POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

| | |
|---|---|
| **Titre:** Title: | Modélisation d'écoulements magnétohydrodynamiques à surfaces libres |
| **Auteur:** Author: | Maxime Spinelli |
| **Date:** | 2022 |
| **Type:** | Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis |
| **Référence:** Citation: | Spinelli, M. (2022). Modélisation d'écoulements magnétohydrodynamiques à surfaces libres [Master's thesis, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/10525/ |

**Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

| | |
|---|---|
| **URL de PolyPublie:** PolyPublie URL: | https://publications.polymtl.ca/10525/ |
| **Directeurs de recherche:** Advisors: | Steven Dufour |
| **Programme:** Program: | Maîtrise recherche en mathématiques appliquées |

**Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal**
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**
affiliée à l'Université de Montréal

# Modélisation d'écoulements magnétohydrodynamiques à surfaces libres

**MAXIME SPINELLI**
Département de mathématiques et de génie industriel

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Mathématiques appliquées

Août 2022

© Maxime Spinelli, 2022.

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**
affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Modélisation d'écoulements magnétohydrodynamiques à surfaces libres**

présenté par **Maxime SPINELLI**
en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

**Youssef DIOUANE**, président
**Steven DUFOUR**, membre et directeur de recherche
**Donatien N'DRI**, membre

# DÉDICACE

*À mes parents et Mélanie,*
*mon amour depuis déjà neuf ans.*

## REMERCIEMENTS

Je souhaite d'abord remercier mon directeur de recherche, monsieur Steven Dufour, pour m'avoir offert son expertise dans le cadre de mon travail. Il a su me guider dans un domaine dans lequel je n'avais que peu d'expérience. Son impact sur mon développement professionnel et académique est significatif. Je le remercie pour sa patience et sa disponibilité.

Je tiens également à remercier Daniel Lévesque pour son aide et son expérience qui auront poussé mes questionnements dans la bonne direction. Je suis reconnaissant du temps offert pour répondre à plusieurs de mes interrogations. Je n'oublierai jamais notre première rencontre et son impact sur mon futur.

Je remercie aussi le maître d'enseignement Donatien N'Dri, dont les conseils m'auront guidé dans l'enseignement du cours d'équations différentielles. À travers l'enseignement de ce cours, je pense être celui ayant le plus appris. J'y ai découvert une passion à approfondir.

Je voudrais remercier mes parents, pour leurs encouragements et leur support. Ils m'auront appris très tôt l'importance des mathématiques. C'est avec un paquet de carte que j'aurais appris la valeur de la persévérance. Ces cartes sont derrière l'éveil d'un intérêt profond et merveilleux.

Finalement, je remercie Mélanie, ma partenaire depuis déjà neuf ans. Je serais toujours reconnaissant de tes encouragements dans les moments difficiles. Le chemin fut long, mais à travers celui-ci, tu m'auras appris énormément. Ce document n'est pas seulement une fin, c'est un début. Merci d'être la personne que tu es.

# RÉSUMÉ

Nous modélisons les écoulements magnétohydrodynamiques à surface libres. La méthode de la pseudo-concentration est utilisée afin de capturer l'interface de la surface libre. La discrétisation est faite en employant la méthode des éléments finis. La vérification du solveur est faite grâce au problème de Young-Laplace et de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Une comparaison entre les méthodes de Galerkin discontinue et Stream-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) est utilisée dans le but de comparer leur performance en absence de reconstruction de la surface libre. Cette comparaison est faite grâce au problème de la bulle soumise à la poussée d'Archimède. Le problème de Hartmann est étudié dans le but de valider l'application du champ magnétique.

## ABSTRACT

We model free surface magnetohydrodynamic flows. The pseudo-concentration method is used to capture the free surface. The discretization is done using the finite element method. The verification of the solver is made, thanks to the problem of Young-Laplace, and the Rayleigh-Taylor instability. A comparison between the discontinuous Galerkin and Stream-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) methods is used in order to compare their performance in the absence of free surface reconstruction. This comparison is made using a buoyancy-driven rising bubble problem. The Hartmann flow is also studied in order to validate the application of the magnetic field.

# TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . . iii

REMERCIEMENTS . . . . . iv

RÉSUMÉ . . . . . v

ABSTRACT . . . . . vi

TABLE DES MATIÈRES . . . . . vii

LISTE DES TABLEAUX . . . . . x

LISTE DES FIGURES . . . . . xi

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . . xiii

CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . . 1

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . . 3
- 2.1 Équations de la MHD à surfaces libres . . . . . 3
  - 2.1.1 L'approximation du continu . . . . . 3
  - 2.1.2 Équations de Navier-Stokes . . . . . 4
  - 2.1.3 Équation des écoulements à surfaces libres . . . . . 5
  - 2.1.4 Équations de Maxwell . . . . . 8
- 2.2 Adimensionnalisation des équations . . . . . 10
- 2.3 Méthodes numériques . . . . . 12
  - 2.3.1 Discrétisation en espace . . . . . 12
  - 2.3.2 Discrétisation en temps . . . . . 19
- 2.4 Méthodes SUPG et de Galerkin discontinu . . . . . 20
  - 2.4.1 Méthode SUPG . . . . . 21
  - 2.4.2 Méthode de Galerkin discontinu . . . . . 21
- 2.5 Préconditionneur additif de Schwarz . . . . . 23

CHAPITRE 3 PROBLÈME DE YOUNG-LAPLACE . . . . . 25
- 3.1 Dérivation de la formule de Young-Laplace . . . . . 25
- 3.2 Discussion à propos du champ de vitesse . . . . . 26

3.2.1 Conséquences d'une erreur numérique . . . . . 26
3.2.2 Critère sur l'erreur du champ de vitesse . . . . . 27
3.3 Simulations . . . . . 29
3.4 Loi de Amdahl . . . . . 31

CHAPITRE 4 BULLE SOUMISE À LA POUSSÉE D'ARCHIMÈDE . . . . . 34
4.1 Nombres adimensionnels . . . . . 34
4.1.1 Quantités physiques des deux fluides . . . . . 34
4.1.2 Nombres hydrodynamiques . . . . . 34
4.1.3 Autres nombres rencontrés . . . . . 37
4.1.4 Nombre de Reynolds terminal . . . . . 38
4.2 Simulations . . . . . 38
4.2.1 Cas 1 : Bulle sphérique . . . . . 39

CHAPITRE 5 INSTABILITÉ DE RAYLEIGH-TAYLOR . . . . . 45
5.1 Demi-hauteur de pénétration . . . . . 45
5.1.1 Modèle de Ristorcelli et Clark . . . . . 46
5.1.2 Échelle de Taylor . . . . . 46
5.1.3 Atténuation de l'échelle de Taylor . . . . . 47
5.1.4 $\alpha$ variable . . . . . 51
5.2 Résultats . . . . . 52
5.2.1 Cas $Re = 10$ . . . . . 52
5.2.2 Cas $Re = 100$ . . . . . 55
5.2.3 Cas $Re = 1000$ . . . . . 56

CHAPITRE 6 ÉCOULEMENT DE HARTMANN . . . . . 58
6.1 Système d'EDP . . . . . 59
6.2 Simplification des EDP . . . . . 61
6.2.1 Changement de variables . . . . . 61
6.2.2 Variables de Elsasser . . . . . 62
6.3 Solution pour $z^+(y, z)$ . . . . . 63
6.3.1 Gestion du terme source . . . . . 63
6.3.2 Solution pour $g(y, z)$ . . . . . 64
6.4 Débit de l'écoulement . . . . . 68
6.5 Résultats . . . . . 68

CHAPITRE 7 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS . . . . . 73

7.1 Limitations de la solution proposée . . . . . 74
7.2 Améliorations futures . . . . . 74

RÉFÉRENCES . . . . . 77

# LISTE DES TABLEAUX


Tableau 2.1 Adimensionnalisation des quantités physiques . . . . . 10

Tableau 3.1 Nombre de pas de temps pour atteindre l'état stationnaire pour le problème de Young-Laplace avec les méthodes SUPG et GD. 30

Tableau 3.2 Sauts en pression des simulations pour le problème de Young-Laplace avec les méthodes SUPG et GD. . . . . 30

Tableau 3.3 Erreurs relatives (%) sur les sauts en pression pour le problème de Young-Laplace avec les méthodes SUPG et GD. . . . . 31

Tableau 3.4 Normes de la vitesse $\boldsymbol{u}$ pour le problème de Young-Laplace avec les méthodes SUPG et GD. . . . . 31

Tableau 3.5 Nombre de millisecondes ($\times 10^7$) nécessaires pour compléter les simulations pour le problème de Young-Laplace avec les méthodes SUPG et GD. . . . . 32

Tableau 4.1 Nombres adimensionnels. . . . . 39

Tableau 4.2 Nombres de Reynolds terminaux pour le problème de la bulle dynamique. . . . . 44

Tableau 6.1 Erreurs sur la vitesse le problème de l'écoulement de Hartmann. 69

Tableau 6.2 Erreurs sur le champ magnétique pour le problème de l'écoulement de Hartmann. . . . . 70

Tableau 6.3 Erreurs sur la pression pour le problème de l'écoulement de Hartmann. . . . . 71

# LISTE DES FIGURES


Figure 2.1 Densité surfacique en fonction du rayon de 100,000 points distribués uniformément dans un cercle de rayon 1. . . . . 3

Figure 2.2 Parcours des éléments du maillage pour la discrétisation avec la méthode de Galerkin discontinue. . . . . 22

Figure 2.3 Saut de la pseudo-concentration entre $K$ et $K'$. . . . . 22

Figure 3.1 Courants parasites de la simulation faite avec la méthode SUPG et $N = 24$ processeurs. (voir le tableau 3.4) . . . . . 26

Figure 3.2 Norme de la vitesse en fonction du temps pour la simulation faite avec la méthode SUPG et $N = 24$ processeurs. . . . . 27

Figure 3.3 Comparaison entre les données calculés et la loi de Amdahl (3.7) pour minimiser la norme $\|\cdot\|_2$. ($T = 8.2691 \times 10^7$). . . . . 32

Figure 4.1 Diagramme de Grace tiré de [1]. . . . . 36

Figure 4.2 Formes finales des bulles pour la méthode de GD ($-$) et la méthode SUPG ($\cdots$) dans le plan $z = 0$ pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles sphériques. . . . . 39

Figure 4.3 Vitesse moyenne $\overline{v}$ pour la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles sphériques. . . . . 40

Figure 4.4 Erreur relative (%) sur la masse de la bulle pour la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles sphériques. . . . . 40

Figure 4.5 Formes finales des bulles pour la méthode de GD ($-$) et SUPG ($\cdots$) dans le plan $z = 0$ pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles ellipsoïdales. . . . . 41

Figure 4.6 Vitesse moyenne $\overline{v}$ pour la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles ellipsoïdales. . . . . 41

Figure 4.7 Erreur relative (%) sur la masse de la bulle pour la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles ellipsoïdales. . . . . 42

Figure 4.8 Formes finales des bulles pour la méthode de GD ($-$) et la méthode SUPG ($\cdots$) dans le plan $z = 0$ pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles en forme de jupe. . 42

Figure 4.9 Vitesse moyenne $\overline{v}$ de la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles en forme de jupe. . . . . 43
Figure 4.10 Erreur relative (%) sur la masse de la bulle pour la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles en forme de jupe. . . . . 43
Figure 5.1 Demi-hauteurs de pénétration des différents modèles pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 10$. . . . . 54
Figure 5.2 Erreur relative entre les données numériques et les modèles théoriques pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 10$. . . . . 54
Figure 5.3 Demi-hauteurs de pénétration des différents modèles pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 100$. . . . . 55
Figure 5.4 Erreur relative entre les données numériques et les modèles théoriques pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 100$. . . . . 56
Figure 5.5 Demi-hauteurs de pénétration des différents modèles pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 1000$. . . . . 56
Figure 5.6 Erreur relative entre les données numériques et les modèles théoriques pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 1000$. . . . . 57
Figure 6.1 Vitesse $u(y, z = 0)$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann pour le problème de l'écoulement de Hartmann. Les courbes continues sont les valeurs théoriques. . . . . 69
Figure 6.2 Champ d'induction $b(y, z = 0)$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann pour le problème de l'écoulement de Hartmann. Les courbes continues sont les valeurs théoriques. . . . . 70
Figure 6.3 Pression $p(x = 5, y, z = 0)$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann pour le problème de l'écoulement de Hartmann. . . . . 71
Figure 6.4 Pression $p(x = 5, y, z = 0)$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann avec $\delta = 0,035$ pour le problème de l'écoulement de Hartmann. . . . . 72

# LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

**Abréviations**

| | |
|---|---|
| BDF | Formule de différence arrière (Backward differentiation formula) |
| CSF | Force de surface continue (Continuum surface force) |
| GD | Méthode de Galerkine discontinue |
| GMRES | Généralisation de la méthode de minimisation du résidu (Generalized minimal residual) |
| LBB | Ladyzhenskaya-Babŭska-Brezzi |
| MHD | Magnétohydrodynamique |
| SUPG | Méthode de le diffusion dans le sens des lignes de courant (Streamline upwind/Petrov–Galerkin) |

**Géométrie**

| | |
|---|---|
| $K$ | Élément tétraédrique |
| $\partial K$ | Frontière d'un élément tétraédrique |
| $\partial K^-$ | Frontière d'un élément tétraédrique en amont de l'écoulement |
| $\partial K^+$ | Frontière d'un élément tétraédrique en aval de l'écoulement |
| $\Omega$ | Domaine de définition du problème |
| $\Omega_i$ | Domaine de définition du fluide $i$ |
| $\Omega_h$ | Discrétisation du domaine $\Omega$ |
| $\partial\Omega$ | Frontière du domaine de définition |
| $\partial\Omega_i$ | Frontière du domaine de définition du fluide $i$ |
| $\partial\Omega_{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}$ | Partie de la frontière du domaine $\Omega$ sur laquelle on impose des conditions de Dirichlet. |
| $\partial\Omega_{\mathrm{N}\boldsymbol{u}}$ | Partie de la frontière du domaine $\Omega$ sur laquelle on impose des conditions de Neumann. |
| $\partial\Omega^-_{\mathrm{D}F}$ | Partie de la frontière du domaine $\Omega$ sur laquelle on impose une condition de Dirichlet sur la pseudo-concentration. |
| $\Gamma$ | Surface libre |
| $\Gamma^-$ | Surface libre en amont de l'écoulement |
| $\Gamma^+$ | Surface libre en aval de l'écoulement |
| $\boldsymbol{n}_\Gamma$ | Vecteur normal à la surface libre |
| $\boldsymbol{t}_\Gamma$ | Vecteur tangent à la surface libre |

| | |
|---|---|
| $e$ | Arête d'un élément |
| $h$ | Taille d'un élément |
| **Espaces** | |
| $L^2(\Omega)$ | Espace des fonctions de carré intégrable sur $\Omega$ |
| $H^1(\Omega)$ | Espace de Sobolev sur $\Omega$ |
| $H^{1/2}(\Lambda)$ | Restriction de $H^1(\Omega)$ au bord $\Lambda$ |
| $H^{-1/2}(\Lambda)$ | Dual de l'espace $H^{1/2}(\Lambda)$ |
| $H_0^1(\Omega)^3$ | Espace des traces au bord |
| $\Phi(\Omega)$ | Espace de base pour les problèmes de transport |
| $Q_h$ | Espace fonctionnel discret de $L^2(\Omega)$ |
| $V_h$ | Espace fonctionnel discret de $H^1(\Omega)$ |
| $\Phi_h$ | Espace fonctionnel discret de $\Phi(\Omega)$ |
| $\mathbb{R}^n$ | Espace vectoriel réel de dimension $n$ |
| $\mathbb{N}^n$ | Espace vectoriel naturel de dimension $n$ |
| $\mathcal{C}^k$ | Ensemble des fonctions $k$ fois continûment différentiables |
| $P_r(K)$ | Ensemble des polynômes de degré $r$ définis sur $K$ |
| $N_r(K)$ | Ensemble des fonctions d'interpolation de Nédélec |
| **Nombres adimensionnels** | |
| $Re$ | Nombre de Reynolds |
| $Fr$ | Nombre de Froude |
| $We$ | Nombre de Weber |
| $Eo$ | Nombre d'Eötvös |
| $Mo$ | Nombre de Morton |
| $At$ | Nombre de Atwood |
| $Rm$ | Nombre de Reynolds magnétique |
| $Ha$ | Nombre de Hartmann |
| $S$ | Paramètre de couplage |
| **Variables** | |
| $\boldsymbol{j}$ | Densité de courant |
| $\boldsymbol{E}$ | Champ électrique |
| $\boldsymbol{D}$ | Champ d'induction électrique |
| $\boldsymbol{B}$ | Champ d'induction magnétique |
| $\boldsymbol{H}$ | Champ magnétique |
| $\epsilon$ | Permittivité électrique |
| $\rho_e$ | Resistivité électrique |
| $\rho_c$ | Densité de charge |

| | |
|---|---|
| $\sigma$ | Conductivité électrique |
| $\mu$ | Perméabilité magnétique |
| $\boldsymbol{f}_S$ | Force capillaire par unité de surface |
| $\boldsymbol{f}_V$ | Force capillaire par unité de volume |
| $\boldsymbol{f}_L$ | Force de Lorentz |
| $\gamma$ | Coefficient de tension superficielle |
| $\dot{\gamma}(\boldsymbol{u})$ | Tenseur vitesse-de-déformation |
| $\kappa$ | Courbure moyenne |
| $\eta_i$ | Viscosité dynamique du fluide $i$ |
| $\nu_i$ | Viscosité cinétique du fluide $i$ |
| $\rho_i$ | Densité du fluide $i$ |
| $R$ | Rayon d'une sphère |
| $\boldsymbol{u}$ | Champ de vitesse |
| $\boldsymbol{u}_i$ | Champ de vitesse du fluide $i$ |
| $\boldsymbol{u}_h$ | Approximation discrète du champ de vitesse |
| $\boldsymbol{u}_\Gamma$ | Champ de vitesse de la surface libre |
| $F$ | Pseudo-concentration |
| $F_h$ | Approximation discrète de la pseudo-concentration |
| $\delta$ | Demi-largeur de la zone de transition de $F_h$ |
| $M$ | Masse |
| $M_i$ | Masse du fluide $i$ |
| $\Delta M$ | Variation de masse |
| $p$ | Pression |
| $\Delta p$ | Saut en pression |
| $t$ | Temps |
| $\Delta t$ | Pas de temps |
| $V$ | Volume |
| $V_i$ | Volume du fluide $i$ |
| $\Delta V$ | Variation de volume |
| $\boldsymbol{x}$ | Coordonnée géométrique |
| $\boldsymbol{\tau}$ | Tenseur des extra-contraintes |
| $z^\pm$ | Variables d'Elsässer |
| $G$ | Gradient de pression constant |
| $Q$ | Débit volumique de l'écoulement |

**Symboles mathématiques**

| | |
|---|---|
| $\ll$ | Beaucoup plus petit |

| | |
|---|---|
| $\|\cdot\|_2$ | Norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ |
| $\|\cdot\|_1$ | Norme $\ell_1$ |
| $\|\cdot\|_\infty$ | Norme maximum |
| $\cdot$ | Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ |
| $:$ | Double contraction tensorielle |
| $(u,v)_{0,\Omega}$ | Produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ |
| $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{0,\Omega}$ | Produit scalaire sur $L^2(\Omega)^n$ |
| $(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})_{0,\Omega}$ | Produit scalaire sur $L^2(\Omega)^{(n\times n)}$ |
| $(u,v)_{1,\Omega}$ | Produit scalaire sur $H^1(\Omega)$ |
| $\langle\phi,\psi\rangle$ | Produit scalaire sur un bord |
| $\nabla$ | Opérateur gradient |
| $\nabla\cdot$ | Opérateur divergence |
| $\Delta$ | Opérateur laplacien |
| $\phi_i^a$ | $i$-ième fonction d'interpolation de la variable $a$ |
| $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$ | Fonction distance |
| $[\![a]\!]$ | Saut de la variable $a$ |
| $\{\{a\}\}$ | Moyenne de la variable $a$ |

# CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les écoulements magnétohydrodynamiques font parties intégrantes de plusieurs applications industrielles. En effet, plusieurs procédés industriels sont basés sur la dynamique des surfaces libres en présence de métaux liquides. On peut penser, par exemple, aux cuves d'électrolyse d'aluminium pour lesquelles la stabilité est un critère majeur afin d'éviter tout court-circuit. En effet, la présence d'un champ magnétique provoque des perturbations de la surface libre. Comprendre la stabilité de ces cuves permet d'augmenter leur rendement et la sécurité du système. Dans le même ordre d'idée, les batteries à métaux liquides suivent le même principe. Cette fois-ci, deux métaux liquides sont séparés par un bain électrolytique via lequel l'échange de charge s'effectue. La présence de deux surfaces libres doit être bien modélisée afin de bien comprendre les critères de stabilité de ces batteries et pour éviter les courts-circuits rendant la batterie non fonctionnelle.

Ces exemples témoignent de la nécessité de modéliser les écoulements magnétohydrodynamiques à surface libre. De plus, l'importance de la stabilité de ces systèmes amène également à considérer la modélisation d'instabilités magnétohydrodynamiques (MHD) multifluides. Ainsi, afin de modéliser la dynamique de la surface libre, un marqueur eulérien est utilisé dans le but d'identifier les différents fluides. Ce marqueur respecte une équation aux dérivées partielles hyperboliques pour laquelle la méthode de Galerkin n'est pas adéquate. Les méthodes Stream-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) et Galerkin discontinue sont considérées pour palier ce problème.

