

Titre: Atténuation active de vibrations sur des panneaux solaires de satellites
Title:

Auteur: Christopher Teil
Author:

Date: 2023

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Teil, C. (2023). Atténuation active de vibrations sur des panneaux solaires de satellites [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/10846/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/10846/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Guchuan Zhu, & David Saussié
Advisors:

Programme: Génie aérospatial
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Atténuation active de vibrations sur des panneaux solaires de satellites

CHRISTOPHER TEIL

Département de génie électrique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

Génie aérospatial

Février 2023

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Atténuation active de vibrations sur des panneaux solaires de satellites

présenté par **Christopher TEIL**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Richard GOURDEAU, président

Guchuan ZHU, membre et directeur de recherche

David SAUSSIÉ, membre et codirecteur de recherche

Cédric BÉGUIN, membre

DÉDICACE

*À Bastien, À Tristan, À Amine, À Yann
À tous mes amis du labos,
et aux occasions manquées...*

REMERCIEMENTS

Je tiens à présenter mes remerciements à l'équipe d'encadrement de ma maîtrise, composée de mes directeurs de recherche, les professeurs Guchuan Zhu et David Saussié. Merci pour votre patience, votre gentillesse, et l'attention que vous avez portée à mon parcours de maîtrise. Vous avez su trouver les mots et la méthode pour me faire rester sur la voie de la maîtrise recherche, au moment où le changement de programme paraissait être la seule solution. Merci pour le temps que vous avez mis à ma disposition pour répondre à mes nombreux doutes. Merci également de m'avoir permis de découvrir le laboratoire où j'ai pu faire la connaissance de cette joyeuse bande d'étudiants. Un remerciement particulier à M. Zhu pour la bourse de recherche qu'il m'a accordée tout au long de mon programme de maîtrise.

Je remercie également les membres du jury, les professeurs Richard Gourdeau et Cédric Béguin, d'avoir accepté de participer à cette aventure en recevant ce mémoire et en participant à la soutenance.

Je remercie également les membres administratifs du département de génie électrique, qui ont su m'aider et m'orienter toujours avec beaucoup de disponibilité et de bienveillance. Je remercie également les étudiants du laboratoire, avec qui je regrette ne pas avoir pu partager plus de moments, dans la joie ou la peine.

Je tiens aussi à remercier Yanni, avec qui j'ai partagé une partie de ce projet, et sans qui je n'aurais pas pu arriver à la rédaction de ce mémoire.

Je tiens également à remercier mon ami Amine avec qui j'ai eu le privilège de fonder et de diriger Astropoly, le club d'astronomie de Polytechnique Montréal, une des expériences les plus enrichissantes de mon parcours, débutée depuis le baccalauréat.

Finalement je souhaite remercier mes parents, qui malgré les milliers de kilomètres qui nous séparent, m'ont toujours apporté une oreille attentive et un soutien chaleureux sans faille.

RÉSUMÉ

La commande des structures flexibles est un domaine d'étude primordial dans le domaine aérospatial. L'envergure et la flexibilité des structures conçues pour évoluer dans ce milieu augmentent constamment, et les caractéristiques des satellites suivent la même évolution pour répondre à la multiplication des types de missions qu'ils ont à accomplir. De plus, dans l'espace, le mouvement de satellites est très peu amorti par le milieu. Tous ces éléments rendent l'étude et le choix des méthodes de contrôle des vibrations primordial pour les satellites, qui sont souvent composés d'un bus central contenant la charge utile, relié à plusieurs panneaux solaires lui fournissant de l'électricité. L'atténuation des vibrations des panneaux solaires des satellites peut être réalisée efficacement par le contrôle actif des panneaux, effectué par des actionneurs distribués sur toute leur envergure, ou bien centralisés sur le bus. L'objectif du projet consiste à concevoir les outils de simulation qui permettront de modéliser, concevoir et valider des méthodes de commande des vibrations des panneaux solaires de satellites. Nous cherchons également à ajouter du réalisme par l'introduction de modèles d'actionneurs à nos simulations.

Pour remplir cet objectif, nous avons sélectionné dans la littérature trois modèles permettant de représenter les panneaux solaires de satellites. Les modèles choisis comprennent une représentation à un panneau sans bus, et deux représentations à deux panneaux avec un bus possédant des degrés de liberté différents. Le comportement vibratoire des panneaux, représentés par des poutres, est mis en équation grâce à la théorie Euler-Bernoulli, qui est un modèle décrit par une équation biharmonique aux dérivées partielles. Ce type de modèle plus complexe à étudier mathématiquement permet de considérer tous les modes de vibration sans effectuer de troncature. Les outils de simulation que nous utilisons sont basés sur un *Toolbox* dédié, et sur une combinaison de fonctions Matlab et de modèles Simulink permettant l'intégration de tous les éléments des simulations, tels que les capteurs, les actionneurs, les correcteurs, et les dynamiques des panneaux solaires et du bus.

Nous étudions ensuite les stratégies de commande, en nous intéressant d'abord au premier modèle à un panneau. Nous reprenons ainsi les démarches montrant que le problème est bien posé et stable en boucle fermée via une analyse de Lyapunov. Par la suite, nous effectuons la simulation de ce système, confirmant la validité de la démarche de simulation et introduisant les modèles d'actionneurs, afin d'étudier leur impact sur la réponse du modèle. Finalement, nous utilisons les modèles les plus complets à deux panneaux en introduisant tous les éléments développés dans notre étude, en plus d'un amortissement de type Kelvin-Voigt.

ABSTRACT

Control of flexible structures is an important topic of research for aerospace technology. It is witnessed that the flexibility and scale of mechanical systems keep increasing in recent years for advanced aerospace systems. In particular, the design of satellites follows the same trend in order to meet the requirement for multifunctional space missions. Moreover, the movement of satellites is almost not damped in space. Therefore, the mechanism for an efficient vibration suppression is primordial to ensure safe operations of satellites that are composed usually of a central hub containing the payload connected to several solar panels for supplying electricity. Active vibration control, which can be implemented by actuators distributed over the span of the panel or centralized on the hub, is recognised as one of the most adequate solutions for vibration suppression of flexible satellite structures. The main objective of this research project is to develop a numerical simulation-based platform for the modeling, design, and validation of active control systems for solar panel vibration suppression of satellites. Issues related to the actuation mechanisms for real-life applications will also be addressed and evaluated via simulation studies.

Specifically, we start by selecting three models from the existing literature to describe the dynamics of the flexible solar panels of satellites, including one model with one panel without hub and two others with two panels each attached to a hub of different degrees of freedom. The solar panels are modeled as an Euler-Bernoulli beam for which the motion is described by a bi-harmonic partial differential equation, also called Euler-Bernoulli equation. Dealing with such an infinite-dimensional model is mathematically more challenging, but it allows avoiding model truncation and hence the phenomenon of spillover. A Matlab Toolbox is used for the simulation of Euler-Bernoulli beams. This simulation platform allows a seamless incorporation of Matlab functions with Simulink models so that the dynamics of controllers, sensors, and actuators, as well as the dynamics of the hub, can be integrated easily for simulations. In control design, we first consider the model having one flexible panel through which the results on the well-posedness of the considered problem are presented and the closed-loop stability of the system is assessed via a Lyapunov analysis. Simulation studies are conducted to validate the considered control schemes and to evaluate the performance of the system with different actuation mechanisms relevant to practical implementations.

Finally, we extend the control schemes to the two-panel models while adding Kelvin-Voigt damping. Extensive simulations are carried out to assess the validity and effectiveness of the proposed control schemes with different configurations under different operations.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xiii
LISTE DES ANNEXES	xvi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Contexte	1
1.2 Problématique et objectifs	2
1.3 Plan du mémoire	3
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	5
2.1 Littérature pertinente au projet	5
2.1.1 Contexte sur les spécificités du milieu spatial	5
2.1.2 Modélisation des satellites	6
2.1.3 Contrôle	9
2.2 Articles principaux	10
CHAPITRE 3 MODÉLISATION ET SIMULATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ	11
3.1 Modélisation	11
3.1.1 Éléments des modèles étudiés	11
3.1.2 Modèles à 1 et 2 panneaux solaires	12
3.1.3 Modélisation des panneaux solaires par des poutres minces d'Euler-Bernoulli	14

3.1.4	Amortissement du système	17
3.2	Simulation	18
3.2.1	Outils de simulation	18
3.2.2	Développement mathématique de l'équation d'Euler-Bernoulli	22
3.2.3	Logique de simulation	27
CHAPITRE 4	CONTRÔLE D'UN MODÈLE À 1 PANNEAU	35
4.1	Modélisation et stratégie de commande du modèle à 1 panneau	35
4.1.1	Mise en équation du modèle à 1 panneau	36
4.1.2	Considérations de <i>well-posedness</i> du modèle à 1 panneau	37
4.1.3	Analyse de Lyapunov du modèle à 1 panneau	39
4.2	Simulation du modèle à 1 panneau contrôlé	42
4.2.1	Génération des matrices du modèle à 1 panneau	43
4.2.2	Résultats des simulations du modèle à 1 panneau	44
CHAPITRE 5	CONTRÔLE D'UN MODÈLE COMPLET À DEUX PANNEAUX AVEC DYNAMIQUE DU BUS	56
5.1	Modélisations et stratégies de commande	56
5.1.1	Modèle antisymétrique à deux panneaux	57
5.1.2	Modèle général à deux panneaux	59
5.1.3	Loi de commande du modèle général	62
5.2	Simulation du modèle général contrôlé	63
5.2.1	Génération des matrices du modèle général	65
5.2.2	Dimensions et conditions initiales du modèle général	65
5.2.3	Résultats des simulations du modèle général	67
CHAPITRE 6	CONCLUSION	82
6.1	Synthèse des travaux	82
6.2	Limitations de la solution proposée	84
6.3	Améliorations futures	84
RÉFÉRENCES		86
ANNEXES		90

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Conditions frontière de la poutre [1] en un point x donné	16
Tableau 3.2	Moteurs offerts par le <i>Toolbox</i>	21
Tableau 3.3	Capteurs offerts par le <i>Toolbox</i>	21
Tableau 3.4	Légende d'identification des blocs dans les schémas Simulink	29
Tableau 3.5	Valeurs numériques des paramètres du servomoteur	31
Tableau 3.6	Valeurs numériques des paramètres de la roue d'inertie	32
Tableau 4.1	Paramètres géométriques du modèle du modèle à 1 panneau	44
Tableau 4.2	Paramètres de simulation du modèle à 1 panneau	45
Tableau 5.1	Paramètres géométriques du modèle général à deux panneaux [2]	66
Tableau 5.2	Paramètres de simulation du modèle général à deux panneaux [2]	66
Tableau 5.3	Coefficients des équations de contrôle du modèle général [2]	67

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Satellite AMOS-5 - ©Andrzej Olchawa - Licence : CC BY-SA 2.0 . . .	2
Figure 2.1	Repères simplifiés des modèles étudiés	7
Figure 3.1	Éléments des modèles étudiés	11
Figure 3.2	Repères des modèles étudiés	13
Figure 3.3	Modèle à 2 panneaux étudié	13
Figure 3.4	Modèles à 1 panneau étudiés : (a) moteur en rotation, (b) moteur en translation	14
Figure 3.5	Schéma Simulink de la dynamique du servomoteur [3]	30
Figure 3.6	Schéma Simulink de la dynamique de la roue d'inertie [4]	31
Figure 3.7	Variation de l'angle désiré θ_d dans le temps de type arrêt-arrêt	33
Figure 3.8	Schéma Simulink de l'angle désiré variable dans le temps	34
Figure 4.1	Modèle de satellite à 1 panneau commandé avec un moteur (a) en rotation (b) en translation	35
Figure 4.2	Distribution de la condition initiale le long de la poutre pour le modèle à 1 panneau	45
Figure 4.3	Quatre premières fréquences naturelles (Hz) et modes propres de la poutre normalisée étudiée (voir les équations (3.12) et (3.11))	45
Figure 4.4	Schéma simulink de la poutre libre	46
Figure 4.5	Réponse dans le temps et l'espace de la poutre libre	46
Figure 4.6	Schéma Simulink de la poutre commandée à l'aide des fonctions du <i>Toolbox</i>	47
Figure 4.7	Simulation de la réponse de la poutre selon le type de moteur, de capteur, et les conditions frontière fournies dans le <i>Toolbox</i>	48
Figure 4.8	Énergie totale le long de la poutre dans le temps pour les réponses libres et contrôlées utilisant le directement le <i>Toolbox</i> et les configurations de la figure 4.7	49
Figure 4.9	Schéma Simulink avec la dynamique du moteur	49
Figure 4.10	Réponse dans le temps et l'espace après l'ajout du moteur avec $k_f = 0.3$ et retour en contrainte de flexion	50
Figure 4.11	Simulation de la réponse de la poutre dans le temps et l'espace après l'ajout du moteur avec différentes valeurs du gain de commande k_f	51
Figure 4.12	Schéma Simulink avec la dynamique du moteur (pseudo-dérivateur) et le PI	52

Figure 4.13	Réponse dans le temps et l'espace après l'ajout du pseudo-dérivateur et du PI avec différentes valeurs des paramètres	53
Figure 4.14	Schéma Simulink avec la dynamique du servomoteur et le PI	54
Figure 4.15	Réponse dans le temps et l'espace après l'ajout du moteur complet avec PI pour différents couples de paramètres du servomoteur	55
Figure 5.1	Schémas représentant les modèles (a) symétriques, (b) antisymétriques et (c) asymétriques	57
Figure 5.2	Modèle antisymétrique de satellite à 2 panneaux	58
Figure 5.3	Modèle général de satellite à 2 panneaux	60
Figure 5.4	Schéma Simulink du modèle général à deux panneaux	64
Figure 5.5	Distribution de la condition initiale le long de la poutre pour le modèle général	67
Figure 5.6	Réponse libre du modèle général à deux panneaux	69
Figure 5.7	Angle θ (en radian) du bus dans le temps pour un système libre . . .	69
Figure 5.8	Réponse libre amortie du modèle général à deux panneaux pour différents coefficients d'amortissement	70
Figure 5.9	Énergie totale du système dans le temps pour les réponses libres non amorties et amorties avec les coefficients utilisés à la figure 5.8 et les conditions initiales 5.2	70
Figure 5.10	Suivi de la valeur de l'angle $\theta(t)$ (en radian) du bus dans le temps pour des panneaux solaires au repos	71
Figure 5.11	Réponse libre du modèle général à deux panneaux avec et sans amortissement avec panneaux au repos et mouvement du bus	72
Figure 5.12	Réponse contrôlée du modèle général à deux panneaux avec et sans amortissement	73
Figure 5.13	Angle θ (en radian) du bus dans le temps pour un système contrôlé amorti et non amorti	74
Figure 5.14	Réponse contrôlée du modèle général à deux panneaux avec suivi de l'angle désiré dans le temps, avec les conditions du tableau 5.2	75
Figure 5.15	Suivi de la valeur désirée de l'angle $\theta(t)$ (en radian) du bus dans le temps pour un système contrôlé non amorti	75
Figure 5.16	Réponse contrôlée du modèle général à deux panneaux avec servomoteur, avec les conditions du tableau 5.2	77
Figure 5.17	Mouvement du bus du système général à deux panneaux avec servomoteur, avec les conditions du tableau 5.2	77

Figure 5.18	Forces exercées sur le bus du système général à deux panneaux avec servomoteur, avec les conditions du tableau 5.2	78
Figure 5.19	Réponse contrôlée du modèle général à deux panneaux avec roue d'inertie, avec les conditions du tableau 5.2	78
Figure 5.20	Mouvement du bus du système général à deux panneaux avec roue d'inertie, avec les conditions du tableau 5.2	79
Figure 5.21	Forces exercées sur le bus du système général à deux panneaux avec roue d'inertie, avec les conditions du tableau 5.2	80
Figure 5.22	Énergie totale du système dans le temps pour les réponses libres et contrôlées avec le servomoteur (figure 5.16) et la roue d'inertie (figure 5.19), et les conditions initiales 5.2	80
Figure 5.23	Suivi de la valeur désirée de l'angle $\theta(t)$ (en radian) du bus dans le temps pour un système contrôlé équipé d'une roue d'inertie, avec les conditions du tableau 5.2	81
Figure A.1	Schéma Simulink du modèle antisymétrique	90
Figure A.2	① Schéma Simulink du sous-système du bus du modèle antisymétrique	91
Figure A.3	② Schéma Simulink du sous-système de la loi de commande du torque du modèle antisymétrique	91
Figure B.1	① Schéma Simulink du sous-système de l'ODE globale du modèle général à deux panneaux	92
Figure B.2	② Schéma Simulink du sous-système de l'ODE asymétrique du modèle général à deux panneaux	92
Figure B.3	③ Schéma Simulink du sous-système de l'ODE symétrique du modèle général à deux panneaux	93
Figure B.4	④ Schéma Simulink du sous-système de la loi de commande du torque du modèle général à deux panneaux	93
Figure B.5	⑤ Schéma Simulink du sous-système de la loi de commande de la force f selon l'axe x_b du modèle général à deux panneaux	93
Figure B.6	⑥ Schéma Simulink du sous-système de la loi de commande de la force u selon l'axe y_b du modèle général à deux panneaux	94
Figure B.7	Schéma Simulink du modèle général à deux panneaux réduit pour mouvement du bus avec panneaux au repos	95
Figure B.8	Schéma Simulink du modèle général à deux panneaux avec ajout de la roue d'inertie	96

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

A	Aire de la section de poutre	$[m^2]$
D_{KV}	Amortissement Kelvin-Voigt	
D_s	Amortissements structurel	
D_v	Amortissement visqueux	
$f_e(t)$	Amplitude la force extérieure appliquée	
θ_b	Angle de rotation local	$[^\circ]$
x_b	Axe horizontal du repère bus	
X_G	Axe horizontal du repère global	
X	Axe horizontal du repère initial	
y_b	Axe vertical du repère bus	
Y_G	Axe vertical du repère global	
Y	Axe vertical du repère initial	
V	Candidate de Lyapunov	
Q_b	Cisaillement	$[kg.m/s^2]$
(ν)	Coefficient d'amortissement	
ζ_k	Coefficient d'amortissement	
a_i	Coefficients des modes propres flexible	
r_i	Coefficients des modes propres rigides	
C_i	Constantes	
K_f	Constante de force contre électromotrice	
D_m	Constante d'amortissement interne au mo- teur	
M_b	Contrainte en flexion	$[kg.m^2/s^2]$
$q(t)$	Coordonnées modales	
$\tau(t)$	Couple	$[N.m]$
r	Demi largeur bus	$[m]$
x_{bus}	Déplacement horizontal du bus	$[m]$
y_{bus}	Déplacement vertical du bus	$[m]$
$w(x, t)$	Déplacement vertical sur un panneau	$[m]$
$w_R(x, t)$	Déplacement vertical panneau droit	$[m]$
$w_L(x, t)$	Déplacement vertical panneau gauche	$[m]$
$D(x)$	Distribution spatiale de la force extérieure appliquée	

T	Énergie cinétique	[J]
U	Énergie potentielle	[J]
E	Énergie totale	[J]
$f(x, t)$	Excitation extérieure	[N]
$F_j(x, t)$	Force appliquée au système Euler-Bernoulli	[N]
$F_{c,j}$	Force appliquée par l'actionneur	[N]
F_{ext}	Force extérieure à la simulation	[N]
$f(t)$	Force le long de axe x_b	[N]
$u(t)$	Force le long de axe y_b	[N]
K_m	Gain d'amplification	
K_t	Gain de la roue d'inertie	
K^*	Gain du contrôleur intégrateur du couple	
K_i	Gain du PI	
k_f	Gain pseudo-derivateur	
J_{rw}	Inertie de la roue d'inertie	
J_b	Inertie du bus	[kg.m ²]
J_m	Inertie du moteur	
L	Longueur de la poutre	[m]
m_b	Masse bus	[kg]
ρ	Masse linéique de la poutre	[kg/m]
ρ_v	Masse volumique de la poutre	[kg/m ³]
$[\Phi(x)]$	Matrice des fonctions propres	
A	Matrice du système	
B	Matrice de commande	
B_{ASYM}	Matrice de commande modèle asymétrique	
B_{SYM}	Matrice de commande modèle symétrique	
C	Matrice de sortie	
C_{shear}	Matrice de sortie mesure du cisaillement	
C_{strain}	Matrice de sortie mesure de la contrainte en flexion	
Ψ_s	Matrice de sortie intermédiaire	
B_f	Matrice de commande intermédiaire	
Ω_b	Matrice des valeurs propres	
β_k	Modes propres	
E	Module de Young du matériau	[Pa]

I	Moment quadratique de la poutre	$[\text{m}^4]$
n	Nombre de modes considérés	
A	Opérateur	
$\mathbf{A}^*$	Opérateur	
Π_0	Opérateur	
θ	Orientation du bus	$[\circ]$
τ_s	Paramètre du pseudo-dérivateur	
τ	Paramètre PI	
θ_{dp}	Polynôme décrivant la trajectoire transi- toire de l'angle désiré dans le temps	$[\circ]$
s_j	Position capteurs <i>Toolbox</i>	
a_j	Position des moteurs du <i>Toolbox</i>	
a_0	Position initiale	$[\text{m}]$
R_m	Résistance de la roue d'inertie	
EI	Rigidité en flexion	$[\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2]$
ρ	Terme multiplicateur Lyapunov	
$s(t)$	Translation permise dans le modèle à 1 poutre	$[\text{m}]$
θ_d	Valeur désirée de l'angle	$[\circ]$
θ_{di}	Valeur initiale de l'angle désiré au temps t_i	$[\circ]$
θ_{df}	Valeur initiale de l'angle désiré au temps t_f	$[\circ]$
$\{z(t)\}$	Vecteur d'état	
b_0	Vitesse initiale	$[\text{m/s}]$

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Schémas Simulink du modèle antisymétrique à deux panneaux solaires	90
Annexe B	Schémas Simulink du modèle général à deux panneaux solaires	92

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Contexte

L'histoire de l'exploration spatiale est ponctuée de périodes d'essor et d'austérité. Elles peuvent être déclenchées par des motivations politiques ou économiques, comme c'est le cas pour la période d'essor actuelle qui voit le secteur privé devenir central. Certaines époques voient ainsi le développement rapide de technologies rendant notre accès à l'espace toujours plus rapide et abordable. Néanmoins, comme dès le début de l'ère spatiale avec le lancement de Sputnik 1 en 1957, les activités de l'Homme dans l'espace passent par un outil essentiel : les satellites.

Les multiples missions des satellites, allant des télécommunications au GPS en passant par l'observation et l'imagerie terrestre, sont réalisées par la charge utile. En plus de la charge utile, les satellites doivent également embarquer un système électronique, de communication, et de gestion thermique compact, qui sont tous essentiellement positionnés dans ou sur le corps central du satellite, le bus. Tous ces systèmes nécessitent de l'énergie que le satellite doit être capable de produire en opération, puisque les contraintes imposées par le lancement limitent la masse et le volume maximum pouvant être embarqués. Une des seules sources d'énergie que nous savons exploiter dans l'espace étant l'énergie solaire, cela se traduit dans la majorité des cas par la fixation sur le bus d'un ou plusieurs panneaux solaires. L'essor actuel du secteur spatial entraîne une diversification des missions que doivent réaliser les satellites, et la nécessité de maximiser leur durée de vie opérationnelle. Cela passe parfois par l'augmentation des besoins en énergie des satellites, faisant en sorte que l'envergure des panneaux solaires tend à augmenter. Ces derniers, repliés sur eux-mêmes pour répondre aux critères de lancement cités précédemment, se déploient ensuite une fois en orbite. Une configuration typique de satellite en orbite peut être observée sur la figure 1.1 représentant le satellite de communication AMOS-5.

Les caractéristiques spécifiques du milieu spatial, notamment l'absence d'air qui impacte autant la dynamique des systèmes que les transferts thermiques, rendent les analyses thermiques et vibratoires cruciales. Thermiquement, l'absence d'air change totalement la manière d'envisager les transferts thermiques entre le satellite et son milieu, comparativement à une structure sur Terre. Les transferts convectifs et conductifs sont en effet impossibles, et seuls les transferts radiatifs sont possibles. D'un point de vue mécanique, l'absence d'air implique l'absence de frottement, et plus généralement peu de forces (dépendamment de leur altitude) vont s'opposer au mouvement des satellites une fois ceux-ci en orbite. Cela implique

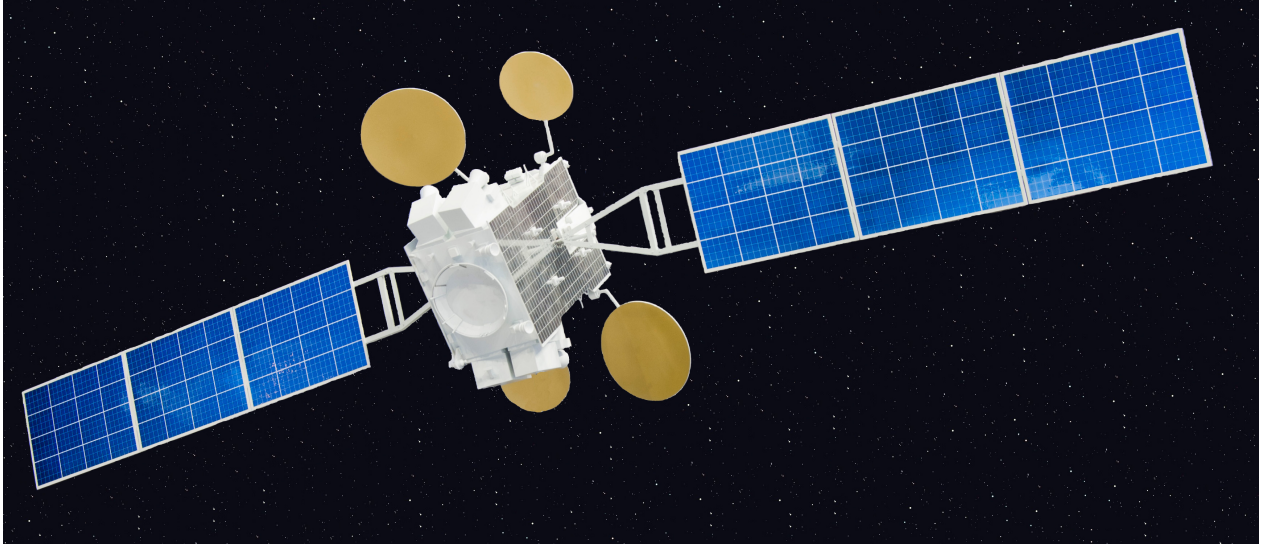


FIGURE 1.1 Satellite AMOS-5 - ©Andrzej Olchawa - Licence : CC BY-SA 2.0

directement que l'amortissement de la dynamique des structures est faible, puisque toute action externe via l'amortissement visqueux disparaît. L'amortissement interne lui non plus n'est pas très important. Pour répondre aux limites imposées par les lanceurs spatiaux, on cherche en effet à utiliser des structures fines et des matériaux plus légers et plus flexibles. Nous nous retrouvons donc dans une situation où les panneaux solaires de satellites tendent à être plus grands, plus légers et donc plus flexibles, tout en évoluant dans un environnement peu amorti. Des vibrations apparaissant sur les panneaux risquent donc de perdurer dans le temps en l'absence de stratégie de contrôle. Si elles surviennent fréquemment, ces vibrations risquent d'entraîner une fatigue des matériaux pouvant mener à un bris, ou encore à une déstabilisation de l'attitude ou de l'orbite du satellite au complet.

1.2 Problématique et objectifs

C'est pour ces raisons que nous étudierons la problématique de l'atténuation des vibrations des panneaux solaires au moyen de méthodes de contrôle actives.

Pour répondre à cette problématique, nous n'aborderons dans ce travail que l'analyse vibratoire et non thermique d'un satellite complet, constitué d'un bus fixé de part et d'autre à deux panneaux solaires. Nous pouvons définir les objectifs comme suit :

- Notre premier objectif est de pouvoir modéliser les éléments de notre système. Cette modélisation prend la forme d'un système d'équations dont la résolution nous donne le comportement dans le temps du système en fonction de la condition initiale choisie.

Nous utiliserons la théorie Euler-Bernoulli pour modéliser les panneaux solaires. Elle permet d’assimiler le mouvement des panneaux à celui de poutres, par l’intermédiaire d’une équation aux dérivées partielles dotée de quatre conditions frontière associées aux conditions de fixation des extrémités de la poutre. Le bus quant à lui est décrit par des équations de mouvement qui dépendent du nombre de degrés de liberté qu’il possède. On cherche donc à trouver dans la littérature des modèles basés sur ces équations afin de pouvoir en étudier le comportement.

- Le second objectif consiste à implémenter des stratégies de contrôle permettant de dissiper les vibrations des panneaux. La commande des panneaux solaires peut être soit distribuée sur le domaine, ou bien effectuée aux bornes du système. Nous nous concentrerons sur les stratégies de commande aux bornes et chercherons à identifier dans la littérature des lois de commande pouvant être implantées sur nos modèles. L’implémentation de ces lois passe par le développement d’un environnement de simulation destiné à tester les lois de commande trouvées. Nous cherchons donc à développer une stratégie de simulation structurée, de manière à pouvoir utiliser notre outil de façon systématique.
- Notre dernier objectif est de pouvoir utiliser l’environnement de simulation développé pour comparer les réponses libres et commandées de notre modèle. Nous cherchons également à pouvoir augmenter le réalisme de nos simulations en y introduisant des modèles d’actionneurs réels, pour étudier leur impact sur les résultats et aider le processus de conception des satellites. Il est à noter que nous n’introduiront pas dans le cadre de ce travail la dynamique des capteurs, et que des délais seront donc omis entre les forces de contrôle et de leur action sur les systèmes étudiés

1.3 Plan du mémoire

Le chapitre 2 est consacré à la revue de littérature, permettant d’explorer les sources pertinentes au projet concernant l’environnement spatial, les modèles de satellites, ou encore les méthodes de commande communément employées.

Dans le chapitre 3, on identifie et on construit progressivement des modèles de plus en plus complexes pour satisfaire notre premier objectif. Nous détaillerons ainsi les trois modèles retenus ainsi que la théorie Euler-Bernoulli qui dicte la formulation des équations mathématiques du système. Ces modèles correspondent à un système à un panneau sans bus, et deux systèmes à deux panneaux solaires et un bus à 1 et 3 degrés de liberté respectivement. Nous développerons également un environnement de simulation faisant appel aux fonctions Matlab d’un *Toolbox*, que nous appelons *Toolbox_Dyn_Beams* permettant de tester la réponse

des panneaux à différentes conditions initiales, et avec les méthodes de contrôle provenant de leur article d'origine. Nous ajouterons aussi la formulation de l'amortissement interne Kelvin-Voigt, celle d'un problème de suivi de l'angle du bus, et des modèles de servomoteur et de roue d'inertie.

Dans le chapitre 4, nous nous intéresserons à une configuration simplifiée qui prend en compte uniquement un panneau solaire. Nous reprendrons la démonstration de [5] afin de montrer que cette configuration est bien posée et exponentiellement stable. Nous utiliserons alors notre environnement de simulation pour afficher les réponses libres et contrôlées du modèle, ainsi que l'impact de l'ajout du servomoteur.

Finalement, dans le chapitre 5, les modèles à deux panneaux sont présentés et le modèle le plus complet est retenu. Nous étudions alors ses réponses libres et contrôlées, l'impact de l'ajout des actionneurs réels sur le système complet, le tout en considérant un problème de suivi de trajectoire de l'angle du bus.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre est consacré à une revue de la littérature pertinente au projet et à son contexte. Pour ce faire, nous présenterons d’abord certaines caractéristiques du milieu spatial qui définissent l’environnement dans lequel évoluent les satellites. Nous nous intéresserons également à la structure des satellites, leurs missions, et aux particularités qui rendent notre étude pertinente. Ensuite, nous ferons la liste des modèles utilisés dans la littérature pour modéliser un satellite. Enfin, nous ferons un tour d’horizon des méthodes utilisées pour commander ces systèmes, en se focalisant sur les méthodes mises en pratique dans ce travail.

2.1 Littérature pertinente au projet

2.1.1 Contexte sur les spécificités du milieu spatial

On peut séparer le milieu spatial dans lequel évoluent les satellites en sections orbitales qui présentent des caractéristiques environnementales différentes. En fonction de l’altitude à laquelle évoluent les satellites, on définit les orbites LEO, MEO et GEO (*Low, Medium* et *Geosynchronous Earth Orbit*). À toutes ces orbites, on retrouve des conditions similaires en termes de radiation et de rayonnement (rayons cosmiques, radiation solaire), ainsi que les effets provoqués par le vide de l’espace (dégazement des matériaux). Tous ces éléments, auxquels on peut ajouter l’effet de l’oxygène atomique retrouvé en LEO, vont provoquer une dégradation des matériaux des surfaces du satellite en contact avec l’espace environnant. Cette dégradation affecte principalement l’étude thermique sur le satellite, dont les propriétés changeront au cours de son cycle de vie [6].

Les satellites eux-mêmes qui évoluent dans ce milieu présentent des caractéristiques particulières qu’il convient d’identifier afin de pouvoir mener à bien notre mandat. Les satellites sont en effet un outil polyvalent qui a pour vocation de remplir des missions variées, allant des télécommunications à la localisation GPS, en passant par l’imagerie terrestre, la météorologie ou encore l’observation astronomique [7]. Ils sont de tailles variées, allant de quelques centimètres pour les CubeSats [8] à plusieurs mètres pour le télescope James Webb [9]. Les satellites sont en général constitués d’un bloc central, le bus, contenant l’équipement électronique, la charge utile, ainsi que des systèmes de contrôle thermique et dynamique. Sur le bus, des panneaux solaires sont généralement fixés pour récolter une des seules sources d’énergie facilement exploitable dans l’espace, et dont l’apport continu permet une plus grande flexibilité et longévité des missions [10]. Les panneaux solaires se caractérisent par une structure

souvent composite [11]. La masse et le volume des systèmes mis en orbite étant limités par les dimensions des lanceurs spatiaux et les coûts qui leur sont associés, les panneaux solaires doivent être repliés pour le lancement, et doivent par conséquent être déployés une fois en orbite. Les différentes techniques de déploiement sont notamment étudiées dans les articles [12] et [13].

Cette pluralité des missions que doivent remplir les satellites impliquent des requis concernant leur mouvement dans l'espace, les plus importants étant le maintien ou la modification de leur orbite et de leur attitude. En effet, la plupart des missions remplies par les satellites nécessitent soit d'observer des points précis à la surface de la Terre, ou bien de diriger des antennes vers des centres de réception pour la transmission de données. Ce type de missions met l'emphasis sur le pointage des satellites, dont les marges de tolérances sont généralement très fines. Les articles [9] et [14] présentent par exemple des requis très précis dans le cas du télescope James Webb.

La gestion de l'attitude du satellite dans l'espace est donc un élément de contrôle crucial sur lequel nous nous attarderons. Dans [15], on construit une fonction permettant de modéliser la manœuvre de changement d'attitude d'un satellite doté de grands panneaux solaires. Cette volonté de suivi d'un angle précis se retrouve dans de nombreux autres articles, comme dans [2, 16, 17] ou encore [11]. Le développement d'un contrôle optimal pour une manœuvre de changement d'attitude se retrouve également dans [18].

