \quad (25)$$

$$j_{p12} = \left(c_{2y} + \left(\frac{1+r}{r}\right)c_{5y}\right) \quad (26)$$

$$j_{p13} = \left(\left(\frac{1}{r}\right)c_{4x} - ee_x\right) \left(c_{2y} + \left(\frac{1+r}{r}\right)c_{5y}\right) - \left(\left(\frac{1}{r}\right)c_{4y} - ee_y\right) \left(c_{2x} + \left(\frac{1+r}{r}\right)c_{5x}\right) \quad (27)$$

and

$$j_{s11} = a_{1x} \left(c_{2y} + \left(\frac{1+r}{r}\right)c_{5y}\right) - a_{1y} \left(c_{2x} + \left(\frac{1+r}{r}\right)c_{5x}\right) \quad (28)$$

Obviously,  $b_{2x}$ ,  $b_{2y}$  and so on denotes the x and y components of vector  $b_2$ .

## V. Singularities

Parallel manipulators can pass through two kinds of singularities if either one of the Jacobian matrices become singular.

The serial singularities occur when the determinant of the matrix  $J_s$  is zero and this happens if one of his diagonal terms becomes zero. These singularities mean that infinitesimal changes in the actuated joints have no effect on the end-effector motion. For example, this happen if links A1, C2 and C5 are all aligned and/or if links A2 and B2 are aligned and/or if links A3 and B3 are aligned.

The parallel singularities, when the determinant of Jacobian  $J_p$  is equal to zero, meaning that infinitesimal movement of the end-effector can occur when all the actuated joints are locked. These singularities are more difficult to identify.

## VI. Workspace

For further analysis, the length of all links will be chosen arbitrarily as 6 cm and the ratio  $r$  as 10.

For the workspace analysis, only the position of the planetary gearbox, joint  $G_9$ , and the orientation of the end effector is considered, which means that the length EE is zero.

The position workspace of this manipulator is divided in different operating modes. The four workspaces presented in Figs. 5-8 are the possible x and y positions of the end-effector for each operating mode. It can be observed that the paired configurations #1, #4 and #2, #3 are symmetrical. This symmetrical property is only due to the position of the actives joints, which they are positioned along the X-axis. The entire workspace, Fig 9, can be obtained theoretically by the intersections of the area covered by the combination of links (A1, C2 and C5), (A2, B2 and C5) and (A3, B3 and C4) as per Fig. 10, where the available workspace is the intersection of the blue, green and red circle.