Il est important de mentionner les travaux de Yann-Meing Law-Kam-Cio sur la comparaison entre les méthodes SUPG et Galerkin discontinue. [2,3] Dans ceux-ci, une analyse numérique montre que SUPG produit plus de diffusion numérique que Galerkin discontinue et qu'une reconstruction de la surface libre mène à des problèmes de conservation de masse. Par la suite, une comparaison entre plusieurs éléments et méthodes de reconstruction de la surface libre permet de montre la supériorité de la méthode Galerkin discontinue. Celle-ci est la plus marquée pour des éléments MINI avec la reconstruction via la double projection dans $L^2$.

Afin de minimiser les problèmes de conservation de la masse, il est décidé de ne pas utiliser de méthode de reconstruction de la surface libre. L'analyse effectuée dans [3] et par Roland Rivard [4], prévoit qu'un maillage plus fin diminue l'erreur sur la conservation de la masse.

L'objectif principal de ce mémoire est de modéliser des écoulements magnétohydrodynamiques. Les objectifs spécifiques sont :

1. modéliser les écoulements hydrodynamiques à surface libre ;
2. modéliser une instabilité hydrodynamique à surface libre ;
3. modéliser un écoulement magnétohydrodynamique sans surface libre ;
4. modéliser des écoulements magnétohydrodynamiques à surface libre avec la méthode de Galerkin discontinue.

Il sera possible d'atteindre ces objectifs de la façon suivante.

1. la modélisation du problème de Young-Laplace est un problème suffisamment simple et pertinent afin de nous permettre de déterminer le bon nombre de processeurs à utiliser. De plus, avec le problème de la dynamique des bulles, pour permettre de comparer des méthodes SUPG et GD utilisées pour résoudre l'équation de transport de la pseudo-concentration. La comparaison des méthodes va porter sur la conservation de la masse dans le problème de la dynamique des bulles. Les erreurs sur la conservation de masse devraient être plus faibles que celle observée par Yann-Meing Law-Kam-Cio [2] ;
2. la modélisation de l'instabilité de Rayleigh-Taylor permettra de vérifier qu'il est possible de modéliser des instabilités hydrodynamiques à surface libre. On pourra valider la modélisation en vérifiant que la demi-hauteur de pénétration suit l'expression de Ristorcelli et Clark [5] ;
3. la modélisation du problème de Hartmann permettra de vérifier qu'on est en mesure de modéliser un écoulement magnétohydrodynamique. On pourra valider cette modélisation en vérifiant que la vitesse, le champ magnétique et la pression suivent les solutions théoriques au système d'équations aux dérivées partielles de la MHD ;

# CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

## 2.1 Équations de la MHD à surfaces libres

Les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) se composent essentiellement des équations de Navier-Stokes et des équations de Maxwell. Cependant, en fonction du besoin de modélisation, il est possible de modifier ce système d'EDP. Dans notre cas, nous allons ajouter une équation de transport afin de modéliser la dynamique de la surface libre.

Cette section s'inspire des travaux de Roland Rivard [4], Yann-Meing Law-Kam-Cio [2, 6], Jean-Frédéric Gerbeau [7, 8], Sébastien Galtier [9] et Arnab Rai Choudhuri [10].

### 2.1.1 L'approximation du continu

Le système des équations de la MHD est valide dans l'approximation du continu. Une bonne façon d'introduire celle-ci est donnée par D.J. Tritton [11]. L'idée est d'observer la présence de trois échelles de grandeurs, en prenant une distribution uniforme de points dans un cercle et en observant la densité surfacique pour des cercles de rayons croissants. On observe, à

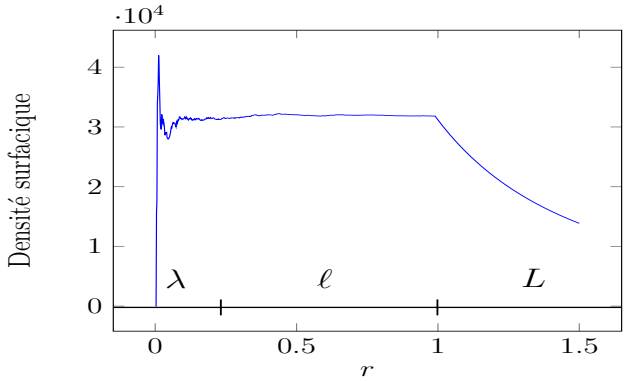


FIGURE 2.1 Densité surfacique en fonction du rayon de 100,000 points distribués uniformément dans un cercle de rayon 1.

la Figure 2.1, une région $\lambda$ dans laquelle l'ajout d'un point change rapidement la densité surfacique. Cette échelle est celle du libre parcours moyen. Lorsque le rayon croît, l'ajout d'un point ne change pas significativement la densité. Celle-ci est localement constante. On note cette échelle $\ell$. En continuant à faire croître le rayon, celui-ci devient plus grand que le rayon de la distribution. Ainsi, la densité ne fait que décroître vers 0. C'est l'échelle $L$.

On peut définir deux nombres adimensionnels, dit de Knudsen, $Kn_1 = \lambda/\ell$ et $Kn_2 = \ell/L$. Si $Kn_1 \ll 1$, alors on diminue l'influence d'un seul point sur les valeurs des quantités physiques. Si $Kn_2 \ll 1$, alors l'échelle d'étude du système est plus grand que les zones localement constantes.

Dans la limite $Kn_2 \to 0^+$, la zone localement constante est un point. Si $Kn_1 \to 0^+$, alors le libre parcours moyen est nul et le fluide peut être considéré comme continu. Sous ces conditions, on a

$$Kn = Kn_1 Kn_2 = \frac{\lambda}{L} \ll 1.$$

Les équations de la MHD utilisées dans ce document sont valides lorsque le nombre de Knudsen est petit.

### 2.1.2 Équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont un système de trois EDP. Celles-ci sont les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de masse [2], [4], [8] :

$$\partial_t (\rho \boldsymbol{u}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\nabla p + \boldsymbol{f};$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0;$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \dot{\gamma}(\boldsymbol{u}) - \frac{2}{3}\eta \nabla \cdot \boldsymbol{u} \boldsymbol{I}.$$

Ici, $\dot{\gamma}(\boldsymbol{u})$ est le tenseur des extra-contraintes où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité. On note la viscosité dynamique avec $\eta$ afin d'éviter la confusion avec $\mu$, la perméabilité magnétique. L'équation de conservation de l'énergie n'est pas considérée dans ce document puisqu'on suppose qu'il n'y a pas de variation d'énergie dans nos systèmes.

#### Équation de la conservation de masse incompressible

On peut simplifier l'équation de conservation de la masse en considérant un fluide incompressible. En effet, on a

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = \partial_t \rho + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

Dans le cas incompressible, la dérivée lagrangienne est nulle et l'équation devient

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

Notons que si $\rho$ est constant, on obtient automatiquement une dérivée lagrangienne nulle.

**Équation de la conservation de la quantité de mouvement incompressible**

On peut écrire l'équation de la conservation de la quantité de mouvement sous la forme

$$\begin{aligned}\rho\partial_t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\partial_t\rho + (\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\nabla\rho + \rho(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \\ - 2\nabla\cdot\left(\eta\dot{\gamma}(\boldsymbol{u}) - \frac{1}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{u}\boldsymbol{I}\right) = -\nabla p + \boldsymbol{f}.\end{aligned}$$

Si $\rho$ est constant et qu'on considère un fluide incompressible, alors l'équation se simplifie comme

$$\rho\partial_t\boldsymbol{u} + \rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - 2\nabla\cdot(\eta\dot{\gamma}(\boldsymbol{u})) = -\nabla p + \boldsymbol{f}. \tag{2.1}$$

### 2.1.3 Équation des écoulements à surfaces libres

La surface libre $\Gamma(t)$ est la région entre chaque fluide. Afin de modéliser la dynamique de cette surface, on introduit la pseudo-concentration $F(\boldsymbol{x},t)$, définie comme [12]

$$F(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{x}\in\Omega_1(t)\backslash\Gamma(t); \\ 1/2 & \text{si } \boldsymbol{x}\in\Gamma(t); \\ 1 & \text{si } \boldsymbol{x}\in\Omega_2(t)\backslash\Gamma(t). \end{cases}$$

$\Omega_i(t)$ est la région où se trouve le fluide $i$. Pour une quantité physique $f$ donnée, on utilise $F$ pour caractériser la transition de $f$ entre les fluides. Dans ce document, on considère seulement deux fluides, ainsi la transition prend la forme

$$f(\boldsymbol{x},t) = f_2F(\boldsymbol{x},t) + f_1(1 - F(\boldsymbol{x},t)). \tag{2.2}$$

Ainsi, si $F(\boldsymbol{x},t) = 0$, $f = f_1$ et si $F = 1$, $f = f_2$ où $f_i$ est la valeur de $f$ dans $\Omega_i(t)$ avec $i\in\{1,2\}$. Notons que si $F = 1/2$, on a la valeur $f = (f_2+f_1)/2$, soit la moyenne de $f_1$ et $f_2$.

On peut décrire $\Gamma(t)$ en remarquant que $\Gamma(t) = F^{-1}(\{1/2\})$. Puisque $1/2$ est entre 0 et 1, les valeurs de $F$ dans les deux fluides, cette valeur permet de modéliser la surface libre. On suppose donc qu'une équation pour $F$ nous permette de suivre la surface libre. On peut aussi simplement trouver cette équation en considérant la variation de $F$ dans un volume $\Omega$ entourée d'une surface $\partial\Omega$. Si le volume $\Omega$ est constant, on a

$$\mathrm{d}_t\int_\Omega F\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \partial_t F\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{\partial\Omega} F\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_\Omega \nabla\cdot(F\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

La dernière équation utilise le théorème de la divergence. Puisque le volume $\Omega$ est arbitraire, on obtient une EDP pour $F$ :

$$\partial_t F = -\nabla \cdot (F\boldsymbol{u}) = -F\nabla \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla F \Rightarrow \partial_t F + \boldsymbol{u} \cdot \nabla F = 0.$$

On peut voir que dans le cas incompressible, la pseudo-concentration est solution de l'équation de transport. En fait, dans le cas général, celle-ci satisfait la même équation que l'équation de la conservation de la masse. Ceci nous indique que $F$ et $\rho$ sont liées de près aux propriétés des fluides. Ceci n'est pas surprenant puisque

$$F(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\rho(\boldsymbol{x}, t) - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

**La force capillaire**

La force capillaire permet à la surface libre entre un gaz et un liquide de garder une cohésion en séparant les phases. Le modèle numérique utilisé est la méthode CFS (*Continuum Surface Force*) [13–17]. Ce modèle permet d'approximer la force par unité de surface par une force par unité de volume en utilisant la pseudo-concentration $F$. La force par unité de surface est donnée par

$$\boldsymbol{f}_S(\boldsymbol{x}) = \gamma\kappa\boldsymbol{n}_\Gamma\delta_s,$$

où $\gamma$ est le coefficient de tension superficielle, $\kappa$ est la courbure moyenne de la surface, $\boldsymbol{n}_\Gamma$ est la normale à la surface et $\delta_s$ est la fonction delta de Dirac à la surface. Puisque $F$ est une fonction de transition, son gradient permet d'obtenir une fonction delta Dirac lorsque la zone de transition tend vers zéro. Ainsi, la force par unité de volume peut être exprimée comme

$$\boldsymbol{f}_V(\boldsymbol{x}) = \gamma\kappa(F)\nabla F.$$

Par la suite, il faut une expression de la courbure moyenne en fonction de la pseudo-concentration. La géométrie différentielle permet d'obtenir [18]

$$\kappa = -\nabla \cdot \boldsymbol{n}_\Gamma.$$

Puisque la pseudo-concentration $F$ agit comme une courbe de niveau, son gradient est un vecteur normal. Pour la formule qui nous intéresse, il faut normaliser ce vecteur, pour obtenir

$$\kappa(F) = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|_2}\right).$$

La formule de la méthode CSF pour la force capillaire en fonction de $F(\boldsymbol{x}, t)$ est donc

$$\boldsymbol{f}_V(\boldsymbol{x}) = -\gamma \nabla \cdot \left( \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|_2} \right) \nabla F.$$

**Approximation de la pseudo-concentration**

L'utilisation d'une approximation régulière de la pseudo-concentration à fait ses preuves dans les travaux de Yann-Meing Law-Kam-Cio [2], Roland Rivard [4], Steven Dufour [13] et Emilie Marchandise [15]. L'approximation utilisée propose d'utiliser une transition régulière sur une longueur $2\epsilon$. Si $\epsilon \to 0$, cette approximation tend vers une fonction d'Heaviside. On peut simplement construire de telles approximations de la façon suivante :

$$\overline{F}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi(\boldsymbol{x}) < -\epsilon; \\ 1 & \text{si } \xi(\boldsymbol{x}) > \epsilon; \\ f_\epsilon \circ \xi(\boldsymbol{x}) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\xi(\boldsymbol{x}) = (-1)^i \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \Gamma)$ est une distance signée où $i$ est l'indice du fluide dans lequel on se trouve, soit $i \in \{1, 2\}$. Nous n'utilisons pas la notation $\sigma$ afin d'éviter la confusion avec la conductivité. On définit la distance entre un point et un ensemble comme $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, E) = \inf\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 \,|\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E}\}$. On peut construire $f_\epsilon(\xi)$ comme

$$f_\epsilon(\xi) = H_\epsilon(\xi) + g(\xi) z(\xi).$$

On notera que ce n'est qu'une seule construction possible parmi d'autres. $H_\epsilon$ est une approximation de la fonction d'Heaviside, $z(\xi)$ doit être nul en $\xi \in \{-\epsilon, 0, \epsilon\}$. La fonction $g(\xi)$ peut être utilisée afin de satisfaire les critères sur la continuité. Les travaux de Roland Rivard montrent qu'il est nécessaire pour $\overline{F}$ d'être deux fois différentiable. Ainsi, il faut prendre $g(\xi)$ de sorte que

$$f_\epsilon(-\epsilon) = 0, \;\; f_\epsilon(\epsilon) = 1, \;\; f_\epsilon(0) = 1/2 \text{ et } f'(\pm\epsilon) = f''(\pm\epsilon) = 0.$$

Le choix standard est de prendre la fonction de transition

$$f_\epsilon(\xi) = \left( \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2\epsilon} \right) + \frac{1}{2\pi} \sin\left( \frac{\xi\pi}{\epsilon} \right),$$

qui satisfait ces critères. On voit cependant que la construction permet de faire des choix différents. L'approximation $\overline{F}$ n'est donc pas unique. On suppose que les $\overline{F}$ sont équivalentes

si elles diffèrent seulement d'une fonction de transition.

### 2.1.4 Équations de Maxwell

Pour terminer cette section, on dérive la « formulation en $\boldsymbol{H}$ » des équations de Maxwell afin de compléter le système d'EDP à discrétiser pour les problèmes de MHD. On débute avec le système d'équations pour le champ magnétique $\boldsymbol{H}$, le champ électrique $\boldsymbol{E}$, le champ d'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ et le champ d'induction électrique $\boldsymbol{D}$ [19] :

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} - \partial_t \boldsymbol{D} = \boldsymbol{j}; & \text{(Équation de Maxwell-Ampère)} \\ \nabla \times \boldsymbol{E} + \partial_t \boldsymbol{B} = 0; & \text{(Équation de Maxwell-Faraday)} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_c; & \text{(Équation de Maxwell-Coulomb)} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0; & \text{(Équation de Maxwell-Gauss)} \end{cases}$$

où $\rho_c$ est la densité de courant. En prenant la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère et la dérivée temporelle de l'équation de Maxwell-Coulomb, on peut montrer que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = -\partial_t \rho_c.$$

Afin d'obtenir la formulation en $\boldsymbol{H}$, il faut débuter en exprimant $\boldsymbol{D}$ en fonction de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ en fonction de $\boldsymbol{H}$,

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}, \;\; \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H},$$

où $\epsilon$ et $\mu$ sont respectivement la permittivité et la perméabilité. Le système d'équations à considérer est donc

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} - \partial_t \left(\epsilon \boldsymbol{E}\right) = \boldsymbol{j}; \\ \nabla \times \boldsymbol{E} + \partial_t \left(\mu \boldsymbol{H}\right) = 0; \\ \nabla \cdot \left(\epsilon \boldsymbol{E}\right) = \rho_c; \\ \nabla \cdot \left(\mu \boldsymbol{H}\right) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

On suppose $\epsilon$ et $\mu$ constants dans ce document. Pour exprimer $\boldsymbol{j}$, on utilise la loi d'Ohm sous la forme standard,

$$\boldsymbol{j} = \sigma \left(\boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}\right),$$

où $\sigma$ est la conductivité électrique. Par la suite, on se permet de négliger la dérivée temporelle de l'équation de Maxwell-Ampère, pour ce faire, regardons l'ordre de grandeur de ce terme,

$$\partial_t \left(\epsilon \boldsymbol{E}\right) = \partial_t \left(\frac{\epsilon}{\sigma} \boldsymbol{j} - \epsilon \mu \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}\right) = \partial_t \left(\tau \boldsymbol{j} - \frac{n^2}{c^2} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}\right),$$

où $\tau$ est le temps de relaxation des charges électriques qui est de l'ordre de $10^{-18}$ pour un conducteur. $n$ est l'indice de réfraction du milieu. On a $n \ll c$ et donc, à moins que $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}\|_2 \approx c^2/n^2$ ou $\|\boldsymbol{j}\|_2 \approx 1/\tau$, ce terme sera négligeable. C'est la supposition utilisée pour la suite. Le système (2.3) devient donc :

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}; \\ \nabla \times \boldsymbol{E} + \mu \partial_t \boldsymbol{H} = 0; \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho_c/\epsilon; \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0. \end{cases}$$

Avec ce système, on a $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = 0$ et donc $\partial_t \rho_c = 0$, et la densité de charge est constante. On termine la démonstration en insérant l'équation de Maxwell-Ampère dans la loi d'Ohm, et en prenant l'expression pour $\boldsymbol{E}$ dans l'équation de Maxwell-Faraday, on a

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \sigma \left( \boldsymbol{E} + \mu \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H} \right) \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \times \boldsymbol{H} - \mu \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}$$

et

$$\frac{1}{\sigma} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) - \mu \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) + \mu \partial_t \boldsymbol{H} = 0.$$

On peut simplifier la dernière équation avec l'identité $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \Delta \boldsymbol{H}$ et l'équation de Maxwell-Gauss afin d'obtenir la formulation recherchée,

$$\partial_t \boldsymbol{H} - \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \boldsymbol{H} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}), \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0.$$

On peut retrouver le champ électrique avec l'équation (2.1.4). Notons que puisque $\rho_c$ est constant, on peut montrer que cette densité de charge est nulle. En effet,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \nabla \cdot \left( \frac{1}{\sigma} \nabla \times \boldsymbol{H} - \mu \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H} \right) = -\mu \nabla \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) \\ &= -\mu \left( \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) \right) \\ &\Rightarrow \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{j} - \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\rho_c}{\epsilon\mu}. \end{aligned}$$

Puisque $\boldsymbol{u}$ est initialement $\mathbf{0}$, la densité $\rho_c$ est initialement nulle et donc toujours nulle. On a alors

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

## 2.2 Adimensionnalisation des équations

Le système d'EDP associé au modèle proposé est donc donné par :

$$\begin{cases} \rho\partial_t \boldsymbol{u} + \rho\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} - 2\nabla\cdot\left(\eta\dot{\gamma}(\boldsymbol{u})\right) = -\nabla p + \rho\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}_V + \boldsymbol{f}_L \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \\ \partial_t F + \boldsymbol{u}\cdot\nabla F = 0 \\ \partial_t \boldsymbol{H} - \dfrac{1}{\mu\sigma}\Delta\boldsymbol{H} = \nabla\times\left(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}\right) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0 \end{cases}$$

Le terme $\boldsymbol{f}_L = \mu\left(\nabla\times\boldsymbol{H}\right)\times\boldsymbol{H}$ de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est la force de Lorentz. On peut réécrire celle-ci en fonction de la pression magnétique $p_m = \mu\|\boldsymbol{H}\|_2^2/2$ et de la tension magnétique $\mu\left(\boldsymbol{H}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{H}$.

$$\boldsymbol{f}_L = \mu\left(\nabla\times\boldsymbol{H}\right)\times\boldsymbol{H} = -\nabla p_m + \mu\left(\boldsymbol{H}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{H}$$

Cette force et le terme $\nabla\times\left(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}\right)$ sont la cause du couplage des équations de la MHD. La force de Lorentz permet à la vitesse de varier temporellement selon $\boldsymbol{H}$. Quant à lui, le terme $\nabla\times\left(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}\right)$ amène le champ magnétique à varier temporellement selon $\boldsymbol{u}$.

On souhaite ensuite adimensionnaliser le système afin d'atteindre deux buts. L'adimensionnalisation permet de mieux comprendre l'impact des nombres adimensionnels dans nos équations. Elle permet aussi de mieux conditionner les équations à discrétiser. Le tableau 2.1 donne l'adimensionnalisation des diverses quantités physiques.