2.1.2 Modélisation des satellites

L'étude du mouvement des satellites et de leur contrôle nécessitent d'établir un modèle qui nous permette de simuler la réponse libre du système selon différentes conditions initiales et conditions aux bornes ; ainsi que d'implémenter des stratégies de contrôle pour évaluer leur efficacité. En réponse aux critères de mission cités précédemment, l'ensemble du système bus-panneaux solaires est majoritairement modélisé dans la littérature sur un seul plan, en se focalisant à la fois sur la stabilisation du mouvement des appendices flexibles, et sur l'orientation du bus selon un angle θ représentant le critère de pointage. Pour ce faire, les repères sont placés en règle générale à l'origine au centre du bus, avec un axe $\vec{x}$ qui coïncide avec les panneaux au repos, et un axe $\vec{y}$ perpendiculaire sur lequel on mesure le déplacement vertical w le long des panneaux. Un premier repère $(\vec{X}, \vec{Y})$ est fixé sur la position initiale au repos, et un second $(\vec{x}_b, \vec{y}_b)$ va suivre le mouvement en rotation du bus selon l'angle de pointage θ et les translations si cette dynamique est prise en compte dans le modèle, comme sur la figure 2.1. On retrouve notamment la description de ces modèles dans [16] et [2].

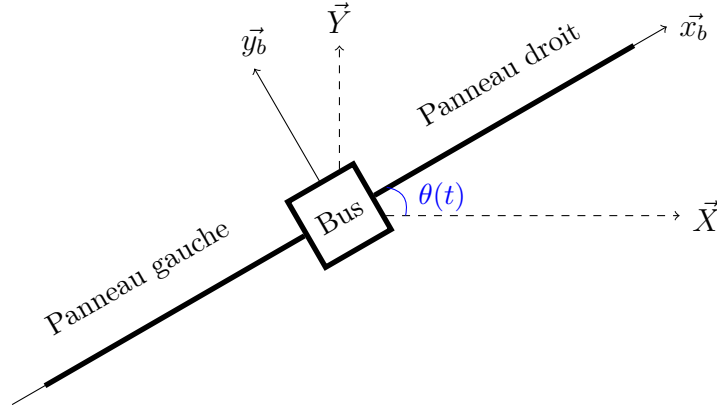


FIGURE 2.1 Repères simplifiés des modèles étudiés

Les panneaux solaires sont modélisés dans la littérature par des poutres selon les équations d'Euler-Bernoulli, ou plus rarement de Timoshenko. En effet, la grande envergure des panneaux solaires décrite précédemment implique que leur facteur de forme est suffisamment grand pour permettre l'utilisation de l'approximation Euler-Bernoulli. Nous retrouvons dans [1] la démarche permettant de recréer ces équations à partir de l'étude d'un élément de poutre en flexion. Comme on se restreint à l'étude du mouvement dans le plan, on préfère cette modélisation plutôt que la représentation des panneaux sous forme de plaques.

Pour la modélisation des vibrations des panneaux, on doit définir les conditions initiales de la modélisation, ainsi que les conditions aux bornes. Les conditions initiales se présentent sous la forme de fonctions qui décrivent le déplacement vertical w initial des panneaux ainsi que la vitesse de ce déplacement $\dot{w}$. Pour choisir ces dernières, on peut prendre une fonction aléatoire qui présente une déformation à un endroit le long de la poutre, souvent à son extrémité, et dont l'amplitude est choisie dans un ordre de grandeur approprié selon les dimensions des panneaux [19]. On trouve également des articles utilisant des logiciels tels ANSYS [20], qui cherchent à évaluer les modes de déformation des panneaux suite au déploiement des sections qui le composent, et à identifier les endroits où les déformations sont maximales pour choisir une condition initiale plus réaliste. Une autre démarche présentée dans [21] se base sur l'observation du comportement réel de panneaux solaires dans l'espace. Ceux-ci sont filmés afin de pouvoir déduire leur mouvement par traitement d'image.

Les conditions thermiques particulières subies par les satellites en orbite peuvent également être à l'origine de déformations, et le couplage des dynamiques flexibles des panneaux, rigides du bus, et thermiques sur l'ensemble du système selon le flux solaire incident est étudié dans [22], [23] ou encore [11]. Ces dynamiques peuvent être dérivées de profils types de conditions

thermiques au cours de l'opération des satellites, comme on peut le trouver dans [24]. Les conditions aux bornes pour les panneaux peuvent être multiples, mais dans notre cas, on retrouve principalement des panneaux considérés comme encastrés au niveau de la liaison avec le bus, et libres à la seconde extrémité.

Certains articles s'attellent uniquement à l'étude de la dynamique d'un panneau modélisé par une poutre, notamment [25], [5] ou encore [26]. D'autres introduisent la dynamique du bus à différents niveaux. On ajoute une seconde équation représentant cette dynamique, tantôt uniquement en rotation, ou bien en ajoutant un ou deux degrés de liberté selon des mouvements horizontaux ou verticaux dans le plan, comme dans [16], [2], [17], ou encore [27]. Les deux dynamiques se retrouvent alors couplées [18], ce qui va changer les conditions aux bornes du système en conséquence. Les dynamiques étant liées, les requis en pointage du bus vont donc également entraîner des mouvements des panneaux, que l'on peut considérer comme des perturbations ou utiliser comme condition initiale, en reprenant par exemple les mouvements mesurés sur un système réel dans [21].

D'un point de vue mécanique, l'amortissement des structures va présenter des caractéristiques particulières. Dans notre étude, la question de l'amortissement et de son introduction dans les équations de mouvement est primordiale. Les différents types de représentation de l'amortissement d'un système, sous forme d'amortissements visqueux, structurel et de Kelvin-Voigt, sont listés entre autres dans [5] ou [28]. On retrouve aussi une explication détaillée des conditions d'amortissement sur les panneaux solaires dans [10]. On peut notamment y retrouver l'explication concise de la cause du faible amortissement des structures spatiales, du fait notamment de l'absence d'amortissement visqueux provoqué par l'air. L'amortissement visqueux étant négligé, un amortissement interne permet de rajouter du réalisme à notre modèle pour représenter la dissipation d'énergie induite par les interactions au sein même des matériaux constitutifs des panneaux. Cet amortissement interne va correspondre à la formulation de Kelvin-Voigt. L'ajout de l'amortissement de Kelvin-Voigt sur des systèmes comprenant des poutres Euler-Bernoulli et une dynamique centrale de bus se retrouve notamment dans [29] et [30] pour des modèles à deux poutres, et est également étudié par [5] pour un modèle à une poutre.

Finalement, les articles trouvés dans la littérature utilisent différentes méthodes afin de simuler les résultats obtenus par leurs modèles, équipés des stratégies de contrôle correspondantes. En effet, on retrouve aussi bien l'utilisation de la méthode par éléments finis [17, 29], par différences finies [23, 27, 31], ou bien par des méthodes modales [2, 16, 32]. Ce sont ces dernières que nous allons utiliser, en particulier en utilisant le *Toolbox* mis à disposition dans l'article [32].

2.1.3 Contrôle

Ces modèles de satellites, composés de panneaux solaires liés ou non à la dynamique du bus, servent de base à la mise en place de stratégies de contrôle visant à obtenir une réponse satisfaisante du système aux conditions initiales choisies. Les méthodes utilisées pour la stabilisation des panneaux solaires sont multiples, mais peuvent être classifiées selon leur action passive ou active.

Le contrôle passif des vibrations présente des avantages importants. Il permet en effet de réduire les vibrations du système sans consommer d'énergie, une ressource précieuse pour des satellites en orbite. L'action mécanique des systèmes passifs permet de réduire l'impact des vibrations aux positions cruciales sur le satellite de la manière la plus simple, en ajoutant de l'amortissement supplémentaire localement, ou encore en décalant les fréquences naturelles d'un élément pour éviter tout phénomène de résonance [10]. Ceux-ci peuvent prendre la forme d'isolants vibratoires [14], d'amortisseurs [33], ou encore de l'utilisation de la résistance au mouvement de moteurs non alimentés placés dans les gonds des panneaux [34]. Les méthodes passives peuvent également prendre la forme de choix de conception des panneaux, en renforçant la structure aux endroits appropriés, comme par exemple dans [8]. Le désavantage majeur du contrôle passif est cependant son inadaptabilité, que ce soit à des conditions dépassant sa plage de conception, ou au changement progressif des propriétés du système dans le temps. Il est donc pertinent de considérer des méthodes de contrôle actives.

Le contrôle actif nécessite l'ajout d'un ou de plusieurs actionneurs au système que nous cherchons à contrôler, ce qui représente un ajout de masse non négligeable. On distingue deux stratégies différentes parmi les méthodes de contrôle actif. Tout d'abord, le contrôle du système peut se faire grâce à une série d'actionneurs distribués le long des panneaux. Cette technique a été notamment utilisée dans [17], [26] et [19]. Dans les deux premiers articles, une logique de consensus entre les actionneurs a été utilisée, afin de coordonner leur action et de pouvoir s'adapter à la perte de l'un d'entre eux. Cette méthode apporte donc de la résilience au système. Les actionneurs utilisés pour la méthode distribuée sont plus légers, et les deux premiers articles cités utilisent des capteurs et actionneurs piézoélectriques à ces fins.

L'autre méthode pour contrôler le système est d'effectuer une commande aux bornes avec une action stabilisatrice exercée à un seul endroit du système. L'utilisation d'un actionnement central des panneaux se retrouve notamment dans [2, 16, 27, 35]. Pour des modèles à un seul panneau simulé par une poutre Euler-Bernoulli, l'action en rotation ou en translation du moteur se retrouve entre autre dans [25, 36, 37] et [5].

Nous pouvons également citer que de nombreux modèles de moteurs utilisables par cette méthode existent, mais que parmi eux on en retient deux, un premier servomoteur présenté dans [3], et une seconde roue d’inertie retrouvée dans [4].

2.2 Articles principaux

Nous mettons en exergue les articles principaux qui serviront de référence pour notre étude.

Tout d’abord, nous commencerons par détailler la formulation des modèles de panneaux solaires que nous allons étudier en introduisant la théorie Euler-Bernoulli. Cette théorie est utilisée en détail dans le manuel *Vibration of Continuous Systems* [1]. Nous allons adapter sa formulation afin de correspondre à celle de [32], à partir duquel nous bâtissons notre logique de simulation autour du *Toolbox* fourni. Nous introduisons aussi les modèles de servomoteur et de roue d’inertie issus de [3] et [4].

Ensuite, nous utiliserons les travaux de Luo, Guo et al. [3,36,38,39] s’appliquant à démontrer la stabilité des systèmes composés d’une poutre. On y utilise deux types de moteurs, un en rotation et un en translation, avec les deux types de mesures de retour de sortie, en contrainte de flexion et en cisaillement. Plus précisément, [38] montre la stabilité asymptotique d’un contrôle en retour de cisaillement avec ajout d’un contrôleur proportionnel intégral (PI) pour un moteur en translation, résultat étendu dans [39]. L’article [3] aborde quant à lui un système similaire avec un moteur en rotation et un retour en contrainte de flexion, et ajoutant un modèle de servomoteur utilisé pour des tests. Finalement, [36] s’attelle à montrer la stabilité d’un système utilisant à la fois un moteur en rotation et un retour en cisaillement. Différents développements mathématiques permettant de prouver la stabilité de ces systèmes sont utilisés, mais nous ne ferons que reprendre les démarches permettant de vérifier que le modèle est bien posé et exponentiellement stable via l’utilisation de la théorie C_0 -semi-groupe et une analyse de Lyapunov, respectivement.

Enfin, nous nous intéresserons aux modèles présentés dans [16] et [2]. Nous rappellerons la formulation des modèles qu’ils définissent, avant d’effectuer les simulations qui nous permettront dans un premier temps de reproduire leurs résultats pour valider notre simulation. Nous implémenterons alors divers modèles destinés à augmenter le réalisme de nos simulations.

CHAPITRE 3 MODÉLISATION ET SIMULATION DU SYSTÈME ÉTUDIÉ

3.1 Modélisation

Comme défini précédemment, nous nous intéressons à l'étude des vibrations de panneaux solaires de satellites. Pour pouvoir réaliser cette étude, il convient dans un premier temps de définir un ou plusieurs modèles qui nous permettront de la réaliser. Ces modèles permettent de définir le cadre de notre étude en posant les éléments du système que nous étudierons, leurs caractéristiques physiques et mécaniques, les repères dans lesquels ils sont étudiés, ainsi que les formulations mathématiques utilisées pour décrire leurs mouvements. Nous pouvons alors produire des simulations à l'aide d'outils de programmation qui nous permettent de résoudre les équations de ces modèles sous différentes conditions initiales. Ces simulations nous permettront de visualiser la réponse du système étudié dans le temps, selon un mouvement libre ou contrôlé. Les simulations nous donnent la possibilité d'ainsi implémenter diverses stratégies de contrôle, d'étudier leur efficacité, et d'introduire graduellement des modèles réalistes pour certains des éléments du système.

3.1.1 Éléments des modèles étudiés

Dans ce travail, nous étudierons des configurations du système à 1 et 2 panneaux solaires fixés au bus central. On considère que les panneaux sont directement fixés au bus, et nous simplifions donc tout système d'attache présent sur un satellite réel. La figure 3.1 montre une représentation simplifiée des éléments constitutifs des modèles étudiés.

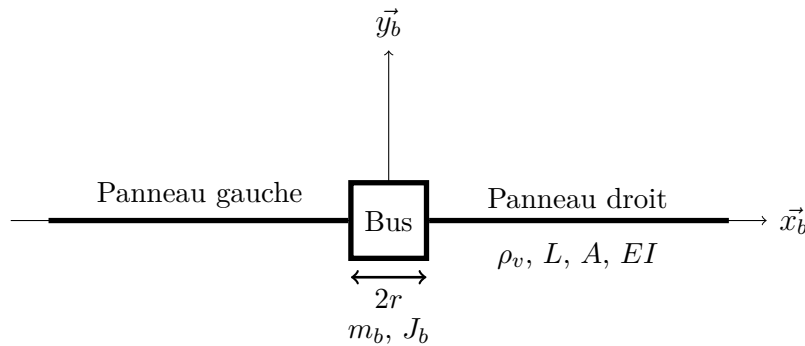


FIGURE 3.1 Éléments des modèles étudiés

Dans le plan, les panneaux solaires sont modélisés par des poutres aux caractéristiques physiques et mécaniques uniformes sur toute leur longueur. Elles sont décrites par leur masse (m) ou masse volumique (ρ_v), leur longueur (L), l'aire de leur section (A), le module de Young (E) du matériau qui les compose et le moment quadratique (I) qui forment ensemble le terme de rigidité en flexion (EI), ainsi que par les conditions de fixation à leurs deux extrémités. Le bus est lui défini par sa masse (m_b), son inertie en rotation (J_b) et sa demi-largeur (r).

L'étude s'effectue dans le plan et non dans l'espace pour des raisons de simplification. Dans ce plan, on définit le premier repère comme étant fixé à notre modèle, dont le centre correspond au centre du bus, l'axe $\vec{x}_b$ est perpendiculaire au bus dans la direction des panneaux au repos, et l'axe $\vec{y}_b$ est perpendiculaire au précédent. Ce dernier servira à l'expression du déplacement vertical le long des panneaux $w(x, t)$, avec x la position sur le panneau et t le temps. Lors du mouvement du bus central, l'angle de rotation θ que nous définissons représente l'écart entre le repère $(\vec{x}_b, \vec{y}_b)$ qui tournera avec le bus, et un repère $(\vec{X}, \vec{Y})$ qui est confondu avec le repère $(\vec{x}_b, \vec{y}_b)$ initial au temps $t = 0$ de la simulation. Le repère $(\vec{X}, \vec{Y})$ a son origine au centre du bus, et conservera l'orientation de ses axes indépendamment du mouvement du bus, ce qui implique que l'angle θ est un angle relatif par rapport à la position initiale du système. On peut retrouver ces axes sur la figure 3.2. Cette définition nous servira pour la description des missions de pointage des satellites lors desquelles l'angle θ doit suivre une valeur désirée ou un profil de variation dans le temps. En outre, un autre repère global inertiel $(\vec{X}_G, \vec{Y}_G)$ pourra être utilisé dans certaines modélisations, notamment lorsque le bus possède deux degrés de liberté supplémentaires en translation, en plus de la rotation. On utilisera peu le repère global, et nous exprimerons nos équations dans le repère du bus dès que possible.

3.1.2 Modèles à 1 et 2 panneaux solaires

Maintenant que nous avons établi les éléments pris en compte dans notre étude, ainsi que les repères utilisés pour nos modèles, nous présentons les deux modèles à un et deux panneaux que nous utiliserons.

Le modèle le plus complet que nous utiliserons dans le plan est composé de deux panneaux solaires et d'un bus. Il correspond au modèle présenté dans [2] et représente la finalité de notre étude. Dans ce modèle, les panneaux solaires sont représentés par des poutres dont le déplacement vertical est $w_R(x, t)$ et $w_L(x, t)$ respectivement pour les panneaux de droite et de gauche. Ils sont reliés à un bus central doté de trois degrés de liberté dans le plan : une rotation θ et deux translations x_{bus} et y_{bus} dans le repère $(\vec{x}_b, \vec{y}_b)$. Le système à deux poutres peut alors être schématisé sur la figure 3.3.

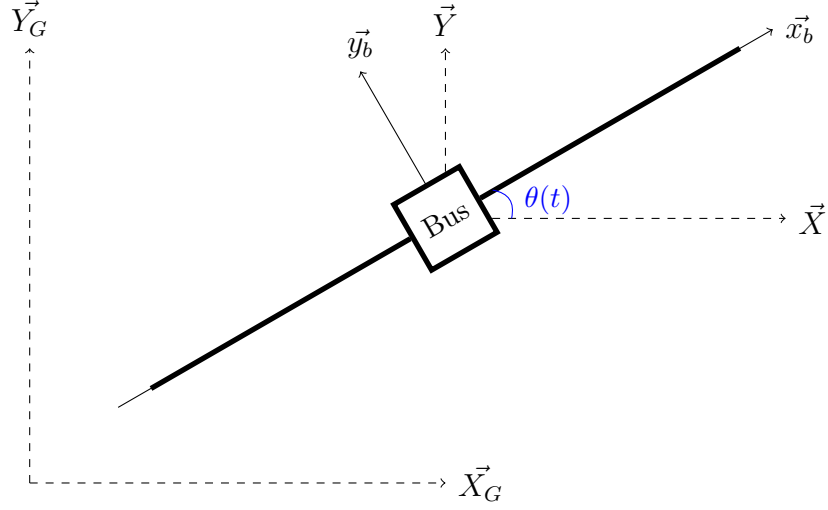


FIGURE 3.2 Repères des modèles étudiés

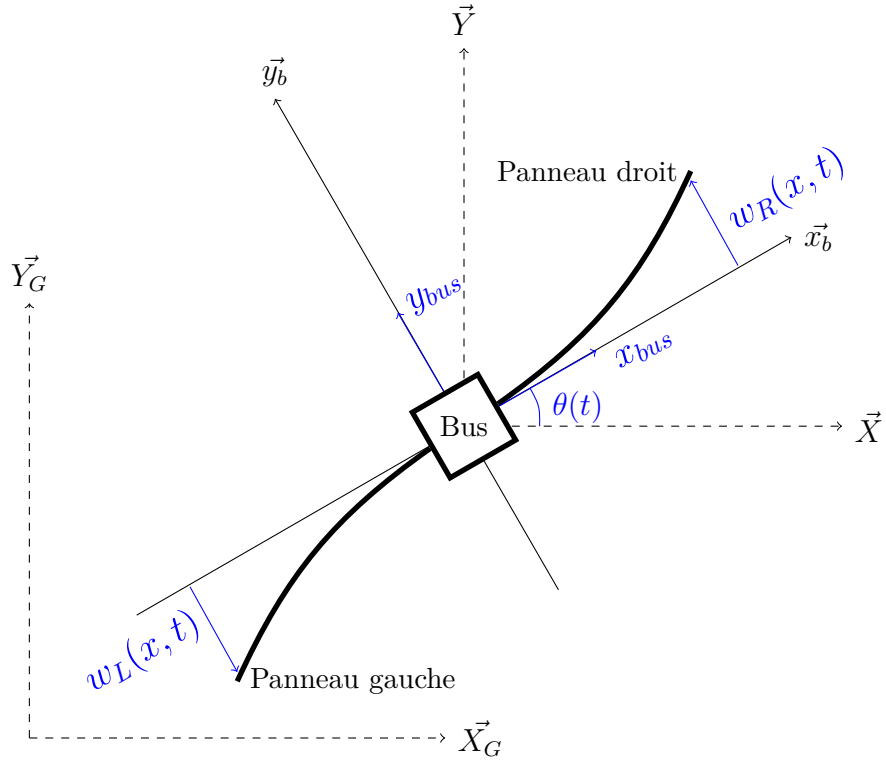


FIGURE 3.3 Modèle à 2 panneaux étudié

Pour étudier ce modèle, nous avons dans un premier temps commencé par modéliser un système à un seul panneau, dans lequel la dynamique du bus est grandement simplifiée.

Ce modèle simplifié a vocation à tester l'utilisation de nos outils de simulation, effectuer les preuves de stabilité, et tester l'implémentation de dynamiques de moteur plus réalistes, avant d'appliquer ces notions sur le modèle complet précédent. Dans ce modèle, on ne considère plus le bus que comme un moteur à 1 degré de liberté, qui peut soit produire une rotation $\theta(t)$ ou une translation $s(t)$ dans le sens vertical (axe $\vec{y}_b$) [40]. Le panneau solaire lui est représenté de la même manière que précédemment. Les systèmes à une poutre peuvent alors être schématisés sur la figure 3.4.

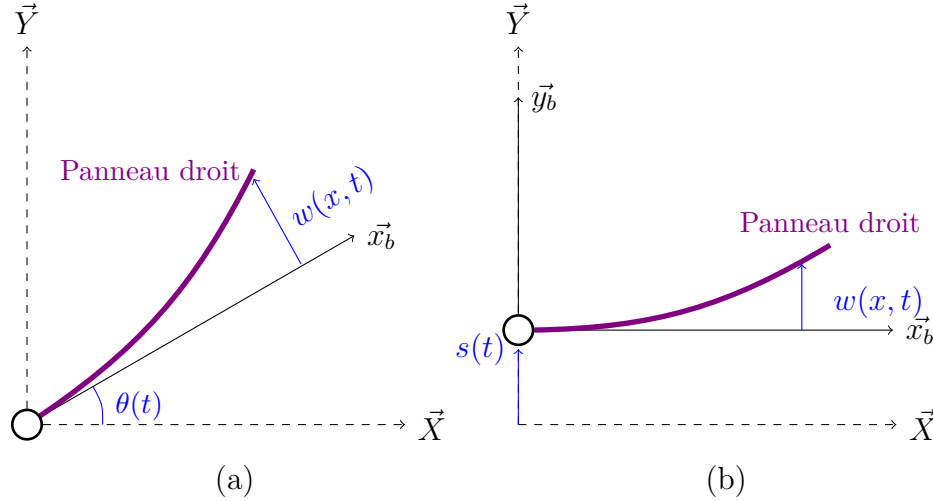


FIGURE 3.4 Modèles à 1 panneau étudiés : (a) moteur en rotation, (b) moteur en translation

3.1.3 Modélisation des panneaux solaires par des poutres minces d'Euler-Bernoulli

Formulation de l'équation d'Euler-Bernoulli

La théorie d'Euler-Bernoulli représente la description du mouvement par une équation à dérivées partielles des poutres minces. Elle s'oppose à la théorie de Timoshenko, applicable quant à elle à des poutres épaisses. En effet, les équations d'Euler-Bernoulli négligent dans leur développement l'inertie en rotation ainsi que les effets de déformation dus au cisaillement sur les sections de poutre. Ces simplifications restent acceptables pour des poutres minces, c'est-à-dire dont le facteur de forme (ratio de la longueur sur l'épaisseur) est suffisamment élevé (d'au moins 10), et dont le déplacement vertical reste petit devant l'épaisseur. Pour notre étude, comme notre problématique porte sur le contrôle de panneaux solaires de grande envergure, nous respectons donc de facto ces critères, et les caractéristiques physiques de tels panneaux se retrouvent dans la littérature ; notamment dans [2, 16] ou encore dans [26, 41].

L'équation d'Euler-Bernoulli est retrouvée dans [1] par la somme des forces et des moments sur un élément de poutre en flexion, ou encore par le principe Hamiltonien utilisé dans la plupart des articles de la littérature faisant appel à l'énergie potentielle et cinétique de la poutre. L'équation de base de la théorie d'Euler-Bernoulli fait intervenir des dérivées partielles du 4ème ordre et s'exprime sous la forme suivante :

$$\rho_v A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, t) = f(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, \infty), \quad (3.1)$$

où $w(x, t)$ est le déplacement transversal le long de la poutre, ρ_v est la densité volumique de la poutre, EI est la rigidité en flexion, A est l'aire de la section de la poutre et $f(x, t)$ est l'excitation extérieure appliquée sur la poutre.

Formulation des conditions frontière pour une poutre d'Euler-Bernoulli

Pour former notre système, on ajoute à l'équation deux conditions frontière, qui représentent les conditions de fixation des deux extrémités de la poutre, ainsi que les conditions initiales de position et de vitesse de la poutre. Les conditions frontière sont des dérivées spatiales partielles du déplacement vertical $w(x, t)$ jusqu'à l'ordre 3. Ces dérivées représentent respectivement sur la poutre à une position x et un temps t donnés l'angle de rotation local θ_b (différent de θ), la contrainte en flexion M_b (*strain*), et le cisaillement Q_b (*shear*) tel que :

$$\theta_b(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} w(x, t), \quad (3.2a)$$

$$M_b(x, t) = EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t), \quad (3.2b)$$

$$Q_b(x, t) = EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(x, t). \quad (3.2c)$$

Ainsi, selon le mode de fixation à une extrémité de la poutre, deux de ces paramètres seront nuls à la position en question ($x = 0$ ou $x = L$). Dans notre cas, nous excluons les cas incluant des ressorts en tension ou en torsion, des amortisseurs, ou encore le cas de masses supportées aux extrémités. Les types de conditions frontière retenus pour la poutre sont les suivants :

- Libre (*free end*) : Les mouvements de translation et de rotation sont permis et il n'y a aucune résistance. Par conséquent, la contrainte en flexion M_b et le cisaillement Q_b sont nuls.
- Encastrée (*clamped end*) : Aucun mouvement en translation et en rotation n'est permis. Par conséquent, le déplacement w et l'angle de rotation local θ_b sont nuls.

— Rotule (*pinned end*) : Aucun mouvement en translation, seule la rotation est permise. Par conséquent, le déplacement w et la contrainte en flexion M_b sont tous deux nuls à ce point.

— Glissant (*sliding end*) : Aucun mouvement en rotation, seule la translation est permise. Par conséquent, l'angle de rotation local θ_b et la force de cisaillement Q_b sont nuls.

On résume ces conditions aux frontières dans le tableau 3.2, dans lequel les indices Bi (i allant de 1 à 4) correspondent à la dénomination des conditions frontière dans le *Toolbox* présenté dans la section suivante.

TABLEAU 3.1 Conditions frontière de la poutre [1] en un point x donné

Fixation	Conditions frontière
Libre (B3)	$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t) = 0$
	$EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(x, t) = 0$
Encastrée (B2)	$w(x, t) = 0$
	$\frac{\partial}{\partial x} w(x, t) = 0$
Rotule (B1)	$w(x, t) = 0$
	$EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t) = 0$
Glissante (B4)	$\frac{\partial}{\partial x} w(x, t) = 0$
	$EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(x, t) = 0$

Parmi ces conditions frontière, nous utiliserons exclusivement les conditions encastrées (B2) et libres (B3). En effet, pour les deux modèles à un ou deux panneaux, l'encastrement correspond à la partie de la poutre fixée au bus, et l'autre extrémité est non contrainte.

Formulation des conditions initiales pour une poutre d'Euler-Bernoulli

Le dernier élément constitutif du modèle est l'expression de la condition initiale. Celle-ci indique l'état du système en terme de position $w(x, t)$ et de vitesse $\frac{\partial}{\partial t}w(x, t)$ verticale au temps $t = 0$ le long de la poutre. On définit ces conditions par des fonctions dépendant de x de la manière suivante :

$$w(x, t = 0) = a_0(x), \quad x \in (0, L), \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}w(x, t = 0) = b_0(x), \quad x \in (0, L). \quad (3.3b)$$

3.1.4 Amortissement du système

Dans la construction de nos modèles, il nous reste à ajouter un terme dédié à l'amortissement à l'équation d'Euler-Bernoulli (3.1). Ce terme ajoute une action dissipative à nos équations, permettant de représenter la dynamique de nos systèmes avec plus de réalisme. Plusieurs types d'amortissement existent, et leurs expressions mathématiques correspondent à des dérivées partielles spatiales et temporelles du déplacement vertical $w(x, t)$ d'ordres différents. On peut distinguer l'amortissement dont l'origine est externe au système à l'amortissement interne [28]. Typiquement, l'amortissement externe est associé à l'amortissement visqueux D_v , proportionnel à la vitesse du mouvement, provoqué par l'action de forces externes sur le système. L'amortissement interne quant à lui provient de la dissipation d'énergie provoquée par les interactions internes aux matériaux. On peut ainsi retrouver les amortissements structuraux D_s et de Kelvin-Voigt D_{KV} , ce dernier basé sur la relation entre la contrainte et la dérivée de la déformation dans le matériau. On liste ci-après les expressions aux dérivées partielles de ces amortissements lorsqu'on les introduit dans le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli :

$$D_v = d_v \frac{\partial}{\partial t}w(x, t), \quad (3.4a)$$

$$D_s = d_s \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}w(x, t), \quad (3.4b)$$

$$D_{KV} = \eta \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t}w(x, t). \quad (3.4c)$$

Dans notre étude, nous ne tiendrons pas compte de l'amortissement visqueux compte tenu des conditions du milieu spatial listées précédemment, notamment l'absence d'air qui implique que peu de forces extérieures auront un effet dissipatif sur le mouvement des panneaux solaires. Nous considérerons uniquement l'amortissement de Kelvin-Voigt (3.4c) dans notre étude.

On ajoute alors ce terme d'amortissement à l'équation d'Euler-Bernoulli pour obtenir :

$$\rho_v A \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, t) + EI \eta \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} w(x, t) = f(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, \infty). \quad (3.5)$$

3.2 Simulation

Nous venons de compléter la présentation des modèles que nous allons étudier, en abordant les éléments du satellite modélisés, la théorie d'Euler-Bernoulli utilisée pour la mise en équation du mouvement des poutres représentant les panneaux solaires, ainsi que l'expression des conditions frontière et initiales associées. Nous avons également présenté la manière dont nous allons ajouter l'amortissement à nos modèles via la théorie de Kelvin-Voigt, ainsi que la représentation de l'objectif de mission via l'établissement de l'angle désiré que le bus du modèle complet doit atteindre.

Nous allons maintenant décrire les stratégies utilisées pour réaliser les simulations de ces modèles. Nous aborderons les outils informatiques utilisés, la logique de programmation qui y est associée, ainsi que les développements mathématiques nécessaires à l'adaptation des systèmes d'équations décrivant nos modèles aux outils de programmation utilisés. Nous présenterons également des modèles de moteurs réels qui seront adaptés à nos simulations afin d'observer l'impact de cet ajout sur la réponse de nos modèles de satellites. Nous détaillerons de surcroît les valeurs numériques associées aux propriétés géométriques et physiques des panneaux solaires et du bus, aux paramètres des moteurs, ainsi qu'aux objectifs de pointage.

3.2.1 Outils de simulation

Dans cette étude, nous avons utilisé le logiciel MATLAB/Simulink pour simuler la réponse de nos systèmes. Chaque modèle simulé est représenté sur un schéma Simulink où chaque bloc représente une dynamique d'un élément du modèle ou un élément de la loi de commande. Les paramètres d'entrée des schémas Simulink, les matrices définissant les blocs de la dynamique des éléments des modèles, ainsi que les données de sortie des simulations sont traités dans des scripts MATLAB, afin de produire les graphiques représentant le comportement des modèles dans l'espace et le temps sous différentes conditions initiales. C'est à partir de ces graphiques en trois dimensions, auxquels on ajoute d'autres graphiques représentant le comportement de certaines variables d'intérêt, que nous constaterons l'efficacité des méthodes de stabilisation employées.

Présentation du *Toolbox*

Les scripts MATLAB utilisés sont équipés d'un *Toolbox* spécialisé dans l'analyse des poutres d'Euler-Bernoulli, tiré de [32]. Le *Toolbox* constitue un outil important de notre étude, puisque qu'il nous permettra de générer les matrices pertinentes du modèle d'état associé aux poutres d'Euler-Bernoulli de nos modèles. Ce *Toolbox* est composé de nombreuses fonctions MATLAB destinées à l'analyse dynamique et au contrôle par rétroaction des poutres d'Euler-Bernoulli. Grâce à ces fonctions le *Toolbox* permet, en définissant les paramètres géométriques et physiques de la poutre, d'obtenir les fréquences propres et les fonctions propres de la poutre selon les conditions frontière, ainsi que les réponses libres et forcées en un point défini de la poutre dans le temps.

Le *Toolbox* permet ainsi, entre autres, d'effectuer directement les analyses suivantes sans avoir besoin de représenter nos systèmes sous forme de schémas Simulink :

- Étudier une poutre aux paramètres uniformes et non-uniformes le long de la poutre ;
- Obtenir une représentation d'état de la dynamique de la poutre ;
- Obtenir la réponse de la poutre en un point dans le temps, ou la forme de la poutre complète en un temps donné ;
- Simuler la réponse libre de la poutre ;
- Simuler la réponse forcée de la poutre sous l'action de forces ou de moments fixes ou mobiles, ponctuels ou distribués, variables dans le temps ou constants ;
- Simuler directement des stratégies de commande, avec notamment la possibilité d'intégrer directement au code l'ajout des capteurs, des actionneurs, et les contrôleurs appropriés.

Les fonctions fournies permettent uniquement de réaliser ces analyses dans un cadre fixe. En effet, comme il sera détaillé par la suite, seul un nombre limité de situations peut être représenté par les fonctions du *Toolbox*, fournies en plus dans un format *.p* non modifiable. Ces limitations du *Toolbox*, que nous mettrons en lumière dans les prochaines sections, rendent nécessaire l'interaction entre le code MATLAB et les modèles créés sous Simulink. Les limitations concernent le nombre de paramètres pouvant être fournis dans les fonctions pour définir les caractéristiques de la poutre étudiée, le nombre de moteurs et de capteurs modélisés dans les fonctions, ainsi que les types de forces applicables pour une réponse forcée. Par la suite, nous ne détaillerons donc que les fonctions qui seront utiles à la procédure de simulation développée, en utilisant la représentation d'état de la poutre plutôt que les fonctions de simulations directes du *Toolbox*.