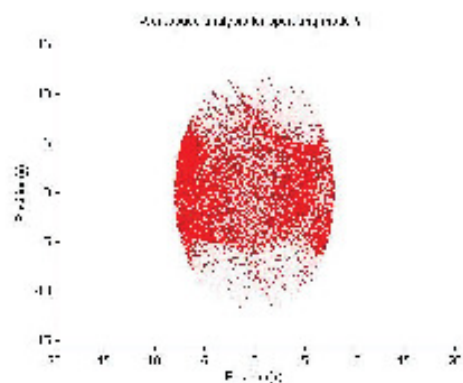


Figure 5 – Position workspace for operating mode #1

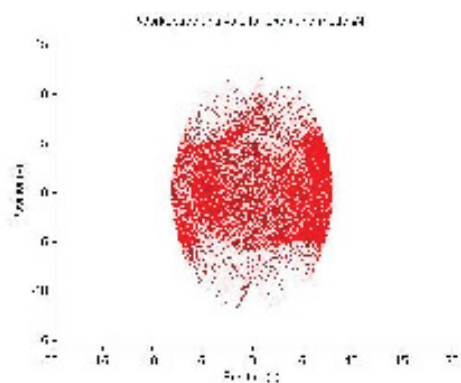


Figure 8 – Position workspace for operating mode #4

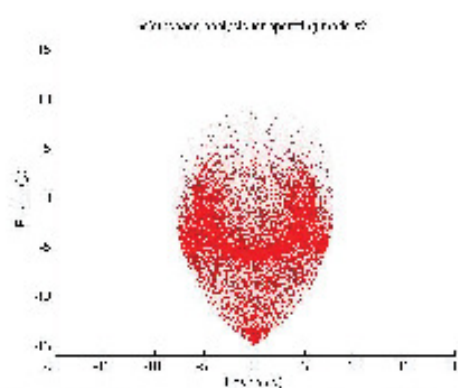


Figure 6 – Position workspace for operating mode #2

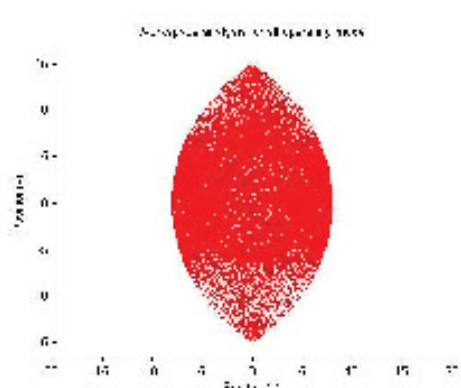


Figure 9 – Complete position workspace

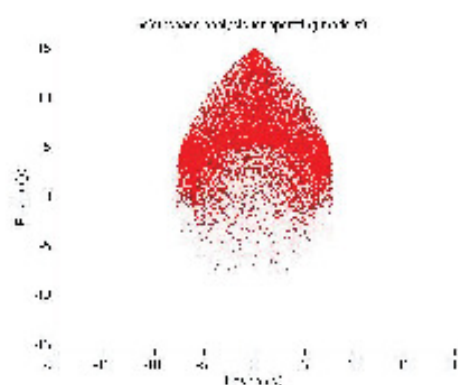


Figure 7 – Position workspace for operating mode #3

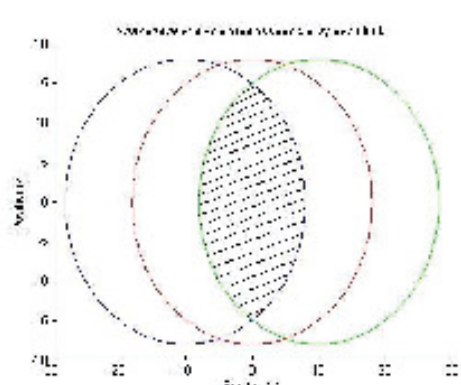


Figure 10 – Theoretical Workspace Analysis



The integration of the end-effector orientation in the workspace analysis is more complex, because multiple solutions can lead to the same orientation, due to the planetary gearbox.

With the constant orientation workspace method, described in [8], it is possible to find the available workspace for a specific configuration and orientation of the articulated platform. For a specific configuration and orientation of the platform, the platform is considered as solid, movable only in x and y-axis. For the specific case where the parallelogram forms a square and the diagonal from  $R_4$  to  $G_9$  is along y-axis, the available workspace, in Fig. 11, is the intersection of the red segment with the interior of the blue and green circles. In this particular case, all positions on the red circle are accessible. The reason why only the red circle is included instead of all the area inside it is because the first limb does not have a passive link between the first link and the articulated platform. For this manipulator, this method does not consider that multiple configuration of the articulated platform can result in the same orientation. This means that an infinite number of analyses can be performed to obtain the entire workspace of the manipulator for a given orientation.

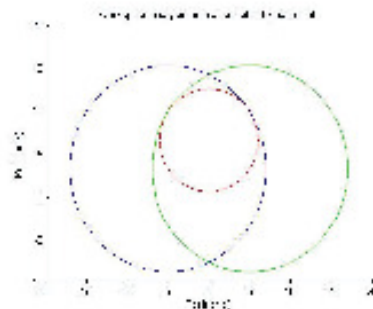


Figure 11 - Example of position accessible for a constant orientation

An empirical method can give an idea of the orientation possibilities of this manipulator. The Fig. 12 and 13 show two different randomly chosen orientation workspaces. These workspaces appear to be similar and cover almost the entire available workspace, which demonstrates that almost all positions are achievable for any orientation. To be noted that these results are discrete results and do not guarantee that a constant orientation trajectory is achievable on the entire workspace. However, as seen previously, there are constant orientation trajectories possible for each position.