Tableau 2.1 Adimensionnalisation des quantités physiques

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{u} = \overline{u}\tilde{\boldsymbol{u}}$ | $\boldsymbol{H} = \overline{H}\tilde{\boldsymbol{H}}$ | $p = \overline{\rho u}^2\tilde{p}$ | $\boldsymbol{g} = \overline{g}\tilde{\boldsymbol{g}}$ |
| $\rho = \overline{\rho}\tilde{\rho}$ | $\eta = \overline{\eta}\tilde{\eta}$ | $\mu = \overline{\mu}\tilde{\mu}$ | $\sigma = \overline{\sigma}\tilde{\sigma}$ |
| $L = \overline{L}\tilde{L}$ | $t = (\overline{L}/\overline{u})\tilde{t}$ | $\gamma = \overline{\gamma}\tilde{\gamma}$ | |

Les variables $\tilde{(\cdot)}$ sont les nouvelles variables adimensionnelles que nous retrouverons dans les équations. Quant à elles, les variables $\overline{(\cdot)}$ sont les quantités de référence. Appliquons cette décomposition à l'équation de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\overline{\rho}\tilde{\rho}\frac{\overline{u}^2}{\overline{L}}\partial_{\tilde{t}}\tilde{\boldsymbol{u}} + \overline{\rho}\tilde{\rho}\frac{\overline{u}^2}{\overline{L}}\left(\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{\boldsymbol{u}} - 2\frac{\overline{\eta u}}{\overline{L}^2}\tilde{\nabla}\cdot\left(\tilde{\eta}\dot{\gamma}(\tilde{\boldsymbol{u}})\right) = -\frac{\overline{\rho u}^2}{\overline{L}}\tilde{\nabla}\tilde{p} + \overline{\rho}\tilde{\rho}\overline{g}\tilde{\boldsymbol{g}} - \frac{\overline{\gamma}\tilde{\gamma}}{\overline{L}^2}\tilde{\nabla}\cdot\left(\frac{\tilde{\nabla}F}{\|\tilde{\nabla}F\|_2}\right)\tilde{\nabla}F$$
$$+ \overline{\mu}\tilde{\mu}\frac{\overline{H}^2}{\overline{L}}\left(\tilde{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\times\tilde{\boldsymbol{H}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}\partial_{\tilde{t}}\tilde{\boldsymbol{u}} + \tilde{\rho}\left(\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{\boldsymbol{u}} - 2\frac{\overline{\eta}}{\overline{\rho u}\overline{L}}\tilde{\nabla}\cdot\left(\tilde{\eta}\dot{\gamma}\left(\tilde{\boldsymbol{u}}\right)\right) &= -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \tilde{\rho}\frac{\overline{g}\overline{L}}{\overline{u}^2}\tilde{\boldsymbol{g}} - \tilde{\gamma}\frac{\overline{\gamma}}{\overline{\rho}\overline{L}\overline{u}^2}\tilde{\nabla}\cdot\left(\frac{\tilde{\nabla}F}{\|\tilde{\nabla}F\|_2}\right)\tilde{\nabla}F \\ &= \tilde{\mu}\frac{\overline{\mu}\overline{H}^2}{\overline{\rho u}^2}\left(\tilde{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{H}}\right)\times\tilde{\boldsymbol{H}}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\rho\partial_t\boldsymbol{u} + \rho\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} - \frac{2}{Re}\nabla\cdot\left(\eta\dot{\gamma}\left(\boldsymbol{u}\right)\right) &= -\nabla p + \frac{\rho}{Fr}\boldsymbol{g} - \frac{\gamma}{We}\nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|_2}\right)\nabla F \\ &\quad + \mu S\left(\nabla\times\boldsymbol{H}\right)\times\boldsymbol{H},\end{aligned}$$

où on abandonne la notation $\tilde{(\cdot)}$ afin de simplifier l'écriture. L'adimensionnalisation a permis d'introduire le nombre Reynolds $Re = \overline{\rho u}\overline{L}/\overline{\eta}$, le nombre de Froude $Fr = \overline{u}^2/\overline{g}\overline{L}$, le nombre de Weber $We = \overline{\rho}\overline{L}\overline{u}^2/\overline{\gamma}$ et le nombre de couplage $S = \overline{\mu}\overline{H}^2/\overline{\rho u}^2 = \overline{B}^2/\overline{\mu\rho u}^2$. On poursuit avec l'équation principale de la formulation en $\boldsymbol{H}$ :

$$\begin{aligned}\frac{\overline{u}\overline{H}}{\overline{L}}\partial_{\tilde{t}}\tilde{\boldsymbol{H}} - \frac{\overline{H}}{\overline{\sigma}\tilde{\sigma}\overline{\mu}\tilde{\mu}\overline{L}^2}\tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{H}} &= \frac{\overline{u}\overline{H}}{\overline{L}}\tilde{\nabla}\times\left(\tilde{\boldsymbol{u}}\times\tilde{\boldsymbol{H}}\right) \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{\boldsymbol{H}} - \frac{1}{\tilde{\sigma}\tilde{\mu}\overline{u}\overline{L}\overline{\sigma\mu}}\tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{H}} &= \tilde{\nabla}\times\left(\tilde{\boldsymbol{u}}\times\tilde{\boldsymbol{H}}\right) \\ \partial_t\boldsymbol{H} - \frac{1}{Rm\sigma\mu}\Delta\boldsymbol{H} &= \nabla\times\left(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}\right).\end{aligned}$$

Cette équation introduit notre dernier nombre adimensionnel, le nombre de Reynolds magnétique $Rm = \overline{\sigma\mu u}\overline{L}$. Celui-ci représente le rapport entre les effets inertiels et la diffusion magnétique $\eta_m = 1/\overline{\sigma\mu}$. On peut établir un lien entre les nombres de Reynolds et le nombre de couplage à l'aide du nombre de Hartmann qui représente le ratio des forces électromagnétiques sur les forces visqueuses,

$$Ha^2 = \overline{B}^2\overline{L}^2\frac{\overline{\sigma}}{\overline{\eta}} = \overline{u}\overline{H}^2\overline{L}^2\frac{\overline{\eta}_m}{\overline{\eta}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$SReRm = \frac{\overline{B}^2}{\overline{\mu\rho u}^2}\frac{\overline{\rho u}\overline{L}}{\overline{\eta}}\overline{u}\overline{L}\overline{\sigma\mu} = \frac{\overline{B}^2\overline{L}}{\overline{\mu u\eta}}\overline{u}\overline{L}\overline{\sigma\mu} = \overline{B}^2\overline{L}^2\frac{\overline{\sigma}}{\overline{\eta}}$$

Il nous reste trois équations à adimensionnaliser : l'équation de transport de la pseudo-concentration, l'équation de conservation de masse incompressible et l'équation de Maxwell-Gauss. On peut vérifier rapidement que celles-ci ne font pas ressortir de nombres adimensionnels.

$$\frac{\overline{u}}{\overline{L}}\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0;$$

$$\frac{\overline{H}}{\overline{L}}\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{H}}=0\Rightarrow\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0;$$

$$\frac{\overline{u}}{\overline{L}}\partial_{\tilde{t}}F+\frac{\overline{u}}{\overline{L}}\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\tilde{\nabla}F=0\Rightarrow\partial_t F+\boldsymbol{u}\cdot\nabla F=0.$$

Ainsi, le système adimensionnel à discrétiser est :

$$\begin{cases}\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}-\frac{\eta}{Re}\Delta\boldsymbol{u}=-\nabla\left(p+p_m\right)+\frac{\rho}{Fr}\boldsymbol{g}-\frac{\gamma}{We}\nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|_2}\right)\nabla F+\mu S\left(\boldsymbol{H}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{H};\\ \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{H}}{\mathrm{D}t}-\frac{\eta_m}{Rm}\Delta\boldsymbol{H}=\left(\boldsymbol{H}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u};\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0;\\ \frac{\mathrm{D}F}{\mathrm{D}t}=0.\end{cases}\tag{2.4}$$

On utilise la dérivée lagrangienne $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ pour simplifier la notation et mettre l'accent sur les similarités entre les équations de Navier-Stokes et la formulation en $\boldsymbol{H}$. On a également reformuler la force de Lorentz pour faire ressortir la pression magnétique $p_m=\mu S\|\boldsymbol{H}\|_2^2/2$ et la tension magnétique. Cette dernière fait par ailleurs écho au terme de droite de l'équation de la formulation en $\boldsymbol{H}$ du système (2.4).

## 2.3 Méthodes numériques

Nous allons discrétiser le système adimensionel (2.4) au moyen des éléments finis et des schémas de différences finies arrières. Le choix des éléments finis vient de la possibilité d'utiliser des maillages non structurés. Ajoutons de plus que les éléments finis permettent une imposition simple des conditions aux bords. Dans cette section, nous allons préciser les méthodes utilisées.

### 2.3.1 Discrétisation en espace

On notera le domaine d'intérêt $\Omega$ et sa discrétisation $\Omega_h$. On utilisera des éléments tétraédriques notés $K$. La frontière du domaine est $\partial\Omega$ et $\Gamma$ est la frontière d'un élément. On définit également $\Gamma^-$ comme étant la frontière en amont de l'écoulement sur l'élément $K$,

$$\Gamma^-=\left\{\boldsymbol{x}\in\Gamma\,|\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}<0\right\},\tag{2.5}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale à $\Gamma$. On peut aussi définir la frontière en avale de l'écoulement comme $\Gamma^+=\Gamma\backslash\Gamma^-$.

**Espaces fonctionnels**

Introduisons les espaces fonctionnels nécessaires pour la forme faible du système d'équations. On débute avec l'espace des fonctions carrés intégrables et son produit scalaire.

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty \right\} \text{ et } (u, v)_{0,\Omega} = \int_\Omega uv \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

On introduit également les versions vectorielles et tensorielles de cet espace :

$$L^2(\Omega)^n = \left\{ \boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty \right\} \text{ et } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{0,\Omega} = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x};$$

$$L^2(\Omega)^{(n\times n)} = \left\{ \boldsymbol{\mu} : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n} \mid \int_\Omega \boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\mu} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty \right\} \text{ et } (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})_{0,\Omega} = \int_\Omega \boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

On peut également définir l'espace de Sobolev pour lequel les dérivées du premier ordre sont également des fonctions carrés intégrables,

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \partial_{x_i} u \in L^2(\Omega),\, i = 1, \cdots, 3 \right\}.$$

Le produit scalaire est calculé avec la somme des produits scalaires dans $L^2(\Omega)$,

$$(u, v)_{1,\Omega} = (u, v)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{3} (\partial_{x_i} u, \partial_{x_i} u)_{0,\Omega}.$$

Il sera nécessaire de bien définir les fonctions aux bords $\Lambda$. L'espace nécessaire est noté $H^{1/2}(\Lambda)^3$ [20] , [21],

$$H^{1/2}(\Lambda)^3 = \left\{ \boldsymbol{u}|_\Lambda \mid \boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^3 \right\} \text{ et } \|\boldsymbol{u}\|_{1/2,\Lambda} = \inf_{\substack{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega) \\ \gamma_0 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}}} \|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}.$$

Ici, $\gamma_0 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}|_\Lambda$ est la trace au bord. Afin d'avoir des produits scalaires dans $L^2(\Omega)^3$, on considère également le dual de $H^{1/2}(\Lambda)^3$ que l'on note $H^{-1/2}(\Lambda)^3$. Pour $\boldsymbol{u}' \in H^{-1/2}(\Lambda)^3$,

$$\|\boldsymbol{u}'\|_{-1/2,\Lambda} = \sup_{\substack{\boldsymbol{u} \in H^{1/2}(\Lambda) \\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}}} \frac{|\langle \boldsymbol{u}', \boldsymbol{u} \rangle_\Lambda|}{\|\boldsymbol{u}\|_{1/2,\Lambda}}.$$

Finalement, on considère également d'imposer la valeur nulle sur une section du bord. On définit donc l'espace fonctionnel

$$H_0^1(\Omega)^3 = \left\{ \boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^3 \mid \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_{D\boldsymbol{u}} \right\}.$$

Ces espaces fonctionnels permettent de bien poser la forme faible des équations de Navier-Stokes. Pour ce qui est de l'équation de transport et des équations de la formulation en $\boldsymbol{H}$, on débute en considérant les fonctions de carrés intégrables au bord,

$$L^2_{\boldsymbol{u}}(\Lambda) = \left\{\phi : \Lambda \to \mathbb{R} \,|\, \int_\Lambda |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_\Lambda|\, \phi^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} < \infty\right\} \text{ et } \langle \phi, \psi\rangle_{L^2_{\boldsymbol{u}}(\Lambda)} = \int_\Lambda |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}_\Lambda|\, \phi\psi \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Ceci permet de s'assurer que l'information en amont de l'écoulement soit de carré intégrable,

$$\Phi(\Omega) = \left\{\phi \in L^2(\Omega) \,|\, \boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi \in L^2(\Omega),\, \phi|_{\partial\Omega^-_{DF}} \in L^2_{\boldsymbol{u}}(\partial\Omega^-_{DF})\right\},$$

et

$$\Phi_{\partial\Omega^-_{DF}}(\Omega) = \left\{\phi \in \Phi(\Omega) \,|\, \phi(\boldsymbol{x}) = 0,\, \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega^-_{DF}\right\}.$$

Finalement, pour la formulation en $\boldsymbol{H}$, il nous faut introduire l'espace de Sobolev adapté au rotationnel,

$$\boldsymbol{H}(\Omega, \mathrm{rot}) = \left\{\boldsymbol{N} \in H^1(\Omega)^3 \,|\, \|\boldsymbol{N}\|_{\boldsymbol{H}(\Omega,\mathrm{rot})} < \infty\right\} \text{ et } \|\boldsymbol{N}\|^2_{\boldsymbol{H}(\Omega,\mathrm{rot})} = \|\boldsymbol{N}\|^2_2 + \|\nabla\times\boldsymbol{N}\|^2_2,$$

et

$$\boldsymbol{H}_0(\Omega, \mathrm{rot}) = \{\boldsymbol{N} \in \boldsymbol{H}(\Omega, \mathrm{rot}) \,|\, \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{n}_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}\}.$$

Ce dernier espace permet d'annuler les produits scalaires sur $\partial\Omega$ dans la forme faible.

### Formes faibles des équations

Maintenant que nous avons en main le cadre fonctionnel, nous pouvons passer à la forme faible de notre système d'EDP. Ainsi, on multiplie les équations par une fonction test, pour ensuite prendre le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. On débute avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement (2.1),

$$\rho\left(\partial_t\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} + \rho\left(\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} - \frac{\eta}{Re}\left(\Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} = -\left(\nabla p, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} + \left(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega}.$$

On considère la viscosité dynamique $\eta$ comme constante. Puisque $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^3$, il faut avoir $\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3$ avec $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^3$. On intègre ensuite par parties les termes à gauche et à droite de l'égalité,

$$\begin{aligned}\rho\left(\partial_t\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} + \rho\left(\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} - \left(p, \nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} + \frac{\eta}{Re}\left(\nabla\boldsymbol{u}, \nabla\boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} \\ = \left(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} + \langle p, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_{\partial\Omega}\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}} + \langle \boldsymbol{t}_{\partial\Omega}, \boldsymbol{v}\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}.\end{aligned}$$

On a $\nabla \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}_{\partial\Omega} = \boldsymbol{t}_{\partial\Omega}$ avec $\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^3$. Ainsi, lorsqu'on restreint $\boldsymbol{v}$ sur le bord, on a $\boldsymbol{v} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$ avec $\boldsymbol{t}_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^3$. On remarque un terme au bord en $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{\partial\Omega}$ et on souhaite que ce terme soit nul. Puisque les dérivées d'ordre un de la fonction test sont présentes dans la forme faible, on nécessite que celle-ci soit dans un espace de Sobolev. Afin que le terme en pression sur $\partial\Omega$ soit, il faut $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3$.

$$\begin{aligned} \rho\left(\partial_t \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} + \rho\left(\left(\boldsymbol{u} \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} - \left(p, \nabla \cdot \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} + \frac{\eta}{Re}\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} \\ = \left(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} + \left\langle \boldsymbol{t}_{\partial\Omega}, \boldsymbol{v}\right\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Remarquons que la fonction test n'est pas uniquement dans $L^2(\Omega)^3$, mais bien dans un espace de Sobolev. De plus, puisque $\boldsymbol{v}$ est dans $H_0^1(\Omega)^3$, on a $p \in L^2(\Omega)$. Finalement, puisque les dérivées du premier ordre de $\boldsymbol{u}$ sont dans la forme faible, on doit avoir $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^3$. Cette équation sous sa forme faible (2.6) nous permet donc de conclure que

$$\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^3, \;\; p \in L^2(\Omega), \;\; \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \;\; \boldsymbol{t}_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)^3 \;\text{ et }\; \boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^3.$$

L'équation de la conversation de la masse est plus simple et ne nécessite pas de précisions supplémentaires,

$$\left(\nabla \cdot \boldsymbol{u}, q\right)_{0,\Omega} = 0.$$

On a $q \in L^2(\Omega)$. Le même traitement est appliqué au transport de la pseudo-concentration,

$$\left(\partial_t F, \phi\right)_{0,\Omega} + \left(\boldsymbol{u} \cdot \nabla F, \phi\right)_{0,\Omega} = 0.$$

Puisque l'information sur la pseudo-concentration vient de l'amont et qu'on veut $\boldsymbol{u} \cdot \nabla F \in L^2(\Omega)$, il nous faut $F \in \Phi(\Omega)$. Pour ce qui est de $\phi$, une réécriture de la forme faible permet de faire apparaître un terme au bord qui se simplifie si $\phi = 0$,

$$\left(\partial_t F, \phi\right)_{0,\Omega} - \left(F, \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi\right)_{0,\Omega} + \left\langle F \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}_{\partial\Omega}, \phi\right\rangle = 0.$$

Ainsi, on peut voir qu'avec $\phi \in \Phi_{\partial\Omega_{DF}^-}(\Omega)$, le terme au bord est nul en $\partial\Omega^-$ et la forme faible est bien définie. On poursuit le passage à la forme faible avec l'équation du champ magnétique :

$$\left(\partial_t \boldsymbol{H}, \boldsymbol{N}\right)_{0,\Omega} - \frac{\eta_m}{Rm}\left(\Delta \boldsymbol{H}, \boldsymbol{N}\right)_{0,\Omega} = \left(\nabla \times \left(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}\right), \boldsymbol{N}\right)_{0,\Omega}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\partial_t \boldsymbol{H}, \boldsymbol{N}\right)_{0,\Omega} + \frac{\eta_m}{Rm}\left(\nabla \times \left(\nabla \times \boldsymbol{H}\right), \boldsymbol{N}\right)_{0,\Omega} = \left(\nabla \times \left(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}\right), \boldsymbol{N}\right)_{0,\Omega}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\partial_t \boldsymbol{H}, \boldsymbol{N})_{0,\Omega} + \frac{\eta_m}{Rm} (\nabla \times \boldsymbol{H}, \nabla \times \boldsymbol{N})_{0,\Omega} = (\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}), \boldsymbol{N})_{0,\Omega} + \langle (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{N}), \boldsymbol{n}_{\partial\Omega} \rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\partial_t \boldsymbol{H}, \boldsymbol{N})_{0,\Omega} + \frac{\eta_m}{Rm} (\nabla \times \boldsymbol{H}, \nabla \times \boldsymbol{N})_{0,\Omega} = (\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}), \boldsymbol{N})_{0,\Omega} + \langle (\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{n}_{\partial\Omega}), \boldsymbol{H} \rangle.$$

En prenant $\boldsymbol{N} \in \boldsymbol{H}_0(\Omega, \mathrm{rot})$, le terme au bord est nul. Finalement, on termine le passage à la forme faible avec l'équation de Maxwell-Gauss,

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{H}, C)_{0,\Omega} = -(\boldsymbol{H}, \nabla C)_{0,\Omega} + \langle \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}_{\partial\Omega}, C \rangle.$$

Notons qu'il est possible d'ignorer cette dernière équation. En effet, remarquons que

$$\nabla \cdot \left( \partial_t \boldsymbol{H} + \frac{\eta_m}{Rm} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) - \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) \right) = \partial_t (\nabla \cdot \boldsymbol{H}) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\partial_t (\nabla \cdot \boldsymbol{H}) = 0$$

On a donc que $\nabla \cdot \boldsymbol{H}$ est constant selon $t$ et donc en choisissant $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t = t_0)$ respectant l'équation de Maxwell-Gauss, cette équation sera toujours respectée. En particulier, si $\boldsymbol{H}_0 = \mathcal{C}$, une constante, alors $\nabla \cdot \boldsymbol{H}_0 = \nabla \cdot \mathcal{C} = 0$.

Finalement, il est possible d'écrire le système sous la forme faible suivante en ignorant l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\begin{cases} \rho (\partial_t \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{0,\Omega} + \rho ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{0,\Omega} - (p, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_{0,\Omega} + \dfrac{\eta}{Re} (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v})_{0,\Omega} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_{0,\Omega} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \langle \boldsymbol{t}_{\partial\Omega}, \boldsymbol{v} \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} \\ (\partial_t \boldsymbol{H}, \boldsymbol{N})_{0,\Omega} + \frac{\eta_m}{Rm} (\nabla \times \boldsymbol{H}, \nabla \times \boldsymbol{N})_{0,\Omega} = (\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}), \boldsymbol{N})_{0,\Omega}; \\ (\partial_t F, \phi)_{0,\Omega} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla F, \phi)_{0,\Omega} = 0; \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{u}, q)_{0,\Omega} = 0; \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t = 0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, t = 0) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{x}). \end{cases};$$

On insère également les conditions initiales nécessaires afin de discrétiser ce système. Les conditions initiales sur les variables, comme la densité $\rho$, évoluent selon l'équation de transport (2.2). On précisera les conditions aux bords selon le problème étudié.

**Existence d'une solution unique**

Pour ce qui est de l'existence des solutions du système sous sa forme faible, et des conditions à respecter, afin que de telles solutions existent, on peut penser initialement au théorème de Lax-Milgram [21] pour lequel on cherche $u \in V$ tel que

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \ell(\boldsymbol{v}),\ \forall \boldsymbol{v} \in V.$$

Le théorème affirme que pour un espace de Hilbert $V$, une forme bilinéaire $a$ et une forme linéaire $\ell$, si $a$ est continue et coercive et $\ell$ est continue, alors la solution existe et est unique.