Fonctions pertinentes du *Toolbox*

Parmi toutes les fonctions disponibles dans [32], seules les trois fonctions suivantes seront utilisées pour simuler nos modèles :

- **setbeam** : Cette fonction permet de définir d’abord les paramètres de la poutre. Elle est appelée au début du code pour indiquer aux fonctions subséquentes les paramètres à utiliser. Elle permet également d’obtenir les fréquences naturelles et la forme des modes propres de la poutre selon les conditions frontière choisies.

Entrée : [Densité linéique du matériau de la poutre (ρ [kg/m]) | Rigidité en flexion (EI [N.m²]) | Longueur de la poutre (L [m]) | Conditions frontière aux deux extrémités (en utilisant les codes indiqués précédemment dans la section 3.1) | Coefficient d’amortissement (ν) | Nombre de modes considérés (n)].

Sortie : [Initialisation des paramètres pour les fonctions subséquentes | Affichage des 4 premières fréquences et modes propres].

- **eigenbeam** : Cette fonction utilise les paramètres entrés dans **setbeam** pour donner en sorties les valeurs propres et les fonctions propres normalisées de la poutre.

Entrée : [Nombre de modes considérés (n)].

Sortie : [n premières fréquences naturelles | Coefficients β_k et a_i définissant les n premiers modes propres | n premières valeurs propres normalisées].

- **ssbeam** : Cette fonction utilise les paramètres entrés dans **setbeam** pour obtenir les matrices du modèle d’état pour un système en boucle ouverte ou fermée. Les entrées sont deux vecteurs.

Entrée : [Types et position des capteurs placés sur la poutre | Type et position des moteurs placés sur la poutre].

Sortie : [Matrices **A** et **B** du modèle d’état | Matrice de sortie Ψ_s].

Contrôle direct via *Toolbox*

Le *Toolbox* offre la possibilité d’inclure dans la simulation des moteurs et des capteurs pour lesquels on précise le type et la localisation le long de la poutre. Ils peuvent être directement utilisés avec les fonctions du *Toolbox* pour obtenir les premiers résultats de contrôle de la réponse de la poutre dans le temps à partir d’une condition initiale donnée. Ils peuvent également être spécifiés afin de les inclure dans la génération des matrices du modèle d’état.

Pour ce qui est des moteurs, deux types sont offerts [32] : un premier générant un mouvement en translation et un second générant un mouvement en rotation. On peut placer $0 \leq j \leq s$ moteurs sur la poutre aux positions $0 \leq a_j \leq L$. L’action de ces moteurs va être représentée par une force $F_j(x, t)$ appliquée au système.

Le tableau 3.4 illustre ces deux types de moteurs, leur expression en tant que force externe, ainsi que le moyen de les configurer dans la fonction `ssbeam` :

TABLEAU 3.2 Moteurs offerts par le *Toolbox*

Type de moteur	Expression mathématique	Entrée dans <code>ssbeam</code>
Translation (A1)	$F_{c,j}(x, t) = f_j(t)\delta(x - a_j)$	[1 a_j]
Rotation (A2)	$F_{c,j}(x, t) = -f_j(t)\frac{\partial}{\partial x}\delta(x - a_j)$	[2 a_j]

Pour ce qui est des capteurs, le *Toolbox* en offre 6 [32]. On peut placer $0 \leq j \leq r$ capteurs sur la poutre aux positions $0 \leq s_j \leq L$. On retrouve dans le tableau 3.3 les types de capteurs, l'expression de la grandeur physique mesurée $y_j(t)$ et son lien avec le déplacement $w(x, t)$, ainsi que le moyen de les configurer dans la fonction `ssbeam`.

TABLEAU 3.3 Capteurs offerts par le *Toolbox*

Type de capteur	Expression mathématique	Entrée dans <code>ssbeam</code>
Déplacement vertical (S1)	$y_j(t) = w(s_j, t)$	[1 s_j]
Angle de rotation local (S2)	$y_j(t) = \theta_b(s_j, t) = \frac{\partial}{\partial x}w(s_j, t)$	[2 s_j]
Contrainte en flexion (S3)	$y_j(t) = M_b(s_j, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}w(s_j, t)$	[3 s_j]
Vitesse verticale (S4)	$y_j(t) = \frac{\partial}{\partial t}w(s_j, t)$	[4 s_j]
Vitesse de rotation locale (S5)	$y_j(t) = \frac{\partial}{\partial t}\theta_b(s_j, t)$	[5 s_j]
Taux de variation de la contrainte en flexion (S6)	$y_j(t) = \frac{\partial}{\partial t}M_b(s_j, t)$	[6 s_j]

On pourrait être tenté d'utiliser directement ces outils offerts par le *Toolbox* afin de concevoir la loi de commande pour nos modèles. Cependant, un problème apparaît rapidement entre le placement des moteurs et les conditions frontière. En effet, dans nos modèles, nous utilisons

des poutres avec les conditions Encastrée-Libre aux frontières, avec l'encastrement coïncidant avec la fixation au bus. Or, c'est à ce même emplacement que nous cherchons à placer le moteur, situé centralement au niveau du bus pour le système complet (figure 3.3) ou à l'implanture pour le système à 1 panneau (figure 3.4). Les degrés de liberté en translation et en rotation étant bloqués au niveau de l'encastrement, les deux moteurs proposés dans le *Toolbox* n'auront aucune influence sur la réponse du système. L'utilisation de conditions frontière différentes résoudrait ce problème, glissante avec un moteur en translation (B4 + A1), ou rotule avec un moteur en rotation (B1 + A2), mais cette technique n'offrirait pas une représentation réaliste de nos modèles. Sur une note similaire, il faut être attentif à l'utilisation de certains capteurs. Notre objectif est de réaliser le contrôle de nos modèles avec une lecture unique au niveau du bus, au même emplacement que le moteur. Cet emplacement coïncide donc également avec celui de la condition frontière, où le paramètre mesuré pourrait ne pas être disponible.

3.2.2 Développement mathématique de l'équation d'Euler-Bernoulli

Formulation d'Euler-Bernoulli du *Toolbox*

L'équation d'Euler-Bernoulli (3.1) est exprimée de manière légèrement différente dans le *Toolbox* [32]. Elle prend notamment en compte des forces extérieures et des forces appliquées par un nombre s de moteurs pouvant être placés sur la poutre, comme on peut le voir sur l'équation (3.6) :

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) + d_v \frac{\partial}{\partial t} w(x, t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, t) = F_{\text{ext}}(x, t) + \sum_{j=1}^s F_{c,j}(x, t), x \in (0, L); \quad (3.6)$$

avec F_{ext} la force extérieure, $F_{c,j}$ la force appliquée par l'actionneur j , d_v est le coefficient d'amortissement visqueux, ρ ($[kg/m]$) la densité linéique et EI ($[N.m^2]$) la rigidité en flexion.

Comme annoncé précédemment, une force extérieure appliquée sur le système est utilisée pour modéliser l'action du moteur en rotation (ou en translation) à la base de la poutre, et donc $\sum_{j=1}^s F_{c,j}(x, t) = 0$. La force extérieure est exprimée de la manière suivante, avec $D(x)$ la distribution spatiale de la force appliquée et $f_e(t)$ son amplitude dans le temps :

$$F_{\text{ext}}(x, t) = D(x)f_e(t). \quad (3.7)$$

De plus, dans notre cas, on ne considère pas non plus l'amortissement visqueux, i.e., $d_v = 0$.

On obtient alors l'équation simplifiée :

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, t) = F_{\text{ext}}(x, t), x \in (0, L). \quad (3.8)$$

Valeurs propres et fonctions propres

Une fois les conditions frontière établies, le *Toolbox* permet d'obtenir les fréquences et les fonctions naturelles (propres) du système. On considère que le déplacement d'une poutre d'Euler-Bernoulli sans amortissement dans le temps peut être exprimé de la façon suivante [32] :

$$w(x, t) = u(x) e^{i\omega t}. \quad (3.9)$$

En remplaçant (3.9) dans l'équation d'Euler-Bernoulli (3.6) sans considérer l'amortissement et les forces, on obtient :

$$\rho \omega^2 u(x) = EI \frac{d^4}{dx^4} u(x). \quad (3.10)$$

On retrouve dans ces équations ω et $u(x)$ qui correspondent respectivement à une valeur propre et à une fonction propre. Pour le système physique d'une poutre, ils correspondent respectivement à une fréquence naturelle et à une forme de mode fréquentiel.

On catégorise les fonctions propres selon la valeur propre : si la valeur propre est non-nulle, la fonction propre associée est dite un mode flexible, mais si la valeur propre est nulle, la fonction propre associée est dite un mode rigide. La formulation de la fonction propre d'un mode flexible est la suivante [32] :

$$u(x) = a_1 \cos \beta x + a_2 \sin \beta x + a_3 \cosh \beta x + a_4 \sinh \beta x. \quad (3.11)$$

Dans cette expression, les constantes a_1, a_2, a_3 et a_4 sont déterminées à partir des conditions frontière énoncées plus haut. Le paramètre β sert à simplifier l'expression des fréquences propres :

$$\beta^4 := \omega^2 \frac{\rho}{EI}. \quad (3.12)$$

La fonction propre d'un mode rigide est la suivante :

$$u(x) = r_1 + r_2 x, \quad (3.13)$$

où r_1 et r_2 sont des constantes.

Développement modal

La résolution de l'équation passe par l'expansion modale écrite sous la forme suivante pour les n premiers modes étudiés :

$$w(x, t) \approx [\Phi(x)]^T \{q(t)\}, \quad (3.14)$$

où $q(t)$ sont les coordonnées modales et $[\Phi(x)]$ est la matrice des fonctions propres définie ainsi :

$$[\Phi(x)] = (u_1(x), \dots, u_n(x))^T. \quad (3.15)$$

Les fonctions propres s'expriment de la façon suivante pour les modes flexibles ou de corps rigides :

$$u_k(x) = a_1 e^{-\beta_k(L-x)} + a_2 e^{-\beta_k x} + a_3 \cos \beta_k x + a_4 \sin \beta_k x, \quad (3.16a)$$

$$u_k(x) = a_1 + a_2 x. \quad (3.16b)$$

On introduit la décomposition modale (3.14) dans l'équation d'Euler-Bernoulli (3.8) :

$$\rho[\Phi(x)]\{\ddot{q}(t)\} + EI[\Phi(x)]''''\{q(t)\} = F_{\text{ext}}(x, t). \quad (3.17)$$

On transforme l'équation comme suit :

$$\rho[\Phi(x)][\Phi(x)]\{\ddot{q}(t)\} + EI[\Phi(x)][\Phi(x)]''''\{q(t)\} = [\Phi(x)]F_{\text{ext}}(x, t),$$

et on utilise les conditions d'orthogonalité des fonctions propres :

$$\rho \int_0^L u_j(x) u_k(x) dx = \delta_{jk} \quad ; \quad EI \int_0^L u_j(x) \frac{d^4}{dx^4} u_k(x) dx = \delta_{jk} \omega_k^2,$$

afin d'obtenir l'équation sous forme modale :

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\Omega_b]\{q(t)\} = B_f f_e(t), \quad (3.18)$$

$$[\Omega_b] = \text{diag}\{\omega_k^2\},$$

$$\{B_f\} = (b_1, \dots, b_n)^T \quad ; \quad b_k = \int_0^L D(x) u_k(x) dx. \quad (3.19)$$

Construction du modèle d'état

On écrit alors le modèle d'état à partir de l'équation (3.18) :

$$\{\dot{z}(t)\} = \mathbf{A}\{z(t)\} + \mathbf{B}_e f_e(t), \quad (3.20)$$

où l'on définit le vecteur d'état :

$$\{z(t)\} = (\{q(t)\}\{\dot{q}(t)\})^T,$$

et où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\Omega_b] & [0] \end{bmatrix}, \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{B}_e = \begin{pmatrix} \{0\} \\ \{B_f\} \end{pmatrix}. \quad (3.21b)$$

L'équation de sortie dépend du type de capteur choisi. Dans notre cas, nous allons étudier un système doté d'un capteur à la base de la poutre, capable de mesurer la contrainte en flexion (*strain*) ou encore le cisaillement (*shear*).

$$y_s(t) = y_{x=0}(t) = \mathbf{C}z(t) = [\Psi_0]\{q(t)\} + [\Psi_1]\{\dot{q}(t)\}; \quad (3.22a)$$

$$y_{\text{strain}}(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(0, t) = w''(0, t) = [\Phi(0)]''\{q(t)\}, \quad (3.22b)$$

$$y_{\text{shear}}(t) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(0, t) = w'''(0, t) = [\Phi(0)]'''\{q(t)\}. \quad (3.22c)$$

On peut donc construire la matrice $\mathbf{C}$ de la manière suivante :

$$\mathbf{C} = [\Psi_s] = \begin{bmatrix} [\Psi_0] & [\Psi_1] \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Ajout du terme d'amortissement de Kelvin-Voigt

En partant de l'expression (3.8), on ajoute alors le terme d'amortissement de Kelvin-Voigt, et on obtient l'équation suivante :

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, t) + EI \eta \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} w(x, t) = F_{\text{ext}}(x, t). \quad (3.24)$$

On introduit la décomposition modale (3.14) dans l'équation d'Euler-Bernoulli (3.24) et on obtient la forme suivante :

$$\rho[\Phi(x)]\{\ddot{q}(t)\} + EI[\Phi(x)]''''\{q(t)\} + EI\eta[\Phi(x)]''''\{\dot{q}(t)\} = F_{\text{ext}}(x, t). \quad (3.25)$$

On transforme l'équation comme suit en la multipliant par $[\Phi(x)]$ de part et d'autre :

$$\begin{aligned} \rho[\Phi(x)][\Phi(x)]\{\ddot{q}(t)\} + EI[\Phi(x)][\Phi(x)]''''\{q(t)\} + EI\eta[\Phi(x)][\Phi(x)]''''\{\dot{q}(t)\} \\ = [\Phi(x)]F_{\text{ext}}(x, t). \end{aligned} \quad (3.26)$$

On utilise ensuite les conditions d'orthogonalité des fonctions propres suivantes :

$$\rho \int_0^L u_j(x)u_k(x)dx = \delta_{jk} \quad ; \quad EI \int_0^L u_j(x)\frac{d^4}{dx^4}u_k(x)dx = \delta_{jk}\omega_k^2. \quad (3.27)$$

On peut alors réduire l'équation (3.26) après intégration de chaque côté pour obtenir la forme :

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\Omega_b]\{q(t)\} + \eta[\Omega_b]\{\dot{q}(t)\} = B_f f_{\text{ext}}(t), \quad (3.28)$$

avec :

$$[\Omega_b] = \text{diag}\{\omega_k^2\}, \quad (3.29)$$

$$\{B_f\} = (b_1, \dots, b_n)^T \quad ; \quad b_k = \int_0^L D(x)u_k(x)dx. \quad (3.30)$$

Nous venons de décrire la forme modale de l'équation avec l'ajout du terme d'amortissement de Kelvin-Voigt. Nous allons comparer cette formulation avec celle du *Toolbox*. Dans le *Toolbox*, on représente l'équation avec amortissement interne en suivant le développement modal à l'aide la série suivante, avec $u_k(x)$ les fonctions propres :

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_k(x)q_k(t). \quad (3.31)$$

La formulation de l'ajout de l'amortissement interne se fait alors sous forme modale de la manière suivante dans le *Toolbox* :

$$\ddot{q}_k(t) + 2\zeta_k\omega_k\dot{q}_k(t) + \omega_k^2q_k(t) = b_kf(t). \quad (3.32)$$

En réécrivant l'équation (3.28) avec la décomposition en série, on obtiendrait :

$$\ddot{q}_k(t) + \eta\omega_k^2\dot{q}_k(t) + \omega_k^2q_k(t) = b_kf(t). \quad (3.33)$$

Pour faire correspondre les formes, on pose :

$$\zeta_k = (\eta\omega_k)/2. \quad (3.34)$$

En reprenant le modèle d'état (3.20), la matrice $\mathbf{A}$ devient avec l'ajout de l'amortissement :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\Omega_b] & -[D_b] \end{bmatrix},$$

avec la matrice d'amortissement $[D_b] = \text{diag}_i(2\zeta_i\omega_i)$.

Pour nos simulations, on utilise donc la formule (3.34) pour générer les matrices $[D_b]$ et $\mathbf{A}$ appropriées.

3.2.3 Logique de simulation

Les problèmes soulevés à la section 3.2.1 ont dicté de la logique de modélisation utilisée, faisant interagir le code MATLAB qui appelle les fonctions du *Toolbox* avec des schémas Simulink. Le logiciel Simulink permettra de construire le modèle en ajoutant les blocs correspondant à la dynamique des panneaux, du bus, et des modèles de moteurs réels. Les matrices $\mathbf{A}$ utilisées dans les blocs dynamiques associés aux modèles d'état des éléments simulés sont obtenues grâce à la fonction `ssbeam`.

Les stratégies de contrôle utilisées seront représentées par l'ajout de blocs qui implémentent les contrôleurs PI et les opérations sur les valeurs mesurées par les capteurs. Les matrices $\mathbf{C}$ associées aux valeurs de sortie mesurées sont produites par la fonction `ssbeam` lorsque possible, ou recrées lorsque la donnée nécessaire n'est pas fournie par le *Toolbox*. Le développement mathématique correspondant se retrouve à la section suivante 3.2.2.

L'action stabilisatrice des moteurs placés au niveau de la condition d'encastrement est prise en compte par l'ajout d'un terme à l'équation d'Euler-Bernoulli en faisant usage de l'expression de l'excitation extérieure appliquée sur la poutre, au lieu d'utiliser directement la fonctionnalité du *Toolbox*. La matrice $\mathbf{B}$ associée à l'action de commande, exercée dans notre cas par le moteur, sera donc recrée. Le développement mathématique correspondant se retrouvera dans les sections suivantes dédiées à l'étude de la commande des systèmes à 1 et 2 panneaux.

La simulation est alors lancée, et les données obtenues sont retraitées dans le code afin de faire apparaître la réponse du système, soit le déplacement vertical $w(x, t)$ le long de la poutre, ainsi que d'autres données pertinentes, sur des graphiques que nous analyserons.

Les schémas Simulink prennent en entrée les matrices ainsi que les conditions initiales générées par le code MATLAB, et nous permettent d'obtenir les valeurs des coordonnées modales $q(t)$ ainsi que d'autres variables d'intérêt. Nous utiliserons les coordonnées modales pour retrouver les valeurs du déplacement vertical $w(x,t)$ des panneaux.

Les étapes de simulation sont comme suit, avec NOM DE SCRIPT les scripts et fonctions qui ont été conçus pour les simulations, et **nom de fonction** les fonctions issues du *Toolbox* utilisé :

MAIN

- Initialisation des paramètres géométriques des poutres (ρ , EI , L)
- Initialisation des conditions frontière
- Initialisation du type et du nombre d'actionneurs et de capteurs utilisés
- Initialisation des paramètres de simulation (nombre de modes, temps de simulation)

BEAM FCT < MODÈLE >

- setbeam** - Paramétrisation du *Toolbox*
- eigenbeam** - Matrice Φ

INIT C

- Initialisation des fonctions de condition initiale = $a_0(x)$, $b_0(x)$ $x \in (0, L)$
- Transformation en coordonnées modales initiales $q_0(t)$
- ssbeam** - Matrice **A**
- Calcul des matrices **C**
- Calcul des matrices **B**

Lancement SIMULINK < MODÈLE > - Résultats en coordonnées modales $q(t)$

- PLOTBEAM < MODÈLE > - Transformation en déplacement vertical $w(x,t)$
- Génération des graphiques

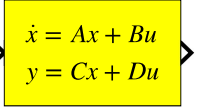
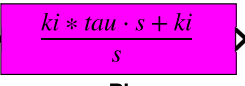
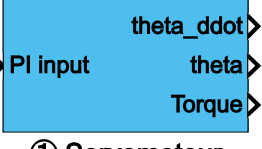
END

Construction des schémas Simulink

Comme abordé à la section précédente, le logiciel Simulink permettra de créer un modèle sous forme de schéma bloc pour chacun des systèmes que nous désirons étudier. Ces blocs correspondent à des dynamiques (panneaux, bus, moteurs réels), à des contrôleurs (PI), ou encore à des opérations mathématiques sur les valeurs de sortie utilisées dans la rétroaction

des stratégies de commande. Pour rendre la visualisation des schémas Simulink qui seront créés et présentés dans les sections "Simulation" 4.2 et 5.2 de chaque modèle étudié, nous allons établir une légende d'identification des blocs selon leur type dans le tableau 3.4 ci-dessous. Chaque bloc ou sous-système sera de couleur différente en fonction du rôle qu'il joue dans le schéma Simulink, et on ajoutera des numéros aux sous-systèmes afin d'identifier plus efficacement leur position ① - ⑩.

TABLEAU 3.4 Légende d'identification des blocs dans les schémas Simulink

Type de bloc	Aspect
Dynamique de la poutre	 Dynamique poutre
Dynamique du bus	 Dynamique bus
Contrôleur et lois de commande	 PI
Moteur réel	 ① Servomoteur

Modèles de moteurs réels

Lors de nos simulations, nous chercherons d'abord à valider nos résultats en confirmant la stabilisation du modèle doté de la loi de commande fournie dans l'article dont il est tiré. Une fois cette vérification effectuée, nous allons ajouter des modèles de moteurs réels afin de représenter plus fidèlement le comportement de notre système. Les valeurs numériques

associées aux variables caractérisant ces modèles sont obtenues dans des feuilles de données de ces types de moteurs, mises à disposition par les fabricants. Il sera donc possible de tester l'impact du changement des caractéristiques des moteurs sur la réponse du système étudié, et vérifier les éventuels gains en terme de stabilisation. Dans notre étude, nous utiliserons deux modèles de moteurs retrouvés dans la littérature, qui produisent tous les deux un couple que l'on cherche à commander :

- Le premier est un servomoteur, utilisé notamment pour représenter l'action stabilisatrice du moteur en rotation pour le modèle à 1 panneau représenté à la figure 3.4. Le modèle du servomoteur est tiré de [3] :

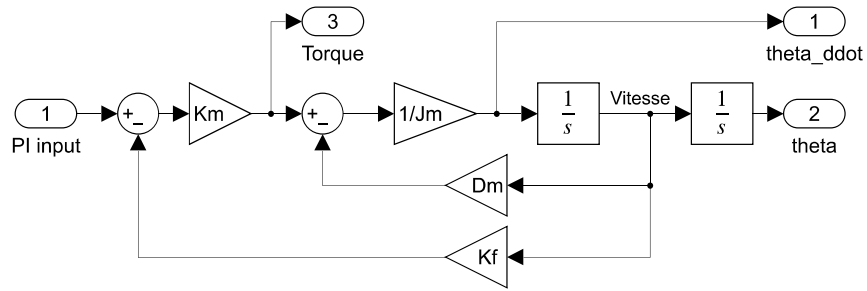


FIGURE 3.5 Schéma Simulink de la dynamique du servomoteur [3]

Il est défini par les paramètres suivants, dont les valeurs numériques sont regroupées dans le tableau 3.5 :

- K_m et K_f , le gain d'amplification et la constante de force contre électromotrice,
- J_m le moment d'inertie du moteur,
- D_m la constante d'amortissement interne au moteur,
- V_{ref} le voltage de référence fourni à l'entrée du moteur, et
- θ l'angle du moteur en sortie.

L'équation dynamique liée à ce modèle de servomoteur est alors la suivante :

$$\frac{V_{\text{ref}}}{\dot{\theta}} = \frac{K_m}{J_m s + D_m + K_m K_f}. \quad (3.35)$$

- Le second est un modèle de roue d'inertie (RW), qui produira le couple de contrôle développé au niveau du bus pour la stabilisation des modèles à 2 panneaux (figure 3.3). Le modèle tiré de [4] est constitué d'un moteur DC, auquel on rajoute un terme couplant la rotation subie par la roue d'inertie sous l'action du moteur et la rotation du bus θ . L'entrée en tension du modèle de moteur est également convertie en une entrée du couple demandé au moteur par la loi de commande.

TABLEAU 3.5 Valeurs numériques des paramètres du servomoteur

Paramètres du servomoteur	Valeurs
K_m	90
K_f	0.667
J_m ($kg.m^2$)	0.94
D_m	0

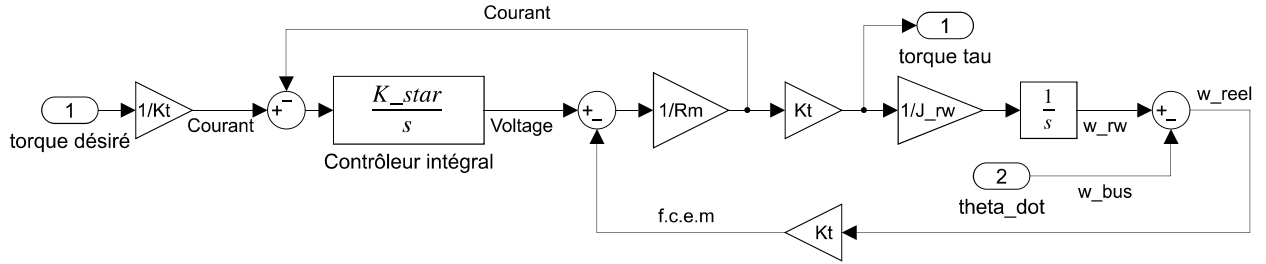


FIGURE 3.6 Schéma Simulink de la dynamique de la roue d'inertie [4]

Le modèle de roue d'inertie est défini par les paramètres suivants :

- R_m la résistance du moteur,
- K_t le gain du moteur,
- J_{rw} l'inertie de la roue, et
- $K^* = 10 \times K_t / J_{rw}$ le gain du contrôleur intégrateur du couple.

Le système comprend deux entrées, le voltage V_{ref} et la vitesse angulaire du bus $\omega_{bus} = \dot{\theta}(t)$, et une sortie correspondant à la vitesse angulaire réelle ω_{reel} . On a donc la relation :

$$\omega_{reel} = F_1(s)V_{ref} + F_2(s)\omega_{bus}, \quad (3.36)$$

avec les fonctions de transfert :

$$F_1(s) = \frac{K_t}{R_m J_{rw} s + K_t^2}, \quad (3.37a)$$

$$F_2(s) = \frac{-R_m J_{rw} s}{R_m J_{rw} s - K_t^2}. \quad (3.37b)$$

Les valeurs numériques de ces constantes sont tirées de feuilles de données mises à disposition par des fabricants de roue d'inertie. Nous avons sélectionné un ensemble de valeurs parmi elles, qui sont regroupées dans le tableau 3.6.

TABLEAU 3.6 Valeurs numériques des paramètres de la roue d'inertie

Paramètres du servomoteur	Valeurs
R_m (ohms)	0.925
K_t	0.1
J_{rw} ($kg.m^2$)	0.015

Objectif de pointage avec l'angle θ

Le critère d'accomplissement de la mission des satellites qui a été choisi correspond au pointage défini par l'angle θ dans le modèle complet à deux panneaux représenté sur la figure 3.3. Le choix de la valeur désirée de l'angle θ_d est effectué pour correspondre à la mission de pointage décrite dans [2], d'où nous tirons notre modèle de satellite le plus complet. C'est pourquoi nous choisissons $\theta_d = 10^\circ \approx 0.174$ rad, qui représente donc l'objectif de la manœuvre de pointage effectuée par le satellite.

Dans notre étude, nous utiliserons deux méthodes pour la définition de l'angle désiré θ_d que nous souhaitons obtenir à la fin de la manœuvre :

- Dans un premier temps nous fixons uniquement une valeur désirée θ_d constante à laquelle nous souhaitons que θ se stabilise.
- Dans un second temps, nous allons définir une fonction temporelle décrivant la variation de l'angle désiré θ_d dans le temps. Cette formulation va permettre d'imposer un taux de changement de l'angle désiré, et de vérifier grâce à nos simulations si notre modèle complet et sa loi de commande permettent à l'angle θ de suivre la valeur désirée. La fonction que nous utilisons décrit une trajectoire de type arrêt-arrêt entre la valeur initiale de l'angle désiré θ_{di} au temps t_i et sa valeur finale θ_{df} au temps t_f . Entre ces deux valeurs, l'angle va suivre une forme polynomiale θ_{dp} au temps $t_i \leq t \leq t_f$. On peut alors décrire l'évolution de l'angle désiré θ_d de la manière suivante :

$$\theta_d(t) = \begin{cases} \theta_d(t_i) = \theta_{di}, & t < t_i \\ \theta_{dp}(t), & t_i \leq t \leq t_f \\ \theta_d(t_f) = \theta_{df}, & t > t_f \end{cases}, \quad (3.38)$$

ce qui peut être représenté graphiquement sur la figure 3.7.

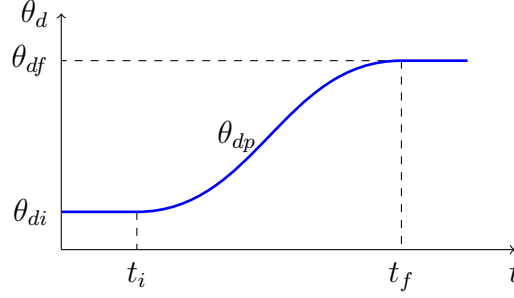


FIGURE 3.7 Variation de l'angle désiré θ_d dans le temps de type arrêt-arrêt

Pour décrire la forme du polynôme θ_{dp} , on définit dans un premier temps une échelle de temps normalisée de la manière suivante :

$$\tau_p(t) = \frac{t - t_i}{t_f - t_i}. \quad (3.39)$$

Par la suite, le polynôme θ_{dp} décrivant la trajectoire est défini par l'expression suivante :

$$\theta_{dp}(t) = \theta_{di} + (\theta_{df} - \theta_{di})\tau_p^{r+2}(t) \sum_{k=0}^{r+1} a_k \tau_p^k(t), \quad (3.40)$$

avec r l'ordre du système et a_k les coefficients à déterminer. Dans notre cas, nous utiliserons un polynôme de degré 9, basé sur un système d'ordre $r = 3$, pour lequel les coefficients a_k correspondants sont $a_0 = 126$, $a_1 = -420$, $a_2 = 540$, $a_3 = -315$, et $a_4 = 70$. L'expression de θ_{dp} devient alors :

$$\theta_{dp}(t) = \theta_{di} + (\theta_{df} - \theta_{di})\tau_p^5(t) \left[126 - 420\tau_p(t) + 540\tau_p^2(t) - 315\tau_p^3(t) + 70\tau_p^4(t) \right]. \quad (3.41)$$

Pour la méthode faisant appel à une valeur de $\theta_d(t)$ variable dans le temps, en choisissant $\theta_{di} = 0$ au temps $t_i = 0$ et $\theta_{df} = 10^\circ$ au temps t_f défini pour chaque simulation, on obtient la formulation du polynôme de transition $\theta_{dp}(t)$ suivante :

$$\theta_{dp}(t) = \theta_d \frac{t^5}{t_f^5} \left[126 - 420 \frac{t}{t_f} + 540 \frac{t^2}{t_f^2} - 315 \frac{t^3}{t_f^3} + 70 \frac{t^4}{t_f^4} \right]. \quad (3.42)$$

L'implémentation de cette fonction dans les modèles se fait par l'ajout d'un bloc sur le schéma Simulink du modèle correspondant, placé en amont du bloc qui nécessite en entrée la valeur θ_d ou $e_\theta(t) = \theta(t) - \theta_d(t)$, l'erreur sur l'angle du bus. Le bloc illustré sur la figure 3.8 permettra de calculer la fonction $\theta_{dp}(t)$ en prenant en entrée le temps de simulation t .

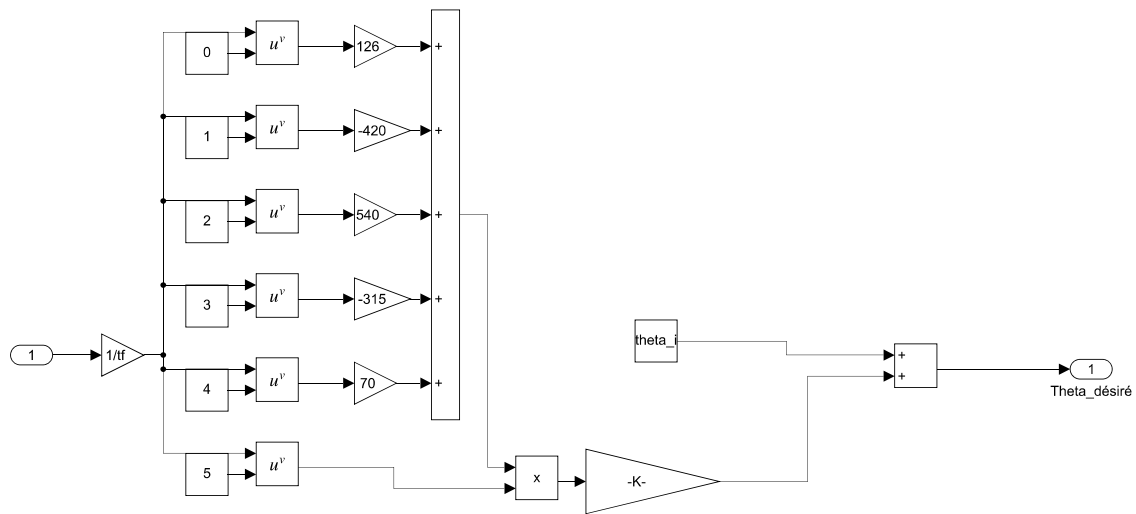


FIGURE 3.8 Schéma Simulink de l'angle désiré variable dans le temps

CHAPITRE 4 CONTRÔLE D'UN MODÈLE À 1 PANNEAU

4.1 Modélisation et stratégie de commande du modèle à 1 panneau

Dans cette section, nous allons nous intéresser au contrôle d'un modèle à 1 poutre d'Euler-Bernoulli (voir la figure 3.4). Pour représenter les panneaux solaires de satellites, la première approximation est de s'intéresser uniquement à la dynamique d'un panneau modélisé par une poutre Euler-Bernoulli encastree-libre. Les vibrations de ce panneau seront contrôlées directement par l'action d'un moteur en rotation ou en translation, sans ajouter la dynamique du bus. Ce dernier affectera le mouvement des panneaux par l'intermédiaire d'une force appliquée ($\tau(t)$ ou $f(t)$) à la base des panneaux. On peut alors représenter le modèle étudié de la manière suivante :

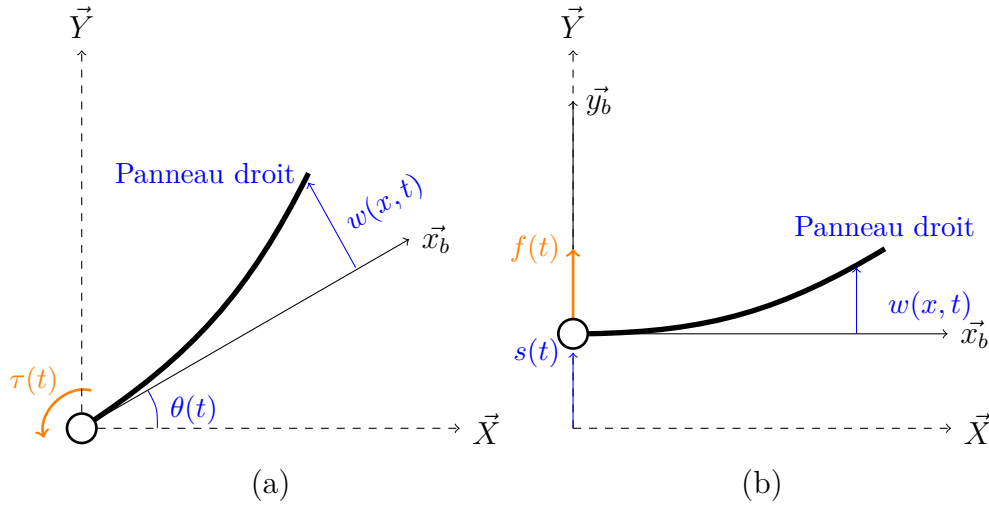


FIGURE 4.1 Modèle de satellite à 1 panneau commandé avec un moteur (a) en rotation (b) en translation

Pour contrôler le système, on peut alors effectuer une commande aux bornes avec un retour utilisant la contrainte en flexion (*strain*) (3.22b) ou le cisaillement (*shear*) (3.22c).