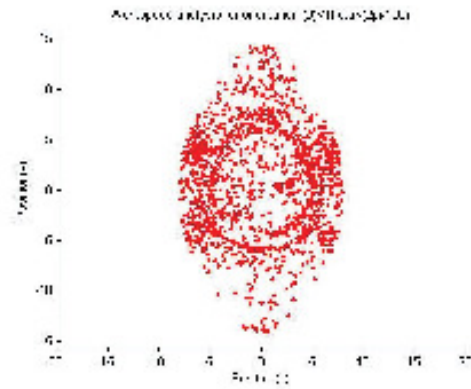


Figure 12 - Workspace for orientation 0 to  $2\pi/100$  rad

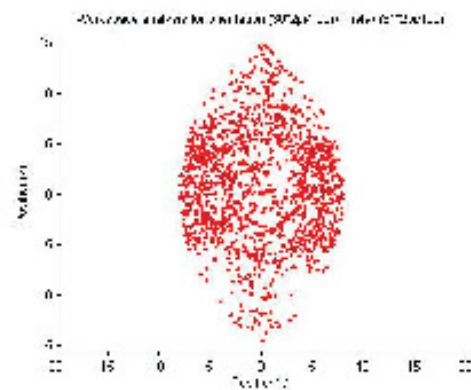


Figure 13 - Workspace for  $30 \cdot 2\pi/100$  to  $31 \cdot 2\pi/100$  rad



## V. Conclusions

This paper presents a new architecture for a planar parallel manipulator, which has an interesting workspace due to multiple orientation configurations achievable by the planetary gearbox. This gearbox could have different ratios for different applications, which can result in a different available workspace. However, this modification can affect the dexterity of the manipulator.

Further work can be done to know the effect of any change of the links' length on the workspace or the effect of the positions of the active joints  $R_1$ ,  $R_2$  and  $R_3$ . A prototype can be build.

Even further work can also be done to transpose this architecture to spherical motion.

## References

- [1] Stewart, D. "A Platform with Six Degrees of Freedom," *Proc. Inst. Mech. Eng.*, vol. 180, part 1, No. 15, pp. 371-376, 1965
- [2] Clavel R. "Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté," Ph.D Thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 1991.
- [3] Lambert P., Langen H., and Munnig Schmidt R. "A Novel 5 DOF Fully Parallel Robot Combining 3T1R Motion and Grasping," presented at the ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, Montreal, Canada, 2010.
- [4] Company O., Marquet F., and Pierrot F. (2003, June). "A new High-Speed 4-DOF Parallel Robot Synthesis and Modeling Issues," *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, Vol 19(3) pp. 411-420, Available: <http://ieeexplore.ieee.org/xpl/tocresult.jsp?number=72157> [Oct. 1, 2010].
- [5] Alici G. and Shirinzadeh B. "Constrained Structural Optimisation of a Revolute-Jointed Planar Parallel Manipulator," in *Proc. ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, 2003, pp. 1244-1249.
- [6] Jesus Cervantes-Sanchez J., Cesar Hernandez-Rodriguez J. and Angeles J. "On the kinematic design of the 5R planar, symmetric manipulator," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 36, pp. 1301-1313, Nov. 2001.
- [7] Tsai L.-W. *Robot Analysis - The mechanics of serial and parallel manipulators*. Wiley-Interscience, 1999
- [8] Merlet J.-P. *Les robots parallèles 2<sup>de</sup> édition*. Hermes Science Publication, 1997.