Cependant, notre problème est plus complexe et fait appel à plus d'une équation. Une généralisation existe pour les systèmes d'équations lorsqu'on cherche $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times Q$ tels que

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}),\ \forall v \in V; \\ b(\boldsymbol{u}, q) = 0,\ \forall q \in Q. \end{cases} \tag{2.7}$$

Si $a$ et $b$ sont des formes bilinéaires continues sur $V \times V$ et $V \times Q$ respectivement, si $a$ est coercive sur $\ker(B) = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3 \,|\, \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\}$ et s'il existe $\beta > 0$ tel que $b$ satisfait la condition de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) [22], ou condition inf-sup :

$$a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geq \alpha \|\boldsymbol{v}\|_V^2;$$

$$\beta \leq \inf_{q \in Q} \sup_{\boldsymbol{v} \in V} \frac{b(\boldsymbol{v}, q)}{\|q\|_Q \|\boldsymbol{v}\|_V},$$

alors la solution au problème (2.7) existe et est unique. Puisque notre système est plus compliqué, il n'est pas possible de conclure sur l'existence et l'unicité des solutions. On supposera qu'il est suffisant de respecter le théorème de Lax-Milgram et la condition LBB. Cependant, Roland Rivard a montré que pour $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, si le problème est instationnaire, alors le théorème de Lax-Milgram n'est pas respecté, car la forme bilinéaire n'est pas coercive,

$$C_k \left(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}\right)_{0,\Omega} + \frac{\eta_m}{Rm} \left(\nabla \times \boldsymbol{H}, \nabla \times \boldsymbol{H}\right)_{0,\Omega} \geq \min\left(C_k, \frac{\eta_m}{Rm}\right) \|\boldsymbol{H}\|^2_{\boldsymbol{H}(\Omega,\mathrm{rot})}.$$

Puisque $C_k$ est une constante venant de la discrétisation temporelle avec les schémas BDF, le problème stationnaire est équivalent à affirmer que $C_k = 0$. À ce moment, on a $\alpha = 0$, qui n'est pas strictement positif et l'existence et unicité de la solution n'est plus garantie.

**Discrétisation des équations**

On discrétise la forme faible au moyen des éléments finis pour lesquels il faut définir un type d'élément $K$, une base de fonctions d'interpolation $\mathcal{P}$ et une base nodale $\mathcal{N}$. Ainsi, on débute en prenant une approximation $\Omega_h$ du domaine $\Omega$ avec $h = \max\{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}\}$, la taille du plus grand élément tétraédrique $K$ utilisé. Ici, $\Delta x$, $\Delta y$ et $\Delta z$ sont les dimensions de la plus petite boîte contenant $K$.

On discrétise les variables avec la méthode de Galerkin :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \approx \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x},t) = \sum_{i=1}^{N_{\boldsymbol{u}}} u(N_i^{\boldsymbol{u}},t)\phi_i^{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x});$$

$$p(\boldsymbol{x},t) \approx p_h(\boldsymbol{x},t) = \sum_{i=1}^{N_p} p(N_i^p,t)\phi_i^p(\boldsymbol{x});$$

$$F(\boldsymbol{x},t) \approx F_h(\boldsymbol{x},t) = \sum_{i=1}^{N_F} F(N_i^F,t)\phi_i^F(\boldsymbol{x});$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t) \approx \boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{x},t) = \sum_{i=1}^{N_{\boldsymbol{H}}} u(N_i^{\boldsymbol{H}},t)\phi_i^{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}).$$

On note $N_i^w$ la variable nodale $i$ associée au paramètre physique $w$. On procède de façon similaire pour les fonctions de base $\phi_i^w$. $N_w$ est la taille de la base utilisée pour approximer le paramètre physique $w$. Le système non linéaire obtenu est alors donné par :

$$\boldsymbol{K}(\rho,\boldsymbol{u}_h)\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_h\\ \boldsymbol{F}_h\\ \boldsymbol{p}_h\\ \boldsymbol{H}_h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}(\rho,\gamma,\mu,\boldsymbol{u}_h,F_h,\boldsymbol{H}_h)\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

où

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{M_u}(\rho)+\boldsymbol{C_u}(\rho,\boldsymbol{u}_h)+\boldsymbol{A}(\eta) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_F+\boldsymbol{C}_F(\boldsymbol{u_h}) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M_H}+\boldsymbol{R}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}_h)\end{bmatrix},$$

où $\boldsymbol{M}$ est la matrice masse associée à la dérivée temporelle, $\boldsymbol{C}$ est la matrice de convection associée au second terme de la dérivée lagrangienne, $\boldsymbol{A}$ est la matrice de diffusion qu'on retrouve également dans la formulation en $\boldsymbol{H}$ des équations de Maxwell, $\boldsymbol{B}$ représente la divergence, $\boldsymbol{R}$ est la matrice des rotationnels, et finalement, $\boldsymbol{E}$ représente le terme de droite

de l'équation principale de la formulation en $\boldsymbol{H}$. À droite, on retrouve un vecteur composé des forces provenant de l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Afin de trouver une solution du système non linéaire, on utilise la méthode de Picard et celle de Newton, qu'on peut résumer comme suit. Soit le système

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}.$$

$\boldsymbol{K}$ est la matrice construite à l'aide de la forme faible discrète, $\boldsymbol{x}$ est le vecteur $(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{F}_h, \boldsymbol{p}_h, \boldsymbol{H}_h)$ et $\boldsymbol{g}$ est le membre de droite du système (2.8). On peut linéariser le système à l'aide de l'agorithme

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}^n)\boldsymbol{x}^{n+1} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^n).$$

Résoudre pour $\boldsymbol{x}^{n+1}$ revient à résoudre avec la méthode des points fixe ou méthode de Picard. Cette méthode simple permet de se rapprocher de la solution, mais ce n'est pas aussi rapide que la méthode de Newton,

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^n) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^n)\delta\boldsymbol{x}^n = \boldsymbol{0}.$$

où $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ est la matrice jacobienne. En trouvant $\delta\boldsymbol{x}^n$, on obtient une meilleure approximation de la solution $\boldsymbol{x}^{n+1} = \boldsymbol{x}^n + \delta\boldsymbol{x}^n$. On peut développer la matrice jacobienne afin de voir le lien entre la méthode de Picard et celle de Newton,

$$\boldsymbol{J}_{ij} = \boldsymbol{K}_{ij} - \partial_{\boldsymbol{x}_j}\boldsymbol{g}_i + \sum_k \boldsymbol{x}_k \partial_{\boldsymbol{x}_j}\boldsymbol{K}_{ik} \Rightarrow \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{K}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}.$$

Ainsi, on peut exprimer la méthode de Newton en faisant ressortir la méthode de Picard dans le premier terme. On peut introduire un paramètre $\omega$ afin de passer d'une méthode à l'autre. On parle alors de méthode de Picard-Newton,

$$\underbrace{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}^n)(\boldsymbol{x}^n + \delta\boldsymbol{x}^n) - \boldsymbol{g}(x^n)}_{\text{Picard}} + \omega \underbrace{(\boldsymbol{K}'(\boldsymbol{x}^n)\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}^n))\delta\boldsymbol{x}^n}_{\text{Newton}} = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}^n) + \omega\boldsymbol{K}'(\boldsymbol{x}^n)\boldsymbol{x}^n - \omega\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}^n)\right)\delta\boldsymbol{x}^n = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^n) - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}^n)\boldsymbol{x}^n$$

Si $\omega = 0$, on a la méthode de Picard et si $\omega = 1$, on a la méthode de Newton.

### 2.3.2 Discrétisation en temps

Après la discrétisation spatiale, il faut maintenant s'occuper de la dérivée temporelle. On utilise les schémas de différences arrières (BDF). Ceux-ci peuvent s'écrire sous la forme :

$$\partial_t \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, t_n) \approx \frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \boldsymbol{u}_h^{n-i}(\boldsymbol{x});$$

$$\partial_t \boldsymbol{H}_h(\boldsymbol{x}, t_n) \approx \frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \boldsymbol{H}_h^{n-i}(\boldsymbol{x});$$

$$\partial_t F_h(\boldsymbol{x}, t_n) \approx \frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i F_h^{n-i}(\boldsymbol{x}).$$

$k$ est l'ordre de précision du schéma. Un algorithme simple permet de calculer les coefficients $\alpha_i$. Soit la matrice $\boldsymbol{V}_{ij} = (-j)^i$ pour $i, j \in \{0, \cdots, k\}$, on a

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & -k \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (-1)^k & (-2)^k & \cdots & (-k)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les paramètres du schéma souhaité à l'ordre $k$. $\beta_0 = 1/a_0$ et $\alpha_i = a_i/a_0$. Les coefficients sont donnés par la deuxième colonne de l'inverse de la matrice $\boldsymbol{V}$,

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{col}(\boldsymbol{V}^{-1})_2 \text{ et } \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{col}(\boldsymbol{V}^{-1})_2}{a_0},$$

où $\mathrm{col}(M)_2$ est la deuxième colonne de la matrice $M$. La stabilité du schéma utilisé est également importante à considérer. Les schémas de différences arrières implicites que nous avons introduits sont inconditionnellement stable. Néanmoins, une restriction $k \leq 6$ est imposée. La raison est que pour $k > 6$ il n'y a plus de zone de stabilité. [23]

## 2.4 Méthodes SUPG et de Galerkin discontinu

Jusqu'à présent, nous avons proposé la discrétisation du système avec la méthode de Galerkin. Cependant, celle-ci est mal adaptée à la discrétisation de problèmes hyperboliques. En effet, la résolution d'un système d'EDP linéaires permet en principe de transporter l'information instantanément dans le système. Pour une EDP elliptique, ce n'est pas un problème puisque l'information se propage instantanément. Toutefois, les équations hyperboliques sont caractérisées par une vitesse finie de l'information. Ainsi, l'utilisation de la méthode de Galerkin standard produit des oscillations non physiques dans la solution. [24]

C'est un problème pour le système d'équations qui nous intéresse. En effet, la pseudo-

concentration est modélisée par l'équation de transport. Deux méthodes sont utilisées afin de discrétiser ce problème. On propose une description de celles-ci.

### 2.4.1 Méthode SUPG

La première méthode consiste à modifier la forme faible de l'EDP hyperbolique dans le but de la rendre elliptique. Une idée initiale est d'ajouter un terme de diffusion $\epsilon_d \Delta F$. Cependant, on modifie l'équation à résoudre et la diffusion ajoute une couche d'épaisseur $2\sqrt{\epsilon_d}$ le long la courbe caractéristique qui diffuse les discontinuités, et une couche d'épaisseur $\epsilon_d$ si la solution ne correspond pas aux conditions aux bords.

La méthode SUPG, propose de résoudre ce problème en modifiant la fonction de base $\psi$ comme

$$\overline{\psi} = \psi + \tau \boldsymbol{u} \cdot \nabla \psi.$$

Le problème de cette méthode est qu'elle modifie encore l'équation sous sa forme faible en ajoutant un terme de diffusion. On peut le voir dans l'équation de transport de la pseudo-concentration avec le terme $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla F, \phi)_{0,\Omega}$,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u} \cdot \nabla F, \overline{\phi})_{0,\Omega} &= (\boldsymbol{u} \cdot \nabla F, \phi)_{0,\Omega} + \tau(\boldsymbol{u} \cdot \nabla F, \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi)_{0,\Omega} \\ &= (\boldsymbol{u} \cdot \nabla F, \phi)_{0,\Omega} + \tau \left(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T \nabla F, \nabla \phi\right)_{0,\Omega}.\end{aligned}$$

Le terme ajouté est similaire au terme de diffusion $(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v})_{0,\Omega}$ qu'on retrouve dans les équations de Navier-Stokes. C'est la diffusion ajoutée le long des lignes de courant.

### 2.4.2 Méthode de Galerkin discontinu

La méthode de GD permet de régler en partie les problèmes associés à la méthode SUPG. Par exemple, celle-ci n'ajoute pas de terme de diffusion et elle propose une méthode de discrétisation cohérente avec l'espace fonctionnel $\Phi(\Omega)$.

La méthode propose de discrétiser l'EDP élément par élément [25]. L'ordre de résolution se fait en suivant le sens des lignes de courant de $\boldsymbol{u}$. L'information arrive donc de l'amont de l'élément $K$, que l'on note $\partial K^-$, et la résolution du système élémentaire permet d'obtenir les degrés de liberté en aval. Par la suite, cette information donne les valeurs en amont des prochains éléments. Il faut s'assurer de bien considérer les discontinuités lorsqu'on propage les solutions d'un élément à l'autre. La figure 2.2 illustre cette propagation pour quelques éléments 2D. Soit $K$ un élément et $K'$ un élément voisin en aval de $K$. $\Lambda$ est la frontière qui sépare ces deux éléments. Considérons le transport de la pseudo-concentration $F$. On permet

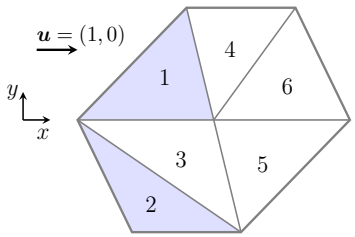


FIGURE 2.2 Parcours des éléments du maillage pour la discrétisation avec la méthode de Galerkin discontinue.

à $F$ d'être discontinu entre ces éléments et $[\![F]\!] = F^+ - F^-$ est la valeur du saut où $F^+$ est la valeur de $F$ en amont de $K$ et $F^-$ est la valeur de $F$ en aval de $K$. On s'intéresse également à la moyenne de la pseudo-concentration sur $\Lambda$, $\{\{F\}\} = (F^+ + F^-)/2$, tel qu'illustré à la figure 2.3.

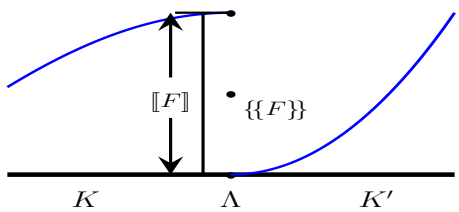


FIGURE 2.3 Saut de la pseudo-concentration entre $K$ et $K'$.

On peut observer l'effet de cette méthode sur la forme faible en utilisant deux fois le théorème de la divergence. On fera apparaître $F^-$ dans le deuxième terme de bord, ce qui permet l'échange d'information entre les éléments,

$$(\partial_t F, \phi)_{0,K} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla F, \phi)_{0,K} = (\partial_t F, \phi)_{0,K} - (F, \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi)_{0,K} + \langle F \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}_{\partial K^-}, \phi \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\partial_t F, \phi)_{0,K} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla F, \phi)_{0,K} + \langle (F - F^-) \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}_{\partial K^-}, \phi \rangle = 0.$$

On peut voir le terme en $F^-$ connu comme un terme source de l'équation. Ainsi, s'il n'y a pas un terme de diffusion, la méthode modifie l'équation.

## 2.5 Préconditionneur additif de Schwarz

On termine cette revue de littérature en parlant du préconditionneur de Schwarz qui a été utilisé pour l'ensemble des simulations. Celui-ci permet d'obtenir plus rapidement les solutions numériques à nos problèmes, tout en profitant de la décomposition du domaine. Cette décomposition a pour effet de produire un partitionnement de la matrice globale.

$\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice globale du système à résoudre. $\boldsymbol{K}_i \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est une sous-matrice associée à un sous-domaine du partitionnement. On obtient $\boldsymbol{K}_i$ à l'aide de la matrice $\boldsymbol{R}_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, la matrice de restriction, où $m$ est le nombre de degrés de liberté local et $n$ est le nombre de degrés de liberté global. $\boldsymbol{R}_i$ est définie de façon à isoler la sous-matrice $\boldsymbol{K}_i$ associée à un sous-domaine du partitionnement.

Cette matrice est telle que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_i &= \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{A} \boldsymbol{R}_i^T; \\ \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{R}_i^T &= \boldsymbol{I}_{m\times m}; \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i \boldsymbol{R}_i &= \boldsymbol{I}_{m\times m}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Les matrices $\boldsymbol{E}_i$ sont des matrices $\boldsymbol{R}_i^T$ modifiées afin de satisfaire l'équation (2.9). Notons qu'on ne construit pas explicitement les matrices $\boldsymbol{R}_i$ et $\boldsymbol{E}_i$. En pratique, on résout $\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{E}_i \boldsymbol{y}_i$. Ici, la matrice $\boldsymbol{A}_i$ est une sous-matrice qu'on peut extraire explicitement. Cette sous-matrice produit un vecteur $\mathcal{S}$ d'indices que l'on souhaite atteindre. $\boldsymbol{R}_i \boldsymbol{b}$ est le vecteur $\boldsymbol{b}$ auquel on retire les composantes qui ne sont pas dans le vecteur $\mathcal{S}$. $\boldsymbol{E}_i \boldsymbol{y}_i$ produit un vecteur dans $\mathbb{R}^n$ en positionnant les composantes aux indices que l'on trouve dans $\mathcal{S}$.

Une fois les matrices $\boldsymbol{R}_i$ et $\boldsymbol{E}_i$ en main, on peut résoudre le système global de la façon suivante. On note $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n$ la solution obtenue via le partitionnement $i$. La somme de ces solutions locales est la solution du système globale,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{A} \underbrace{\boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{y}_i}_{\boldsymbol{x}_i} = \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{b}} \Rightarrow \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{y}_i = \tilde{\boldsymbol{b}}.$$

L'idée est de résoudre pour $\boldsymbol{y}_i$ et ensuite pour $\boldsymbol{x}_i$ dans l'équation $\boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x}_i$. Cependant, cette méthode ne permet pas d'obtenir la solution $\boldsymbol{x}$. Il faut faire appel aux matrices $\boldsymbol{E}_i$. Une façon simple de le comprendre est de poser $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_{n\times n}$, ce qui donne $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{I}_{m\times m}$ et $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b}$. On a donc

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{A}_i^{-1} \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{R}_i \boldsymbol{b}.$$

Puisque la somme des $\boldsymbol{R}_i^T \boldsymbol{R}_i$ ne donne pas l'identité, on ne retrouve pas la solution souhaitée.

Ainsi, dans notre méthode, il faut remplacer $\boldsymbol{R}_i^T$ par $\boldsymbol{E}_i$,

$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{y}_i = \tilde{\boldsymbol{b}} \to \boldsymbol{y}_i, \;\; \boldsymbol{E}_i\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}_i, \;\; \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i.$$

Plus simplement, on peut écrire,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}_i\boldsymbol{A}_i^{-1}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{b}.$$

# CHAPITRE 3 PROBLÈME DE YOUNG-LAPLACE

Afin de vérifier la modélisation de la dynamique des surfaces libres, nous allons débuter par l'étude du comportement de la dynamique des bulles. Nous commençons par simuler une seule bulle stationnaire. Ce problème permet de comparer la méthode SUPG et la méthode Galerkin discontinue tout en vérifiant que la physique du problème est respectée. Une brève étude théorique permet de voir qu'on aura une erreur sur le champ de vitesse. Un critère est donné afin de prévoir l'apparition de ce type d'erreur. Finalement, on vérifie l'avantage de la méthode de Galerkin discontinue (GD) sur la méthode SUPG en observant le saut en pression et l'ordre de grandeur du champ de vitesse final.

## 3.1 Dérivation de la formule de Young-Laplace

On considère le système d'EDP

$$\begin{cases} \rho\partial_t \boldsymbol{u} - \frac{\eta}{Re}\Delta\boldsymbol{u} = -\nabla p + \frac{\gamma}{We}\kappa(\overline{F})\nabla\overline{F}; \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0; \\ \partial_t F + \boldsymbol{u}\cdot\nabla F = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour un écoulement au repos, on suppose que $\boldsymbol{u} = 0$. Les équations deviennent

$$\nabla p = \frac{\gamma\kappa(F)}{We}\nabla F \text{ et } \partial_t F = 0.$$

La dernière équation nous permet de considérer que $F$ ne dépend pas du temps, et donc $F = F(\boldsymbol{x})$. Ce n'est pas surprenant lorsque $\boldsymbol{u} = 0$. On suppose que nous avons une courbure constante et une symétrie angulaire. Ainsi, en coordonnées sphériques, on a

$$\partial_r p(r) = \frac{\gamma\kappa}{We}\partial_r F \Rightarrow p(r) - p(r_0) = \frac{\gamma\kappa}{We}\left(F(r) - F(r_0)\right), \tag{3.2}$$

pour $\kappa = 2/R$, où $R$ le rayon de la sphère. Si on prend $r_0 < R$ et $r > R$ dans l'équation (3.2), on a

$$\Delta p = \pm\frac{2\gamma}{RWe}. \tag{3.3}$$

Le signe dépend de la définition donnée à la pseudo-concentration.

## 3.2 Discussion à propos du champ de vitesse

La formule (3.3) obtenue plus haut nous servira pour la vérification. Cependant, il est peu probable que $\boldsymbol{u} = 0$ numériquement. Voyons les conséquences de ce problème.

### 3.2.1 Conséquences d'une erreur numérique

Si on suppose tout de même que la vitesse est faible, on se permet de négliger le terme de convection et le terme de diffusion pour simplifier la discussion [4],

$$\partial_t \boldsymbol{u} = \frac{1}{\rho}\nabla\Big(\frac{\gamma\kappa}{We}F - p\Big) = \frac{1}{\rho}\nabla\mathcal{R} \text{ et } \mathcal{R} = \frac{\gamma\kappa}{We}F - p.$$

Puisque la vitesse initiale $\boldsymbol{u}_0 = 0$, la vitesse devrait évoluer selon la formule

$$\boldsymbol{u} = \frac{t}{\rho}\nabla\mathcal{R} \tag{3.4}$$

On suppose que $\mathcal{R}$ ne dépend pas du temps puisque $F$ et $p$ ne devraient pas changer si un état stationnaire est atteint. Cette démarche n'est pas forcément représentative de la situation. Néanmoins, elle montre qu'on ne doit pas s'attendre à obtenir un champ de vitesse nul.

Dans une des simulations faite avec la méthode SUPG, nous observons les courants parasites illustrés à la figure 3.1.