Pour rappel, les travaux de Luo, Guo et al. [3, 36, 38, 39] cités dans la revue de littérature vont constituer le cadre de cette première démarche de commande. Il y est montré que le problème est bien posé (*well-posedness*) et asymptotiquement stable. Des outils tels qu'un contrôleur PI ou encore le modèle de servomoteur (voir la figure 3.5) sont également utilisés dans leurs développements.

Au vu de ces résultats, notre objectif concernant la modélisation a été de reprendre les modèles présentés dans [36], en choisissant ceux dotés d'un moteur en rotation. Ce choix a été effectué en nous ramenant à notre problème de contrôle initial sur le satellite, où l'ajout d'un moteur en rotation plutôt qu'en translation a certains avantages d'un point de vue pratique. Notamment, un moteur en rotation sera plus compact qu'en translation, puisqu'il ne nécessitera pas de rail ou de guide qui définit la plage de déplacement maximale du moteur. Cela ajouterait un volume et une masse non essentiels dans la structure du satellite. Ces deux considérations sont importantes dans le contexte spatial, au regard des capacités limitées des lanceurs spatiaux et du coût des lancements.

4.1.1 Mise en équation du modèle à 1 panneau

La modélisation de l'action des moteurs peut être effectuée en rajoutant un terme d'accélération à l'équation d'Euler-Bernoulli selon le type de moteur choisi, pour contourner le problème posé par l'utilisation directe des fonctions du *Toolbox* abordé à la section 3.2.1. Le terme introduit représente l'accélération du moteur répercutée sur la poutre. Le terme ajouté à droite de l'équation d'Euler-Bernoulli a la forme suivante [36] :

- Pour un moteur en translation, $-\rho\ddot{s}$ est l'effet de l'accélération linéaire du moteur,
- Pour un moteur en rotation, $-\rho x\ddot{\theta}$ est l'effet de l'accélération angulaire du moteur.

Dans notre cas comme énoncé précédemment, nous nous concentrons sur le modèle avec un moteur en rotation. Le système d'équations représentant notre modèle est donc de la forme suivante, en considérant des coordonnées normalisées :

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x, t) = -\rho x \ddot{\theta}(t), \quad x \in (0, 1), \quad (4.1a)$$

$$y(t, 0) = y'(t, 0) = 0, \quad (4.1b)$$

$$y''(t, 1) = y'''(t, 1) = 0, \quad (4.1c)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \dot{y}(0, x) = y_1(x); \quad (4.1d)$$

avec $y(x, t)$ le déplacement vertical le long de la poutre, ρ et EI les propriétés du matériau, et $\ddot{\theta}$ l'accélération angulaire du moteur. Dans tous les calculs qui suivent, les données géométriques de la poutre (ρ , EI et L) sont considérées comme étant unitaires pour simplifier les calculs.

On mesure la contrainte de flexion ou de cisaillement à la base de la poutre, et on contrôle directement le mouvement du moteur (accélération angulaire) proportionnellement à la dérivée temporelle de la donnée mesurée.

L'accélération pour un retour respectivement en contrainte de flexion et en cisaillement s'écrit comme suit :

$$\ddot{\theta}(t) = -k\dot{y}''(t, 0), k > 0, \text{ ou} \quad (4.2a)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -k\dot{y}'''(t, 0), k > 0. \quad (4.2b)$$

Finalement, on ajoute un terme d'amortissement de Kelvin-Voigt au système pour étudier son effet sur nos résultats.

4.1.2 Considérations de *well-posedness* du modèle à 1 panneau

La démonstration de la *well-posedness* ne fait pas partie des objectifs du projet de recherche ; on cherche uniquement à vérifier qu'elle a été démontrée pour le système, soit l'existence, l'unicité et la continuité de la solution vis-à-vis d'une variation des conditions initiales. La *well-posedness* a été démontrée dans [5].

Nous allons ici reprendre succinctement cette démarche pour le modèle doté d'un retour en contrainte de flexion. Pour la clarté des calculs, les paramètres physiques de la poutre (ρ , EI et L) sont définis comme étant unitaires. La méthode utilisée pour démontrer la *well-posedness* est basée sur les semi-groupes fortement continus ou C_0 -semi-groupe. Plus particulièrement, la démonstration est faite qu'un opérateur A , défini pour notre système, génère un C_0 -semi-groupe. Pour toutes les preuves et démonstrations relatives au développement, le lecteur est référé à [5].

Ainsi, on reprend (4.1a) et on définit l'opérateur A suivant :

$$D(A) = \{y(x) \in H^4(0, 1) | y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0\}, \quad (4.3a)$$

$$Ay(x) = y''''(x); \forall y \in D(A). \quad (4.3b)$$

L'opérateur A possède les propriétés suivantes :

- A est densément défini et symétrique sur H ;
- A^{-1} existe et est compact ;
- A est autoadjoint et défini positif.

En appliquant l'opérateur A (4.3b) à notre modèle (4.1a) on obtient sur l'espace de Hilbert $L^2(0,1)$:

$$\ddot{y}(t) + Ay(t) = -\Omega\ddot{\theta}(t), \quad (4.4a)$$

$$\Omega = x \in L^2(0, 1), \quad (4.4b)$$

$$y(t) = y(., t), \quad (4.4c)$$

$$y(0) = y_0, \dot{y}(0) = y_1. \quad (4.4d)$$

Maintenant, on reprend l'équation (4.1a) en introduisant cette fois-ci notre retour en contrainte de flexion (4.2a) ce qui nous donne, avec les conditions frontière :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) + kx \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} y(0, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (4.5a)$$

$$y(0, t) = y'(0, t) = 0, \quad (4.5b)$$

$$y''(1, t) = y'''(1, t) = 0, \quad (4.5c)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \dot{y}(x, 0) = y_1(x). \quad (4.5d)$$

On définit alors un nouvel opérateur $\Pi_0 u(x) = xy''(0)$.

Il est démontré que cet opérateur est dépendant de l'opérateur A , à savoir qu'ils sont bornés, symétriques et définis positifs vis à vis de A . Il est de plus montré que si Π_0 est dépendant de A , alors on peut écrire $\Pi_0 = QA$ avec Q borné, autoadjoint et semi-défini positif sur H .

Ainsi, en appliquant la définition de Π_0 et sa relation avec l'opérateur A au modèle (4.5a), on obtient :

$$\ddot{y}(t) + QA\dot{y} + Ay(t) = 0, \quad (4.6a)$$

$$y(t) = y(., t), \quad (4.6b)$$

$$y(0) = y_0, \dot{y}(0) = y_1. \quad (4.6c)$$

On peut alors définir deux nouvelles variables z_1 et z_2 et un nouvel opérateur $\mathbf{A}^*$ sur un espace $\mathcal{H} = H \times H$ tels que :

$$z_1 = Ay, \quad (4.7a)$$

$$z_2 = A^{1/2}\dot{y}, \quad (4.7b)$$

et

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} [A^{1/2}] & [0] \\ [0] & [-A^{1/2}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [I] & [QA^{1/2}] \end{bmatrix}, \quad (4.8a)$$

$$D(\mathbf{A}^*) = \{(z_1, z_2)^T | z_2 \in D(A^{1/2}), z_1 + QA^{1/2}z_2 \in D(A^{1/2})\}. \quad (4.8b)$$

Finalement, on peut réécrire (4.6) sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^* \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

À partir de cette représentation, il est démontré que l'opérateur $\mathbf{A}^*$ est dissipatif, puis par le théorème de Lümer-Phillips qu'il génère un C_0 -semi-groupe de contractions sur $\mathcal{H}$, et donc qu'il existe une solution unique au problème considéré (4.6). Ceci conclut l'analyse de la *well-posedness* du système tel que décrite dans [5]. En revanche, comme Q est semi définie positive, seule la stabilité asymptotique est déduite de cette démarche.

4.1.3 Analyse de Lyapunov du modèle à 1 panneau

Le système étant bien posé, on cherche à montrer dans [5] qu'il est exponentiellement stable en passant par une analyse de Lyapunov utilisant l'énergie du système comme base de la fonction candidate de Lyapunov. Plus précisément, l'énergie du système, ici constituée de l'énergie potentielle et cinétique, est additionnée à un terme pondéré - dont le choix est crucial pour démontrer la stabilité du système - afin de former la fonction candidate de Lyapunov. Par la suite, on montre que la fonction et sa dérivée sont bornées adéquatement prouvant la stabilité exponentielle.

On commence tout d'abord par réécrire notre système étudié (4.5a) à l'aide du changement de variable suivant :

$$w(x, t) = y''(1 - x, t). \quad (4.10)$$

En dérivant deux fois (4.5a) et en introduisant (4.10), on obtient le système suivant décrivant un contrôle par retour direct de la vitesse mesurée aux bornes :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (4.11a)$$

$$w(0, t) = y''(1, t) = w'(0, t) = -y'''(1, t) = 0, \quad (4.11b)$$

$$w''(1, t) = y''''(0, t) = 0, \quad (4.11c)$$

$$w'''(1, t) = -y'''''(0, t) = k\dot{y}''(0, t) = k\dot{w}(1, t), \quad (4.11d)$$

$$w(x, 0) = y_0''(1 - x), \quad \dot{w}(x, 0) = \dot{y}_1''(1 - x). \quad (4.11e)$$

L'expression de l'énergie totale E correspond à la somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle U . Elle est souvent utilisée dans la littérature pour des systèmes de poutre d'Euler-Bernoulli similaires à celui étudié, notamment dans [16, 30, 42, 43]. Son expression est

la suivante, en prenant en compte les caractéristiques du matériau (EI, ρ) qui seront par la suite simplifiées car considérées unitaires pour la démonstration :

$$U(t) = \frac{1}{2}EI \int_0^1 w''^2(x, t)dx, \quad (4.12a)$$

$$T(t) = \frac{1}{2}\rho \int_0^1 \dot{w}^2(x, t)dx, \quad (4.12b)$$

$$E(t) = U(t) + T(t). \quad (4.12c)$$

En prenant la dérivée de cette expression, on s'aperçoit que l'énergie du système est dissipative :

$$\dot{E} = 2 \int_0^1 \dot{w}(x, t)\ddot{w}(x, t)dx + 2 \int_0^1 w''(x, t)\dot{w}''(x, t)dx. \quad (4.13)$$

On utilise alors la relation $\ddot{w}(x, t) = -w''''(x, t)$ (4.11a), on effectue deux intégrations par partie, et on fait usage des conditions aux frontières (4.11b), (4.11c), tout en rappelant $k > 0$ (4.2a). On obtient donc une expression de la dérivée temporelle de l'énergie du système montrant que cette dernière est dissipative :

$$\dot{E} = -k\dot{w}(1, t)^2 \leq 0. \quad (4.14)$$

On définit maintenant la fonction candidate de Lyapunov à partir de l'expression de l'énergie (4.12) et du terme multiplicateur ρ dont le choix ne sera pas détaillé ici (voir [5]) :

$$V = E(t) + \epsilon\rho(t), \quad (4.15)$$

$$\rho(t) = \int_0^1 x\dot{w}(x, t)w'(x, t)dx. \quad (4.16)$$

Selon la même démarche que celle suivie précédemment, on évalue la dérivée temporelle de ρ

$$\dot{\rho}(t) = \int_0^1 x\ddot{w}(x, t)w'(x, t)dx + \int_0^1 x\dot{w}(x, t)\dot{w}'(x, t)dx. \quad (4.17)$$

On utilise $\ddot{w}(x, t) = -w''''(x, t)$ (4.11a), on intègre la première intégrale par partie trois fois, et on utilise les conditions aux frontières pertinentes (4.11b) et (4.11c) pour obtenir :

$$\dot{\rho}(t) = -k\dot{w}(1, t)w'(1, t) - \frac{3}{2} \int_0^1 w''^2(x, t)dx + \int_0^1 x\dot{w}(x, t)\dot{w}'(x, t)dx. \quad (4.18)$$

De la même manière que pour l'énergie, on cherche à borner $\dot{\rho}$ en étudiant chacun des termes.

On utilise la relation suivante pour réécrire le premier terme :

$$w'(1, t) = \int_0^1 w''(x, t) dx. \quad (4.19)$$

On a alors :

$$-k\dot{w}(1, t)w'(1, t) = -k\dot{w}(1, t) \int_0^1 w''(x, t) dx. \quad (4.20)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz est alors utilisée pour borner ce terme : pour un $\epsilon > 0$ et a et b des réels, $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2$. D'où :

$$-k\dot{w}(1, t)w'(1, t) \leq \frac{k}{2} \left[\frac{1}{\epsilon} \dot{w}^2(1, t) + \epsilon \int_0^1 w''^2(x, t) dx \right]. \quad (4.21)$$

En utilisant une nouvelle fois l'intégration par partie sur le troisième terme de ρ et en faisant appel aux conditions aux frontières (4.11b) et (4.11c) on obtient :

$$\int_0^1 x\dot{w}(x, t)\dot{w}'(x, t) dx = \frac{1}{2} \dot{w}^2(1, t) - \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{w}^2(x, t) dx. \quad (4.22)$$

En remplaçant (4.21) et (4.22) dans (4.18) on obtient l'expression bornée de $\dot{\rho}$:

$$2\dot{\rho}(t) \leq -(3 - k\epsilon) \int_0^1 w''^2(x, t) dx - \int_0^1 \dot{w}^2(x, t) dx + \left(\frac{k}{\epsilon} + 1 \right) \dot{w}^2(1, t). \quad (4.23)$$

Pour s'assurer que le terme multiplicateur est lui aussi dissipatif ($\dot{\rho}(t) < 0$), et en rappelant que k et $\epsilon > 0$, on doit avoir $\epsilon < \frac{3}{k}$. On peut identifier dans (4.21) l'expression de l'énergie du système, et en posant $C_2 = \frac{k}{\epsilon} + 1$, on peut réécrire :

$$\dot{\rho}(t) \leq -C_1 E(t) + C_2 \dot{w}^2(1, t). \quad (4.24)$$

Finalement, il est aussi montré que le facteur ρ peut être borné une nouvelle fois grâce à une intégration par partie par :

$$|\rho(t)| \leq C_3 E(t). \quad (4.25)$$

On peut donc écrire en utilisant (4.15) :

$$V(t) \leq (1 + \epsilon C_3) E(t). \quad (4.26)$$

Avec toutes ces relations, et en s'assurant que les constantes C_1 , C_2 et C_3 soient positives, soit $\epsilon \leq \min\{3/k, k/C_2, 1/C_3\}$, on peut déduire l'expression bornée de la dérivée de la fonction candidate de Lyapunov :

$$\dot{V}(t) = \dot{E}(t) + \epsilon \dot{\rho}(t), \quad (4.27a)$$

$$\dot{V}(t) \leq - \left(\frac{\epsilon C_1}{1 + \epsilon C_3} \right) V(t) \leq 0. \quad (4.27b)$$

On peut donc conclure la décroissance exponentielle de V et de E . On peut déduire de l'inégalité de Gronwall [44] que la solution du système (4.11a), et donc de manière subséquente de (4.5a) et de (4.1a) avec un retour en contrainte de flexion, est exponentiellement stable.

Nous venons de reproduire la démarche montrant que le problème correspondant à une poutre encadrée-libre d'Euler-Bernoulli dotée d'un mouvement en rotation à la base lié à un retour en contrainte de flexion est bien posé et exponentiellement stable. Les travaux de Luo et Guo résumés dans [5] ont également permis, à l'aide d'autres méthodes basées notamment sur les notions d'opérateurs, de C_0 -semi-groupe et d'analyse spectrale, de montrer la stabilité du système utilisant un moteur en rotation et un retour en cisaillement [36]. L'ajout d'un servomoteur au système est également étudié théoriquement et expérimentalement, tout comme l'ajout d'un contrôleur proportionnel intégral (PI) dans [39].

Ainsi, nous allons considérer tous ces cas dans nos simulations, afin d'observer l'impact de l'ajout de ces éléments sur la réponse du système.

4.2 Simulation du modèle à 1 panneau contrôlé

La structure de modélisation est décrite à la section 3.2.3. Nous allons suivre cette démarche dans le but de produire des graphiques représentant le comportement du modèle dans le temps selon la condition initiale choisie, illustré par le déplacement vertical $w(x, t)$ le long de la poutre. Nous analyserons alors aussi bien la réponse libre, le test de l'utilisation directe des fonctions du *Toolbox*, l'implémentation de la loi de commande de l'article suivi [36], l'ajout d'un PI et du modèle de servomoteur.

Nous présenterons pour ce faire dans un premier temps la génération des matrices du modèle d'état, puis nous présenterons les résultats graphiques.

4.2.1 Génération des matrices du modèle à 1 panneau

Matrices du modèle à 1 panneau fournies par le *Toolbox*

Matrice Φ : **eigenbeam** - génère les coefficients des fonctions propres (3.16a), après l'entrée des paramètres géométriques de la poutre et des conditions frontière dans la fonction **setbeam**.

Matrice $\mathbf{A}$: **ssbeam** - génère la matrice $\mathbf{A}$ dont la structure est décrite à l'équation (3.20).

Matrice $\mathbf{C}_{\text{strain}}$: **ssbeam** - génère la matrice $\mathbf{C}$ liée au capteur S3 (voir 3.3).

Matrices du modèle à 1 panneau calculées

Matrice $\mathbf{B}$: On cherche à concilier la formulation d'Euler-Bernoulli du *Toolbox* (3.8) avec celle de notre modèle (4.1a). Pour reproduire la forme que nous souhaitons modéliser en introduisant l'action du moteur en rotation $(-x\ddot{\theta})$, nous allons utiliser le terme de la force extérieure $F_{\text{ext}}(x, t)$. On rappelle l'expression de la force extérieure dans le *Toolbox* (3.7) :

$$F_{\text{ext}}(x, t) = D(x)f_e(t),$$

où l'on identifie donc $D(x) = x$ et $f_e(t) = \ddot{\theta}(t)$.

On repart ensuite de la formulation modale de l'équation d'Euler-Bernoulli du *Toolbox* (équations (3.18) et (3.30)), que l'on rappelle ici :

$$\{\ddot{q}(t)\} + [\Omega_b]\{q(t)\} = B_f f_e(t),$$

$$\{B_f\} = (b_1, \dots, b_n)^T ; \quad b_k = \int_0^L D(x)u_k(x)dx.$$

On évalue alors les b_k à l'aide de l'expression des fonctions propres $u_k(x)$ (3.16a) dont les coefficients sont fournis dans Φ . L'intégration donne le résultat suivant :

$$b_k = \left[e^{(-\beta_k \cdot L)} (a_1/\beta_k^2) e^{\beta_k x} (\beta_k x - 1) - (a_2/\beta_k^2) e^{-\beta_k x} (\beta_k x + 1) + (a_4/\beta_k^2) (\sin(\beta_k x)) - \beta_k x \cos(\beta_k x) + (a_3/\beta_k^2) (\beta_k x \sin(\beta_k x) + \cos(\beta_k x)) \right]_0^L. \quad (4.28)$$

On regroupe alors les b_k dans le matrice $[B_e]$ (3.21b).

Matrice $\mathbf{C}_{\text{shear}}$: Le *Toolbox* utilisé ne permet pas d'implémenter un capteur utilisant le cisaillement (*shear*).

On va donc créer la matrice $\mathbf{C}$ à partir des définitions de l'équation (3.22c) :

$$\mathbf{C}_{shear} = [\Phi(0)''' \quad 0_{1,n}]. \quad (4.29)$$

Pour calculer les dérivées de Φ , nous allons dériver les fonctions propres u_k (3.16a) et les évaluer en $x = 0$, le capteur étant positionné à la base de la poutre. Les coefficients β_k et a_i définissant les fonctions propres sont fournis par la fonction du *Toolbox* `eigenbeam`.

$$u_k(0)''' = a_1\beta_k^3 e^{(-\beta_k(L-0))} - a_2\beta_k^3 e^{(-\beta_k \cdot 0)} + a_3\beta_k^3 \sin(\beta_k \cdot 0) - a_4\beta_k^3 \cos(\beta_k \cdot 0). \quad (4.30)$$

Maintenant que les matrices définissant le système ont été calculées, elles ont été implémentées dans plusieurs modèles Simulink afin de simuler la réponse de la poutre dans le temps suite à une déformation initiale. Les résultats sont présentés à la section suivante.

4.2.2 Résultats des simulations du modèle à 1 panneau

Dimensions et conditions initiales du modèle à 1 panneau

Dans cette section, nous allons présenter les résultats des modélisations effectuées lors des différentes étapes de construction du modèle. Pour ce faire, on garde une poutre de dimensions normalisées avec une condition initiale arbitraire. Les conditions sont regroupées dans les tableaux 4.1 et 4.2 ; et la condition initiale est illustrée à la figure 4.2.

TABLEAU 4.1 Paramètres géométriques
du modèle du modèle à 1 panneau

Paramètres géométriques	Valeurs
ρ (kg/m)	1
EI (Nm^2)	1
L (m)	1

Réponse libre du modèle à 1 panneau

L'utilisation du *Toolbox* permet tout d'abord de pouvoir visualiser les 4 premiers modes propres ainsi que les fréquences naturelles (Hz) qui y sont associées grâce à la fonction `setbeam`. La représentation graphique des 4 premiers modes est illustrée à la figure 4.3.

TABLEAU 4.2 Paramètres de simulation du modèle à 1 panneau

Paramètres de simulation	Valeurs
t_f (s)	30
n modes	30
Conditions initiales	$w(x, 0) = a_0(x) = -0.003 e^{-400(x-0.8)^2}$ $\dot{w}(x, 0) = b_0(x) = 0$

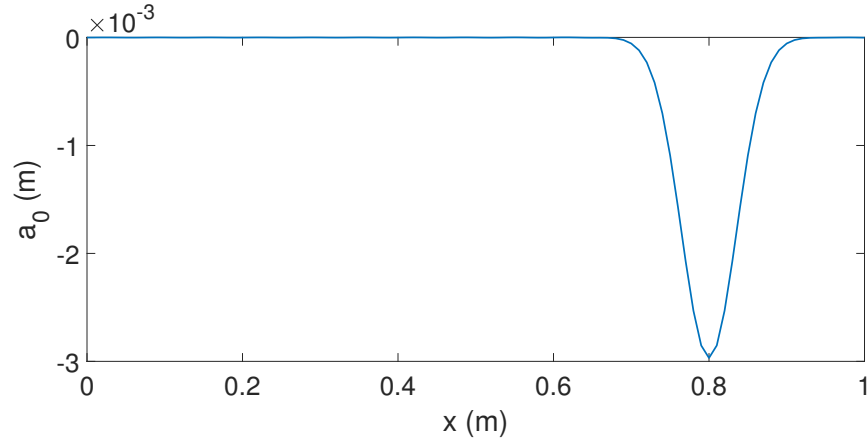
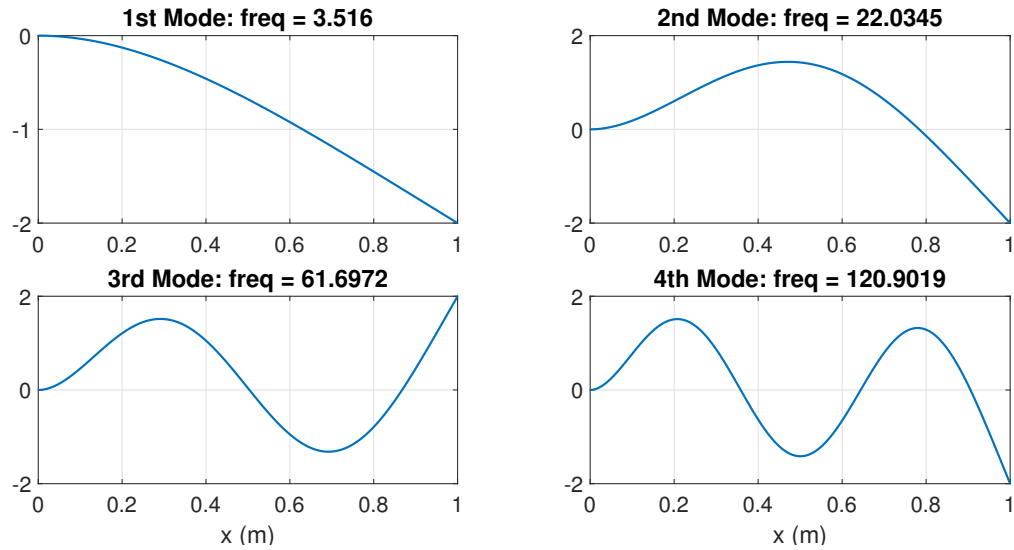


FIGURE 4.2 Distribution de la condition initiale le long de la poutre pour le modèle à 1 panneau

FIGURE 4.3 Quatre premières fréquences naturelles (Hz) et modes propres de la poutre normalisée étudiée (voir les équations (3.12) et (3.11))

La première simulation de la poutre seule consiste à donner une déformation initiale à la poutre pour ensuite observer la vibration libre ou contrainte du système sans moteur pour le stabiliser. Le schéma Simulink représentant cette configuration est illustrée à la figure 4.4.

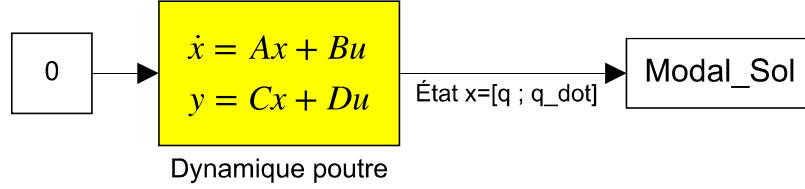


FIGURE 4.4 Schéma simulink de la poutre libre

On simule donc la réponse libre sous la condition initiale décrite précédemment pendant $t_f = 30$ secondes, avec $n = 30$ modes. Comme il n'y a ni amortissement ou contrôleur pour stabiliser le système, ce dernier ne se stabilise pas comme on peut le voir à la figure 4.5.

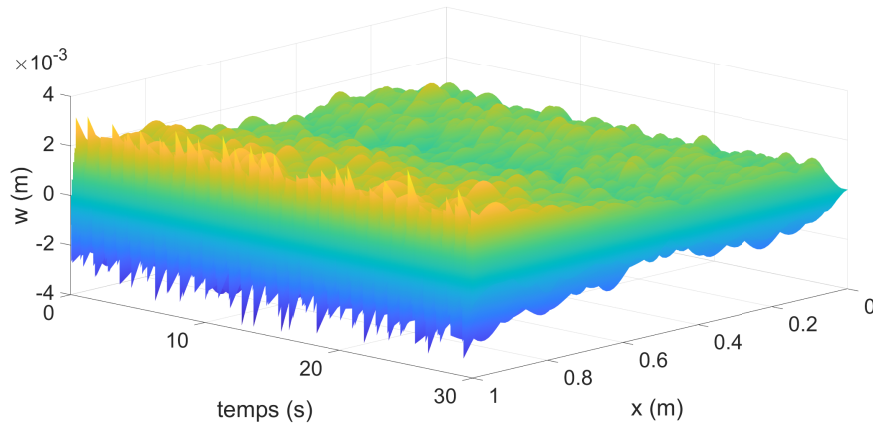


FIGURE 4.5 Réponse dans le temps et l'espace de la poutre libre

On observe clairement tout au long de la poutre que le déplacement vertical de la poutre $w(x, t)$ ne tend pas vers 0, et que les oscillations perdurent sans amortissement visible. Le système ne se stabilise pas dans le temps et ne revient pas au repos. Cette réponse est attendue et elle sert de point de repère pour déterminer l'influence de l'ajout de la stratégie de commande, du PI et du servomoteur.

Contrôle du modèle à 1 panneau via le *Toolbox*

Comme premier test, nous avons voulu utiliser strictement les possibilités fournies par les fonctions du *Toolbox* pour stabiliser la poutre, sans reproduire le modèle décrit dans cette section (voir (4.11a)).

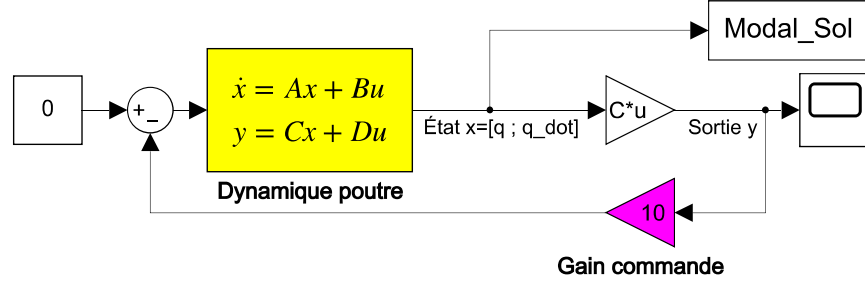
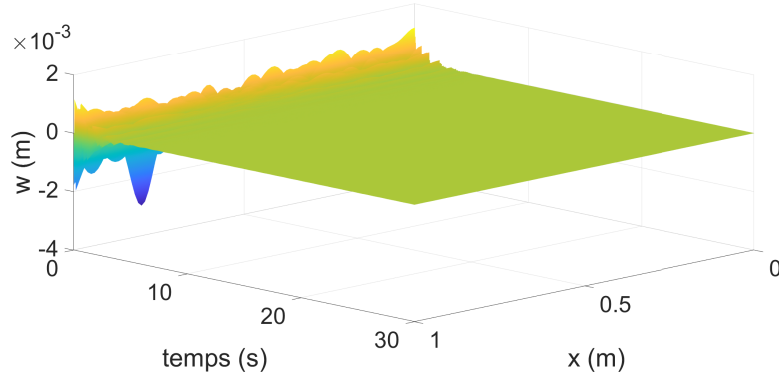


FIGURE 4.6 Schéma Simulink de la poutre commandée à l'aide des fonctions du *Toolbox*

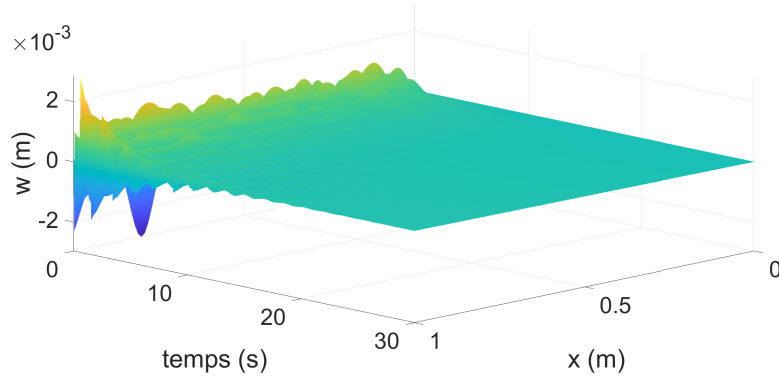
Comme abordée dans la section 3.2.1, la modélisation d'une poutre d'Euler-Bernoulli classique encastrée-libre telle qu'exprimée dans les fonctions du *Toolbox* pose problème. En effet, notre objectif étant le contrôle à la base de la poutre, le moteur se retrouve positionné à l'emplacement de la condition d'encastrement. L'action du moteur ne peut donc pas être appliquée. Toutes les combinaisons de capteurs et de moteurs (avec leur condition initiale associée) présentés aux tableaux 3.3 et 3.4 ont donc été testées afin d'avoir un premier aperçu du contrôle possible via une utilisation directe du *Toolbox*. Nous avons donc testé la réponse du système avec un moteur en rotation et en translation à la base de la poutre, avec les conditions aux frontières qui permettent leur mouvement, soit respectivement une poutre rotule-libre (B1 - B3) et glissante-libre (B4 - B3).

Comme indiqué dans la section 3.2.1, la fonction `ssbeam` du *Toolbox* nous permet de générer les matrices **A**, **B** et **C** qui caractérisent la poutre, le type de moteur et le type de capteur utilisés pour le contrôle des vibrations. Ces matrices sont implémentées dans le schéma Simulink de la figure 4.6 pour effectuer les simulations sans les modifier. La valeur de sortie utilisée pour la rétroaction est multipliée par un gain.

On retient les deux résultats présentés sur la figure 4.7 amenant à la stabilisation de la poutre. Ces résultats montrent une stabilisation du mouvement de la poutre, qui retourne au repos au bout de 30 secondes dans les deux cas. Les conditions employées pour générer la figure 4.7a permettent néanmoins une stabilisation plus rapide, de l'ordre de quelques secondes, avec un dépassement également plus faible.



(a) Moteur en translation (A1), capteur de vitesse transversale (S4), condition glissante-libre (B4 - B3)



(b) Moteur en rotation (A2), capteur de vitesse angulaire (S5), condition rotule-libre (B1 - B3)

FIGURE 4.7 Simulation de la réponse de la poutre selon le type de moteur, de capteur, et les conditions frontière fournies dans le *Toolbox*

On peut également tracer l'évolution de l'énergie totale de la poutre dans le temps à l'aide des équations utilisées dans le développement de la preuve de stabilité via la fonction de Lyapunov (4.12). La figure 4.8 montre l'évolution de l'énergie totale le long de la poutre dans le cas libre représenté à la figure 4.5, ainsi que dans les cas contrôlés via le *Toolbox* à la figure 4.7.

Sur cette représentation, on peut constater à la fois que l'énergie du système reste constante lors qu'aucune action n'est appliquée sur la poutre, ce qui confirme la dynamique observée sur la réponse de la poutre dans le temps à la figure 4.5. De la même manière, on constate bien que dans les deux cas où le *Toolbox* a directement été utilisé pour le contrôle de la poutre le système se stabilise, caractérisé par une énergie totale se dissipant totalement. On constate alors plus aisément que la réponse utilisant le moteur en translation semble donner de meilleurs performances en termes de temps de stabilisation.

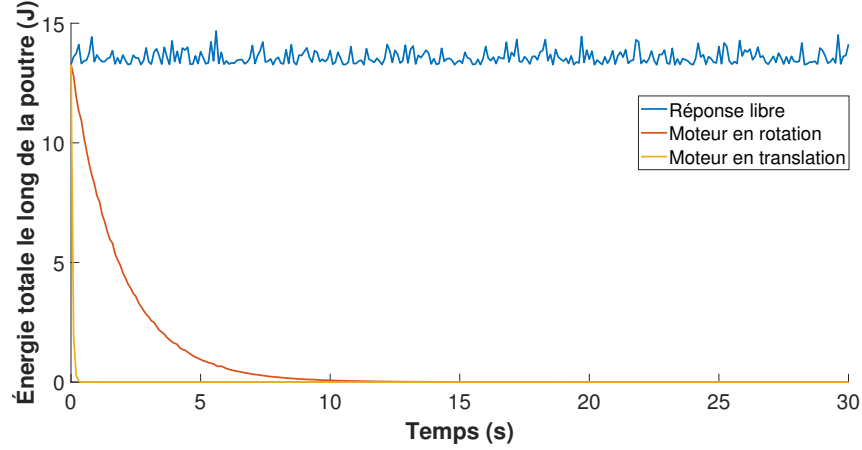


FIGURE 4.8 Énergie totale le long de la poutre dans le temps pour les réponses libres et contrôlées utilisant le *Toolbox* et les configurations de la figure 4.7

Ajout du moteur sous forme d'un pseudo-dérivateur au modèle à 1 panneau

Nous revenons maintenant à notre démarche de simulation. Pour pouvoir utiliser les conditions frontière adéquates de la poutre, à savoir une poutre encastree-libre (B2 - B3), on suit la démarche décrite à la section 4.2.1 pour générer la matrice $\mathbf{B}$ associée au terme $-x\ddot{\theta}$ décrivant le mouvement du moteur en rotation.

Le moteur est représenté dans le schéma Simulink par l'ajout d'un pseudo-dérivateur qui va non seulement fournir un gain k_f agissant comme la force du moteur, mais aussi permettre d'obtenir la grandeur $\ddot{\theta}$ que l'on utilise pour la dynamique d'état. Ainsi, avec le pseudo-dérivateur, on dérive dans le temps notre valeur mesurée (dans notre cas la flexion (*strain*) ou le cisaillement (*shear*)), et on la multiplie par le gain pour obtenir l'accélération angulaire du moteur $\ddot{\theta}$. L'ajout de la boîte moteur via pseudo-dérivateur est illustrée à la figure 4.9.

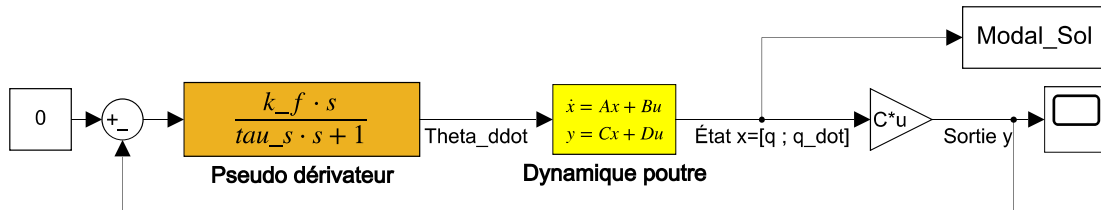


FIGURE 4.9 Schéma Simulink avec la dynamique du moteur

Comme nous avons remarqué que la valeur de τ_s avait très peu d'effet sur la stabilisation du système tant qu'elle était suffisamment petite (une valeur trop grande change la nature du pseudo-dérivateur et une trop petite ajoute trop de bruit et rallonge considérablement le

temps d'exécution du programme), on a fixé la valeur de τ_s à 0.0001 ; la valeur de k_f est alors modifiée pour stabiliser le système. La matrice $\mathbf{C}$ va alors dépendre de la valeur que nous choisissons de mesurer pour effectuer le contrôle.

Dans un premier temps, nous avons testé un retour basé sur la contrainte en flexion (*strain*, capteur A3 du *Toolbox*, voir tableau 3.3), comme indiqué dans l'article [36] :

$$\ddot{\theta} = k_f y''(t, 0). \quad (4.31)$$

On simule le système avec une valeur de gain choisie à $k_f = 0.3$. L'article [36] indiquait que le modèle avec un retour en flexion est connu comme étant stable. Les résultats de la simulation le confirment puisque la poutre est stabilisée (figure 4.10).

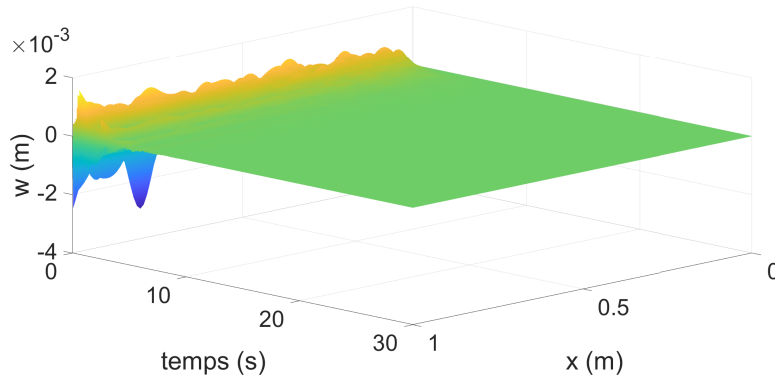


FIGURE 4.10 Réponse dans le temps et l'espace après l'ajout du moteur avec $k_f = 0.3$ et retour en contrainte de flexion

L'objectif de l'article [36] est de tester la sortie du système correspondant au cisaillement (*shear*) et c'est donc ce dernier que l'on teste à présent dans la boucle de retour. Selon le modèle sur lequel s'appuie la méthode de contrôle, on définit l'accélération angulaire ainsi :

$$\ddot{\theta} = -k_f y'''(t, 0), \quad (4.32)$$

où les gains ont donc maintenant des valeurs négatives.

Les réponses pour différentes valeurs de k_f sont illustrées sur la figure 4.11.

On remarque que la valeur de $k_f = -0.3$ stabilise le système le plus rapidement (figure 4.11a). En continuant de diminuer la valeur de k_f le système se stabilise de plus en plus rapidement, on rend donc le système plus performant en augmentant la valeur absolue du gain.

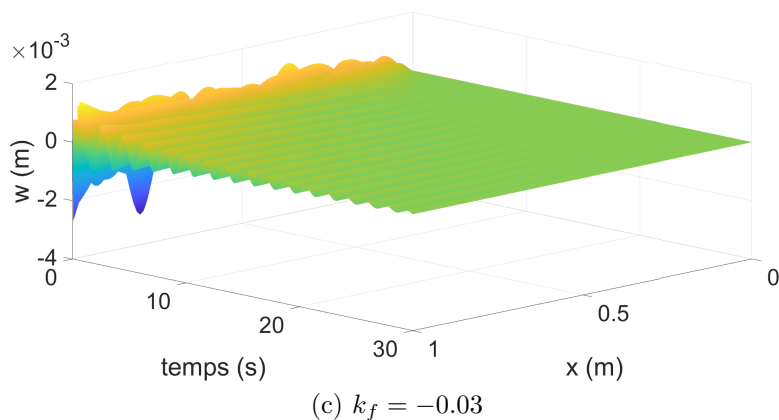
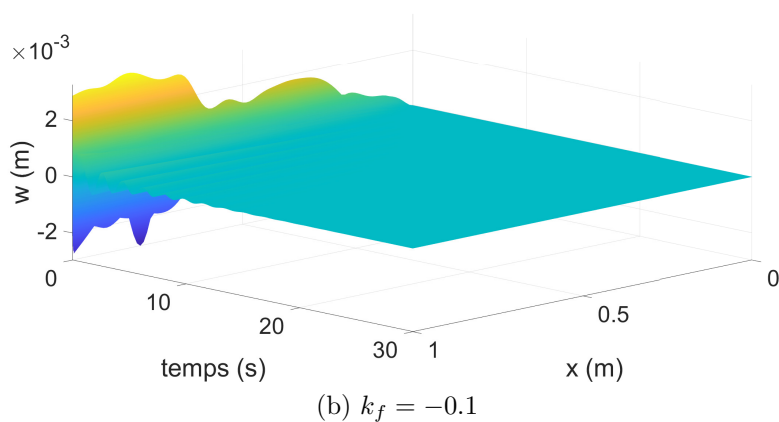
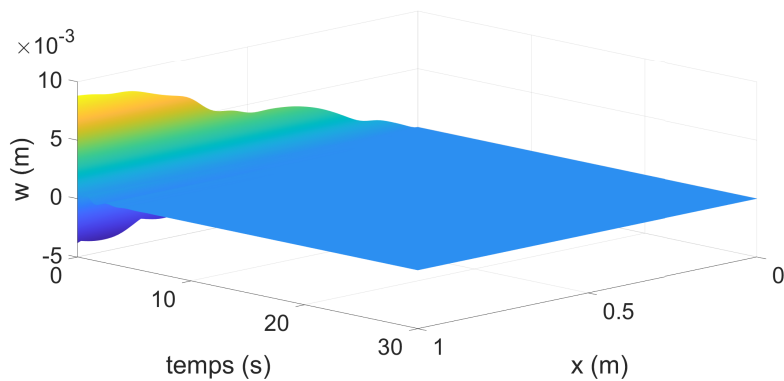


FIGURE 4.11 Simulation de la réponse de la poutre dans le temps et l'espace après l'ajout du moteur avec différentes valeurs du gain de commande k_f

Il faut néanmoins garder en tête la signification physique de la valeur de ce gain pour un moteur réel, qui ne peut pas augmenter à l'infini la force qu'il applique sur le système.

Par exemple, pour un gain $k_f = -0.1$ (figure 4.11b), la dynamique de la réponse du système dans le temps paraît plus réaliste en évitant les saccades et en évitant des temps de réaction trop courts. En outre, en augmentant la valeur du gain, on augmente aussi l'amplitude des oscillations, qui est la plus élevée dans les premiers instants de la simulation à l'extrémité libre de la poutre. Il faut tout de même conserver une valeur suffisamment élevée pour stabiliser le système dans le temps imparti (figure 4.11c avec $k_f = -0.03$).

La stabilité du système a été validée pour un modèle doté d'un moteur en rotation et d'une rétroaction en cisaillement. C'est donc uniquement le retour en cisaillement (4.32) qui sera considéré à présent dans l'étude de ce modèle à 1 poutre.

Ajout du correcteur proportionnel-intégral (PI) au modèle à 1 panneau

En continuant de construire notre modèle, on ajoute au schéma Simulink un PI. Le nouveau schéma est représenté à la figure 4.12.

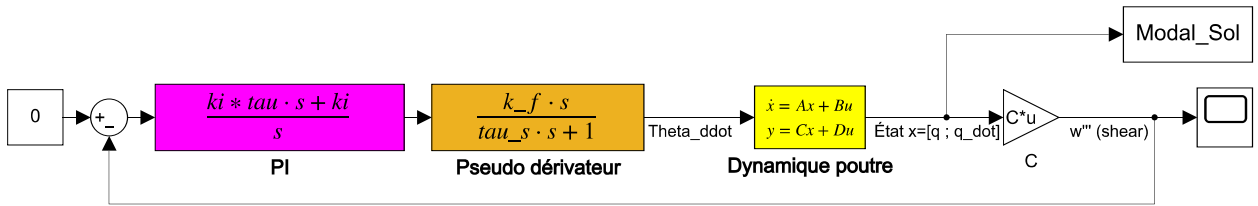


FIGURE 4.12 Schéma Simulink avec la dynamique du moteur (pseudo-dérivateur) et le PI

Deux nouveaux paramètres K_i et τ s'ajoutent à k_f . Les gains $K_p = K_i \times \tau$ et k_f auront une action similaire sur le système. Pour étudier leur effet sur le système, on fait varier un des trois paramètres à la fois en fixant les deux autres. La figure 4.13 illustre les réponses de la poutre pour différentes valeurs du triplet de paramètres. Le temps de simulation t_f est passé à 10 secondes pour mieux visualiser les résultats.

En fixant successivement les valeurs du triplet de paramètres, il nous est possible d'observer leur influence sur la réponse de notre modèle. Lorsque les gains k_f et K_i sont constants (voir les figures 4.13a à 4.13c), on met l'emphasis sur l'influence de τ , qui permet au système de se stabiliser plus rapidement lorsque sa valeur augmente. En effectuant la même analyse sur K_i (voir les figures 4.13d et 4.13e), on observe la même évolution. Finalement, de manière analogue, on constate que diminuer la valeur de k_f (augmenter sa valeur absolue, car il

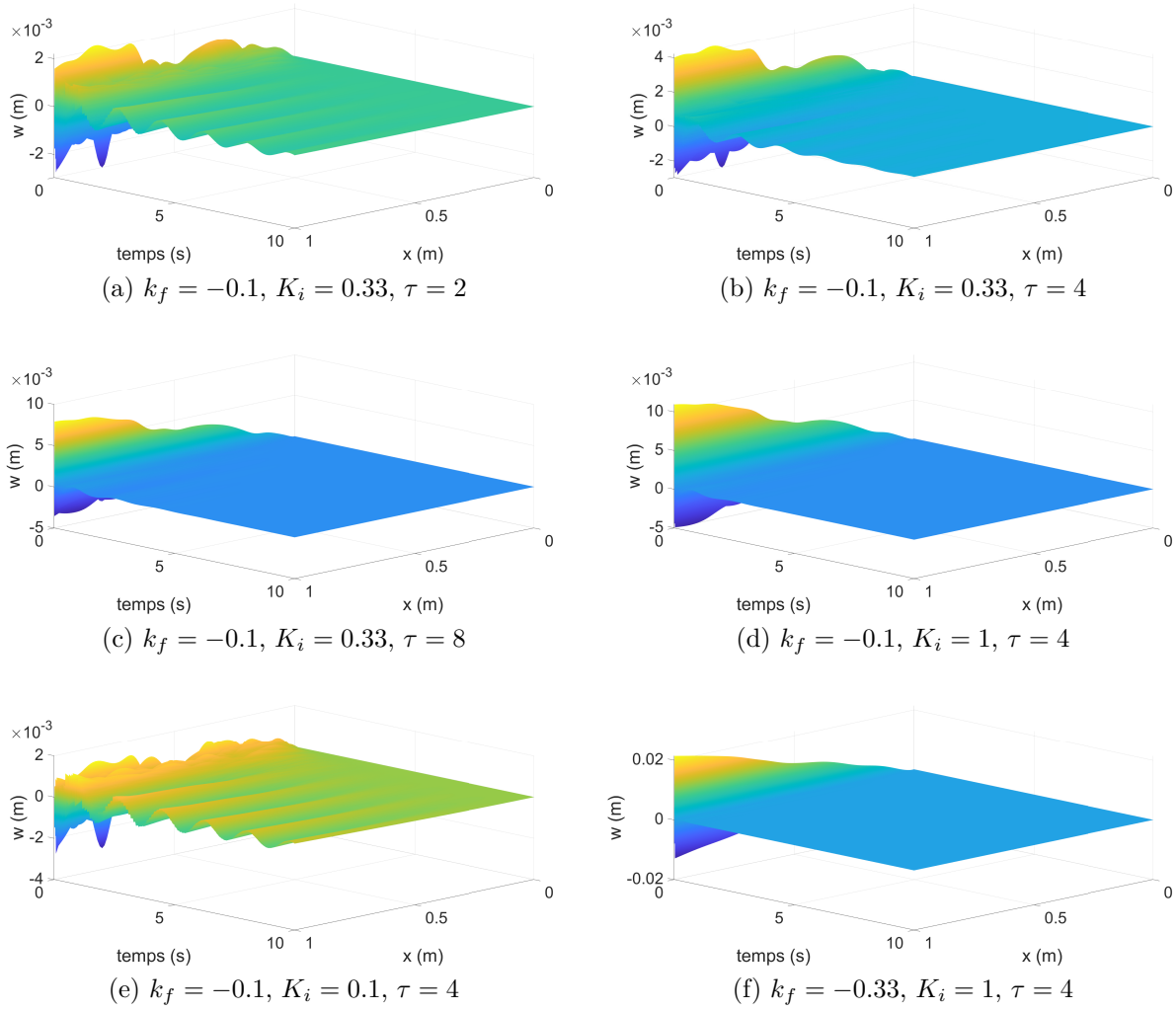


FIGURE 4.13 Réponse dans le temps et l'espace après l'ajout du pseudo-dérivateur et du PI avec différentes valeurs des paramètres

s'agit d'une valeur négative) stabilise le système plus rapidement (voir figure 4.13f). On s'attend à ces résultats, les gains introduits se cumulant pour augmenter l'action de la force de commande.

Ajout du moteur réel sous la forme d'un servomoteur au modèle à 1 panneau

Un de nos objectifs est de pouvoir introduire des modèles permettant d'augmenter la fidélité de la dynamique de notre système. Dans cette optique, nous introduisons le modèle de servomoteur tiré de l'article [3] à notre schéma global, en remplaçant le pseudo-dérivateur. On obtient le schéma complet présenté à la figure 4.14.

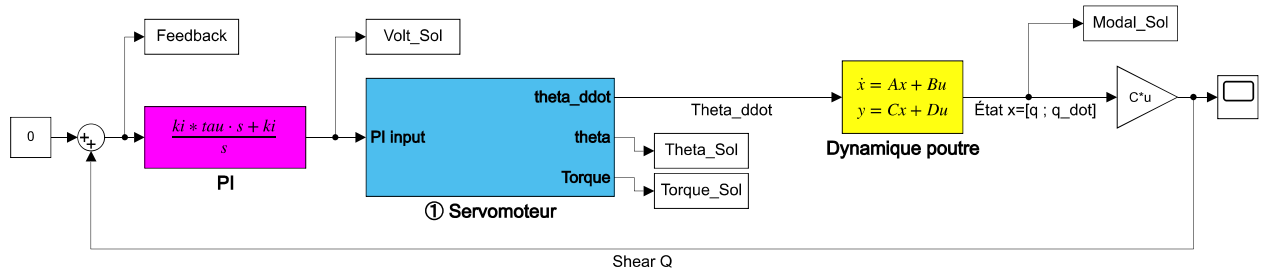


FIGURE 4.14 Schéma Simulink avec la dynamique du servomoteur et le PI

Le sous-système ① est celui présenté à la section 3.2.3. Le schéma bloc du servomoteur se retrouve sur la figure 3.5, avec les données du tableau 3.5.

On reprend dans un premier temps le couple de données du PI ($K_i = -0.1$ et $\tau = 4$) (utilisé précédemment pour la simulation 4.13e), où l'on a transféré le signe négatif de k_f à K_i . On cherche par la suite à choisir une valeur de K_i et de τ du contrôleur qui effectuent la stabilisation la plus efficace, à savoir rapide tout en limitant le dépassement et le bruit. On fait appel à l'outil `rltool` dans MATLAB en rebouclant le système de la figure 4.14 avec le bloc PI afin de déterminer les valeurs adéquates. On obtient le couple de paramètres ($K_i = -10$ et $\tau = 1$). Les réponses du système avec les deux couples de paramètres étudiés se retrouvent à la figure 4.15.

Le comportement de notre modèle est satisfaisant à la vue de ces résultats. Les graphiques montrent que le système se stabilise dans tous les cas présentés, et les paramètres du PI influencent la réponse de la même manière que précédemment. L'augmentation des gains entraîne une stabilisation plus rapide, réduisant les oscillations et le bruit dans les résultats, mais engendrant un dépassement important. Il est donc important de choisir les valeurs offrant un équilibre acceptable. L'ajout du moteur réel dans la simulation nous donne une réponse plus bruitée (figure 4.15a). Cependant même dans ce cas, la poutre revient à l'équilibre à la fin du temps de simulation de 30 s.

Nous avons donc validé la stabilité du modèle à 1 panneau, la logique de simulation comprenant la structure des scripts et des schémas Simulink utilisés, le calcul des matrices du modèle d'état de la poutre et l'implémentation du modèle de servomoteur. Nous nous intéressons donc désormais à la commande d'un système de satellite plus complet disposant de deux panneaux solaires.

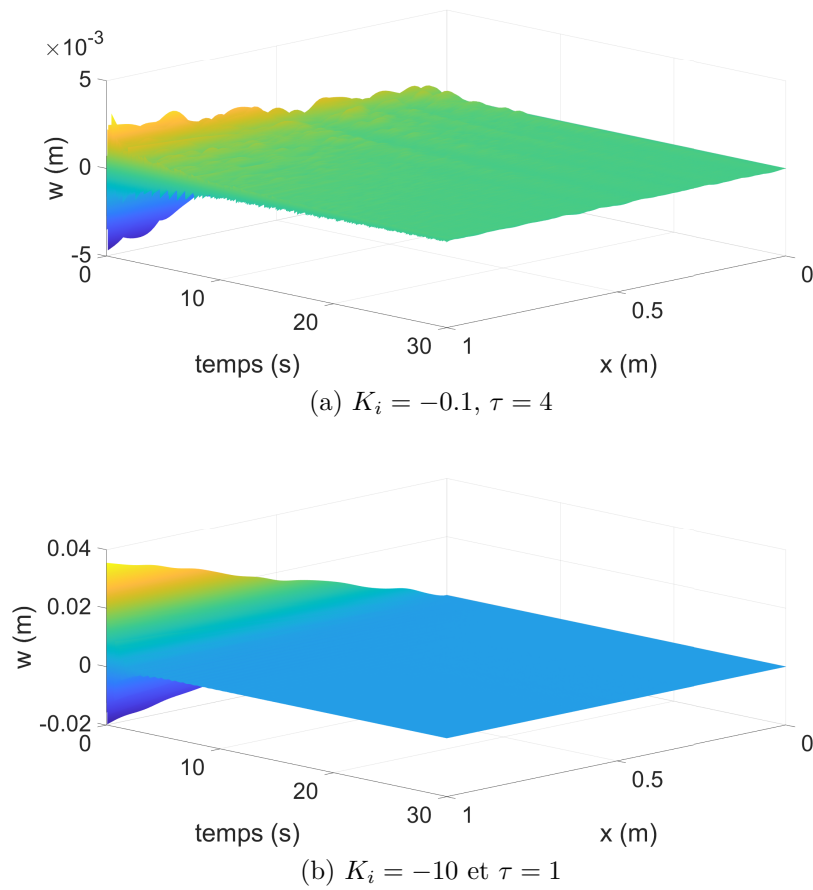


FIGURE 4.15 Réponse dans le temps et l'espace après l'ajout du moteur complet avec PI pour différents couples de paramètres du servomoteur

CHAPITRE 5 CONTRÔLE D'UN MODÈLE COMPLET À DEUX PANNEAUX AVEC DYNAMIQUE DU BUS

5.1 Modélisations et stratégies de commande

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode développée pour l'étude du modèle simplifié précédent à un modèle augmenté composé de deux panneaux solaires liés à un bus central. Physiquement, le ou les moteurs seront installés sur le bus central sur lequel ils exerceront une ou des forces. Ils permettront ainsi le contrôle du mouvement du bus selon les degrés de liberté permis par le modèle, mouvement qui sera transmis aux panneaux au niveau de la fixation des panneaux au bus. Cette fixation ne permet aucun mouvement relatif de translation ou de rotation à cette position entre les panneaux et le bus, et correspond donc à une condition frontière encastree. L'autre extrémité des panneaux est libre. Ce changement de configuration implique également que les moteurs devront fournir un effort de stabilisation supplémentaire lié à l'ajout de masse et donc d'inertie au système par le second panneau et le bus.

Pour accomplir notre objectif de simulation la plus complète possible d'un système de satellite doté de deux panneaux solaires dans le plan, nous construirons notre modèle en deux étapes. Ces étapes correspondent à l'ajout de degrés de liberté au niveau du bus. Chacun des modèles est tiré d'un article sur lequel nous nous baserons pour établir ses équations constitutives, identifier les paramètres des éléments qui le composent, et implémenter des lois de commande.

Nous devons définir ici trois catégories de mouvement des panneaux solaires permis par les modèles. Ces catégories dépendent du mouvement relatif permis entre les deux panneaux de gauche et de droite. Elles définissent donc également le type de condition initiale de la simulation. Le mouvement relatif des panneaux est décrit par le type de symétrie entre les déplacements verticaux $w_L(x, t)$ et $w_R(x, t)$ par rapport à l'axe $\vec{y}_b$ sur lequel ils sont mesurés. Nous avons besoin de ces définitions pour décrire efficacement les deux modèles que nous allons présenter. On peut ainsi distinguer les trois catégories suivantes (figure 5.1) :

- Modèle symétrique : $w_L(-x, t) = w_R(x, t), \forall x \in (0, L)$,
- Modèle antisymétrique : $w_L(-x, t) = -w_R(x, t), \forall x \in (0, L)$,
- Modèle asymétrique : $w_L(-x, t) \neq w_R(x, t)$, pour certains $x \in (0, L)$.

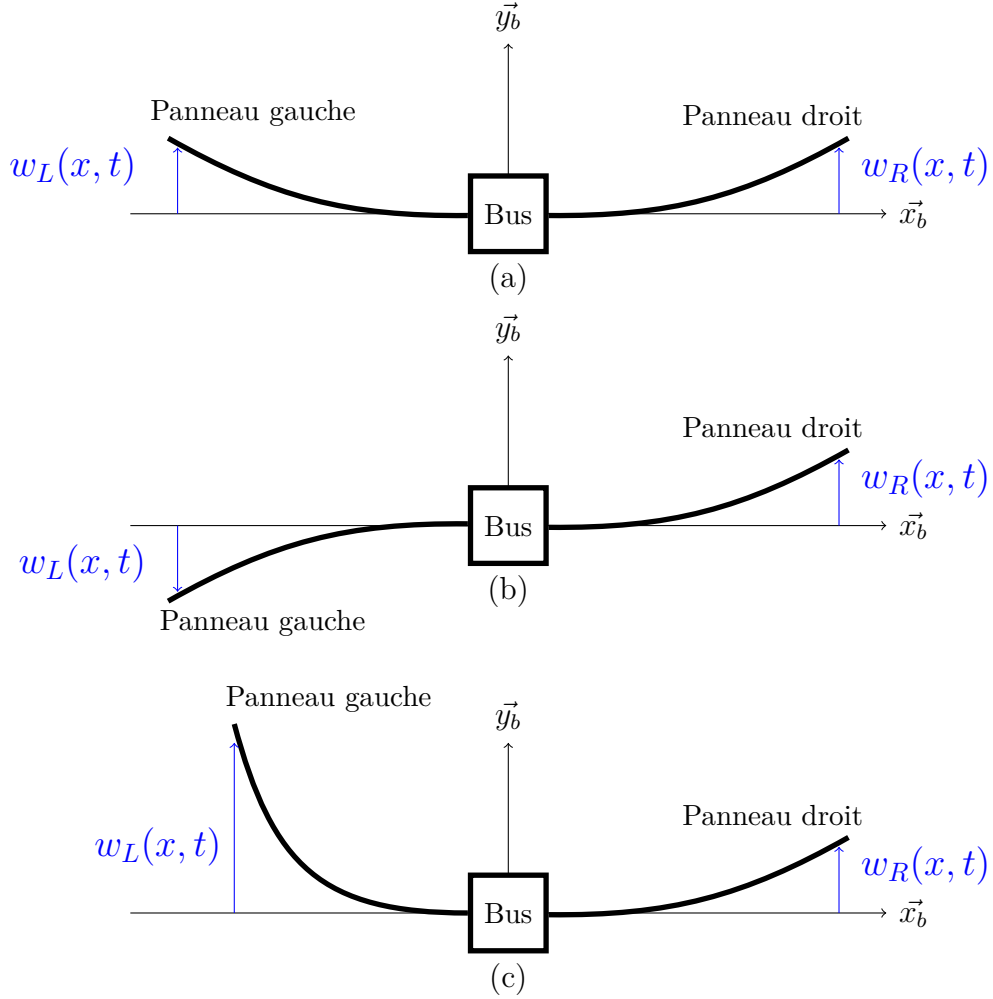


FIGURE 5.1 Schémas représentant les modèles (a) symétriques, (b) antisymétriques et (c) asymétriques

5.1.1 Modèle antisymétrique à deux panneaux

Présentation du modèle antisymétrique

Le premier modèle présenté est tiré de l'article [16]. Dans celui-ci, le bus ne dispose que d'un degré de liberté dans le plan, correspondant à une rotation θ autour de son axe. La rotation étant de fait le seul degré de liberté commandable, un couple appliqué au centre du bus effectue l'action stabilisatrice du système. Le modèle est représenté sur la figure 5.2.

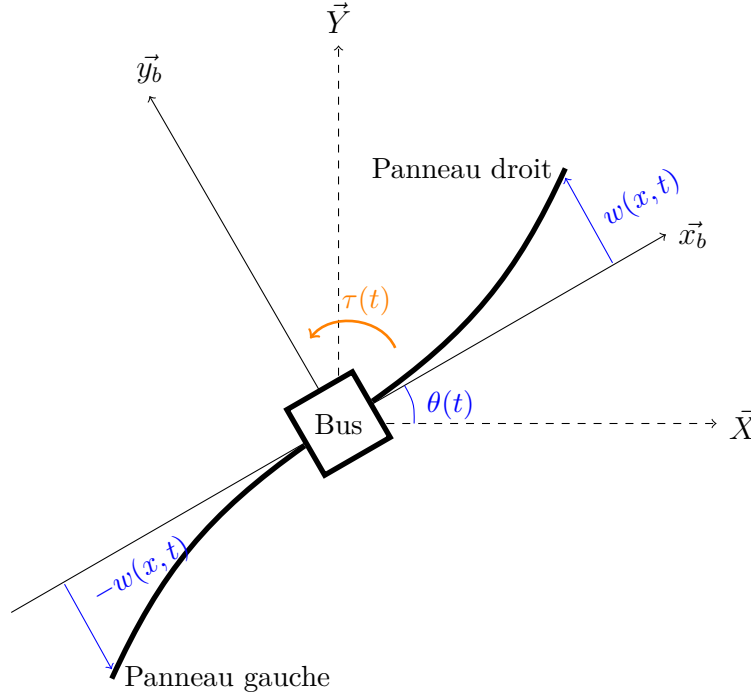


FIGURE 5.2 Modèle antisymétrique de satellite à 2 panneaux

Mise en équation du modèle antisymétrique

Il s'agit d'un modèle antisymétrique, ce qui signifie qu'une seule équation d'Euler-Bernoulli encastrée-libre est utilisée. Elle représentera le mouvement d'un des panneaux, et le mouvement du second panneau sera imposé comme étant son opposé de l'autre côté du bus. Par rapport au modèle à un panneau, on ajoute ici la dynamique en rotation du bus, ce qui rajoute une équation à notre modèle :

$$J_b \ddot{\theta}(t) = 2EIw''(0, t) + \tau(t) \quad (5.1)$$

À partir de cette équation, nous sommes capables d'isoler la valeur $\ddot{\theta}(t)$ qui sera utilisée en entrée de l'équation d'Euler-Bernoulli de manière analogue à la démarche effectuée à la section 4.1.1 . L'expression de $\ddot{\theta}(t)$ fera intervenir un terme de contrainte de flexion $w''(0, t)$ analogue à celui du modèle à une poutre, que l'on pondère maintenant par l'inertie en rotation du bus. Ce terme représente l'influence des vibrations de la poutre, transmises au point de fixation, sur le mouvement du bus.

À ce terme on ajoute maintenant la couple $\tau(t)$ qui représente l'action du moteur demandée par la loi de commande élaborée dans l'article de référence [16] :

$$\tau(t) = -2EIw''(0, t) + a_2 \frac{\partial w''(0, t)}{\partial t} - k_1 \Delta - (a_2 a_1 + 2EI/a_2) \dot{\theta} + k_2 \left[J_b \dot{\theta} - a_2 \left[-w''(0, t) + a_1 e_\theta \right] \right], \quad (5.2)$$

où a_1 , a_2 , k_1 et k_2 sont des paramètres à évaluer ; et

$$\Delta = J_b \dot{\theta}(t) + a_2 \left[-w''(0, t) + a_1 e_\theta \right]. \quad (5.3)$$

La simulation de ce système antisymétrique ressemble alors fortement à celle du modèle à une poutre. Nous pouvons en effet créer rapidement un schéma Simulink correspondant au modèle en remplaçant dans celui présenté à la figure 4.12 le PI par le bloc de commande du couple, et le bloc du pseudo dérivateur par celui de la dynamique du bus. Le schéma Simulink correspondant se retrouve en annexe A.

La contrainte majeure associée à la représentation antisymétrique est que la réponse des deux panneaux est le parfait miroir l'une de l'autre, limitant les conditions initiales admissibles pour la simulation, et ne nous apportant donc que peu d'informations supplémentaires sur le comportement du système réel. Nous ne détaillerons pas plus avant les résultats de simulation obtenus pour ce modèle pour nous concentrer sur l'étude du modèle général à 2 panneaux dans la section suivante. Ce dernier nécessitera de plus grands changements dans la démarche de simulation.

5.1.2 Modèle général à deux panneaux

Présentation du modèle général

Le second modèle présenté est tiré de l'article [2]. Dans celui-ci, le bus dispose de 3 degrés de liberté dans le plan, tel que présenté dans la section 3.1.2. Les trois degrés de liberté vont être associés à des forces appliquées sur le bus pour stabiliser le système. Ainsi, un couple appliqué comme pour le modèle antisymétrique, et deux forces supplémentaires $f(t)$ et $u(t)$ sont appliquées le long des axes $\vec{x}_b$ et $\vec{y}_b$ respectivement. Le modèle est représenté sur la figure 5.3.

Mise en équation du modèle général

Il s'agit d'un modèle asymétrique, ce qui signifie que deux équations d'Euler-Bernoulli encastrée-libre sont utilisées puisque le mouvement des panneaux gauche et droit n'est plus identique.

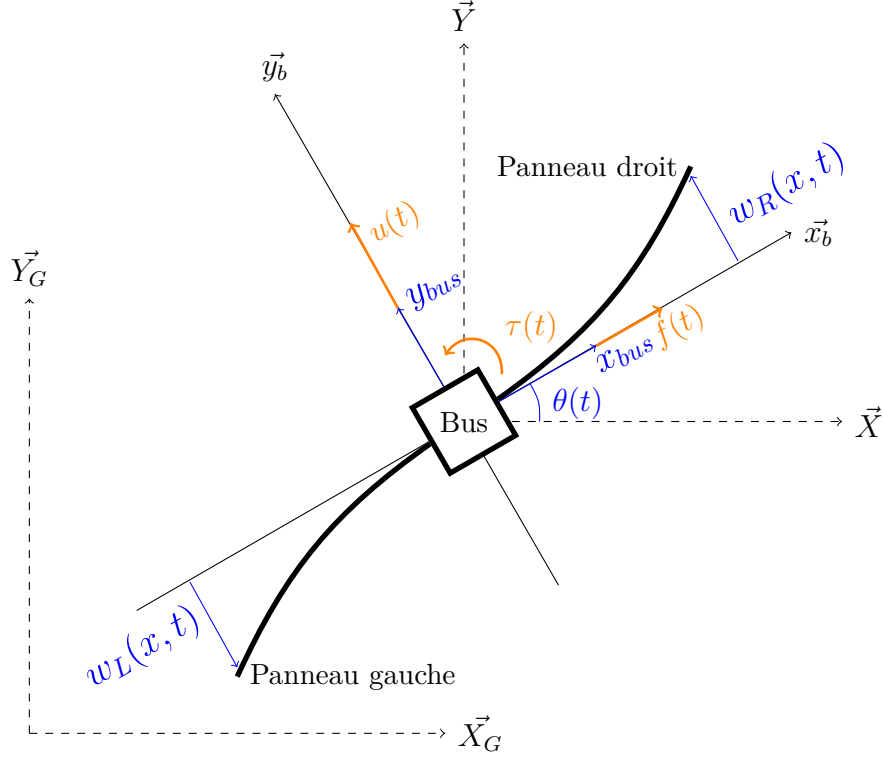


FIGURE 5.3 Modèle général de satellite à 2 panneaux

Chacune de ces équations représentant le mouvement d'un panneau est donc dotée de 4 conditions frontière, 2 par fixation, pour un total de 8 conditions frontière. De plus, les deux degrés de liberté gagnés par le bus rajoutent également deux équations de mouvement au système, pour un total de trois équations du mouvement du bus.