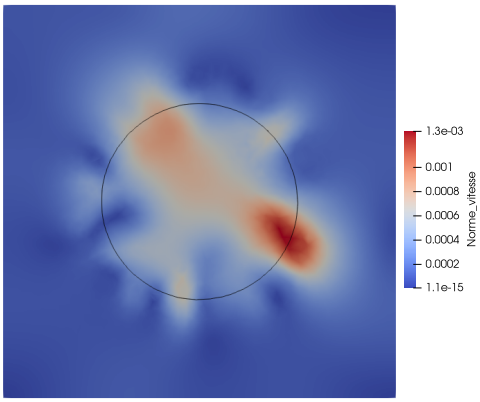


FIGURE 3.1 Courants parasites de la simulation faite avec la méthode SUPG et $N = 24$ processeurs. (voir le tableau 3.4)

La norme du champ de vitesse est 0.07343, alors qu'elle devrait être nulle. Le graphique de la figure 3.2, associé à la simulation de la figure 3.1, montre bien une variation de $\boldsymbol{u}$.

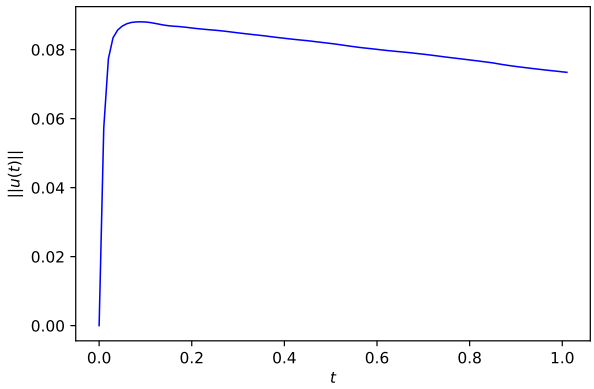


FIGURE 3.2 Norme de la vitesse en fonction du temps pour la simulation faite avec la méthode SUPG et $N = 24$ processeurs.

Il est intéressant de voir qu'au départ, le comportement semble linéaire, ce qui concorde avec l'équation (3.4) provenant de l'argument de Roland Rivard [4].

### 3.2.2 Critère sur l'erreur du champ de vitesse

La démarche qui suit permet de considérer l'équation de conservation de la quantité de mouvement complète et donne un critère sur la présence de courants parasites. Celle-ci est inspirée des travaux de Jean-Frédéric Gerbeau [7]. Considérons l'équation de Stokes (3.1) utilisée pour nos simulations. De plus, supposons que le système est stationnaire. Sous forme faible, on a

$$\frac{2\eta}{Re}\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} - \left(p, \nabla \cdot \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} = \left(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\right)_{0,\Omega} \quad \text{et} \quad \left(q, \nabla \cdot \boldsymbol{u}\right)_{0,\Omega} = 0.$$

On obtient l'équation d'énergie en posant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$,

$$\frac{2\eta}{Re}\int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Maintenant, voyons ce qui se passe si $f = \nabla\Phi$. Cette forme est intéressante puisqu'on la rencontre dans le problème étudié. On suppose que $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ sur $\Omega$ et que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, ce qui donne

$$\frac{2\eta}{Re}\int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_{\Omega} \Phi \nabla \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla \boldsymbol{u}|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0. \tag{3.5}$$

Maintenant, considérons la version discrète de la forme faible. Soit $\boldsymbol{u}_h \in X_h = \{\boldsymbol{v}_h \in W_h \subset$

$H'(\Omega)^2 \mid \boldsymbol{v}_h|_{\partial\Omega} = 0\}$ et $p_h \in Q_h \subset L^2(\Omega)$ tel que,

$$\frac{2\eta}{Re}\left(\nabla \boldsymbol{u}_h, \nabla \boldsymbol{v}_h\right)_{0,\Omega} - \left(p_h, \nabla \cdot \boldsymbol{v}_h\right)_{0,\Omega} = \left(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h\right)_{0,\Omega}.$$

Une version discrète de l'équation d'énergie est obtenue en posant $\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{v}_h$,

$$\frac{2\mu}{Re}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}_h|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_\Omega p_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla\Phi \cdot \boldsymbol{u}_h \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

De plus, la forme faible de l'équation de conservation de la masse nous apprend que

$$\int_\Omega q_h \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0, \, \forall \, q_h \in Q_h.$$

Ainsi, puisque $p_h \in Q_h$, l'équation de Stokes devient

$$\frac{2\mu}{Re}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}_h|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \Phi \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

La dernière intégrale n'est pas forcément nulle, puisque $\Phi$ n'est pas forcément dans $Q_h$. Ainsi, l'équation d'énergie discrète nous permet de conclure que cette erreur introduit une énergie supplémentaire au champ $\boldsymbol{u}_h$, produisant ainsi des courants parasites.

Une solution proposée par Gerbeau est de trouver $\Pi_h\Phi$, la projection de $\Phi$ dans $L^2$, telle que

$$\int_\Omega \Phi m_h \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega \Pi_h \Phi m_h \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \, \forall \, m_h \in Q_h.$$

Ainsi, on aura

$$\frac{2\mu}{Re}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}_h|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \Pi_h \Phi \nabla \cdot \boldsymbol{u}_h \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0. \tag{3.6}$$

L'équation (3.6) montre qu'on peut s'attendre à ce que l'énergie cinétique deviennent nulle. Les résultats obtenus par Gerbeau montrent que les courants parasites sont de l'ordre $10^{-12}$ pour des éléments rectangulaires [7].

Une autre piste intéressante, mais peut-être moins évidente, se trouve dans la thèse de David Munger [26]. Il introduit une projection donnée par la formule

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F} - \nabla\Delta^{-1}\nabla \cdot \boldsymbol{F}.$$

Ici, $\Delta^{-1}$ est la notation donnée à l'opérateur inverse du laplacien. Cette projection permet d'avoir une divergence nulle. En effet, si $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$, mais que $\nabla \cdot \boldsymbol{F}_h \neq 0$, alors la projection

nous donne

$$\nabla \cdot \mathcal{P}(\boldsymbol{F}_h) = \nabla \cdot \boldsymbol{F}_h - \nabla \cdot \nabla \Delta^{-1} \nabla \cdot \boldsymbol{F}_h = \nabla \cdot \boldsymbol{F}_h - \Delta \Delta^{-1} \nabla \cdot \boldsymbol{F}_h = \nabla \cdot \boldsymbol{F}_h - \nabla \cdot \boldsymbol{F}_h = 0.$$

De plus, cette projection élimine les gradients et préserve les rotationnels,

$$\mathcal{P}(\nabla \Phi) = \nabla \Phi - \nabla \Delta^{-1} \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla \Phi - \nabla \Delta^{-1} \Delta \Phi = \nabla \Phi - \nabla \Phi = 0;$$

$$\mathcal{P}(\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla \times \boldsymbol{F} - \nabla \Delta^{-1} \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F}.$$

Ainsi, pour l'équation de Stokes stationnaire (3.1), l'application de cette projection donne $\mathcal{P}(\Delta \boldsymbol{u}) = 0$. À une projection près, $\boldsymbol{u}$ est solution à une sorte d'équation de Laplace. On retrouve la pression à l'aide l'équation de la conservation de la quantité de mouvement du système (3.1),

$$\nabla p = \frac{\gamma \kappa(F)}{We} \nabla F - \frac{2\eta}{Re} \Delta \boldsymbol{u}.$$

### 3.3 Simulations

Les simulations qui suivent ont été produites avec DarylMPI. Celui-ci est le solveur éléments finis conçu par Roland Rivard afin de résoudre les équations de Navier-Stokes et les équations de Maxwell. Notons quelques points sur les simulations. Le domaine est $\Omega = [-1, 1]^3$. Le maillage est tel que $h = 0,02$ avec 489263 éléments P1-bulle/P1 (MINI) pour la vitesse et la pression respectivement. On utilise des éléments P1 pour la pseudo-concentration. L'élément P1 est un élément de Lagrange linéaire et l'élément P1-bulle est un élément de Lagrange linéaire avec un nœud de calcul au centre. On utilise les équations de Stokes instationnaires avec un pas de temps $\Delta t = 0,01$ et au maximum 100 pas de temps. Pour la pseudo-concentration, la demie épaisseur de la zone de transition est $\epsilon = 0,05$. On choisit cette valeur puisque la zone de transition doit contenir au moins trois éléments et on veut $3h \leq 2\epsilon$ ou $\epsilon \geq 3h/2 = 0,03$. Le rayon de la bulle centrée en $\mathbf{0}$ est $R = 0,25$. On utilise la méthode GMRES avec un préconditionneur de Schwarz à droite afin de facilité la résolution du système discret en profitant de la décomposition du domaine en $N$ sous domaine, où $N$ est le nombre de processeurs utilisés. La méthode GMRES est une méthode itérative qui minimise le résidue de l'équation linéaire à résoudre. La solution produite apparatient à un sous-espace de Krylov [27].

Dans ce problème, on considère $\rho_1 = \rho_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ avec $\gamma = 1/8$, $Re = 1$ et $We = 1$ afin d'obtenir $|\Delta p| = 1$.

Les tableaux qui suivent donnent le nombre de pas de temps pour atteindre l'état stationnaire,

l'erreur relative sur le saut en pression et la norme des courants parasites. $N$ est le nombre de processeurs utilisés (de 2 à 24). On considère l'état stationnaire atteint si le résidue de la forme faible discrétisée est plus petit ou égale à $10^{-6}$.

Tableau 3.1 Nombre de pas de temps pour atteindre l'état stationnaire pour le problème de Young-Laplace avec les méthodes SUPG et GD.

| $N$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| SUPG | - | - | - | - | - | - | - | - | - | N/A | N/A | N/A |
| GD | 7 | 8 | 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 7 | 9 | 9 | 8 | 9 |

Notons que dans le tableau 3.1, on note par un tiret les simulations pour lesquelles il n'y a pas de données.

La méthode SUPG et utilisée afin d'être comparé à la méthode de GD lorsqu'on élimine la reconstruction de la surface libre. Dans l'article de Yann-Meing Law, Roland Rivard et Steven Dufour [3], différentes méthodes de reconstruction sont utilisées afin de préserver la transition de $F$. Dans nos simulations, nous avons éliminé ces reconstructions afin d'éliminer une source d'erreur sur la conservation de masse. Il faut noter que les simulations avec la méthode SUPG nécessitent beaucoup plus de temps, soit environ dix heures pour $N = 24$, ce qui devrait être la simulation la plus rapide. On note N/A si l'état stationnaire n'a pas été atteint. On obtient des résultats similaires à ceux de [3]. On peut le voir dans les tableaux 3.1, 3.2 et 3.3. Néanmoins, on peut voir dans le tableau 3.1 qu'au mieux, il nous faut 7 pas de temps alors que dans l'article avec reconstruction, la meilleure performance est de 3 pas de temps. L'explication de cette différence n'est pas claire, mais l'absence de reconstruction de la surface libre est une source d'explication.

Tableau 3.2 Sauts en pression des simulations pour le problème de Young-Laplace avec les méthodes SUPG et GD.

| $N$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SUPG | - | - | - | - | - | - |
| GD | 0,997 | 0,985 | 0,977 | 0,967 | 0,990 | 0,976 |
| N | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| SUPG | - | - | - | 0,971 | 0,978 | 0,985 |
| GD | 0,984 | 0,9848 | 0,988 | 0,983 | 0,987 | 0,997 |

Le tableau 3.3, donne les erreurs relatives sur les sauts en pression. Ceux-ci sont calculés avec

$$E = \frac{|\Delta p_{\text{theo.}} - \Delta p_{\text{num.}}|}{|\Delta p_{\text{theo.}}|} = \left|1 - \left(\max_{\boldsymbol{x}\in\Omega_h} p - \min_{\boldsymbol{x}\in\Omega_h} p\right)\right|.$$

Tableau 3.3 Erreurs relatives (%) sur les sauts en pression pour le problème de Young-Laplace avec les méthodes SUPG et GD.

| $N$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SUPG | - | - | - | - | - | - |
| GD | 0,32 | 1,54 | 2,32 | 3,31 | 1,01 | 2,43 |
| N | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| SUPG | - | - | - | 2,86 | 2,17 | 1,53 |
| GD | 1,62 | 1,59 | 1,24 | 1,70 | 1,26 | 0,298 |

Notons que $\Delta p_{\text{theo.}} = 1$ et que $\Delta p_{\text{num.}}$ est la différence entre la pression maximum et minimum dans le domaine. Puisque le maximum de $p$ est dans la bulle, et que le minimum à l'extérieur, on obtient bien le saut en pression entre l'intérieur et l'extérieur. Dans le tableau 3.2, on ne voit pas de différences majeures entre les méthodes de SUPG et de GD. Néanmoins, dans le tableau 3.3, on voit que les erreurs relatives minimales ont été obtenues avec la méthode de Galerkin discontinue. De plus, on note que les erreurs relatives sont du même ordre de grandeur que celles obtenues dans l'article de Law, Rivard et Dufour [3]. Les normes des

Tableau 3.4 Normes de la vitesse $\boldsymbol{u}$ pour le problème de Young-Laplace avec les méthodes SUPG et GD.

| $N$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SUPG | - | - | - | - | - | - |
| GD | 0,089 | 0,10 | 0,08 | 0,077 | 0,102 | 0,1265 |
| N | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| SUPG | - | - | - | 0,087 | 0,071 | 0,073 |
| GD | 0,092 | 0,061 | 0,104 | 0,105 | 0,084 | 0,088 |

vitesses obtenues sont de l'ordre de $10^{-1}$ à $10^{-2}$. En comparaison, dans la thèse de Rivard [4], les courants parasites sont de l'ordre de $10^{-3}$ à $10^{-4}$. Dans l'article mentionné, elles sont de l'ordre de $10^{-6}$. Il semble qu'en éliminant la reconstruction, on augmente l'ordre de grandeur des courants parasites.

## 3.4 Loi de Amdahl

Finalement, il est possible d'appliquer la loi de Amdahl afin d'évaluer le $p$, le pourcentage du temps d'exécution bénéficiant de la parallélisation, en observant le lien entre les nombres de

processeurs et le temps nécessaire pour compléter les simulations,

$$T(N) = (1-p)T + \frac{pT}{N}. \tag{3.7}$$

Le paramètre $T$ est le temps nécessaire sans parallélisme. Le tableau 3.5 donne en nombre de millisecondes nécessaires pour compléter une simulation avec $N$ processeurs. Pour aider à mettre en contexte les données, une heure est $0,36 \times 10^7$ms.

TABLEAU 3.5 Nombre de millisecondes ($\times 10^7$) nécessaires pour compléter les simulations pour le problème de Young-Laplace avec les méthodes SUPG et GD.

| $N$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SUPG | - | - | - | - | - | - |
| GD | 4,538 | 1,85 | 1,046 | 0,6659 | 0,6992 | 0,5884 |
| N | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| SUPG | - | - | - | 4,284 | 4,485 | 3,652 |
| GD | 0,4926 | 0,3414 | 0,4087 | 0,369 | 0,3414 | 0,3329 |

Les formules (3.8) et (3.9) nous permettent de calculer les valeurs de $p$ et $T$,

$$p = \frac{N_1 - \eta N_2}{\eta - 1 + N_1 - \eta N_2}, \quad \eta = \frac{T(N_1)}{T(N_2)}; \tag{3.8}$$

$$T = \left(\frac{T(N_1) - T(N_2)}{N_1 - N_2}\right)\left(1 + \frac{\eta - 1}{N_1 - \eta N_2}\right). \tag{3.9}$$

Nous avons cherché les valeurs permettant de minimiser la norme entre la formule (3.9) et les données calculées. Nous obtenons le graphique de la figure 3.3.

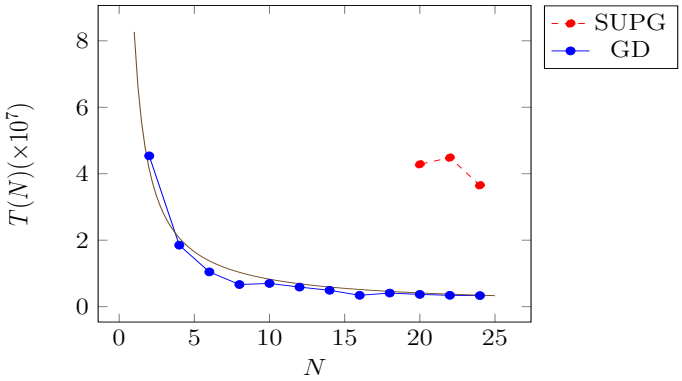


FIGURE 3.3 Comparaison entre les données calculés et la loi de Amdahl (3.7) pour minimiser la norme $\|\cdot\|_2$. ($T = 8.2691 \times 10^7$).

Ces résultats suggèrent qu'on a $p = 1$ et $T = 8.2691 \times 10^7$ millisecondes ($\sim$ 22 heures et 58 minutes). $p = 1$ signifie que le code profite environ de la parallélisation à 100% lorsqu'on utilise la méthode de Galerkin discontinue.

On peut conclure que le problème de Young-Laplace est modélisé avec succès. On obtient les bons sauts en pression avec les méthodes SUPG et de GD. Dans nos simulations, la méthode SUPG ne converge pas après 100 pas de temps et nécessite beaucoup plus de temps pour être complété. La méthode de GD converge en moins de 10 itérations et est significativement plus rapide que la méthode SUPG. On obtient également l'erreur minimale avec 24 processeurs, soit le nombre maximal disponible. Ainsi, pour les prochaines simulations, on propose d'utiliser le nombre maximal de processeurs disponibles.

# CHAPITRE 4 BULLE SOUMISE À LA POUSSÉE D'ARCHIMÈDE

Le problème de la dynamique d'une bulle soumise à la poussée d'Archimède permet de valider la modélisation d'un écoulement hydrodynamique à surface libre pour lequel il est possible d'observer des pertes de masse. Nous avons éliminé la reconstruction de la surface libre afin de minimiser les pertes de masse [4]. On compare les erreurs relatives sur les nombres de Reynolds terminaux et les formes des surfaces libres pour les méthodes SUPG et de GD.

## 4.1 Nombres adimensionnels

### 4.1.1 Quantités physiques des deux fluides

Afin de bien définir nos quantités physiques, on propose de définir le ratio entre les propriétés des deux fluides. On prend donc le ratio entre ces quantités dans le gaz et dans le liquide, [1]

$$\mathcal{C}_\rho = \frac{\rho_g}{\rho_\ell} \text{ et } \mathcal{C}_\eta = \frac{\eta_g}{\eta_\ell}.$$

On peut facilement définir les différences et les moyennes de la densité et de la viscosité dynamique en fonction des ratios et des propriétés du liquide :

$$\Delta\rho = \rho_\ell \left(1 - \mathcal{C}_\rho\right) \text{ et } \Delta\eta = \eta_\ell \left(1 - \mathcal{C}_\eta\right);$$

$$\overline{\rho} = \rho_\ell \left(\frac{1 + \mathcal{C}_\rho}{2}\right) \text{ et } \overline{\eta} = \eta_\ell \left(\frac{1 + \mathcal{C}_\eta}{2}\right).$$

On prendra l'habitude de choisir des quantités unitaires dans le fluide. Néanmoins, il faudra être prudent et se permettre de changer les valeurs. L'important sera de conserver les ratios.