Au total, notre système est donc composé de 5 équations et de 8 conditions frontière encastrelle. Nous allons maintenant reprendre les équation décrivant les éléments du modèle telles qu'elles sont énoncées dans [2]. Pour obtenir ces équations, l'article a commencé par exprimer le mouvement dans le repère global $(\vec{X}_G, \vec{Y}_G)$, pour ensuite transférer les équations dans le repère du bus $(\vec{x}_b, \vec{y}_b)$ dans lequel nous travaillerons directement également.

Les équations d'Euler-Bernoulli pour les côtés droit et gauche sont de la forme :

$$\left[\ddot{y}_{bus} + (x_{bus} + r)\ddot{\theta}(t) + \ddot{w}_R(x, t) \right] + \frac{EI}{\rho_v A} w_R'''(x, t) = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, \infty), \quad (5.4a)$$

$$\left[\ddot{y}_{bus} - (x_{bus} + r)\ddot{\theta}(t) + \ddot{w}_L(x, t) \right] + \frac{EI}{\rho_v A} w_L'''(x, t) = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, \infty), \quad (5.4b)$$

$$w_L(t, 0) = w_L'(t, 0) = w_R(t, 0) = w_R'(t, 0) = 0, \quad (5.4c)$$

$$w_L''(t, L) = w_L'''(t, L) = w_R''(t, L) = w_R'''(t, L) = 0, \quad (5.4d)$$

avec r la demi-largeur du bus, $w_R(x, t)$ et $w_L(x, t)$ respectivement les déplacements des panneaux droit et gauche, θ l'angle du bus, et x_{bus} et y_{bus} respectivement les déplacements selon les axes $\vec{x}_b$ et $\vec{y}_b$ du bus. On distingue x_{bus} , le déplacement du bus selon l'axe $\vec{x}_b$, de x , un point sur le panneau.

Les équations du bus sont quant à elles données par les expressions suivantes :

$$J_b \ddot{\theta}(t) + \rho A \dot{x}_{bus} \int_0^L [\dot{w}_R + \dot{w}_L] dx = \tau(t) + EI[w_R''(0, t) - w_L''(0, t)] - EI[w_R'''(0, t) - w_L'''(0, t)], \quad (5.5a)$$

$$m(\ddot{y}_{bus} + \dot{x}_{bus} \dot{\theta}) + 2\rho AL \dot{x}_{bus} \dot{\theta} = u(t) - EI[w_R'''(0, t) + w_L'''(0, t)], \quad (5.5b)$$

$$(m + 2\rho AL)(\ddot{x}_{bus} - \dot{y}_{bus} \dot{\theta}) - \rho A \dot{\theta} \int_0^L [\dot{w}_L + \dot{w}_R] dx = f(t), \quad (5.5c)$$

où l'on rappelle que $\tau(t)$, $u(t)$ et $f(t)$ sont respectivement les couples et les forces de commande (voir 5.3).

Nous avons détaillé le modèle sous sa formulation asymétrique, avec des équations d'Euler-Bernoulli séparées pour les deux panneaux solaires. Cependant, un changement de variable est opéré dans l'article de référence [2], qui change la structure du modèle, et représenter son caractère asymétrique par une combinaison de systèmes symétriques et antisymétriques. Cette nouvelle représentation du modèle rendra la construction du modèle Simulink plus familière et plus lisible.

La nouvelle représentation va nous faire passer d'une structure de deux équations aux dérivées partielles (PDE), trois équations différentielles ordinaires (ODE) et huit conditions frontière ; à une structure composée de deux systèmes PDE-ODE couplés dotés de quatre conditions aux bornes reliés par une ODE globale. La formulation des deux systèmes PDE-ODE étant semblable à nos simulations précédentes, il y a un intérêt notoire à effectuer le changement de variable suivant :

$$w_s(x, t) := \frac{w_R(x, t) + w_L(x, t)}{2} \quad (5.6a)$$

$$w_{as}(x, t) := \frac{w_R(x, t) - w_L(x, t)}{2}. \quad (5.6b)$$

On peut ensuite réécrire le système d'équations de manière à faire apparaître les sous-systèmes symétriques et antisymétriques.

— Système antisymétrique

$$\ddot{w}_{as}(x, t) + (x + r)\ddot{\theta}(t) + c^2 w_{as}''''(x, t) = 0, \quad (5.7a)$$

$$J_b \ddot{\theta}(t) = \tau(t) - 2\rho A \dot{x}_{bus} \int_0^L \dot{w}_s dx + 2EI w_{as}''(0, t) - 2EI r w_{as}'''(0, t), \quad (5.7b)$$

$$w_{as}(t, 0) = w_{as}'(t, 0) = 0, \quad (5.7c)$$

$$w_{as}''(t, L) = w_{as}'''(t, L) = 0, \quad (5.7d)$$

— Système symétrique

$$\ddot{w}_s(x, t) + \ddot{y}_{bus}(t) + c^2 w_s''''(x, t) = 0, \quad (5.8a)$$

$$m(\ddot{y}_{bus} + \dot{x}_{bus}\dot{\theta}) + 2\rho AL \dot{x}_{bus}\dot{\theta} = u(t) - 2EI w_s'''(0, t), \quad (5.8b)$$

$$w_s(t, 0) = w_s'(t, 0) = 0, \quad (5.8c)$$

$$w_s''(t, L) = w_s'''(t, L) = 0, \quad (5.8d)$$

— ODE globale

$$(m + 2\rho AL)(\ddot{x}_{bus} - \dot{y}_{bus}\dot{\theta}) - 2\rho A \dot{\theta} \int_0^L \dot{w}_s dx = f(t). \quad (5.9)$$

5.1.3 Loi de commande du modèle général

Maintenant que le modèle a été défini et que la structure des équations a été modifiée, on poursuit la démarche présentée dans [2] concernant l'implémentation de la loi de commande. L'expression des trois forces stabilisatrices $\tau(t)$, $u(t)$ et $f(t)$ est tirée de l'article suivi, dans lequel une méthode de Lyapunov a été utilisée pour développer des expressions mathématiques garantissant une stabilisation asymptotique. Les trois lois de commandes pour ces forces s'expriment de la façon suivante :

$$\tau(t) = -\alpha_1 e_\theta - k_1 \dot{\theta}(t), \quad (5.10a)$$

$$u(t) = 2EI w_s'''(0, t) - \beta_2 \frac{\partial}{\partial t} \left[2EI w_s'''(0, t) \right] - k_2 \Delta_s - \left(\beta_2 \beta_1 + \frac{1}{\beta_2} \right) \dot{y}_{bus}(t) + (m + 2\rho AL) \dot{x}_{bus} \dot{\theta}, \quad (5.10b)$$

$$f(t) = -(m + 2\rho AL) \dot{y}_{bus} \dot{\theta} - c_x \dot{x}_{bus}, \quad (5.10c)$$

avec α_1 , β_1 , β_2 , k_1 , k_2 et c_x des constantes évaluées dans l'article, et

$$\Delta_s := m \dot{y}_{bus}(t) + \beta_2 \left[2EI w_s'''(0, t) + \beta_1 e_y \right]. \quad (5.11)$$

La variable $e_\theta = \theta(t) - \theta_d$ correspond à l'erreur entre la valeur désirée et réelle de l'angle du bus. De manière similaire, $e_y = y(t) - y_d$ correspond à l'erreur entre la valeur désirée et réelle de la position du bus selon l'axe $\vec{y}_b$, permettant ainsi de rajouter si nécessaire un critère de position au critère d'angle désiré proposé dans cette étude.

5.2 Simulation du modèle général contrôlé

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires à la simulation. Toujours en suivant la procédure décrite à la section 3.2.3, nous voulons construire les blocs du schéma Simulink qui permettra de simuler notre modèle général.

La base du schéma Simulink est composée des deux blocs de dynamique des poutres symétriques et asymétriques, reliés chacun au bloc représentant l'équation ODE qui leur est associée. Pour les blocs ODE, on isole dans ces équations les variables décrivant le mouvement du bus, soit $\ddot{x}_{bus}$, $\ddot{\theta}$ et $\ddot{y}_{bus}$. Ces deux dernières sont les entrées des blocs de dynamique des poutres.

Par la suite, on ajoute les blocs régissant la loi de commande, qui sont d'emblée donnés par les équations (5.10). Ces blocs contiendront les opérations permettant de générer les valeurs des forces stabilisatrices qui seront la sortie de ces blocs. Ils prennent en entrée aussi bien des variables issues de la sortie des blocs de dynamique des poutres ou du bus.

Le schéma Simulink global se retrouve sur la figure 5.4, et les sous-systèmes qui le composent se retrouvent en annexe B.

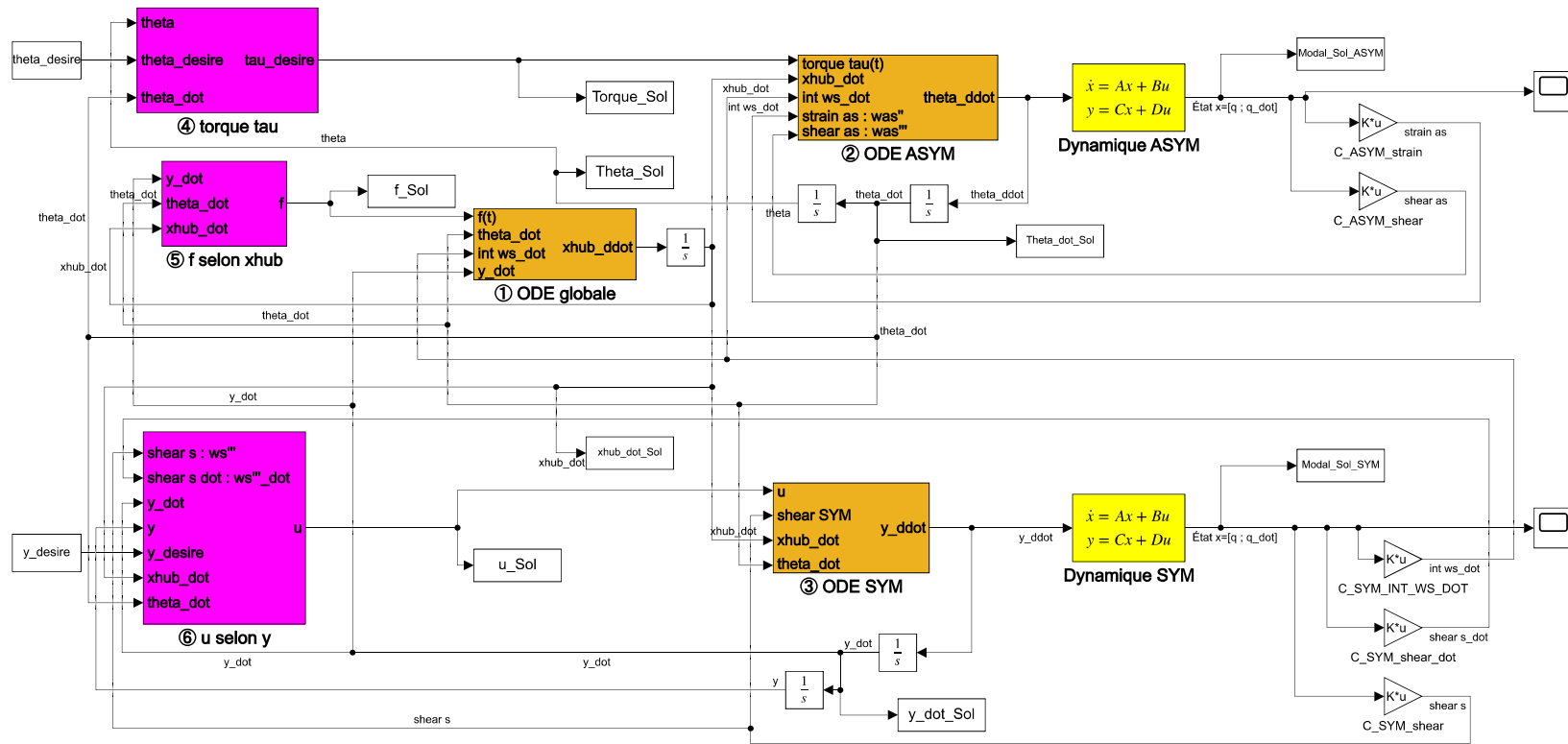


FIGURE 5.4 Schéma Simulink du modèle général à deux panneaux

Nous allons par la suite détailler le calcul des matrices nécessaires, et présenter les résultats de simulation.

5.2.1 Génération des matrices du modèle général

Matrices déjà connues

La démarche utilisée pour obtenir les matrices suivantes a déjà été abordée :

- Matrice Φ : `eigenbeam`
- Matrice $\mathbf{A}$: `ssbeam`
- Matrice $\mathbf{C}_{strain}$: `ssbeam`
- Matrice $\mathbf{C}_{shear}$: section 4.2.1

Matrices du modèle général calculées

- Matrice $\mathbf{C}_{integrale}$: on cherche à exprimer directement, grâce à une matrice, la portion intégrale de l'équation de l'ODE globale (5.9) $\int_0^L \dot{w}_s dx$. On utilise la même méthode que pour générer la matrice $\mathbf{B}$ en intégrant l'expression des fonctions propres (3.16a), mais en considérant que $D(x) = 1$. On a alors l'intégrale dans l'espace du terme w_s . On utilise alors la définition des matrices $\mathbf{C}$ (3.23) pour obtenir la dérivée temporelle. On rappelle :

$$\mathbf{C} = [\Psi_s] = \begin{bmatrix} [\Psi_0] & [\Psi_1] \end{bmatrix}.$$

Cette matrice multiplie le vecteur d'état que l'on rappelle également :

$$\{z(t)\} = (\{q(t)\}\{\dot{q}(t)\})^T.$$

On obtient donc la dérivée en attribuant le résultat de l'intégrale à la matrice Ψ_1 , tout en gardant Ψ_0 nulle.

- Matrice $\mathbf{C}_{sheardot}$: on utilise la même technique de dérivée temporelle qui vient d'être énoncée pour obtenir la matrice recherchée.
- Matrices $\mathbf{B}_{ASYM}$ et $\mathbf{B}_{SYM}$: on utilise la procédure de la section 4.2.1 pour générer ces matrices, en prenant tantôt $D(x) = -(x + r)$, tantôt $D(x) = -1$.

5.2.2 Dimensions et conditions initiales du modèle général

On pose d'abord les valeurs des paramètres géométriques de notre système dans le tableau 5.1. Nous reprenons les mêmes valeurs utilisées dans l'article [2] afin de pouvoir comparer nos résultats de simulation avec ceux présentés dans l'article.

TABLEAU 5.1 Paramètres géométriques
du modèle général à deux panneaux [2]

Paramètres géométriques	Valeurs
ρ (kg/m)	20
EI ($N.m^2$)	120
L (m)	5
Longueur du bus $2r$ (m)	1
Masse du bus m_{bus} (kg)	800
Inertie du bus J_{bus} ($kg.m^2$)	400

On s'intéresse ensuite aux paramètres de simulation. Nous utiliserons un temps de simulation $t_f = 100$ secondes et un nombre de modes $n = 4$ pour correspondre aux paramètres utilisés dans l'article. Pour rappel, le choix d'un nombre de modes simulés est uniquement effectué à des fins de simulation. Les stratégies de commande étant basées directement sur les équations à dérivées partielles, elles restent valides peu importe le nombre de modes simulés. La caractéristique d'un modèle asymétrique comme celui qu'on utilise est que le comportement des deux panneaux est modélisé séparément, et on peut donc avoir des conditions initiales différentes sur chacun d'eux. Dans cet article, les déformations initiales sont exprimées à partir des deux premiers modes propres d'une poutre encastree de type Euler-Bernoulli. Les fonctions décrivant ces conditions initiales se retrouvent dans le tableau 5.2. On peut alors visualiser cette condition initiale sur la figure 5.5.

TABLEAU 5.2 Paramètres de simulation du modèle général à deux panneaux [2]

Paramètres de simulation	Valeurs
t_f (s)	100
n modes	4
Conditions initiales des panneaux	$w_R(x, 0) = a_{R0} = 0.35\phi_{n1}(x) + 0.02\phi_{n2}(x)$ $w_L(x, 0) = a_{L0} = 0.10\phi_{n1}(x) + 0.02\phi_{n2}(x)$ $\dot{w}(x, 0) = b_0(x) = 0$
Premiers modes propres	$\phi_{ni}(x) = a_1 \cos \beta x + a_2 \sin \beta x + a_3 \cosh \beta x + a_4 \sinh \beta x$ $\phi_{n1}(x) : a_1 = a_2 = 0.08; a_3 = -0.10; a_4 = 0.07; \beta = 0.37$ $\phi_{n2}(x) : a_1 = a_3 = 0.10; a_2 = a_4 = -0.10; \beta = 0.94$
Conditions initiales du bus	$\theta(t = 0) = \theta_0 = 0$ $x_{bus}(t = 0) = x_{bus,0} = 0$ $y_{bus}(t = 0) = y_{bus,0} = 0$

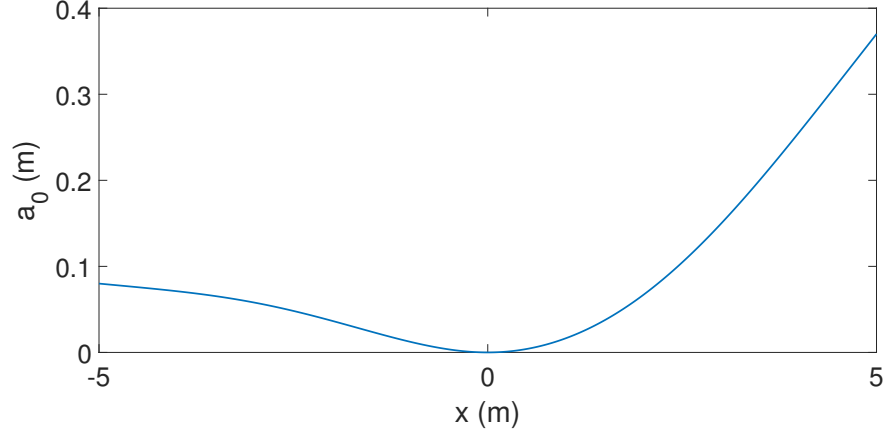


FIGURE 5.5 Distribution de la condition initiale le long de la poutre pour le modèle général

On s'intéresse maintenant aux constantes définies dans les lois de commandes (5.10). Elles ont été évaluées dans l'article [2] et nous les reprenons pour notre simulation, aux valeurs présentées dans le tableau 5.3.

TABLEAU 5.3 Coefficients
des équations de contrôle
du modèle général [2]

Coefficients	Valeurs
k_1	627
α_1	33
c_x	50
k_2	0.5
β_1	0
β_2	10

Maintenant que nous avons construit le schéma Simulink, calculé les matrices manquantes pour son implémentation, et défini les valeurs numériques de tous les paramètres de notre modèle, nous pouvons simuler notre système et effectuer les tests présentés dans les sections suivantes.

5.2.3 Résultats des simulations du modèle général

Dans cette section, nous allons présenter les résultats des modélisations effectuées sur le modèle général des satellites possédant deux panneaux solaires.

Notre objectif est tout d’abord de réussir à construire une simulation fonctionnelle capable de nous donner la réponse temporelle du système général. Nous validerons donc nos simulations en reproduisant les résultats présentés dans [2], notamment la réponse libre du système, ainsi que sa réponse lorsque l’on exécute la loi de commande de l’article, pour le déplacement vertical des panneaux $w(x, t)$ et certaines variables d’intérêt.

À partir de la simulation fonctionnelle, nous introduirons successivement tous les outils que nous avons détaillés dans les sections précédentes, afin d’étudier leur impact sur la dynamique du modèle. Les simulations comprendront l’ajout de l’amortissement de Kelvin-Voigt (section 3.2.2), l’ajout du modèle de roue d’inertie (section 3.2.3), et finalement l’ajout de la variation de l’angle désiré $\theta_d(t)$ du bus dans le temps (section 3.2.3).

Nous effectuerons certaines des simulations avec et sans le terme d’amortissement de Kelvin-Voigt lorsque cela sera pertinent, que nous introduisons dans le système par l’intermédiaire de la matrice $\mathbf{A}$ selon la procédure décrite à la section 3.2.2.

Les principaux résultats présentés sont le déplacement vertical $w(x, t)$ le long des panneaux, l’angle $\theta(t)$ du bus, ainsi que des données pertinentes à l’action des moteurs si applicable.

Réponse libre du modèle général

Nous commençons par simuler la réponse libre du système soumis aux conditions initiales décrites précédemment (tableau 5.2). Le schéma Simulink utilisé comprend simplement le modèle complet présenté sur la figure 5.4, auquel on retire les blocs de commande ④, ⑤, et ⑥, correspondant respectivement aux forces $\tau(t)$, $f(t)$ et $u(t)$. Les principaux résultats sont présentés sur les figures 5.6, 5.7 et 5.8. On retrouvera la réponse du système libre non amorti en terme de déplacement vertical $w(x, t)$ et d’angle $\theta(t)$, ainsi qu’un comparatif de la réponse du système amorti en fonction de la valeur du coefficient η choisi.

Sur la figure 5.6 on peut constater que le système ne se stabilise pas si on n’applique pas de force extérieure, les oscillations ne diminuant pas d’amplitude dans le temps. On s’attend à ce résultat de par l’absence de termes introduisant de l’amortissement dans notre modèle de base (5.7a), (5.8a) et (5.9).

En introduisant l’amortissement de Kelvin-Voigt dans notre modèle, on constate l’effet du terme d’amortissement qui réduit l’amplitude des oscillations du déplacement vertical des panneaux solaires. Dans tous les cas présentés on constate, ou on peut s’attendre après un certain temps, que les vibrations des panneaux finissent par se dissiper. On constate cependant que cet effet dépend fortement de la valeur du coefficient d’amortissement choisie. Ce coefficient étant relié aux propriétés mêmes des matériaux, et la problématique portant

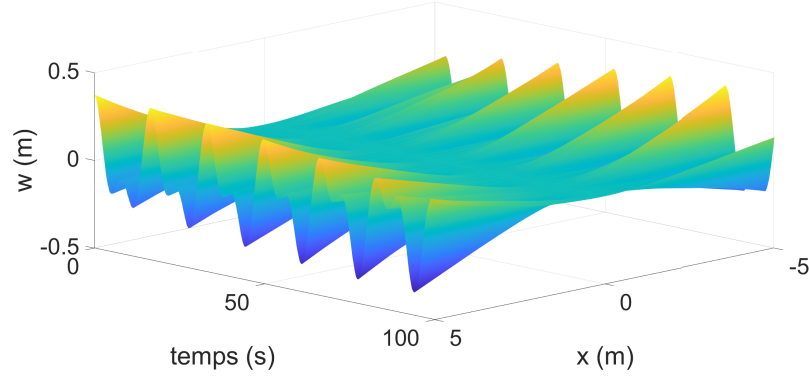
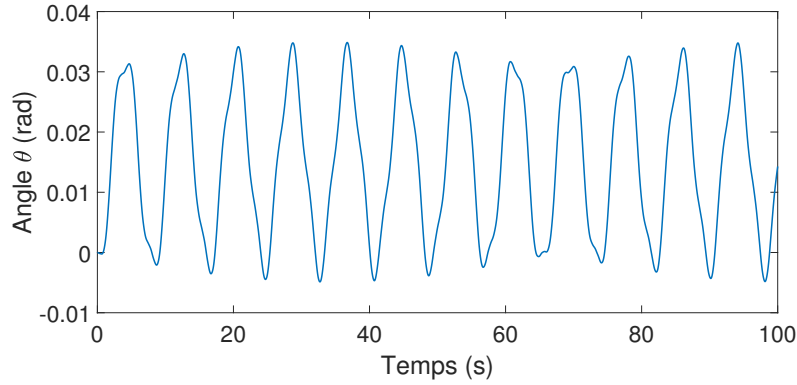


FIGURE 5.6 Réponse libre du modèle général à deux panneaux

FIGURE 5.7 Angle θ (en radian) du bus dans le temps pour un système libre

justement sur l'utilisation de plus en plus fréquente de matériaux plus flexibles, il faut être vigilant à ne pas surestimer l'influence de ce terme sur la réponse du système. Toutefois, à des fins de visualisation pour mettre en exergue l'influence de l'amortissement sur la réponse, nous effectuerons le reste des analyses avec le coefficient le plus élevé $\eta = 0.5$.

On peut reprendre la représentation de l'énergie totale du système pour observer l'impact de l'amortissement. On reprend les équations de l'énergie totale (4.12), en ajoutant les termes associés au passage au modèle complet à deux panneaux à partir du modèle simplifié à un panneau. On obtiendrait alors l'expression de l'énergie cinétique suivante :

$$T(t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^1 (\dot{w}(x, t) + x\dot{\theta} + \dot{y}_{bus})^2 + \dot{x}_{bus}^2 dx. \quad (5.12)$$

On obtient alors la figure 5.9, regroupant l'énergie totale du système non contrôlé et non amorti correspondant à la figure 5.6, ainsi que les énergies correspondant aux différents coefficients d'amortissements appliqués sur le système à la figure 5.8.

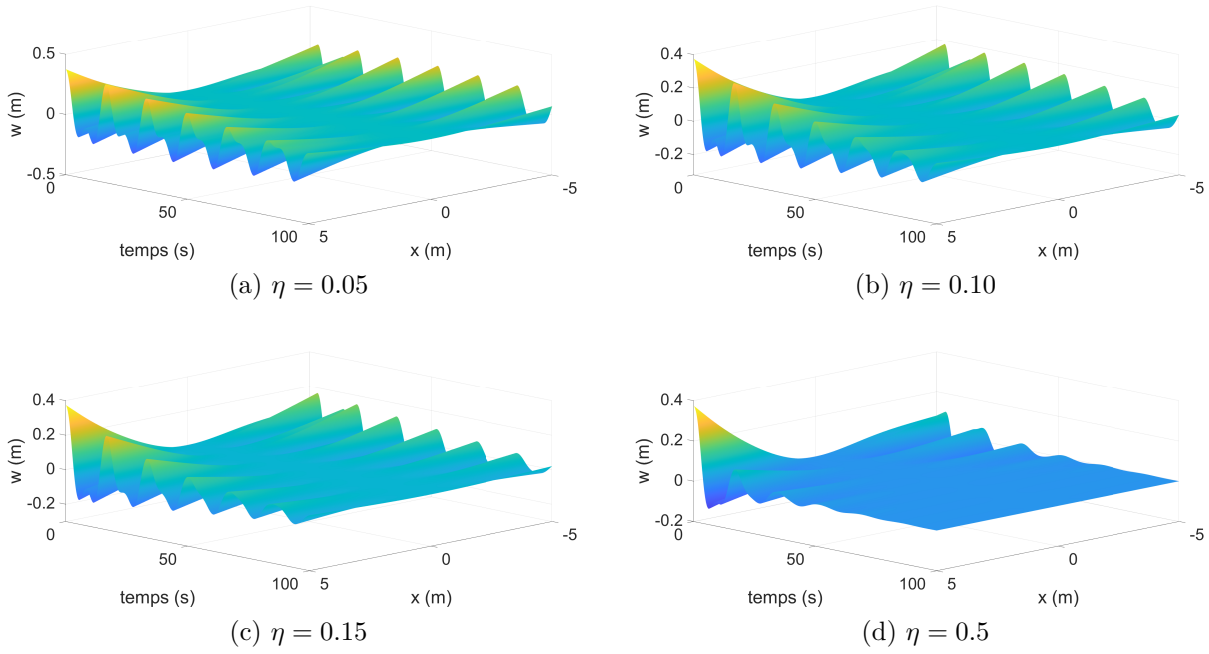


FIGURE 5.8 Réponse libre amortie du modèle général à deux panneaux pour différents coefficients d'amortissement

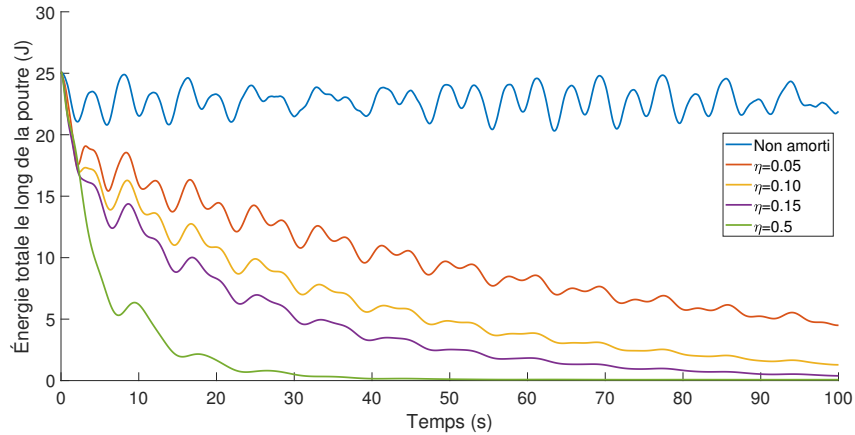


FIGURE 5.9 Énergie totale du système dans le temps pour les réponses libres non amorties et amorties avec les coefficients utilisés à la figure 5.8 et les conditions initiales 5.2

On peut de nouveau constater que l'énergie du système libre non amorti ne se dissipe pas et que le système ne se stabilise donc pas sans action extérieure. On peut aussi visualiser d'une nouvelle manière l'impact du coefficient d'amortissement sur le système, avec une énergie totale qui décroît plus rapidement plus le coefficient est important, et l'on retrouve également les temps de stabilisation observés à la figure 5.8.

Ces premières simulations nous permettent entre autres de valider la logique de simulation que nous avons suivie, ainsi que les opérations sur les matrices que nous avons effectuées, puisque les résultats non amortis correspondent exactement à ceux provenant de l'article [2] nous servant de référence. Nous allons donc poursuivre nos démarches de validation de notre modèle en étudiant les mouvements provoqués par une rotation du bus sur des panneaux initialement au repos, avant d'implémenter la stratégie de commande que nous avons détaillée pour comparer les résultats avec ceux de l'article.

Réponse libre du modèle général avec mouvement du bus

Pour réaliser ce test, nous n'allons pas considérer la condition initiale de la figure 5.5 des panneaux mais considérer tout le système initialement au repos, avant d'implémenter une rotation du bus et d'étudier l'impact de ce mouvement sur la réponse des panneaux dans le temps. Pour ce faire, nous allons utiliser le modèle utilisé à la section précédente, en retirant en plus au modèle global de la figure 5.4 le bloc ② dictant le mouvement en rotation du bus, dont la sortie est l'accélération angulaire $\ddot{\theta}(t)$. On remplace le mouvement angulaire du bus par le sous-système prévu pour l'étude de l'angle désiré variable dans le temps que l'on retrouve à la figure 3.8, et on dérive la sortie pour obtenir l'accélération angulaire. On ajoute ainsi le bloc ⑦ pour obtenir le schéma complet de la figure B.7 en annexe.

On peut donc imposer un mouvement du bus dans le temps. Le bus va effectuer une rotation de l'angle $\theta_i = 0^\circ$ au temps $t_i = 0$ s à $\theta_f = 10^\circ$ au temps $t_f = 50$ s, puis la rotation s'arrête jusqu'à la fin de la simulation à 100 s, selon le profil de rotation du bus de la figure 5.10.

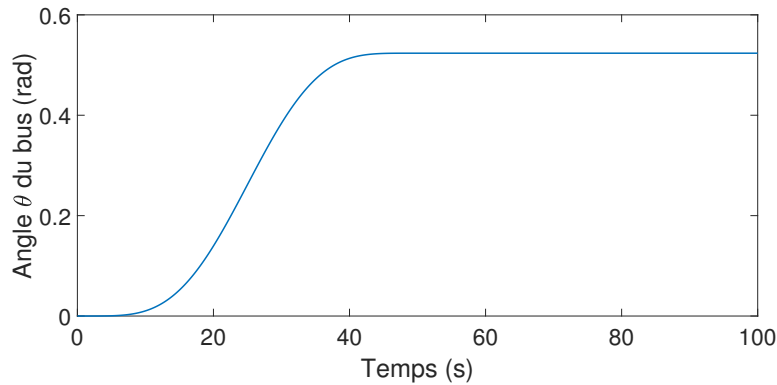


FIGURE 5.10 Suivi de la valeur de l'angle $\theta(t)$ (en radian) du bus dans le temps pour des panneaux solaires au repos

Le mouvement non amorti et amorti des panneaux correspondant à ce mouvement du bus est représenté à la figure 5.11.

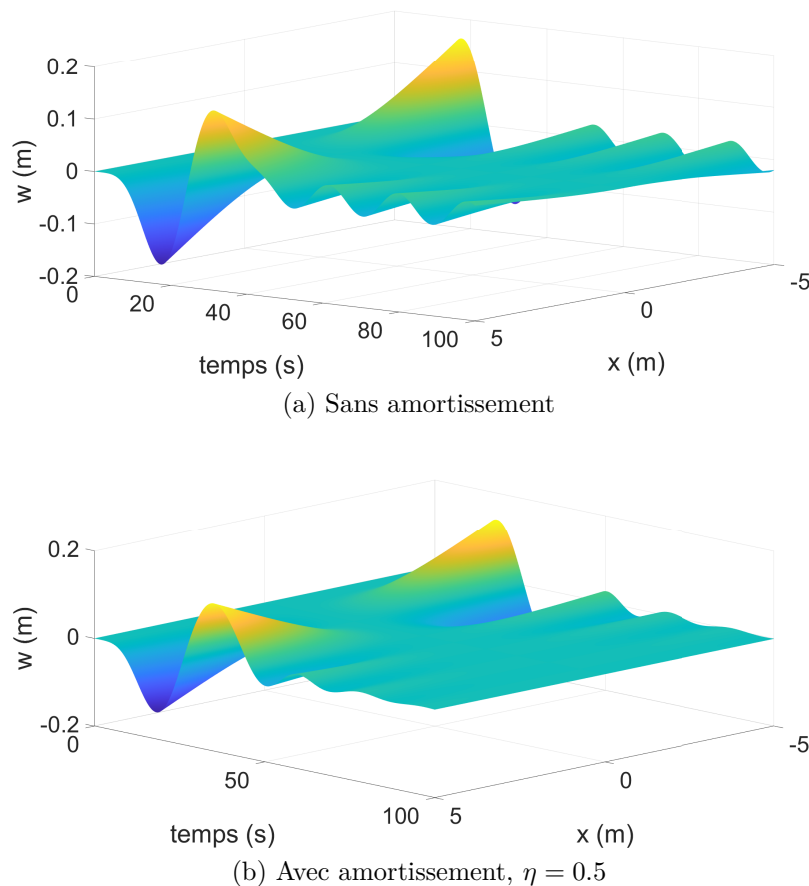


FIGURE 5.11 Réponse libre du modèle général à deux panneaux avec et sans amortissement avec panneaux au repos et mouvement du bus

On peut constater sur les résultats non amortis, que le mouvement du bus va entraîner le mouvement des panneaux de manière antisymétrique comme attendu. Durant le mouvement du bus, les panneaux effectuent une oscillation, dont les deux pics correspondent aux deux périodes où le taux de variation de l'angle de bus est le plus important, soit peu avant 20 et 40 secondes. Après les 50 secondes de rotation programmée du bus, on constate que des vibrations résiduelles engendrées par ce mouvement perdurent jusqu'à la fin de la simulation. L'oscillation initiale est également d'amplitude plus importante que celles après 50 secondes, ce qui est attendu compte tenu de l'apport provoqué par le mouvement du bus. L'ajout de l'amortissement implique à la fois une amplitude plus faibles pour l'oscillation initiale, et des vibrations résiduelles à partir de 50 secondes qui semblent se dissiper jusqu'à arriver au repos en fin de simulation. Nous avons ainsi montré que notre modèle permet de représenter les mouvements induits par la rotation du bus sur les panneaux solaires.

Implémentation de la stratégie de commande

Le schéma Simulink utilisé est le modèle complet présenté sur la figure 5.4. Il fait intervenir les blocs dédiés à l'implémentation des lois de commande pour les trois forces $\tau(t)$, $f(t)$ et $u(t)$. Tous les blocs des sous-systèmes se retrouvent dans l'annexe B. On effectue la simulation avec les mêmes conditions initiales, et en utilisant les définitions de l'objectif de pointage via l'angle désiré $\theta_d = 10^\circ$ présentés à la section 3.2.3.

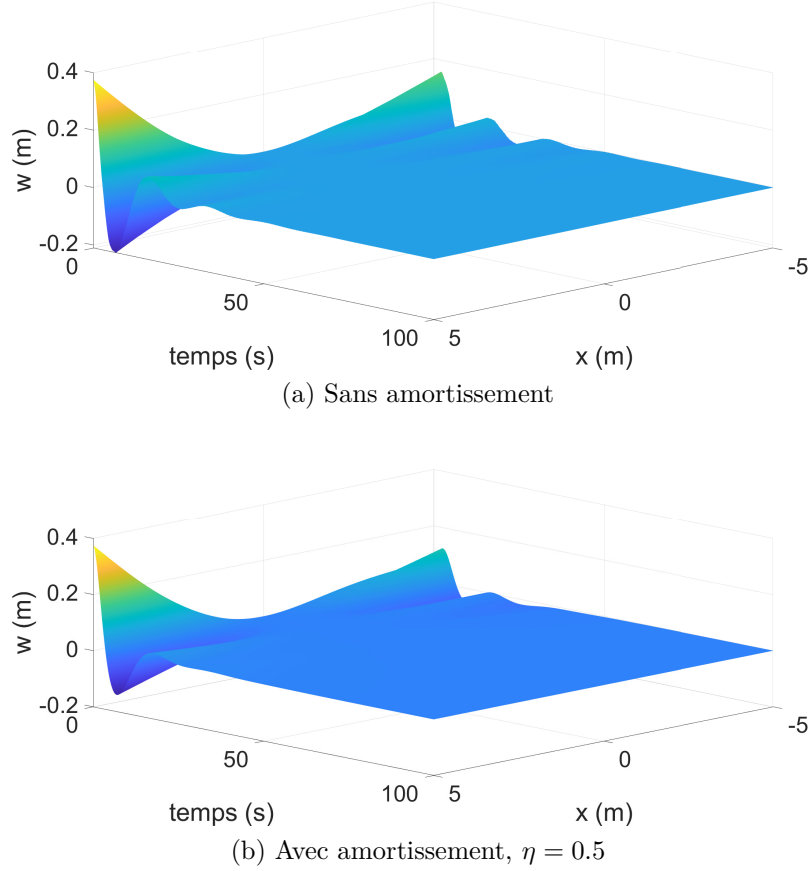
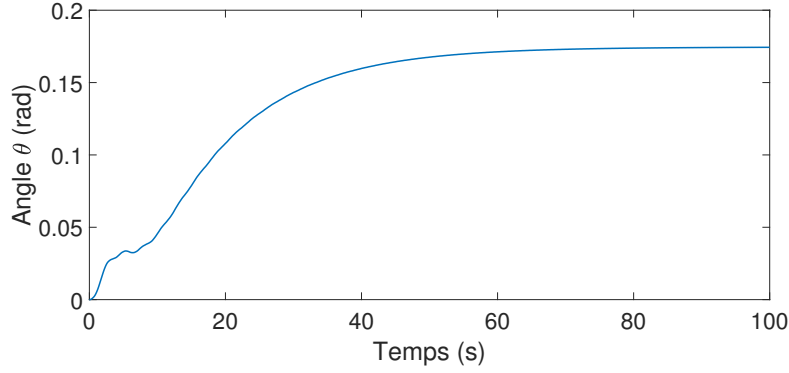


FIGURE 5.12 Réponse contrôlée du modèle général à deux panneaux avec et sans amortissement

On constate sur la figure l'impact de la loi de commande développée dans l'article [2]. Les résultats de nos simulations non amorties sont identiques à celles de l'article, ce qui valide l'implémentation complète du modèle général. Le système est stabilisé au bout de 50 secondes, sans dépassement. L'ajout de l'amortissement sur la figure 5.13b permet comme attendu de réduire le nombre d'oscillations dans la réponse et donc une stabilisation plus rapide autour de 40 secondes. Les pics d'amplitude de la réponse des panneaux sont également diminués.



(a) Sans amortissement

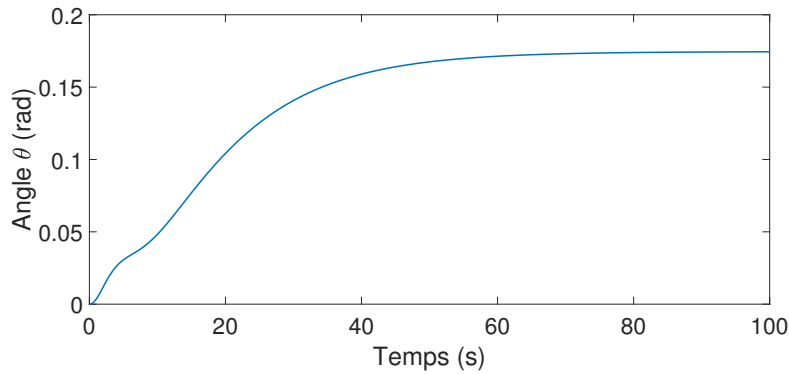
(b) Avec amortissement, $\eta = 0.5$

FIGURE 5.13 Angle θ (en radian) du bus dans le temps pour un système contrôlé amorti et non amorti

Concernant l'angle θ , la figure 5.13a présente l'évolution de la valeur de l'angle pour le système non amorti. On constate que l'angle tend vers la valeur désirée sans dépassement, pour l'atteindre asymptotiquement au fil du temps. On constate également un palier entre 5 et 10 secondes après le début de la simulation, qui correspond au premier pic d'amplitude du déplacement vertical $w(x, t)$ où le mouvement des panneaux change de direction. C'est ce mouvement qui impacte l'évolution de l'angle du bus, et on ne retrouve pas de réaction similaire pour les prochains pics puisque leur amplitude décroît sous le coup de l'action des forces de stabilisation. L'effet de l'amortissement se fait ressentir sur ce palier, puisque l'amplitude du premier pic étant diminuée, le palier marqué par l'angle du bus est plus léger. L'angle atteint également sa valeur désirée $\theta_d \approx 0.174$ rad légèrement plus tôt.

Nous considérons maintenant le système non amorti, et implémentons la formulation de l'angle désiré $\theta_d(t)$ variable dans le temps. Nous ajoutons donc au modèle de la figure 5.4 le bloc de la figure 3.8.

En utilisant les valeurs numériques listées à la section section 3.2.3, avec un angle allant de $\theta_{di} = 0^\circ$ un $\theta_{df} = 10^\circ \approx 0.174$ rad, on obtient la simulation 5.14.

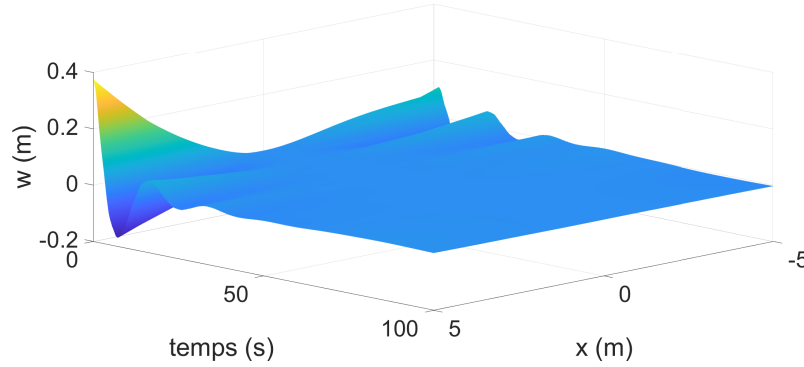


FIGURE 5.14 Réponse contrôlée du modèle général à deux panneaux avec suivi de l'angle désiré dans le temps, avec les conditions du tableau 5.2

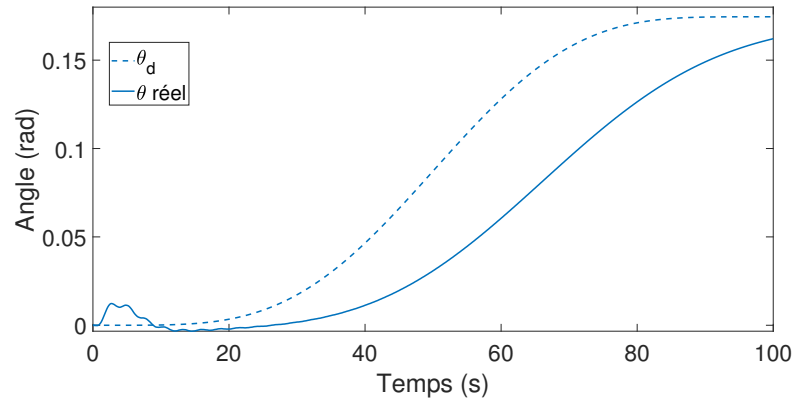


FIGURE 5.15 Suivi de la valeur désirée de l'angle $\theta(t)$ (en radian) du bus dans le temps pour un système contrôlé non amorti

On constate sur la figure 5.15 que l'angle réel $\theta(t)$ suit l'allure désirée. L'évolution de cette variable est en effet très différente de celle obtenue lorsque la valeur désirée est fixée à sa valeur finale dès le début de la simulation (figure 5.13a). On remarque surtout que le suivi est très bon lorsque la variation de l'angle désiré est lente dans les premières 20 secondes. On retrouve une perturbation entre 0 et 10 secondes due à la forte amplitude des pics de la valeur du déplacement vertical des panneaux dans les premières secondes. On observe également que lorsque la pente de l'angle désiré est la plus forte entre 20 et 80 secondes, l'angle réel commence à accumuler un retard sur la valeur désirée, qui implique que la valeur finale de $\theta_{df} = 10^\circ$ n'est pas encore atteinte au bout des 100 secondes de simulation.

Ajout du moteur réel au modèle général à deux panneaux

Dans cette section, nous allons successivement intégrer les deux modèles de moteurs réels dont nous disposons, à savoir celui du servomoteur (figure 3.5) et de la roue d'inertie (figure 3.6) que l'on décrit à la section 3.2.3. On va inclure ces deux blocs dans le modèle global (figure 5.4) à la sortie du bloc ④ associé au couple $\tau(t)$. La sortie du bloc ④ deviendra la commande en couple commandée τ_c qui servira d'entrée pour nos deux moteurs réels. On ressort alors la valeur du couple réel τ_r qui servira pour le reste de la simulation. On peut retrouver ce modèle sur la figure B.8 en annexe, avec le bloc ⑧ représentant le moteur réel.

On réutilise les mêmes paramètres du servomoteur qui se retrouvent dans le tableau 3.5, dont nous savons l'action sur le modèle à panneau dans la section 4.2.2. Pour la roue d'inertie, nous reprenons les données du tableau 3.6, obtenues sur différentes feuilles de données de moteurs réels. Il est à noter que la démarche de simulation que nous avons employée nous permet de changer facilement ces paramètres pour tester les performances de n'importe quelle roue d'inertie. Nous avons donc créé un outil utile à la conception préliminaire de systèmes spatiaux, nous permettant d'obtenir des premières approximations du dimensionnement des moteurs requis.

Nous obtenons alors les résultats pour la réponse du mouvement des panneaux avec le servomoteur à la figure 5.16, et pour l'angle du bus à la figure 5.18a. On constate que le système se stabilise toujours avec une réponse plus saccadée que celle obtenue sans l'ajout du moteur réel. La stabilisation est moins rapide, avec des oscillations à basses fréquences perdurant après les 100 secondes. On remarque également que l'évolution de l'angle $\theta(t)$ diffère. C'est en effet sur ce paramètre que l'ajout du servomoteur joue principalement, puisque ce dernier produit un couple influençant directement la rotation du bus. Ici, on observe un dépassement important de la valeur désirée $\theta_d = 0.174$ rad. L'angle tend néanmoins vers la valeur cible durant une période supérieure à la durée de simulation.

Nous avons ajouté les graphiques représentant l'évolution des autres paramètres du système, à savoir les vitesses de translation dans l'espace du bus $\dot{x}_{bus}$ et $\dot{y}_{bus}$ (figures 5.17b et 5.17c), ainsi que les forces appliquées au système (5.18). Tous ces paramètres tendent à 0 plus ou moins rapidement, confirmant que le système est stable et revient au repos après un certain temps.

Nous obtenons alors les résultats pour la réponse du mouvement des panneaux avec la roue d'inertie à la figure 5.19, et pour l'angle du bus à la figure 5.20a. À l'inverse de l'ajout du servomoteur, on constate une moins bonne performance sur la stabilisation des panneaux, mais une meilleure réponse en angle du bus. En effet, avec les paramètres sélectionnés pour

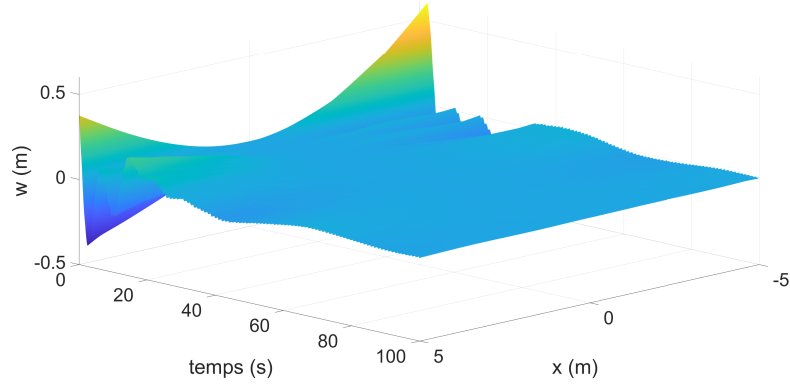


FIGURE 5.16 Réponse contrôlée du modèle général à deux panneaux avec servomoteur, avec les conditions du tableau 5.2

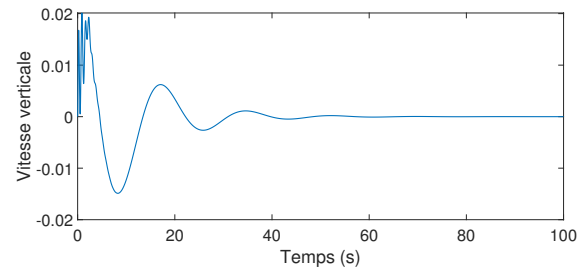
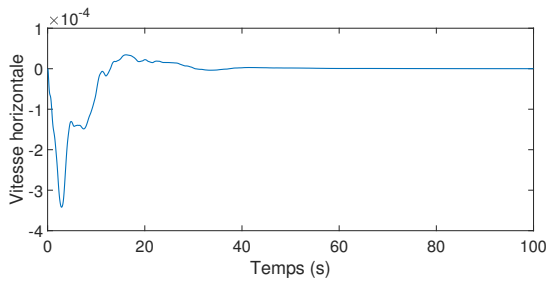
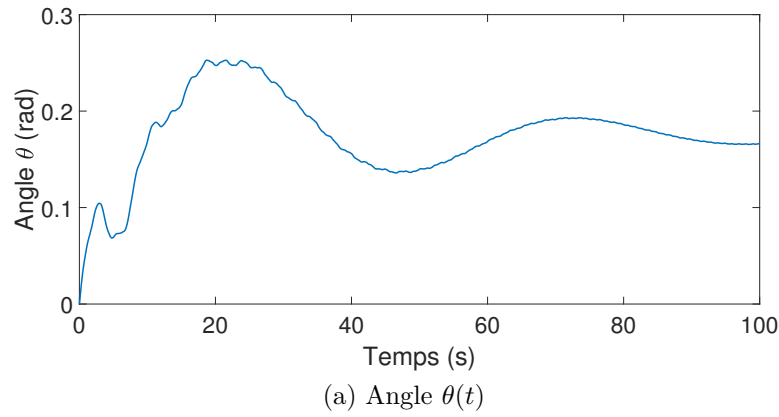


FIGURE 5.17 Mouvement du bus du système général à deux panneaux avec servomoteur, avec les conditions du tableau 5.2

la roue d'inertie, le système se stabilise plus lentement, et des oscillations subsistent à 100 secondes. En revanche, on n'observe plus de dépassement de la valeur cible de l'angle θ , dont l'évolution est plus lente. Tous les autres paramètres du système tendent vers 0 confirmant la stabilité de notre modèle.

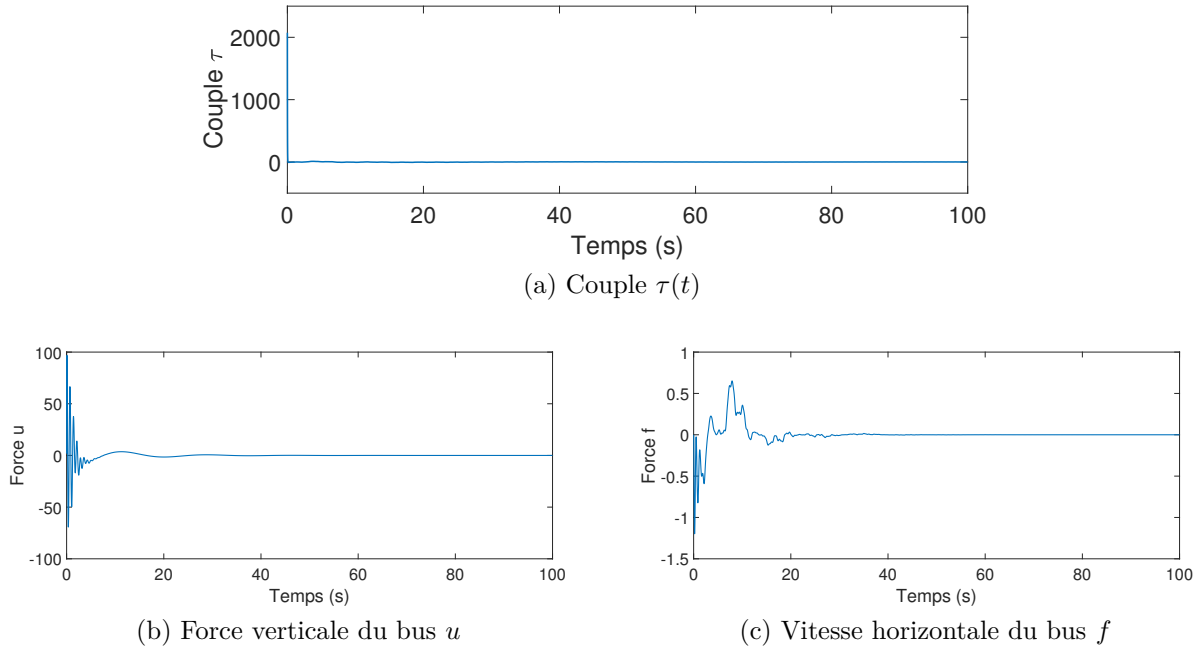


FIGURE 5.18 Forces exercées sur le bus du système général à deux panneaux avec servomoteur, avec les conditions du tableau 5.2

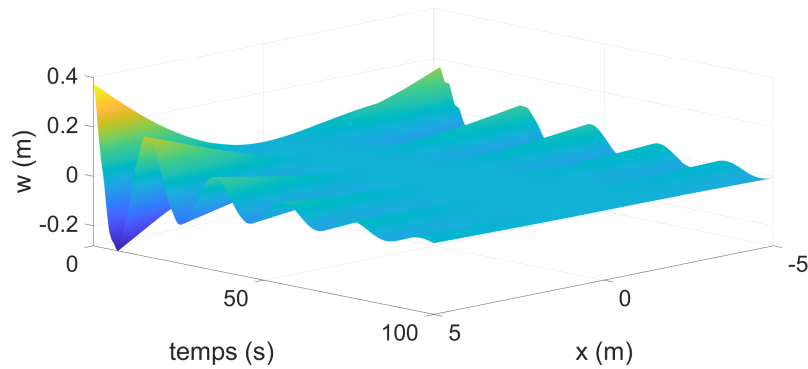


FIGURE 5.19 Réponse contrôlée du modèle général à deux panneaux avec roue d'inertie, avec les conditions du tableau 5.2

Encore une fois on représente aussi l'énergie du système sur la figure 5.22, sur laquelle on constate la performance des deux actionneurs testés, le servomoteur et la roue d'inertie, comparé à la réponse libre. On confirme que les paramètres du servomoteur choisis permettent une stabilisation plus rapide par rapport à la roue d'inertie.

Finalement, nous testons la variation de l'angle désiré θ_d avec le modèle complet équipé de la roue d'inertie. Nous cherchons uniquement à observer la variation de l'angle et non le mouvement des panneaux pour vérifier que la roue d'inertie permet le suivi de la valeur cible

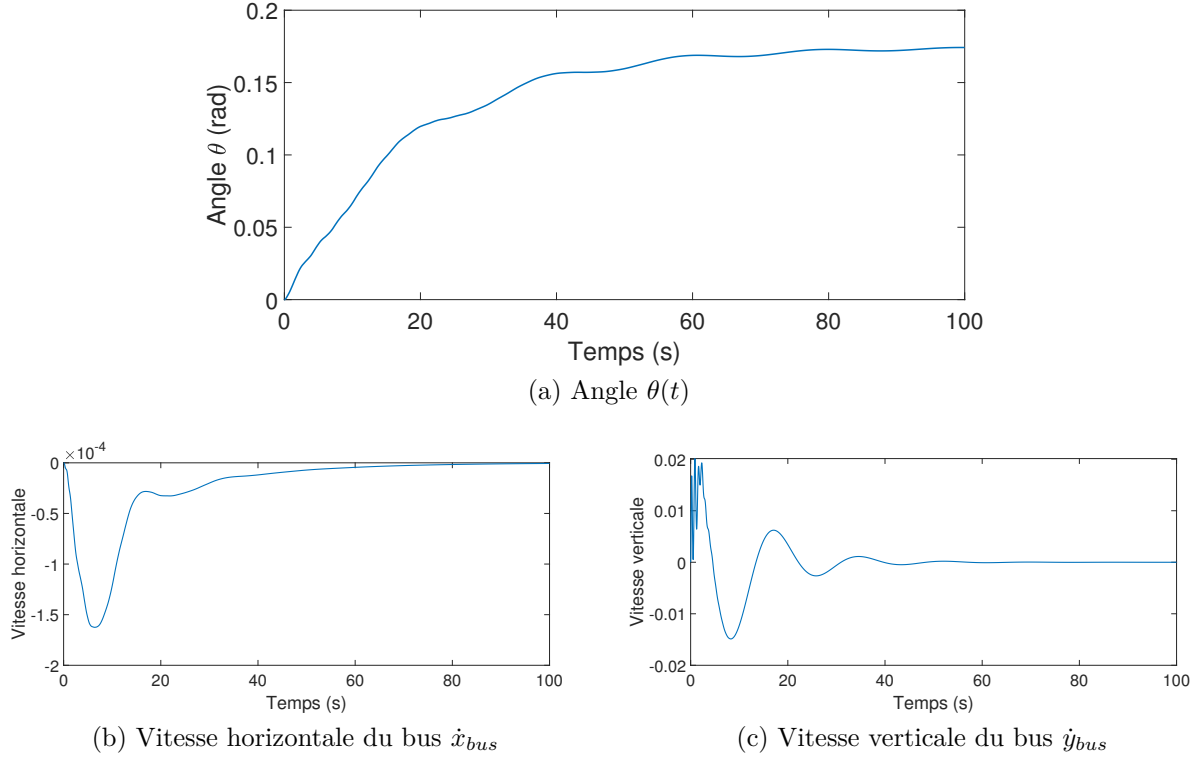


FIGURE 5.20 Mouvement du bus du système général à deux panneaux avec roue d'inertie, avec les conditions du tableau 5.2

variant dans le temps. La figure 5.23 nous montre que la courbe réelle a la même forme que celle demandée, mais avec un retard qui implique que la valeur cible n'est pas atteinte au bout de 100 secondes. Plus particulièrement on remarque le retard de la réponse lors des deux phases de changement important du taux de variation de θ_d , à savoir aux alentours de 30 secondes et 50 secondes. C'est durant ces périodes que l'effort à fournir par la roue d'inertie est le plus important, et les caractéristiques du moteur fournies pour cette simulation ne permettent d'effectuer un suivi plus rapide. Une roue capable de produire un couple plus important pourrait mieux satisfaire les critères demandés.

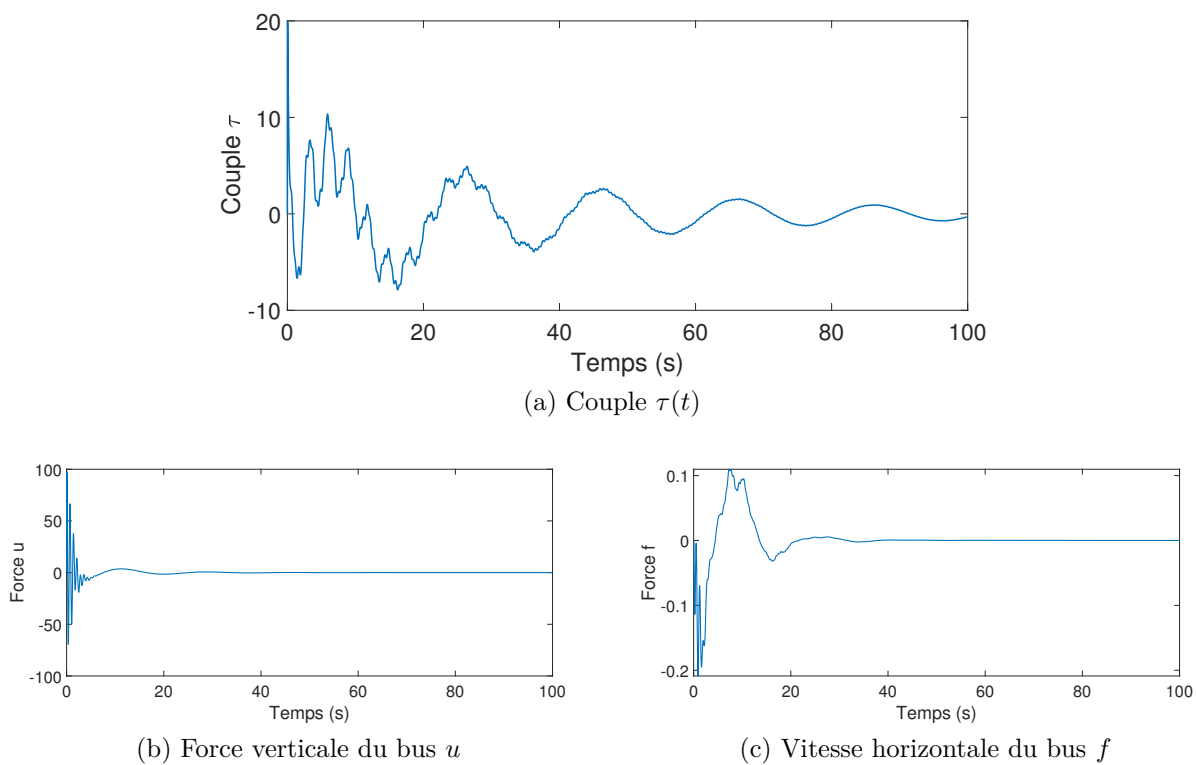


FIGURE 5.21 Forces exercées sur le bus du système général à deux panneaux avec roue d'inertie, avec les conditions du tableau 5.2

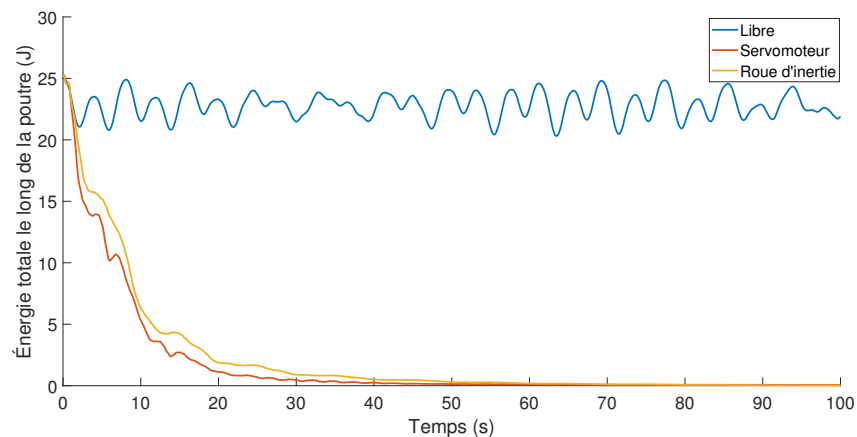


FIGURE 5.22 Énergie totale du système dans le temps pour les réponses libres et contrôlées avec le servomoteur (figure 5.16) et la roue d'inertie (figure 5.19), et les conditions initiales 5.2

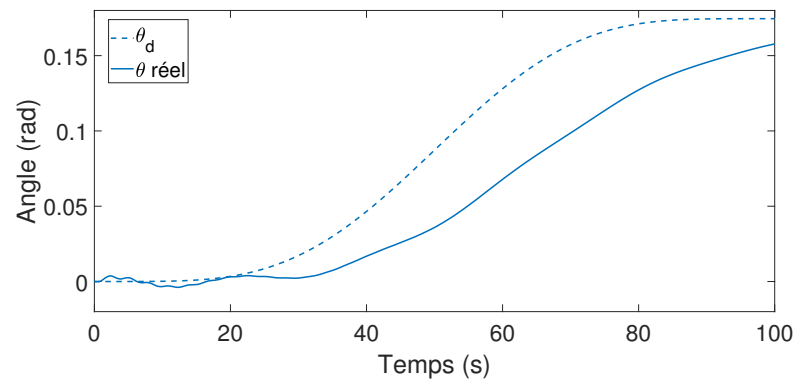


FIGURE 5.23 Suivi de la valeur désirée de l'angle $\theta(t)$ (en radian) du bus dans le temps pour un système contrôlé équipé d'une roue d'inertie, avec les conditions du tableau 5.2

CHAPITRE 6 CONCLUSION

6.1 Synthèse des travaux

L'objectif de ce travail était de développer les outils permettant de simuler un modèle de satellite, afin d'étudier l'atténuation des vibrations de ses panneaux solaires via des méthodes actives. Cet objectif découle des développements dans le domaine aérospatial de structures de plus grandes envergures et utilisant des matériaux plus flexibles. Ces caractéristiques sont d'autant plus importantes pour les systèmes spatiaux évoluant dans un environnement dynamique particulier, caractérisé par un faible amortissement. Les méthodes passives de contrôle des vibrations de ces appendices flexibles peuvent alors trouver leurs limites, amenant la nécessité d'employer des méthodes actives. Ces dernières nécessitent l'ajout d'actionneurs sous la forme de moteurs permettant d'exercer une force sur le système, amenant à sa stabilisation. Le choix des méthodes de commande de ces moteurs est crucial pour atteindre les requis de mission des systèmes aéronautiques. En particulier, dans le cas des satellites, le requis de pointage découlant leurs applications dans les domaines de la télécommunication ou de l'observation spatiale est primordial. Il nécessite une attention particulière à la gestion de l'attitude des satellites et aux méthodes de contrôle qui y sont associées. Dans ce contexte, il est nécessaire de pouvoir développer des outils de simulation permettant de tester l'efficacité de ces méthodes de contrôle, et ainsi participer au processus de conception des systèmes complexes que sont les satellites. Notre étude s'est donc concentrée sur le développement et le test de ces outils de simulation.

La première étape consistait à choisir la modélisation du satellite permettant de représenter tous ses éléments constitutifs pertinents à l'étude. En se basant sur la littérature, nous avons choisi de considérer un modèle évoluant dans un plan, composé d'un corps central, du bus, et de deux panneaux solaires. Les vibrations des panneaux solaires sont représentées par le déplacement vertical le long des panneaux, que nous cherchons à éliminer. La théorie d'Euler-Bernoulli nous a permis de représenter le mouvement de ces panneaux dans le plan, en les considérant comme des poutres encastrées au niveau du bus, et libres à l'autre extrémité. L'utilisation du modèle d'Euler-Bernoulli a été encouragée car sa formulation est sous forme de dérivées partielles. Bien que l'utilisation de modélisations par dérivées partielles apporte de la complexité à l'étude mathématique, elles permettent d'étudier le modèle sans le tronquer, évitant ainsi des imprécisions dans les simulations. L'objet de notre étude n'étant pas l'analyse mathématique de ces systèmes, l'utilisation de la théorie d'Euler-Bernoulli pour la modélisation des panneaux a été validée. Le bus quant à lui possède trois degrés de liberté

dans le plan, à savoir une rotation et deux translations, qui requièrent autant d'équations de mouvement pour modéliser son comportement. Avant de modéliser ce système complet, nous en avons également étudié deux autres, un ne présentant qu'un seul panneau sans bus, et un autre où seules les translations du bus étaient retirées. Ces modèles simplifiés nous ont permis de développer et de tester les outils de simulation que nous avons utilisés.

Une fois le système modélisé, nous nous sommes attardés sur le contrôle des vibrations. Alors que la modélisation que nous avons décrite précédemment est répandue dans la littérature, une multitude de méthodes de contrôle ont été développée dans les travaux des chercheurs. Nous avons choisi de nous concentrer sur un contrôle aux frontières au détriment des méthodes distribuées. Cette méthode utilise un moteur et des capteurs situés au niveau du bus, entre les panneaux. Plus particulièrement, nous avons décidé de suivre principalement trois articles présentant la commande des modèles que nous avons énoncés plus haut. À l'aide de la modélisation la plus simple à un panneau, nous avons abordé les considérations de *well-posedness* puis de stabilité via une méthode de Lyapunov qui ont été démontrées dans le premier article de référence. Par la suite, nous avons appliqué les méthodes de commande des deux articles suivants pour étudier le contrôle de modèles de plus en plus étoffés.