### 4.1.2 Nombres hydrodynamiques

On introduit ici les nombres adimensionnels caractéristiques de la dynamique des bulles. L'écoulement à l'étude peut être modélisé avec l'utilisation du nombre d'Eötvös, qui représente l'importance des effets de la gravité par rapport aux effets capillaires,

$$Eo = \frac{\Delta\rho g L^2}{\gamma} = \frac{\rho_\ell \left(1 - \mathcal{C}_\rho\right) g L^2}{\gamma} \approx \frac{\rho_\ell g L^2}{\gamma}.$$

1. Par gaz, on veut simplement dire le fluide de la bulle et par liquide, on parle du fluide à l'extérieur de la bulle.

Avec ce nombre, on peut définir la longueur caractéristique

$$L = \sqrt{\frac{\gamma Eo}{\rho_\ell \left(1 - \mathcal{C}_\rho\right) g}} \approx \sqrt{\frac{\gamma Eo}{\rho_\ell g}}.$$

On associe souvent le nombre d'Eötvös à la taille de la bulle et on comprend pourquoi avec cette dernière relation. Si $\gamma = \rho_\ell = g = 1$, on a simplement $L \approx \sqrt{Eo}$ et une relation directe entre $Eo$ et la longueur caractéristique. Ce nombre peut aussi être lié au nombre de Weber, qu'on retrouve dans la force capillaire,

$$We = \frac{\overline{\rho} u^2 L}{\gamma} = Fr \left(\frac{1 + \mathcal{C}_\rho}{2}\right) \frac{\rho_\ell g L^2}{\gamma} = \frac{FrEo}{2} \left(\frac{1 + \mathcal{C}_\rho}{1 - \mathcal{C}_\rho}\right) \approx \frac{FrEo}{2}.$$

Cependant, pour le problème de la bulle dynamique, on utilise souvent le nombre de Weber dans le fluide autour de la bulle,

$$We_\ell = \frac{\rho_\ell Frg L^2}{\gamma} = \frac{EoFr}{1 - \mathcal{C}_\rho} \approx EoFr.$$

Ainsi, on notera que pour $Fr = 1$, $We \approx Eo/2$ et $We_\ell \approx Eo$. On propose donc de substituer le nombre de Weber par le nombre d'Eötvös. Un autre nombre adimensionnel nous permet de décrire la forme de la bulle, soit le nombre de Morton,

$$Mo = \frac{g \eta_\ell^4 \Delta\rho}{\gamma^3 \rho_\ell^2} = \frac{g \eta_\ell^4 \left(1 - \mathcal{C}_\rho\right)}{\rho_\ell \gamma^3} \approx \frac{g \eta_\ell^4}{\rho_\ell \gamma^3}.$$

Le nombre d'Eötvös et le nombre de Morton permettent de prédire la forme de la bulle via le diagramme de Grace 4.1. On peut aussi définir le nombre de Reynolds,

$$Re = \frac{\overline{\rho} u L}{\overline{\eta}} = \frac{\rho_\ell}{\eta_\ell} \left(\frac{1 + \mathcal{C}_\rho}{1 + \mathcal{C}_\eta}\right) \sqrt{Frg} L^{3/2} \approx \frac{\rho_\ell}{\eta_\ell} \sqrt{Frg} L^{3/2}.$$

Ce nombre peut également être exprimé comme

$$Re = \left(\frac{We_\ell^3}{FrMo}\right)^{1/4} = \frac{\rho_\ell}{\eta_\ell \left(1 - \mathcal{C}_\rho\right)} \sqrt{Frg} L^{3/2} \approx \frac{\rho_\ell}{\eta_\ell} \sqrt{Frg} L^{3/2}.$$

Les deux définitions sont les mêmes lorsque $\mathcal{C}_\rho, \mathcal{C}_\eta \ll 1$, mais pour être certain qu'on fait bien les choses, on peut définir les viscosités du liquide et du gaz en fonction de nos nombres

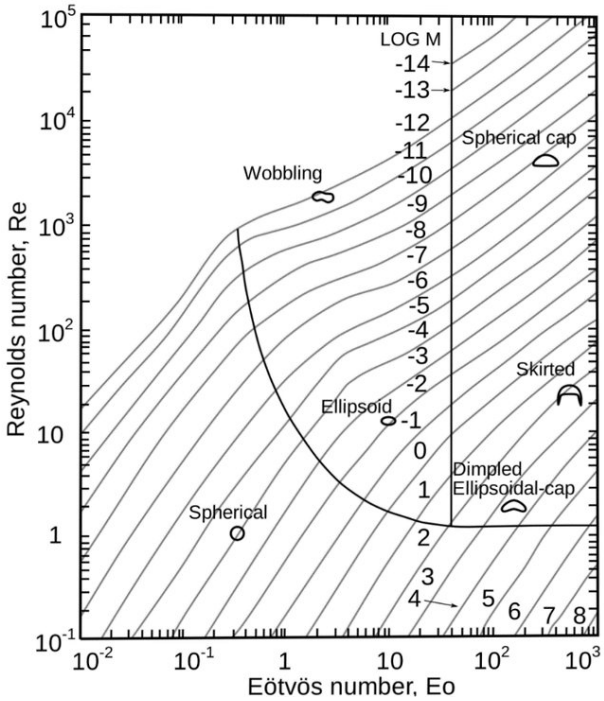


FIGURE 4.1 Diagramme de Grace tiré de [1].

adimensionnels,

$$\eta_\ell = \left(\frac{FrMo}{We_\ell^3}\right)^{1/4}\left(\frac{1+\mathcal{C}_\rho}{1+\mathcal{C}_\eta}\right)\rho_\ell\sqrt{Frg}L^{3/2} \approx \left(\frac{FrMo}{Eo^3}\right)^{1/4}\rho_\ell\sqrt{Frg}L^{3/2};$$

$$\eta_g = \mathcal{C}_\eta\left(\frac{FrMo}{We_\ell^3}\right)^{1/4}\left(\frac{1+\mathcal{C}_\rho}{1+\mathcal{C}_\eta}\right)\rho_\ell\sqrt{Frg}L^{3/2} \approx \mathcal{C}_\eta\left(\frac{FrMo}{Eo^3}\right)^{1/4}\rho_\ell\sqrt{Frg}L^{3/2}.$$

Défini ainsi, nous n'avons plus de problèmes avec nos définitions. Autrement, deux définitions pourraient donner des valeurs différentes [2]. On pose $Fr = g = 1$ et $\rho_\ell = 1$. On simplifie donc tous ces nombres. On suppose également que les ratios sont petits. On a donc

$$L = \sqrt{\gamma Eo},\ \ We_\ell = Eo,\ \ \eta_\ell = \left(\frac{Mo}{Eo^3}\right)^{1/4}L^{3/2} = Mo^{1/4}\gamma^{3/4}\ \text{ et } Re = \left(\frac{Eo^3}{Mo}\right)^{1/4}.$$

2. C'est un problème visible dans la thèse de Roland Rivard [4], bien que celui-ci n'impacte pas les résultats. L'observation de cette erreur motive la démarche détaillée.

Il nous reste à définir $\gamma$ afin d'avoir une définition complète de nos variables hydrodynamiques. On pourra prendre $\gamma = 1$ pour simplifier davantage,

$$L = \sqrt{Eo}, \;\; We_\ell = Eo, \;\; \eta_\ell = Mo^{1/4} \;\text{ et }\; Re = \left(\frac{Eo^3}{Mo}\right)^{1/4}.$$

Notons finalement que $\eta_\ell$ n'est pas forcément unitaire. Si $Mo = 0,1$ par exemple, on aura $\eta_\ell \approx 0,5623$.

### 4.1.3 Autres nombres rencontrés

Dans la littérature, on retrouve d'autres nombres adimensionnels pour décrire la physique du système. On propose ici certains de ces nombres et leurs liens avec ceux utilisés dans ce travail. Considérons d'abord le nombre de Galilée,

$$Ga = \frac{g\overline{\rho}^2 L^3}{\overline{\eta}^2} = \frac{g\rho_\ell^2}{\eta_\ell^2}\left(\frac{1+\mathcal{C}_\rho}{1+\mathcal{C}_\eta}\right)\left(\frac{\gamma Eo}{\rho_\ell\left(1-\mathcal{C}_\rho\right)g}\right)^{3/2}.$$

Si $Fr = g = 1$ avec $\rho_\ell = 1$ et $\mathcal{C}_\rho, \mathcal{C}_\eta \ll 1$, on a

$$Ga = \frac{(\gamma Eo)^{3/2}}{\eta_\ell^2} = \gamma Eo\sqrt{\frac{\gamma Eo}{Mo}}.$$

Si $\gamma = 1$, on a $Ga = Re^2$. Il est également possible de voir l'utilisation du nombre d'Archimède. Dans l'approximation $\mathcal{C}_\rho, \mathcal{C}_\eta \ll 1$, on a que

$$Ar = \frac{\rho_\ell \Delta\rho g L^3}{\eta_\ell^2} = Ga\left(\frac{1+\mathcal{C}_\eta}{1+\mathcal{C}_\rho}\right)(1-\mathcal{C}_\rho) \approx Ga.$$

Ensuite, on considère le nombre de Laplace ($La$), parfois nommé nombre de tension ($\Gamma$) ou nombre de Suratman ($Su$).

$$La = \frac{\gamma\overline{\rho}L}{\overline{\eta}^2} = \frac{\gamma\rho_\ell}{\eta_\ell^2}\frac{(1+\mathcal{C}_\rho)}{(1+\mathcal{C}_\eta)^2}\left(\frac{\gamma Eo}{\rho_\ell\left(1-\mathcal{C}_\rho\right)g}\right)^{1/2}$$

Il est possible de rencontrer également le nombre de Ohnesorge ($Oh = La^{-1/2}$). Cette définition est compatible avec $\eta_\ell = Mo^{1/4}$ et on a $La = Re^2/We$ avec $We = Eo$. Aussi, les nombres de Galilée et de Laplace nous donne les nombres d'Eötvös et de Morton,

$$Eo = \frac{Ga}{\gamma^{3/2}La}, \;\; Mo = \frac{Ga}{La^3}$$

### 4.1.4 Nombre de Reynolds terminal

Basé sur ces relations, il est possible d'établir une formule simplifiée pour le nombre de Reynolds terminal calculer avec $u_t$ la vitesse terminale. Celle-ci est la vitesse d'ascension stable atteinte par la bulle. On a

$$Re_t = \frac{\overline{\rho} u_t L}{\overline{\eta}} = \frac{\rho_\ell}{\eta_\ell}\left(\frac{1+\mathcal{C}_\rho}{1+\mathcal{C}_\eta}\right) u_t \sqrt{\frac{\gamma Eo}{\rho_\ell\left(1-\mathcal{C}_\rho\right) g}}.$$

Si $g = 1$ avec $\rho_\ell = 1$ et $\eta_\ell = Mo^{1/4}\gamma^{3/4}$, on a, pour $\mathcal{C}_\rho, \mathcal{C}_\eta \ll 1$,

$$Re_t = u_t \left(\frac{Eo^2}{\gamma Mo}\right)^{1/4} = \frac{u_t Re}{(\gamma Eo)^{1/4}}.$$

Si $\gamma = 1$, on a la formule simplifiée,

$$Re_t = u_t \left(\frac{Eo^2}{Mo}\right)^{1/4} = \frac{u_t Re}{Eo^{1/4}}.$$

## 4.2 Simulations

Les simulations qui suivent ont été produites avec la géométrie $\Omega = [-1,5; 1,5] \times [0; 6] \times [-1,5; 1,5]$ afin d'éviter que la bulle ne soit influencée par les parois. Selon Marchandise [28], il faut que l'épaisseur du domaine soit trois fois plus grande que le diamètre de la bulle initiale. Ici, on choisit donc de débuter avec une sphère de rayon $R = 1/2$ centrée en $(0, 1, 0)$. On discrétise avec un maillage qui est tel que $h = 0,05$ et on se donne une demie-épaisseur de la zone de transition $\epsilon = 0,08 \geq (3/2)0,05 = 0,075$. On prend $\Delta t = 0,025$ afin de satisfaire le critère du nombre de Courant [29],

$$Co = \frac{u\Delta t}{h} \leq 1 \Rightarrow \Delta t \leq \frac{h}{u} = \frac{0,05}{u}.$$

Ce nombre propose de prendre $\Delta t$ de sorte que l'information ne puisse pas traverser plus d'un élément en un pas de temps. Ici, il nous faut une mesure de la vitesse $u$. En consultant la thèse de Roland Rivard, on trouve un $u$ maximale autour de $0,6$. Le mémoire de Yann-Meing Law-Kam-Cio [2] propose une vitesse maximale similaire. Ceci suggère de prendre $\Delta t \leq 0,0833$. On préfère prendre $\Delta t = 0,025$ afin de supporter des vitesses $u \leq 2$. On fait le choix des paramètres donnés au tableau 4.1 pour nos simulations.

Les nombres adimensionnels permettent la réécriture de l'équation de conservation de la

Tableau 4.1 Nombres adimensionnels.

| Formes de la bulle | $Eo$ | $Mo$ | $Re$ |
|---|---|---|---|
| Sphérique | 1 | 1 | 1 |
| Ellipsoïdale | 10 | 0.1 | 10 |
| Calotte sphérique | 100 | 1 | 31,6228 |

quantité de mouvement comme

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} - \left(\frac{Mo}{Eo^3}\right)^{1/4} \Delta \boldsymbol{u} = -\nabla p + \rho \boldsymbol{g} - \frac{1}{Eo} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|_2}\right) \nabla F.$$

### 4.2.1 Cas 1 : Bulle sphérique

Dans le premier cas, on travaille avec $Mo = 1$ et $Eo = 1$. La bulle devrait donc être sphérique. On obtient la forme illustrée à la figure 4.2. Il faut noter que la méthode SUPG s'est arrêtée à l'itération 99 de l'algorithme de Picard, au pas de temps 98.

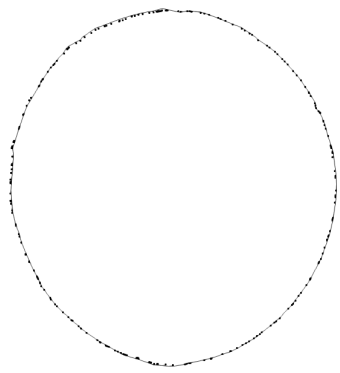

Figure 4.2 Formes finales des bulles pour la méthode de GD $(-)$ et la méthode SUPG $(\cdots)$ dans le plan $z = 0$ pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles sphériques.

Les formes sont identiques et sphériques. Observons la vitesse moyenne en $y$ pour les deux méthodes deux méthodes dans la figure 4.3.

Soit $\mathcal{B}(t)$ l'ensemble des points qui se trouvent dans la bulle au temps $t$.

$$\mathcal{B}(t) = F^{-1}\left([1/2, \max\{F(\boldsymbol{x}, t)\}]\right).$$

Cet ensemble est celui utilisé pour tous les calculs. On ne prend pas simplement les points dont la pseudo-concentration se trouve entre 1/2 et 1, puisque la valeur maximal de la pseudo-

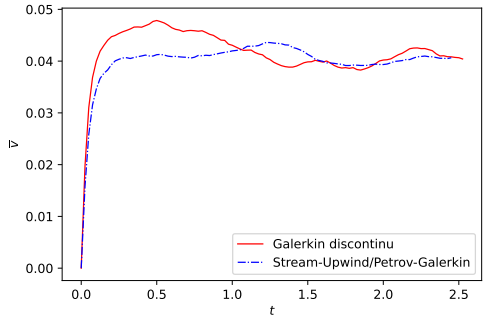


FIGURE 4.3 Vitesse moyenne $\overline{v}$ pour la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles sphériques.

concentration augmente en raison de la diffusion numérique. Avec cet ensemble de points en main, la vitesse moyenne au dernier pas de temps pour nos simulations est $\overline{v} = 0,0440$ pour la méthode de GD et $\overline{v} = 0,0445$ pour la méthode SUPG. Les racines carrées des écart-types sont $\sigma_{\overline{v}} = 0,0235$ et $\sigma_{\overline{v}} = 0,0239$ respectivement. Puisque $Re = 1$, cette vitesse moyenne donne les nombres de Reynolds terminaux,

$$Re_{t,\mathrm{GD}} = 0,0440 \text{ et } Re_{t,\mathrm{SUPG}} = 0,0445$$

Les erreurs relatives sont de $11,93\%$ pour la méthode de GD et $10,93\%$ pour la méthode SUPG. L'erreur est similaire dans les deux cas et en dessous de 15%, l'erreur des courbes de la figure 4.1. S'ajoute également une erreur sur la lecture du diagramme. Les résultats sont de ce fait acceptables.

Finalement, on vérifie la conservation de la masse avec les volumes des deux fluides. On compare ceux-ci avec les volumes initiaux. La figure 4.4 montre que la méthode SUPG à une

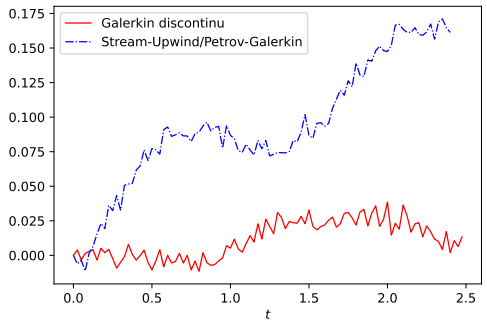


FIGURE 4.4 Erreur relative (%) sur la masse de la bulle pour la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles sphériques.

erreur relative finale de $0,1613\%$ alors que la méthode de GD à une erreur relative finale de $0,01334\%$, soit presque 10 fois moins. L'avantage de la méthode de GD est claire.

### Cas 2 : Bulle de forme ellipsoïdale

Dans le second cas, on travaille avec $Mo = 0.1$ et $Eo = 10$. La bulle devrait donc être un ellipsoïde. On obtient les formes introduites à la figure 4.5 pour les deux méthodes.

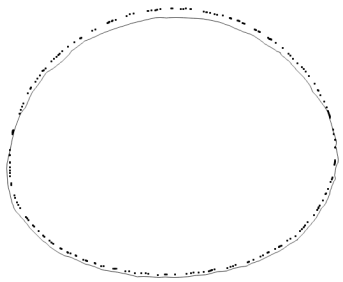

FIGURE 4.5 Formes finales des bulles pour la méthode de GD $(-)$ et SUPG $(\cdots)$ dans le plan $z = 0$ pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles ellipsoïdales.

Encore une fois, les formes sont très similaires. Néanmoins, on observe que pour la méthode SUPG, le dessus de la bulle est plus haut. On pourrait s'attendre à une vitesse moyenne légèrement plus grande que pour la méthode de GD. C'est ce qui est illustré à la figure 4.6.

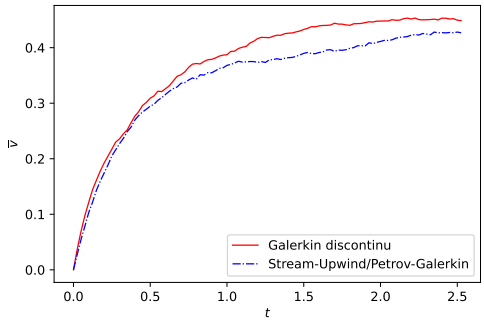


FIGURE 4.6 Vitesse moyenne $\overline{v}$ pour la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles ellipsoïdales.

On obtient des vitesses moyennes de $\overline{v} = 0,412$ pour la méthode de GD et $\overline{v} = 0,419$ pour la méthode SUPG. Les nouveaux nombres de Reynolds terminaux sont

$$Re_{t,\mathrm{GD}} = 4,12 \ \text{ et } \ Re_{t,\mathrm{SUPG}} = 4,19. \tag{4.1}$$

Les erreurs relatives montent à $10,35\%$ et $9,213\%$ pour la méthode de GD et la méthode SUPG respectivement. Les erreurs sont acceptables dans les deux situations. Pour la conservation de masse, on a le comportement illustré à la figure 4.7.

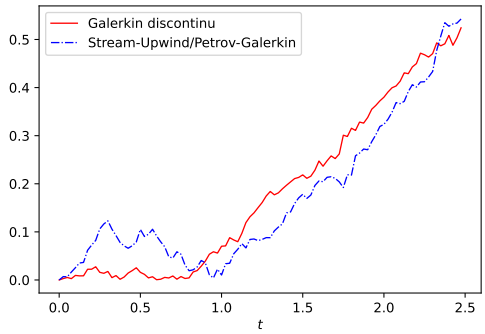


FIGURE 4.7 Erreur relative (%) sur la masse de la bulle pour la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles ellipsoïdales.

Ainsi, la méthode SUPG est légèrement moins performante que la méthode de GD, mais l'écart n'est plus aussi prononcé. Les erreurs relatives sont maintenant de $0,5242\%$ pour la méthode de GD et $0,5426\%$ pour la méthode SUPG. Ainsi, au moins jusqu'à $Re = 10$, la méthode de GD semble être plus favorable au niveau de la conservation de masse tout en respectant la physique du problème.

**Cas 3 : Bulle en forme de jupe**

Finalement, on travaille avec $Mo = 1$ et $Eo = 100$. On devrait voir apparaître une bulle en forme de jupe. On obtient les formes illustrées à la figure 4.8 pour les deux méthodes.

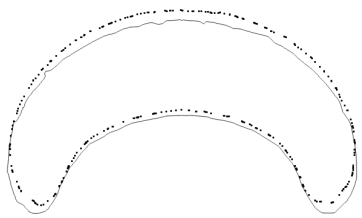

FIGURE 4.8 Formes finales des bulles pour la méthode de GD $(-)$ et la méthode SUPG $(\cdots)$ dans le plan $z = 0$ pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles en forme de jupe.

La bulle monte plus vite avec la méthode SUPG. Voyons ce qu'on observe au niveau de la

vitesse moyenne à la figure 4.9.

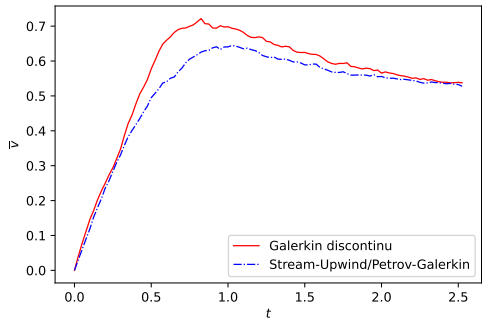


FIGURE 4.9 Vitesse moyenne $\overline{v}$ de la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles en forme de jupe.

Les vitesses moyennes finales sont $\overline{v} = 0,518$ pour la méthode de GD et $\overline{v} = 0,528$ pour la méthode SUPG. Les nouveaux nombres de Reynolds terminaux sont

$$Re_{t,\mathrm{GD}} = 16,37, \quad Re_{t,\mathrm{SUPG}} = 16,684.$$

Les erreurs relatives sont donc 18.15% pour la méthode de GD et 16.58% pour la méthode SUPG. Bien qu'on soit près du 15% de précision du diagramme de Grace, on dépasse le pourcentage d'erreur et on peut conclure que la physique du problème n'est pas parfaitement respectée bien que la forme des bulles soit la bonne.

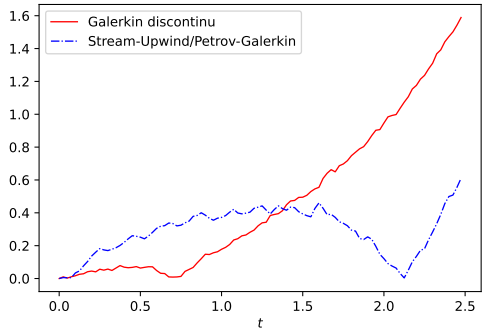


FIGURE 4.10 Erreur relative (%) sur la masse de la bulle pour la méthode de GD (-) et la méthode SUPG (-.) pour le problème des bulles soumise à la poussée d'Archimède pour les bulles en forme de jupe.

Pour la conservation de masse, la figure 4.10 montre qu'on a une erreur relative de $1,589\%$ pour la méthode de GD et $0,6102\%$ pour la méthode SUPG. Ainsi, pour $Re = 31,6228$, la

méthode SUPG offre une meilleure performance. Puisque nos prochaines simulations considèrent généralement $Re$ de l'ordre 1 à 10, on peut prendre la méthode de GD sans problème pour nos futures simulations.

On résume l'ensemble des résultats dans le tableau 4.2.