L'étude du comportement des modèles et l'application des lois de commande identifiées dans la littérature nécessitent la conception d'un outil de simulation. Nous avons travaillé dans l'environnement Matlab/Simulink pour réaliser nos analyses. Un *Toolbox* dédié à l'étude du mouvement des poutres, disponible dans la littérature, a été utilisé dans la logique de simulation. Il nous a offert un ensemble de fonctions permettant de simuler la réponse des poutres modélisant nos panneaux solaires dans différentes configurations. Plus spécifiquement, il nous a permis d'obtenir les paramètres fréquentiels et modaux de nos poutres, ainsi qu'une représentation modale de leur état. Ces données ont alors été utilisées pour bâtir nos modèles schématiquement sur Simulink, dont l'implémentation sous forme de schéma bloc a facilité la construction des modèles. Nous avons alors développé des fonctions sous Matlab permettant de fournir les paramètres d'entrée aux modèles Simulink, notamment les conditions initiales, les données géométriques, et les matrices supplémentaires nécessaires aux simulations. Les résultats modaux sont alors transformés en déplacements physiques pour analyser les résultats. La logique de simulation que nous venons de décrire a été utilisée pour les trois modèles issus des articles étudiés. Nous avons alors pu reproduire leurs résultats et ainsi nous assurer de la validité de nos simulations.

Enfin, nous avons utilisé ces simulations pour introduire des modèles plus réalistes pour le contrôle de nos systèmes. Le problème de suivi de l'angle du bus a été implémenté pour simuler une manœuvre de changement d'attitude liée à un requis de pointage. Nous avons

aussi ajouté un amortissement interne à nos simulations, via la formulation de Kelvin-Voigt. Le modèle complet a alors été utilisé pour ajouter deux modèles de moteurs réels, à savoir un servomoteur et une roue d'inertie. Le modèle de roue d'inertie est particulièrement pertinent puisqu'il s'agit d'une méthode de commande d'attitude répandue. Les simulations ont pu démontrer la stabilité des modèles commandés, que ce soit en utilisant uniquement les lois de commande ou bien lorsque les moteurs réels ont été ajoutés. L'outil ainsi développé donne la possibilité de tester l'impact de la modification des paramètres des moteurs sur la réponse du système, et d'ainsi choisir un modèle commercial dont les caractéristiques permettrait d'obtenir une dynamique remplissant les critères de mission.

6.2 Limitations de la solution proposée

L'outil de simulation utilisé a été développé spécifiquement pour les modélisations étudiées. Ainsi, il ne permet pas en l'état de simuler des modèles trop éloignés de ceux étudiés. Typiquement, notre étude se concentre dans un plan, ce qui retire une portion non négligeable de la représentation de nos modèles en trois dimensions. On se concentre ainsi sur des mouvements relatifs du système par rapport à son positionnement initial, ou à un repère global placé aléatoirement. Cela ne nous permet pas de prendre directement en compte la gestion de l'orbite du satellite, ou encore le couplage des mouvements et des forces exercées dans les trois directions.

Concernant la modélisation des moteurs réels, ces derniers sont représentés de manière simplifiée, et ne sont définis que par peu de variables. La logique de simulation que nous avons utilisée ne nous permet pas non plus à l'heure actuelle de pouvoir trouver directement les caractéristiques du moteur remplissant les critères de mission, mais simplement de pouvoir tester plusieurs paramètres préétablis.

6.3 Améliorations futures

Les améliorations envisageables concernent les limites citées précédemment. On pourrait d'abord optimiser la structure du code de manière à produire des fonctions polyvalentes destinées spécifiquement aux modèles de satellites, et employables pour une vaste gamme de simulations. On pourrait ainsi construire un Toolbox semblable à celui employé dans nos simulations.

De plus, on pourrait étendre les modèles étudiés en trois dimensions et ajouter le contrôle de l'orbite à celui du pointage. Il serait alors pertinent de pouvoir introduire d'autres modèles de mécanismes de contrôle réellement utilisés dans des applications spatiales, comme

des modèles de propulseur ou encore d'autres générateurs de couple. Les modèles de ces actionneurs pourraient également prendre en compte la composante électrique qui leur est associée, permettant alors de pouvoir mettre des limites plus réalistes à leur fonctionnement. Ces limites pourraient prendre la forme de la tension ou du courant maximal pouvant être utilisé et acheminé aux actionneurs, la gestion de la consommation énergétique, ou encore l'intégration au reste de l'électronique de bord.

L'application sur les modèles de conditions initiales plus spécifiques aux systèmes spatiaux pourrait également être envisagée. En effet, il pourrait être pertinent d'identifier les sources de vibrations en opération, de les modéliser et d'en faire le nouveau point de départ d'une analyse plus réaliste. L'ajout de perturbations liées au milieu extérieur serait également pertinent, qu'elles proviennent de l'environnement vibratoire au moment de la mise en orbite du satellite, de l'environnement thermique, ou encore radiatif.

Dans une optique de rapprochement avec les conditions réelles en orbite, l'analyse thermique et son couplage avec la dynamique purement mécanique explorée dans cette étude représenterait une amélioration pertinente.

De même, comme annoncé dès l'introduction, nous n'avons pas pris en compte la dynamique des capteurs, des bruits de mesure et des délais liés aux actionneurs dans notre étude. Tous ces éléments sont importants pour compléter la simulation réaliste d'un système réel de satellite, notamment pour s'assurer que les délais et bruits de mesure ne mettent pas en péril les méthodes de stabilisation utilisées.

En conclusion, l'auteur de ce mémoire espère avoir pu apporter une contribution, aussi infime soit-elle, à l'étude et à l'exploration du milieu spatial, et présenter une base intéressante pour de futurs avancements.

RÉFÉRENCES

- [1] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*. John Wiley & Sons, 2019.
- [2] H. K. Rad *et al.*, “Boundary control of flexible satellite vibration in planar motion,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 432, p. 549–568, 2018.
- [3] Z.-H. Luo, “Direct strain feedback control of flexible robot arms : new theoretical and experimental results,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, n°. 11, p. 1610–1622, 1993.
- [4] S. Oliva, “Initial analysis of the reaction wheels disturbances impact on the attitude control system of a small satellite,” Thesis, Politecnico di Torino, 2020.
- [5] Z.-H. Luo, B.-Z. Guo et O. Morgul, *Static Sensor Feedback Stabilization of Euler-Bernoulli Beam Equations*. London : Springer London, 1999, p. 165–257. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0419-3_4
- [6] F. Miria M. et d. G. Kim K., “Space environmental effects,” *ISS Researcher’s Guide Series*, 2020.
- [7] A. Israr, “Vibration and modal analysis of low earth orbit satellite,” *Shock and Vibration*, vol. 2014, p. 1–8, 2014.
- [8] S. Bhattarai, H. Kim et H.-U. Oh, “Cubesat’s deployable solar panel with viscoelastic multilayered stiffener for launch vibration attenuation,” *International Journal of Aerospace Engineering*, vol. 2020, p. 1–10, 2020.
- [9] V. Camelo *et al.*, “Damping and isolation concepts for vibration suppression and pointing performance,” dans *50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 17th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 11th AIAA No*, 2009, p. 2637.
- [10] E. Askar *et al.*, “Improvement of passive vibration damping of satellite solar array using adaptive boundary conditions,” dans *International Conference on Aerospace Sciences and Aviation Technology*, vol. 17, n°. AEROSPACE SCIENCES & AVIATION TECHNOLOGY, ASAT-17–April 11-13, 2017. The Military Technical College, 2017, p. 1–21.
- [11] L. Liu et D. Cao, “Dynamic Modeling for a Flexible Spacecraft With Solar Arrays Composed of Honeycomb Panels and Its Proportional–Derivative Control With Input Shaper,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 138, n°. 8, 05 2016, 081008.
- [12] S. Bhattarai *et al.*, “Development of a novel deployable solar panel and mechanism for 6u cubesat of step cube lab-ii,” *Aerospace*, vol. 8, n°. 3, 2021.

- [13] S. Bhattarai, J.-S. Go et H.-U. Oh, “Experimental cansat platform for functional verification of burn wire triggering-based holding and release mechanisms,” *Aerospace*, vol. 8, n° 7, 2021.
- [14] J. Yang *et al.*, “Design of a vibration isolation system for the space telescope,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 38, n° 12, p. 2441–2448, 2015.
- [15] H. Fujii et S. Ishijima, “Mission-function control for slew maneuver of a flexible space structure,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 12, n° 6, p. 858–865, 1989.
- [16] H. K. Rad *et al.*, “Boundary control of anti-symmetric vibration of satellite with flexible appendages in planar motion with exponential stability,” *Acta Astronautica*, vol. 147, p. 219–230, 2018.
- [17] J. Sun *et al.*, “Robust coordinated control for large flexible spacecraft based on consensus theory,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 357, n° 9, p. 5359–5379, 2020.
- [18] J. Ben-Asher, J. A. Burns et E. M. Cliff, “Time-optimal slewing of flexible spacecraft,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, n° 2, p. 360–367, 1992.
- [19] A. Badkoubeh, J. Zheng et G. Zhu, “Flatness-based deformation control of an euler-bernoulli beam with in-domain actuation,” *IET Control Theory and Applications*, vol. 10, p. 2110–2118, 06 2015.
- [20] F. Birhanu, Z.-B. Chen et W. Ma, “Modeling and simulation of satellite solar panel deployment and locking,” *Information Technology Journal*, vol. 9, 2010.
- [21] M. Oda *et al.*, “Vibration of satellite solar array paddle caused by thermal shock when a satellite goes through the eclipse,” *Advances in Vibration Engineering and Structural Dynamics*, p. 333–354, 2012.
- [22] L. Liu *et al.*, “Thermal-structural analysis for flexible spacecraft with single or double solar panels : A comparison study,” *Acta Astronautica*, vol. 154, 10 2018.
- [23] X. Liu *et al.*, “Dynamic characteristics of flexible spacecraft with double solar panels subjected to solar radiation,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 151, p. 22–32, 2019.
- [24] O. Shekoofa et M. Taherbaneh, “Modelling of silicon solar panel by matlab/simulink and evaluating the importance of its parameters in a space application,” dans *2007 3rd International Conference on Recent Advances in Space Technologies*, 2007, p. 719–724.
- [25] T. Endo, F. Matsuno et H. Kawasaki, “Force control and exponential stabilisation of one-link flexible arm,” *International Journal of Control*, vol. 87, n° 9, p. 1794–1807, 2014.

- [26] E. Omid et S. N. Mahmoodi, "Vibration suppression of distributed parameter flexible structures by integral consensus control," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 364, p. 1–13, 2016.
- [27] W. He et S. Ge, "Dynamic modeling and vibration control of a flexible satellite," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 51, p. 1422–1431, 04 2015.
- [28] M. Artola, A. Wynn et R. Palacios, "Generalized kelvin–voigt damping for geometrically nonlinear beams," *AIAA Journal*, vol. 59, n°. 1, p. 356–365, 2021.
- [29] A. Chakravarthy *et al.*, "Frequency and time domain analysis of an aeroelastic wing multiple component structure," *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 36, 07 2015.
- [30] M. Dadfarnia *et al.*, "Lyapunov-based vibration control of translational euler-bernoulli beams using the stabilizing effect of beam damping mechanisms," *Journal of Vibration and Control*, vol. 10, n°. 7, p. 933–961, 2004.
- [31] N. Ji et J. Liu, "Vibration control for a flexible satellite with input constraint based on nussbaum function via backstepping method," *Aerospace Science and Technology*, vol. 77, p. 563–572, 2018.
- [32] B. Yang, *Stress, Strain, and Structural Dynamics : an Interactive Handbook of Formulas, Solutions, and MATLAB Toolboxes*. Academic Press, 2005.
- [33] C. Liu *et al.*, "Improvement on the passive method based on dampers for the vibration control of spacecraft solar panels," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 14, n°. 3, 2022.
- [34] H. R. Ali-Akbari, "Design of a satellite solar panel deployment mechanism using the brushed dc motor as rotational speed damper," *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, vol. 12, p. 243–248, 2018.
- [35] T. Govindaraj, J. Humaloja et L. Paunonen, "Robust output regulation of a flexible satellite," *IFAC (International Federation of Automatic Control) 2017 World Congress, Toulouse, France*, vol. 53, n°. 2, p. 7795–7800, 2020.
- [36] Z.-H. Luo et B.-Z. Guo, "Shear force feedback control of a single link flexible robot with a revolute joint," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, p. 53 – 65, 02 1997.
- [37] Y. Sakawa, F. Matsuno et S. Fukushima, "Modeling and feedback control of a flexible arm," *J. Field Robotics*, vol. 2, p. 453–472, 1985.
- [38] Z.-H. Luo, N. Kitamura et B.-Z. Guo, "Shear force feedback control of flexible robot arms," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 11, n°. 5, p. 760–765, 1995.

- [39] Z.-H. Luo et B.-Z. Guo, “Stability analysis of a hybrid system arising from feedback control of flexible robots,” *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, vol. 13, p. 417–434, 1996.
- [40] M. Dadfarnia *et al.*, “Lyapunov-based vibration control of translational euler-bernoulli beams using the stabilizing effect of beam damping mechanisms,” *Journal of Vibration and Control*, vol. 10, n^o. 7, p. 933–961, 2004.
- [41] Q. Yuan, Y. Liu et N. Qi, “Active vibration suppression for maneuvering spacecraft with high flexible appendages,” *Acta Astronautica*, vol. 139, p. 512–520, 07 2017.
- [42] S. S. Ge, S. Zhang et W. He, “Modeling and control of an euler-bernoulli beam under unknown spatiotemporally varying disturbance,” dans *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, 2011, p. 2988–2993.
- [43] B.-Z. Guo *et al.*, “Stabilization of Euler-Bernoulli beam equation with boundary moment control and disturbance by active disturbance rejection control and sliding mode control approaches,” *Journal of Dynamical and Control Systems*, vol. 20, n^o. 4, p. 539 – 558, 2014.
- [44] L. C. Evans, *Partial differential equations*. Providence, R.I. : American Mathematical Society, 2010.

ANNEXE A SCHÉMAS SIMULINK DU MODÈLE ANTISYMMÉTRIQUE À DEUX PANNEAUX SOLAIRES

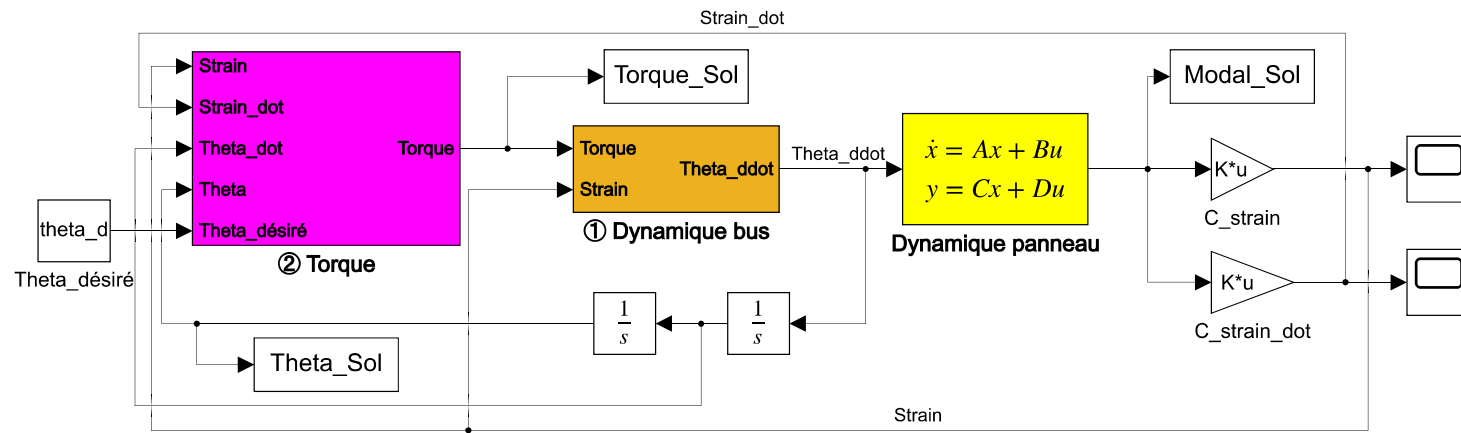


FIGURE A.1 Schéma Simulink du modèle antisymétrique

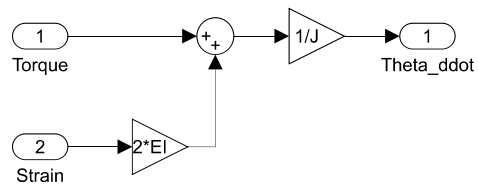


FIGURE A.2 ① Schéma Simulink du sous-système du bus du modèle antisymétrique

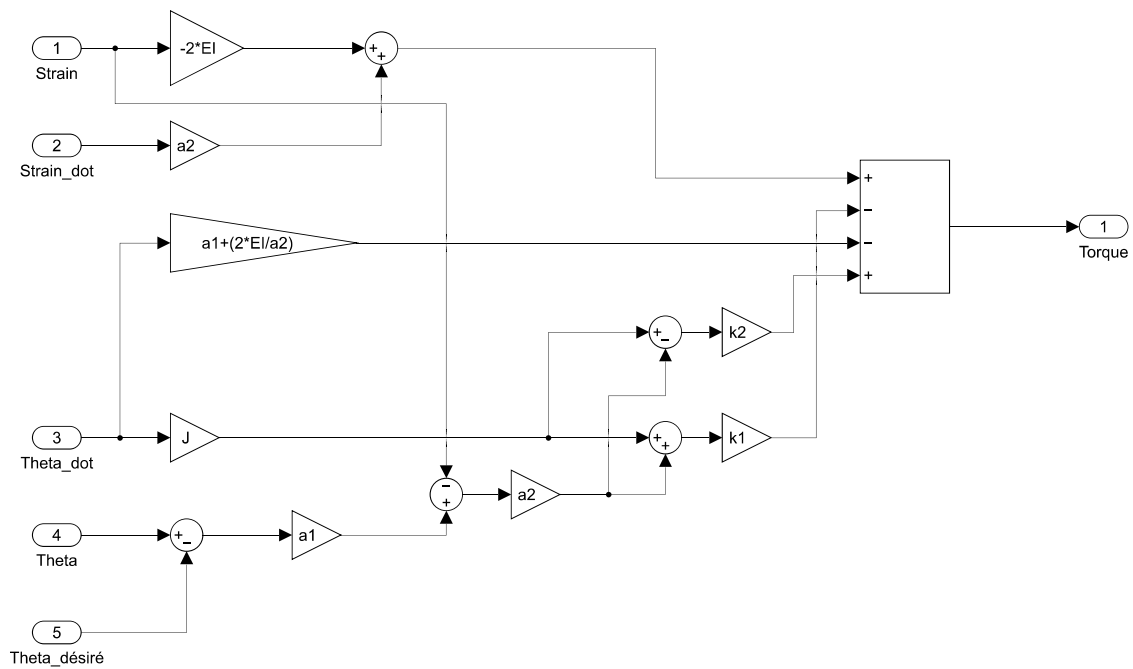


FIGURE A.3 ② Schéma Simulink du sous-système de la loi de commande du torque du modèle antisymétrique

ANNEXE B SCHÉMAS SIMULINK DU MODÈLE GÉNÉRAL À DEUX PANNEAUX SOLAIRES

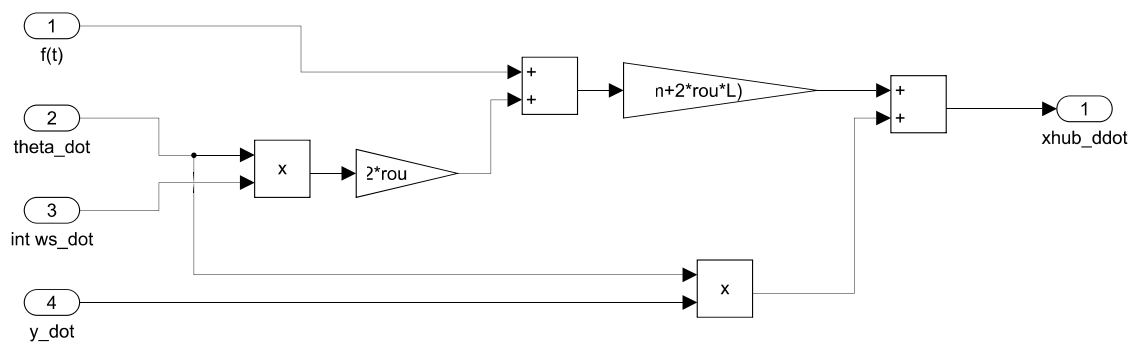


FIGURE B.1 ① Schéma Simulink du sous-système de l'ODE globale du modèle général à deux panneaux

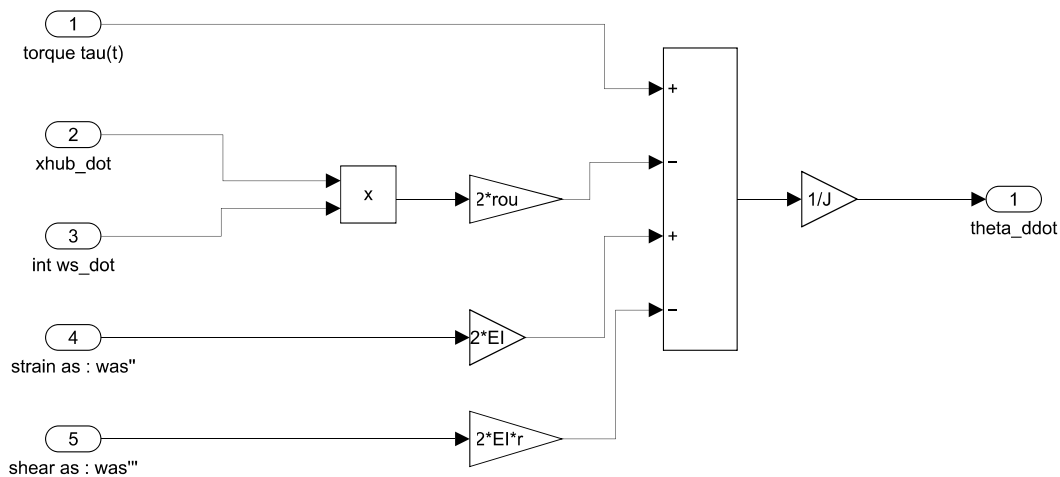


FIGURE B.2 ② Schéma Simulink du sous-système de l'ODE asymétrique du modèle général à deux panneaux

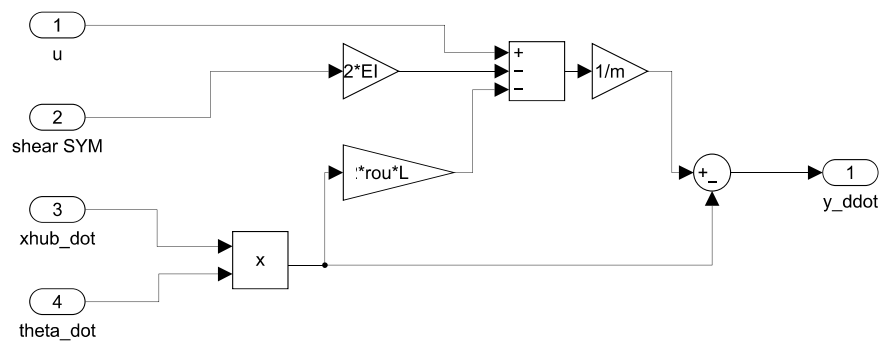


FIGURE B.3 ③ Schéma Simulink du sous-système de l'ODE symétrique du modèle général à deux panneaux

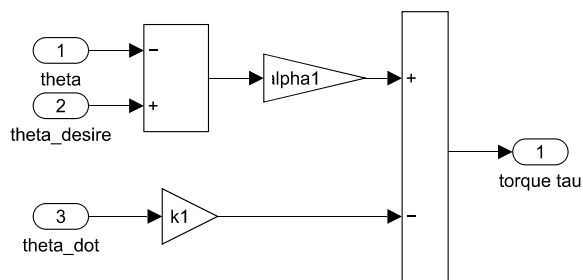


FIGURE B.4 ④ Schéma Simulink du sous-système de la loi de commande du torque du modèle général à deux panneaux

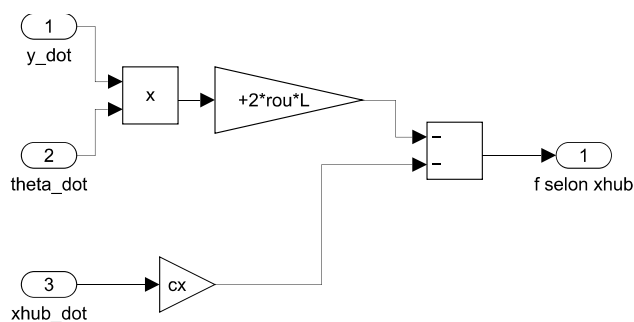


FIGURE B.5 ⑤ Schéma Simulink du sous-système de la loi de commande de la force f selon l'axe x_b du modèle général à deux panneaux

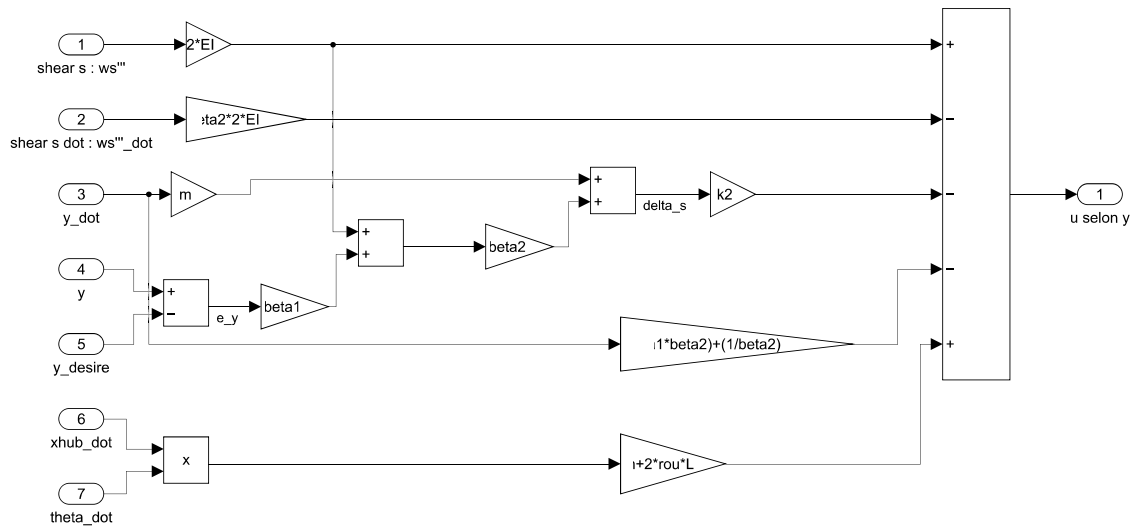


FIGURE B.6 ⑥ Schéma Simulink du sous-système de la loi de commande de la force u selon l'axe y_b du modèle général à deux panneaux

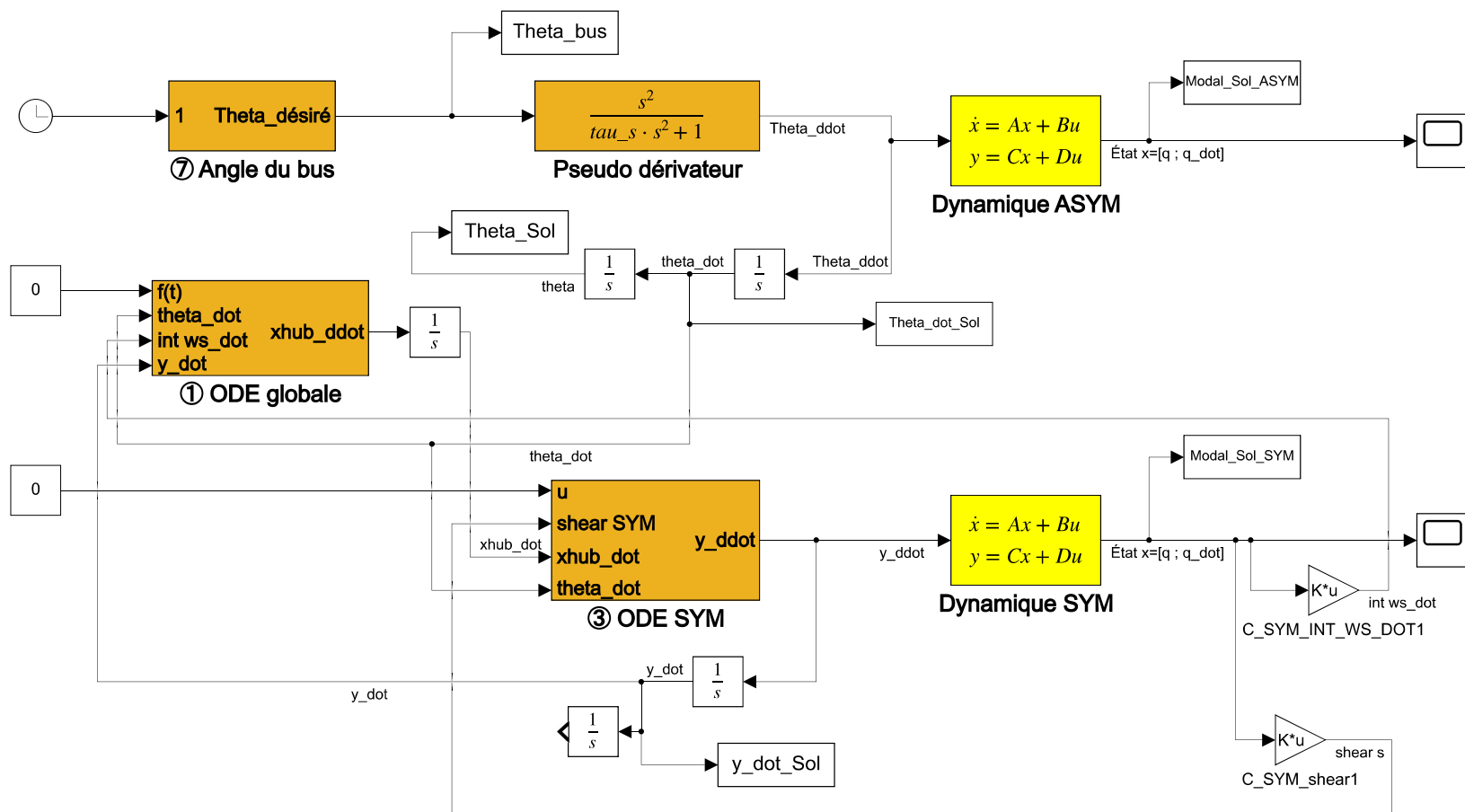


FIGURE B.7 Schéma Simulink du modèle général à deux panneaux réduit pour mouvement du bus avec panneaux au repos

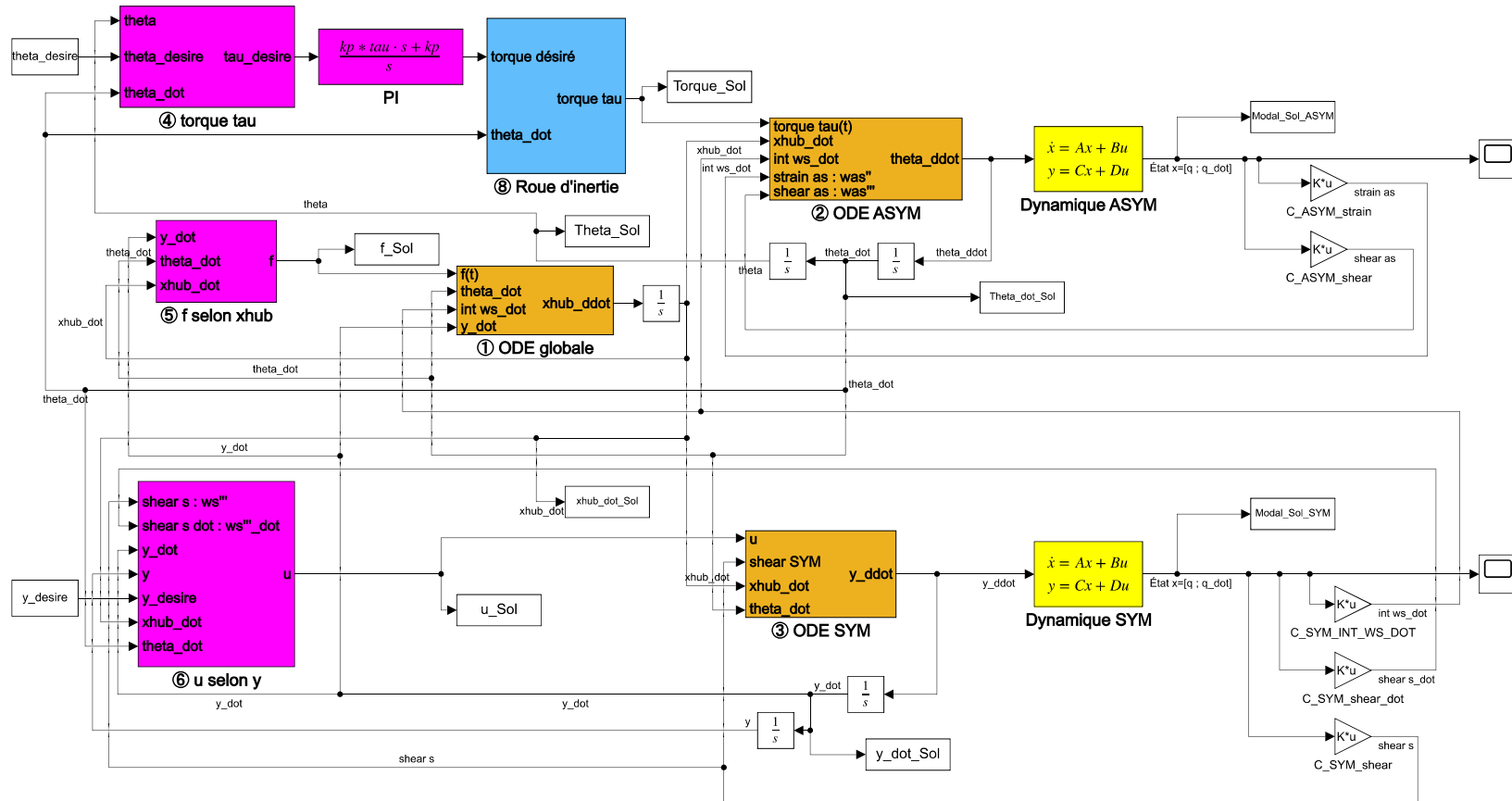


FIGURE B.8 Schéma Simulink du modèle général à deux panneaux avec ajout de la roue d'inertie