TABLEAU 4.2 Nombres de Reynolds terminaux pour le problème de la bulle dynamique.

| Galerkin discontinu | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Forme | $Re_t$ | $\overline{v}$ | $\sigma_{\overline{v}}$ | $Re_t^*$ | Erreur |
| Sphérique | $0,05$ | $0,0440$ | $2,354 \times 10^{-2}$ | $0,0440$ | $11,93\%$ |
| Ellipsoïdale | $4,6$ | $0,412$ | $1,769 \times 10^{-1}$ | $4,12$ | $10,35\%$ |
| Jupe | $20$ | $0,518$ | $2,114 \times 10^{-1}$ | $16,37$ | $18,15\%$ |
| Stream-Upwind/Petrov-Galerkin | | | | | |
| Forme | $Re_t$ | $\overline{v}$ | $\sigma_{\overline{v}}$ | $Re_t^*$ | Erreur |
| Sphérique | $0,05$ | $0,0445$ | $2,394 \times 10^{-2}$ | $0,0445$ | $10,93\%$ |
| Ellipsoïdale | $4,6$ | $0,418$ | $1,837 \times 10^{-1}$ | $4,18$ | $9,213\%$ |
| Jupe | $20$ | $0,528$ | $2,175 \times 10^{-1}$ | $16,69$ | $16,56\%$ |

En conclusion, plus la diffusion diminue plus la méthode SUPG est avantageuse en comparaison avec la méthode de GD. Il est intéressant de rappeller que la méthode SUPG est la méthode introduisant le plus de diffusion numérique. Ainsi, il semble que la performance dépende de la diffusion présente. On peut observer une tendance similaire dans l'article de Law-Kam-Cio, Rivard et Dufour [3].

# CHAPITRE 5 INSTABILITÉ DE RAYLEIGH-TAYLOR

L'instabilité de Rayleigh-Taylor (IRT) se produit lorsqu'un fluide de densité $\rho_2$ se trouve au-dessus d'un fluide de densité $\rho_1$ avec $\rho_2 > \rho_1$. Lorsque le système est au repos, on se trouve dans un équilibre instable. Une faible perturbation suffit à déclencher l'instabilité [9], [30]. Par exemple, une faible diffusion massique peut être suffisante afin que le phénomène démarre. Puique nous ne simulons pas la diffusion massique, on pourrait penser qu'il n'est pas possible d'observer le phénomène, mais en pratique, la diffusion numérique limite la diffusion massique.

Il faut noter que ce phénomène est un des mécanismes derrière la formation de gouttes, puisque durant sa formation, on observe un fluide lourd au-dessus de l'air [1]. De plus, il faut également noter que la force de gravité n'est pas la seule force pouvant produire cette instabilité. Il suffit d'avoir une accélération dans le sens opposé au gradient de densité [10].

Dans les simulations qui suivent, le nombre de Reynolds est défini comme

$$Re = \frac{\rho_2 \sqrt{g} L^{3/2}}{\eta_1} = L^{3/2}.$$

Cette expression vient de la simplification $g = \eta_1 = \rho_2 = 1$. Afin de définir $\rho_1$, on introduit le nombre d'Atwood

$$A_t = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 \left( \frac{1 - A_t}{1 + A_t} \right).$$

Pour définir $\eta_2$, il faut simplement imposer un ratio entre les viscosités. Pour simplifier la présentation, on pose également $\eta_2 = 1$. On prendra $A_t = 1/2$ et donc $\rho_1 = \rho_2/3 = 1/3$.

## 5.1 Demi-hauteur de pénétration

Afin de vérifier si les approximations calculées sont valides, on peut calculer la demi-hauteur de pénétration du fluide lourd dans le fluide léger. L'expression

$$h(t) = \alpha A_t g t^2$$

est la première à avoir été utilisée afin de valider ce type de problème. Cependant, cette expression n'est pas assez précise et permet seulement la validation du comportement asymptotique. De plus, elle ne respecte pas une condition initiale générale $h(0) = h_0$. On peut ajouter $h_0$, tout en ayant $h'(0) = 0$ tel que souhaité, mais l'expression obtenue évolue trop lentement.

### 5.1.1 Modèle de Ristorcelli et Clark

Le modèle qui suit a été rigoureusement obtenues par Ristorcelli et Clark [5] en simplifiant l'instabilité de RT comme l'élargissement d'une couche de mélange homogène. Ils obtiennent l'équation différentielle

$$h'(t) = 2\sqrt{\alpha A_t g h(t)} \Rightarrow h(t) = \alpha A_t g t^2 + 2\sqrt{\alpha A_t g h_0} t + h_0 = \left(\sqrt{\alpha A_t g} t + \sqrt{h_0}\right)^2 \tag{5.1}$$

pour laquelle la solution est simple à trouver. Ce modèle est celui utilisé par Roland Rivard [4] dans sa validation du problème. Cependant, une erreur relative significative est présente et celle-ci peut venir du fait que ce modèle nous empêche d'avoir $\boldsymbol{u}(0) = 0$. En effet, si la vitesse est nulle, on aura $h'(0) = 0 = 2\sqrt{\alpha A_t g h_0} \neq 0$ si $h_0 \neq 0$. Il nous faudra donc modifier ce modèle.

Puisque le modèle (5.1) est asymptotiquement valide, on peut l'utiliser afin de déterminer le nombre de pas de temps nécessaire pour une simulation. Si on atteint les limites du domaine, il n'est plus possible d'observer l'évolution de $h(t)$. Il faut une autre métrique afin d'étudier l'instabilité de RT au-delà de cette évolution. Néanmoins, il est possible de trouver $t$ tel que $h(t) = h_{\max}$,

$$h(t) = \left(\sqrt{\alpha A_t g} t + \sqrt{h_0}\right)^2 \Rightarrow t_{\max} = \frac{\sqrt{h_{\max}} - \sqrt{h_0}}{\sqrt{\alpha A_t g}} = \sqrt{\frac{h_{\max}}{\alpha A_t g}} - t_0.$$

Ici, $t_0$ est le moment pour lequel le terme quadratique est égal au terme constant dans l'expression de Ristorcelli et Clark. Il faut cependant faire attention. Pour $\alpha = 0,08$, on a $t_{\max} = 7,0791$ et pour $\alpha = 0,01$, on a $t_{\max} = 20,0228$. La différence est grande et le temps nécessaire pour atteindre $t = 6$ est déjà considérable. Il faut donc une évaluation préliminaire de $\alpha$.

### 5.1.2 Échelle de Taylor

L'échelle de Taylor est l'échelle pour laquelle les effets inertiels sont négligeables. Ainsi, en étudiant ce qui se passe à cette échelle, il sera possible de modifier le modèle inertiel afin d'obtenir une meilleure description de l'instabilité pour $t < t_0$. L'article de Cook et Dimotakis [31] nous informe que l'échelle de Taylor est de l'ordre de $\lambda = \sqrt{t}$. Ristorcelli et Clark font la même observation. On souhaite ainsi obtenir un modèle qui inclue à la fois les effets de l'échelle de Taylor et les effets inertiels dans $h(t)$,

$$h(t) = h_{\text{inert.}}(t) + h_{\text{Taylor}}(t).$$

Notons que l'échelle que l'on considère ici n'est pas lié à de la diffusion massique. On veut simplement observer les effets de la diffusion numérique tout en corrigeant le problème des conditions initiales. L'article de Cook et Dimotakis [31] propose d'utiliser l'expression

$$h_{\text{Taylor}}(t) = 6,58\sqrt{\frac{t+t_0}{Pe}} \tag{5.2}$$

pour modéliser le comportement initial. $Pe$ est le nombre de Péclet qui représente la force des effets inertiels face à la diffusion. Puisqu'on a $1/Pe$ dans l'expression (5.2), si les effets inertiels deviennent plus importants, alors ce terme devient plus petit. C'est le comportement souhaité. Pour notre modèle, ajoutons cette fonction à l'expression inertielle,

$$h(t) = \alpha A_t g t^2 + 2\sqrt{\alpha A_t g h_0}t + h_0 + \mathcal{C}\sqrt{\frac{t+t_0}{Pe}} + \delta h.$$

Nous avons modifié $h_{\text{Taylor}}$ afin d'obtenir la bonne vitesse initiale. En effet, si on veut une expression valide pour $t < t_0$, il ne sera pas possible d'ignorer le comportement initial :

$$\begin{aligned} h(t=0) = h_0 + \mathcal{C}\sqrt{\frac{t_0}{Pe}} + \delta h = h_0 \Rightarrow \delta h = -\mathcal{C}\sqrt{\frac{t_0}{Pe}} \\ \dot{h}(t) = 2\alpha A_t g t + 2\sqrt{\alpha A_t g h_0} + \frac{\mathcal{C}}{2\sqrt{Pe}}\frac{1}{\sqrt{t+t_0}} \\ \dot{h}(t=0) = 2\sqrt{\alpha A_t g h_0} + \frac{\mathcal{C}}{2\sqrt{Pe t_0}} = v_0 \Rightarrow \mathcal{C} = 2v_0\sqrt{Pe t_0} - 4\sqrt{\alpha A_t g Pe h_0 t_0} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $v_0 = 0$, le modèle modifié nous donne

$$h(t) = \alpha A_t g t^2 + 2\sqrt{\alpha A_t g h_0}t + h_0 - 4\sqrt{\alpha A_t g h_0 t_0}\left(\sqrt{t+t_0} - \sqrt{t_0}\right).$$

Étudions ce qui se passe à $t = 0$. On s'attend à ce que le modèle performe bien pour $t < t_0$. Cependant, en appliquant la condition $\dot{h}(t = 0) = v_0$, on perd l'influence du nombre de Péclet qui devrait normalement nous permettre de réduire les effets de l'échelle de Taylor. La performance n'est pas optimale. La courbe ne correspond pas aux données. L'effet de l'échelle de Taylor est trop fort.

### 5.1.3 Atténuation de l'échelle de Taylor

#### Introduction de la fonction d'atténuation

La sous-section 5.1.2 semble être un retour en arrière dans la confection de notre modèle. En effet, nous avons perdu tous les bons comportements. Cependant, les résultats théoriques des

articles consultés semblent suggérer que nous utilisons les bonnes fonctions. Aussi, il semble nécessaire de simplement réduire la force de l'échelle de Taylor.

Dans un premier temps, nous procéderons purement mathématiquement. L'idée sera d'obtenir des conditions afin d'obtenir une bonne fonction d'atténuation. Ensuite, nous allons justifier physiquement une telle fonction. Celle-ci permet de corriger le modèle et d'obtenir un bon comportement pour tout $t$.

Soit une fonction d'atténuation $\psi(t)$. On propose d'étudier

$$h(t) = \alpha A_t g t^2 + 2\sqrt{\alpha A_t g h_0} t + h_0 - 4\sqrt{\alpha A_t g h_0 t_0}\left(\sqrt{t+t_0} - \sqrt{t_0}\right)\psi(t).$$

On espère trouver $\psi(t)$ un facteur multiplicatif réduisant l'importance de l'échelle de Taylor dans le régime inertiel. L'action devrait être similaire à l'augmentation du nombre de Péclet. L'erreur commise avec le modèle inertiel doit tendre vers 0 lorsque $t$ devient grand,

$$\epsilon = \lim_{t\to\infty} |h_{\text{inert.}}(t) - h(t)| = \lim_{t\to\infty}\left(4\sqrt{\alpha A_t g h_0 t_0}\left(\sqrt{t+t_0} - \sqrt{t_0}\right)|\psi(t)|\right).$$

Si $\psi(t) = 1$, comme dans le modèle précédent, alors l'erreur tend vers l'infini. Ainsi, une première condition est donné par

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t+t_0} - \sqrt{t_0}\right)|\psi(t)| = 0.$$

Ensuite, on veut la dérivée de $\psi(t)$ soit nulle pour $t = 0$. Calculons la dérivée,

$$\dot{h}(t) = 2\alpha A_t g t + 2\sqrt{\alpha A_t g h_0} - 4\sqrt{\alpha A_t g h_0 t_0}\left[\frac{\psi(t)}{2\sqrt{t+t_0}} + \psi'(t)\left(\sqrt{t+t_0} - \sqrt{t_0}\right)\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{h}(t=0) = 2\sqrt{\alpha A_t g h_0} - 2\sqrt{\alpha A_t g h_0}\psi(0) = 0 \Rightarrow 1 - \psi(0) = 0 \Rightarrow \psi(0) = 1.$$

Ensuite, pour être certain d'avoir la bonne vitesse inertiel, il faut que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{\sqrt{t+t_0}} = 0 \text{ et } \lim_{t\to\infty}\psi'(t)\left(\sqrt{t+t_0} - \sqrt{t_0}\right) = 0.$$

Il faut que la dérivée seconde tende également vers la limite inertielle. Calculons cette dérivée seconde et trouvons les conditions limites,

$$\ddot{h}(t) = 2\alpha A_t g - 4\sqrt{\alpha A_t g h_0 t_0}\left[-\frac{\psi(t)}{4(t+t_0)^{3/2}} + \frac{\psi'(t)}{\sqrt{t+t_0}} + \psi''(t)\left(\sqrt{t+t_0} - \sqrt{t_0}\right)\right],$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{(t+t_0)^{3/2}} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\psi'(t)}{\sqrt{t+t_0}} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} \psi''(t)\left(\sqrt{t+t_0} - \sqrt{t_0}\right) = 0.$$

Ces conditions sont nécessaires afin d'obtenir une fonction $\psi(t)$ telle que le comportement inertiel reste valide tout en satisfaisant les conditions initiales.

### Fonction d'atténuation du mouvement brownien

Pour trouver $\psi(t)$, il faut justifier la forme de cette fonction physiquement. Son introduction est analogue à celle du nombre de Péclet. Ainsi, $\psi(t)$ doit atténuer l'échelle de Taylor lorsque la diffusion est moins importante que les effets inertiels. La diffusion massique provient de la vibration et des collisions entre les particules de fluides, ce comportement est similaire au mouvement brownien. Bien que notre modèle cherche à rendre compte de la diffusion numérique, on utilisera la physique pour inspirer une fonction d'atténuation.

L'idée est d'introduire une fonction $\psi(t)$ basée sur la probabilité qu'une particule effectue un déplacement $\lambda \sim \sqrt{t}$ en un temps $t$.[1] La fonction de probabilité recherchée est la densité de Smirnov,

$$f(x,t) = \sqrt{\frac{x^2}{4\pi D t^3}} e^{-x^2/4Dt}.$$

Cette densité est la probabilité qu'un déplacement $x$ se produise en un temps $t$. Ici, on veut la probabilité d'un déplacement à l'échelle de Taylor $\lambda \sim \sqrt{t}$,

$$f(\lambda,t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi D t^2}} e^{-1/4D}.$$

Utilisons la condition $\psi(0) = 1$ afin de trouver une valeur pour $1/4D$. Puisque l'expression diverge en $t = 0$, prenons $D = D(t)$ afin d'éviter cette divergence,

$$\frac{1}{4\pi D t^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4D} = \pi t^2 \Rightarrow D(t) = \frac{1}{4\pi t^2}.$$

Ainsi, la probabilité prend la forme

$$\psi(t) = f(\lambda,t) = e^{-\pi t^2}, \quad \psi(0) = 1.$$

Est-ce que cette probabilité est valide ? La condition en $t = 0$ signifie qu'on est assuré d'avoir de la diffusion. Ceci à du sens, puisque la vitesse étant nulle, la diffusion est le seul mécanisme permettant le mouvement. À ce point-ci, s'il n'y a pas de mouvement, c'est que le système est à l'équilibre et si c'était le cas, la simulation serait terminée.

1. Cette logique est similaire à celle du développement basé sur la distribution de Maxwell-Boltzmann.

Il faut maintenant vérifier que $\psi(t)$ satisfait toutes les conditions proposées. On utilisera le fait que $e^{-Kt^2}$ décroît toujours plus vite que $t^n$ pour $K \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{R}_+$. On a que $\lim_{t\to\infty} e^{-Kt^2} P_n(t) = 0$, où $P_n(t)$ est un polynôme de degré $n \geq 0$. Calculons les 5 limites mentionnées plus haut :

1. $$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\pi t^2}}{\sqrt{t+t_0}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{\pi t^2}\sqrt{t+t_0}} = 0;$$

2. $$\lim_{t\to\infty} (-2\pi) t e^{-\pi t^2} \left(\sqrt{t+t_0} - \sqrt{t_0}\right) = \lim_{t\to\infty} e^{-\pi t^2} P_{3/2}(t) = 0;$$

3. $$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\pi t^2}}{(t+t_0)^{3/2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{\pi t^2}\,(t+t_0)^{3/2}} = 0;$$

4. $$\lim_{t\to\infty} \frac{(-2\pi) t e^{-\pi t^2}}{\sqrt{t+t_0}} = \lim_{t\to\infty} e^{-\pi t^2} P_{1/2}(t) = 0;$$

5. $$\lim_{t\to\infty} \left[4\pi^2 t^2 e^{-\pi t^2} - 2\pi e^{-\pi t^2}\right] \left(\sqrt{t+t_0} - \sqrt{t_0}\right) = \lim_{t\to\infty} e^{-\pi t^2} \left(P_{5/2}(t) + P_{1/2}(t)\right) = 0.$$

Le comportement à la limite $t \to \infty$ et en $t = 0$ est le bon. Cependant, l'expression produit une transition trop rapide. Il faut normaliser la puissance en considérant une diffusion non pas selon $t$, mais selon $t/t_0$. Ainsi, notre modèle modifié devient

$$h(t) = \alpha A_t g t^2 + 2\sqrt{\alpha A_t g h_0}\, t + h_0 - 4\sqrt{\alpha A_t g h_0 t_0} \left(\sqrt{t+t_0} - \sqrt{t_0}\right) e^{-\pi t^2/t_0^2}.$$

Ici, $t_0$ est le temps pour lequel la diffusion est négligeable devant les effets inertiels. Dans la littérature, on retrouve souvent $t_0 = \sqrt{h_0/\alpha A_t g}$. Cette expression dépend de $\alpha$ et puisqu'on trouve généralement $\alpha$ avec $h(t)$, on est dans une situation circulaire. On propose donc de trouver $h_I$, la hauteur à laquelle l'écoulement atteint la zone inertielle,

$$\begin{aligned} h_I = h\left(\sqrt{\frac{h_0}{\alpha A_t g}}\right) &= 2h_0 + 2h_0 - 4\sqrt{\alpha A_t g h_0}\, t_0 \left(\sqrt{2} - 1\right) e^{-\pi} e^{1/4} \\ \Rightarrow h_I &= 4h_0 \left(1 - \left(\sqrt{2} - 1\right) e^{-\pi} e^{1/4}\right) \approx 4h_0(0,977). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Il est intéressant de remarquer que pour $h_0 = 0$, on tombe automatiquement dans la zone inertielle. C'est ce que le modèle de Ristorcelli et Clark prévoit. Ensuite, cette expression est constante. La seule variable est la valeur de $t_0$ pour laquelle on atteint la zone inertielle.

L'expression (5.3) est obtenue en supposant la présence de diffusion physique. Cependant, dans nos simulations, nous n'avons pas de diffusion massique. La seule diffusion présente est la diffusion numérique. Ainsi, on propose d'utiliser la même expression en se permettant de changer $t_0$ par $\tau$, qu'on prend afin de minimiser l'erreur avec les données numériques,

$$h_\tau(t) = \alpha A_t g t^2 + 2\sqrt{\alpha A_t g h_0} t + h_0 - 4\sqrt{\alpha A_t g h_0 \tau}\left(\sqrt{t+\tau} - \sqrt{\tau}\right) e^{-\pi t^2/\tau^2} e^{t/4\tau}.$$

Précisons une fois de plus que, les modifications proposées permettent de réduire l'erreur relative, mais il faut faire attention à ne pas remplacer la validation par un exercice de régression. Il faut donc toujours donner plus d'importance à la zone inertielle pour laquelle une démonstration rigoureuse existe.

Nos modifications doivent être vues comme une possible description de la diffusion numérique. Il ne faut pas y voir une réalité physique. Terminons cette section en ajoutant que nos descriptions introduisent des nombres à déterminer. Ceux-ci n'ont pas de réalité physique. Il faut les interpréter.

### 5.1.4 $\alpha$ variable

Une autre modification possible est de faire varier $\alpha(t)$ entre 0 et $\alpha$, la valeur dans le régime inertiel. L'idée est que $\alpha$ ne peut pas être constant. En effet, si on isole cette variable, on a

$$\alpha = \frac{(h'(t))^2}{4A_t g h(t)}.$$

Pour $h_0 \neq 0$ et $h'(0) = 0$, on a $\alpha(0) = 0$ et cette valeur tend éventuellement vers une constante dans le régime inertiel. $\alpha(t)$ est le ratio d'une énergie cinétique $K(t) = (h'(t))^2/2$ et d'une énergie potentielle $P(t) = 2A_t g h(t)$. Selon Ristorcelli et Clark [5], on a probablement les énergies cinétiques et potentielles moyennes à la surface libre.

On modifie directement l'expression de Ristorcelli et Clark afin de permettre à $\alpha(t)$ de varier selon $t$. On conserve la forme du modèle afin d'être assuré que l'expression soit valide dans le régime inertiel.

$$h(t) = \alpha(t) A_t g t^2 + 2\sqrt{\alpha(t) A_t g h_0} t + h_0$$

On propose d'utiliser une transition de $\alpha(t)$ autour d'un temps $\tau$ sur une distance $\delta$. Ce choix

n'est pas unique et il nous faudra trouver des valeurs pour $\tau$ et $\delta$ tels que

$$\alpha(t) = \alpha \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau - \delta; \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t-\tau}{\delta} + \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi(t-\tau)}{\delta}\right)\right) & \text{si } |t-\tau| \leq \delta; \\ 1 & \text{si } t > \tau + \delta. \end{cases}$$

On propose de prendre $\alpha(t) = \alpha H_\delta(t-\tau)$, où $H$ une approximation de la fonction d'Heaviside. C'est une transition simple, mais une étude plus approfondie pourrait permettre une transition plus précise et mieux justifiée.

## 5.2 Résultats

Pour ces simulations, on prend $\rho_2 = \eta_1 = \eta_2 = 1$ avec $A_t = 1/2$, de sorte qu'on ait $\rho_1 = 1/3$. Le domaine est $\Omega = [-1/2, 1/2] \times [-3/2, 3/2] \times [-1/10, 1/10]$. Pour cette première simulation, on a sélectionné $h = 0,015$, pour un total de 716957 tétraèdres. La simulation ayant nécessité 5 jours complets, on prend de plus grandes valeurs de $h$ pour accélérer les simulations. Notons qu'afin de simuler des écoulements MHD dont le comportement est 3D, on vérifie les performances du solveur dans ce cadre.

### 5.2.1 Cas $Re = 10$

Dans cette première simulation, on a un nombre de Reynolds plutôt faible, qu'on peut associer à un écoulement visqueux. Il serait surprenant d'atteindre le régime inertiel dans ce cas. Cette situation permet de mettre en évidence la nature de la diffusion. En effet, si celle-ci ne se produit pas autour de $t_0$, elle est de nature numérique. C'est ce à quoi on s'attend.

Afin de pouvoir faire ces observations, on propose de prendre les fonctions

$$\begin{cases} h_T(t;\tau,D) = \alpha A_t g t^2 + 2\sqrt{\alpha A_t g h_0}\, t + h_0 - 4\sqrt{\alpha A_t g h_0}\,\tau\left(\sqrt{t+\tau} - \sqrt{\tau}\right) e^{-Dt^2/\tau^2} \\ h_\alpha(t;\tau,\delta) = \alpha(t) A_t g t^2 + 2\sqrt{\alpha(t) A_t g h_0}\, t + h_0 \end{cases}$$

Pour ces deux fonctions, on pose initialement $\tau = t_0$. Dans les deux cas, on a également $D = \delta = 1$ initialement. Pour $h_T$, on cherche les paires de valeurs optimales, et donc on pose de pas de temps $\Delta\tau = 1$ et $\Delta D = 1$. On fixe d'abord $D$ et on vérifie les valeurs $h_T(t;\tau-\Delta\tau,D)$ et $h_T(t;\tau+\Delta\tau,D)$. Si on obtient une erreur plus petite avec les demi-hauteurs de pénétration obtenues avec nos simulations, alors on a la nouvelle valeur de $\tau$ et on pose $\Delta\tau := 2\Delta\tau$. Si on ne trouve pas de valeur optimale, on divise $\Delta\tau$ par 2. On procède de façon similaire pour $D$. Cet algorithme est le même utilisé pour trouver les valeurs de $\tau$, de $\delta$ et de $h_\alpha$. Cette

optimisation est basé sur l'algorithme de recherche de solutions sur un maillage (« pattern search ») [32].

Dans les deux cas, on utilise une tolérance $\epsilon = 0,01$ pour l'erreur et on impose un maximum de $10^4$ itérations. Pour le modèle de Taylor, on trouve $\tau = 0,02384$ et $D = 5,6176 \times 10^{-5}$, soit une très petite diffusion très tôt, bien avant $t_0 = 7,778$. Pour le modèle $\alpha$ variable, on a $\tau = 0,8209$ et $\delta = 0,8209$, soit une diffusion lente, mais qui débute rapidement.

On notera que $t_0$ dépend de la valeur de $\alpha$ dans la zone inertielle. Ainsi, il faut calculer ce $\alpha$ en utilisant les valeurs numériques de $h$. On utilise pour cela l'expression inertielle,

$$\boldsymbol{h} = \left(\sqrt{\alpha A_t g}\boldsymbol{t} + \sqrt{h_0}\mathbf{1}\right).^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha A_t g}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{h}.^{1/2} - \sqrt{h_0}\mathbf{1},$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur avec des 1 et on note avec un « . » les opérations effectuées sur chaque composante individuellement. À titre d'exemple, $\boldsymbol{x}^2$ est la norme du vecteur $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}.^2$ est le vecteur $\boldsymbol{x}$ dont chaque composante est $x_i^2$. On notera $\boldsymbol{T} = A_t g \boldsymbol{t}.^2$ et $\boldsymbol{H} = \left(\boldsymbol{h}.^{1/2} - \sqrt{h_0}\mathbf{1}\right).^2$. Ainsi, on a

$$\alpha \boldsymbol{T} = \boldsymbol{H} \Rightarrow \alpha \|\boldsymbol{T}\|^2 = \boldsymbol{T}^T \boldsymbol{H} \Rightarrow \alpha = \frac{\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{H}}{\|\boldsymbol{T}\|^2}.$$

L'idée est de prendre les vecteurs $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{t}$ avec les données de la simulation. On sélectionne seulement les points pour lesquels $h \geq 4h_0$. C'est environ à cette hauteur qu'on atteint le régime inertiel.

Cependant, pour la première simulation seulement, la valeur maximale pour $h$ est autour de $0,31$, puisque nous n'atteignons pas le régime inertiel. Ainsi, pour le calcul de $\alpha$, on prend $t \geq 5$ qui nous rapproche le plus possible du régime inertiel. On trouve $\alpha = 0,0033$, ce qui est en dessous des valeurs que l'on retrouve dans la littérature, soit $0,01$ au minimum.

En sélectionnant tous les points, on obtient $\alpha = 0,0032$. Pour $t \geq 5,5$, on a $\alpha = 0,0033$. On reste donc toujours autour de ces valeurs. Il semble qu'en considérant des valeurs de plus en plus grandes de $t$, on obtient une valeur de $\alpha$ de plus en plus grande.

Puisque $\alpha$ est petit et que les vitesses ne sont pas très grandes. Dans la figure 5.2, on voit que le modèle numérique a une erreur relative plutôt faible en comparaison avec le modèle inertiel utilisé par Roland Rivard [4]. Celui-ci utilisait cependant de plus grands nombres de Reynolds.

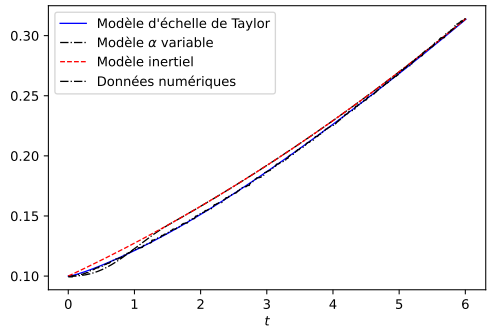


FIGURE 5.1 Demi-hauteurs de pénétration des différents modèles pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 10$.

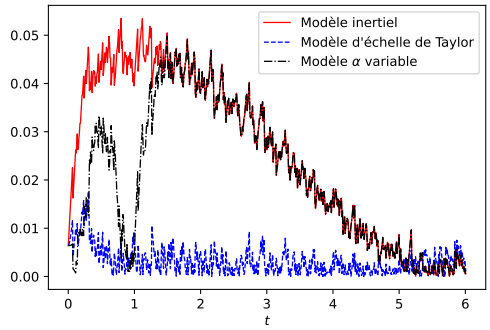


FIGURE 5.2 Erreur relative entre les données numériques et les modèles théoriques pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 10$.

Dans la figure 5.1 on peut voir la qualité des paramètres des fonctions $h_T(t;\tau,D)$ et $h_\alpha(t;\tau,\delta)$ permettant de rendre compte de la diffusion numérique. Ces derniers ne sont cependant pas des modèles théoriques, mais plutôt des descriptions de la diffusion numérique. Le graphique 5.2 nous indique seulement que nos expressions tiennent compte de cette diffusion. C'est pourquoi il est justifiable d'affirmer que la diffusion se produit tôt et est faible face aux effets inertiels.

Il semble que le modèle qui simule une échelle de Taylor performe mieux pour décrire les effets de la diffusion.

### 5.2.2 Cas $Re = 100$

Dans cette simulation, on atteint le régime inertiel et le moment pour lequel ce régime n'est plus valide, i.e. le moment quand $h(t) = H/4$ où $H$ est la hauteur du domaine. Cette valeur vient du fait que si le fluide est à une distance unitaire du bord, on peut s'attendre à ce que les effets soient perceptibles. Cependant, en prenant $H/4$, on se permet d'aller jusqu'à $h = 0,75$. Ceci semble bien correspondre à la zone inertielle [2]

$$\alpha A_t g t_*^2 + 2\sqrt{\alpha A_t g h_0} t_* + h_0 - \frac{H}{4} = 0 \Rightarrow t_* = t_0 \left( \sqrt{\frac{H}{4h_0}} - 1 \right).$$

Pour $h_T(t; \tau, D)$, on obtient $\tau = 0,3821$ et $D = 0,08607$. La diffusion arrive donc plus tard et elle est plus importante que dans le cas $Re = 10$. Cependant, elle reste relativement faible. Pour $h_\alpha(t; \tau, \delta)$, on a $\tau = 1,0202$ et $\delta = 1,0202$. Ainsi, la diffusion arrive également plus tard. On a encore $\tau = \delta$. La valeur $\delta$ augmente ce qui suggère une diffusion plus importante.

Dans cette simulation, on trouve $\alpha = 0,04705$, ce qui se trouve dans les valeurs attendues pour ce type de simulations.

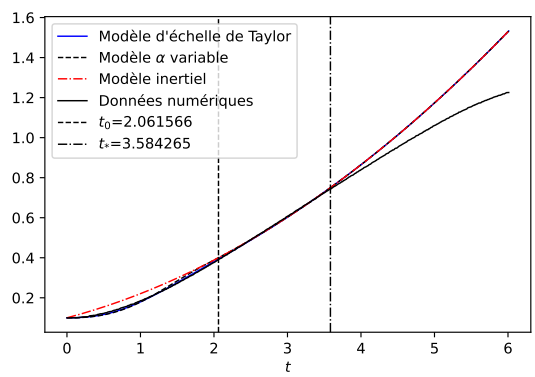


FIGURE 5.3 Demi-hauteurs de pénétration des différents modèles pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 100$.

On voit à la figure 5.3 que dans la zone inertielle, l'erreur est moins de 5%. On voit à la figure 5.4 l'erreur du modèle de Ristorcelli et Clark qui est plus de 20%. C'est l'effet combiné du non-respect des conditions initiales et de la diffusion numérique. On peut voir à la figure 5.3 qu'on a bien déterminé le moment pour lequel on quitte le régime inertiel.

On note également que le modèle qui simule l'échelle de Taylor fonctionne mieux que le modèle pour $\alpha$ variable.

2. On peut voir ça simplement comme une demi-hauteur de pénétration à mi-chemin du bord.

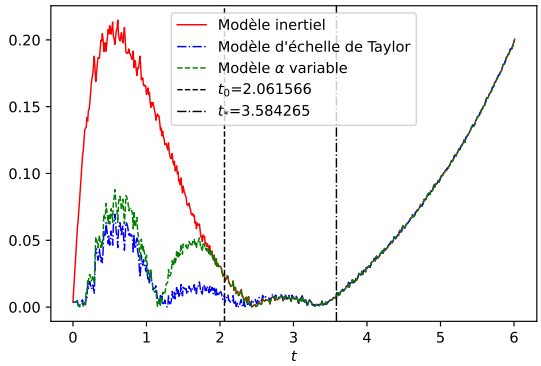


FIGURE 5.4 Erreur relative entre les données numériques et les modèles théoriques pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 100$.

### 5.2.3 Cas $Re = 1000$

Dans cette simulation, on dépasse significativement le régime inertiel mais les arguments utilisés, jusqu'à maintenant fonctionnent toujours. Pour $h_T(t; \tau, D)$, on a $\tau = 0,5231$ et $D = 2,6025$. La diffusion est plus grande et elle arrive plus tard. Ainsi, il semble que le nombre de Reynolds puisse être associé à une diffusion numérique plus grande. Pour $h_\alpha(t; \tau, \delta)$, on a $\tau = 0,8700$ et $\delta = 0,8700$. On trouve $\alpha = 0,07065$ ce qui est toujours une valeur réaliste pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

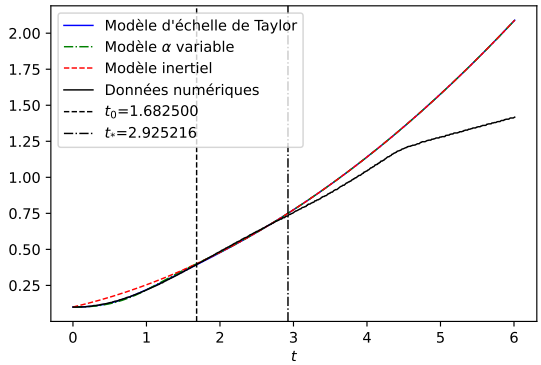


FIGURE 5.5 Demi-hauteurs de pénétration des différents modèles pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 1000$.

L'erreur du modèle d'échelle de Taylor est encore moins de 5% alors qu'elle monte à près de 25% pour le modèle de Ristorcelli et Clark. De plus, on est encore en mesure d'identifier le moment quand on quitte le régime inertiel.

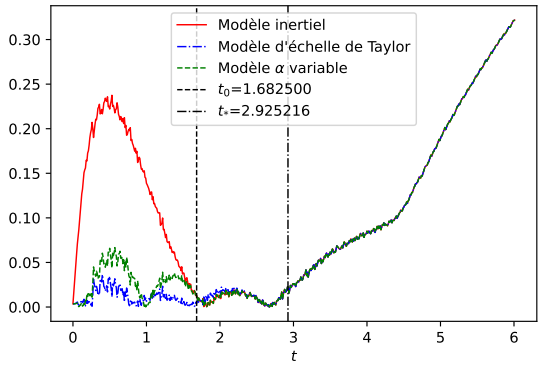


FIGURE 5.6 Erreur relative entre les données numériques et les modèles théoriques pour l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec $Re = 1000$.

Nos trois simulations permettent de bien suivre la demi-hauteur de pénétration $h(t)$ de l'IRT. Dans chaque cas, le modèle de Ristorcelli et Clark donne l'erreur la plus grande. Les deux autres modèles permettent de prendre en compte les effets de la diffusion numérique. Le modèle simulant l'échelle de Taylor permet d'obtenir l'erreur relative minimale jusqu'au moment pour lequel on quitte le régime inertiel.

Les deux modèles semblent respecter les conditions initiales, mais $h_T(t; \tau, D)$ semble mieux les suivre. Les valeurs de $\alpha$ sont réalistes pour les deux dernières simulations. Pour la première, il est difficile d'évaluer $\alpha$ puisque le régime inertiel n'est pas obtenu. Néanmoins, il semble que les valeurs de $\alpha$ augmentent en restreignant $t$ à des valeurs plus grandes. Aussi, comme tel que mentionné plus haut, il ne devrait pas être surprenant d'observer de faibles valeurs pour $\alpha$ lorsque le régime inertiel n'est pas atteint et que le système débute au repos.

# CHAPITRE 6 ÉCOULEMENT DE HARTMANN

L'écoulement de Hartmann est l'équivalent MHD de l'écoulement de Poiseuille pour lequel on cherche le profil stationnaire d'un champ de vitesse entre deux parois. Puisqu'on applique un champ magnétique perpendiculaire à l'écoulement, il faudra également trouver le profil stationnaire du champ magnétique [33], [34], [35]. La discrétisation 3D de ce problème permet de valider la modélisation des équations de la MHD. Dans cette optique, on trouve la solution analytique 3D pour comparer aux résultats des simulations numériques.

Pour trouver la solution analytique, on reprend le système d'EDP (2.4) en le considérant stationnaire avec $\eta = \eta_m = 1$. Aussi, on considère un seul fluide, on ignore donc l'équation de transport de la pseudo-concentration. De plus, on prend $\mu = 1$, et $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}$. Notre système sous sa forme adimensionnelle est donc :

$$\begin{cases} (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} = -\nabla\Big(p + \frac{SB^2}{2}\Big) + \frac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{u} + \frac{S}{2}\,(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{B}; \\ \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = -\frac{1}{Rm}\Delta \boldsymbol{B}; \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \end{cases}$$

Notons qu'il est possible de considérer le problème de Hartmann pour des parois conductrices. Nous ne nous intéressons pas à ce problème, mais le lecteur intéressé pourra lire l'article de Bluck et Wolfendale [36]. Il introduit les simplifications utilisées plus tard.

Pour notre travail, nous utilisons le problème de Hartmann tel que décrit dans l'ouvrage de Jean-Frédéric Gerbeau [8]. Dans ce livre, on propose d'étudier l'écoulement le long de l'axe $x$ dans le domaine $\Omega = [0, x_0] \times [-y_0, y_0] \times [-z_0, z_0]$. La valeur de $x_0$ est sans importance dans notre démarche, puisque la solution théorique varie seulement en $y$ et en $z$ puisque l'écoulement est entièrement développé et stationnaire.

On applique, sur notre système, un champ magnétique $\boldsymbol{B}^d = (0, 1, 0)$ et on suppose que les solutions sont de la forme $\boldsymbol{u} = (u(y, z), 0, 0)$ et $\boldsymbol{B} = (b(y, z), b_0, 0)$ avec $b_0$ une valeur constante. Les conditions de non-glissement et de parois non-conductrices donnent les conditions aux bords

$$u\,(\pm y_0, z) = u\,(y, \pm z_0) = b\,(\pm y_0, z) = b\,(y, \pm z_0) = 0.$$

## 6.1 Système d'EDP

Sous sa présente forme, le système est difficile à résoudre. Calculons chaque terme des équations afin de les simplifier et d'obtenir un système plus simple à résoudre. On a d'abord

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = \left(\begin{bmatrix} u(y,z) & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}u(y,z)\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = u(y,z)\partial_x\begin{bmatrix}u(y,z)\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = 0.$$

Le terme de convection hydrodynamique est donc nul. C'est une observation intéressante, puisque cette non linéarité peut parfois être difficile à gérer. Pour l'écoulement de Hartmann, il est possible de ne pas la considérer. Ainsi, nous pouvons simplement résoudre le problème de Stokes avec une forme de Lorentz et les équations de Maxwell.

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B} = \left(\begin{bmatrix} b(y,z) & b_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}b(y,z)\\ b_0\\ 0\end{bmatrix} = (b(y,z)\partial_x + b_0\partial_y)\begin{bmatrix}b(y,z)\\ b_0\\ 0\end{bmatrix} = b_0\partial_y b\boldsymbol{e}_x;$$

$$\Delta\boldsymbol{u} = \left(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2\right)\begin{bmatrix}u(y,z)\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \left(\partial_y^2 u + \partial_z^2 u\right)\boldsymbol{e}_x$$

$$\Delta\boldsymbol{B} = \left(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2\right)\begin{bmatrix}b(y,z)\\ b_0\\ 0\end{bmatrix} = \left(\partial_y^2 b + \partial_z^2 b\right)\boldsymbol{e}_x;$$

$$-\nabla\left(p+\frac{SB^2}{2}\right) = -\begin{bmatrix}\partial_x\left(p+Sb^2(y,z)/2+Sb_0^2/2\right)\\ \partial_y\left(p+Sb^2(y,z)/2+Sb_0^2/2\right)\\ \partial_z\left(p+Sb^2(y,z)/2+Sb_0^2/2\right)\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\partial_x p\\ \partial_y p + Sb(y,z)\partial_y b(y,z)\\ \partial_z p + Sb(y,z)\partial_z b(y,z)\end{bmatrix};$$

Ainsi, nos vecteurs donnent les trois équations,

$$\begin{bmatrix}\partial_x p\\ \partial_y p + Sb(y,z)\partial_y b(y,z)\\ \partial_z p + Sb(y,z)\partial_z b(y,z)\end{bmatrix} = \left(Sb_0\partial_y b + \frac{\partial_y^2 u + \partial_z^2 u}{Re}\right)\boldsymbol{e}_x.$$

Les deux dernières équations nous montrent que

$$p + \frac{Sb^2(y,z)}{2} + \frac{Sb_0^2}{2} = f(x) + p_0.$$

Ici, $f(x)$ est une fonction de $x$ quelconque. Ainsi, la pression est donnée par

$$p = f(x) - \frac{Sb^2(y,z)}{2} - \frac{Sb_0^2}{2} + p_0.$$

Ensuite, on peut déduire que la première équation a d'un côté $f'(x)$, et de l'autre des fonctions dérivées selon $y$ et $z$. Ainsi, $f'(x) = -G$, une constante et, $f(x) = -Gx$. En absorbant tous les termes constants dans la constante $p_0$, on obtient l'expression

$$p(x,y,z) = -Gx - \frac{Sb^2(y,z)}{2} + p_0. \tag{6.1}$$

pour la pression. Avec cette relation, le reste de la première équation devient

$$\Delta u + ReSb_0\partial_y b = -GRe.$$

L'équation d'incompressibilité est quant à elle trivialement respectée. Il en est de même pour la loi de Gauss-Maxwell,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \partial_x u(y,z) = 0 \text{ et } \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \partial_x b(y,z) + \partial_y b_0 = 0.$$

Finalement, considérons la dernière équation,

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u(y,z) & 0 & 0 \\ b(y,z) & b_0 & 0 \end{vmatrix} = b_0 u(y,z)\boldsymbol{e}_z, \quad \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & b_0 u(y,z) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} b_0\partial_y u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si on assemble les termes de la formulation en $\boldsymbol{H}$, on obtient

$$Rmb_0\partial_y u\boldsymbol{e}_x + \Delta b\boldsymbol{e}_x = 0 \Rightarrow \Delta b + Rmb_0\partial_y u = 0.$$

On peut arbitrairement poser $b_0 = 1$. Ce changement simplifie nos équations et peut être absorbé par $p_0$. C'est le choix fait dans l'ouvrage de Gerbeau. Notre système d'EDP linéaires à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \Delta u + ReS\partial_y b = -GRe; \\ \Delta b + Rm\partial_y u = 0. \end{cases}$$

## 6.2 Simplification des EDP

### 6.2.1 Changement de variables

On aimerait premièrement procéder à un simple changement de variables afin de pouvoir additionner et soustraire nos équations. En effet, celles-ci sont très similaires et linéaires, mais nous ne pouvons pas profiter de cette propriété.

On souhaite poser $u = c_1\tilde{u}$ et $b = c_2\tilde{b}$. Ce changement nous donne :

$$\begin{cases} c_1\Delta\tilde{u} + c_2 ReS\partial_y\tilde{b} = -GRe; \\ c_2\Delta\tilde{b} + c_1 Rm\partial_y\tilde{u} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\tilde{u} + (c_2 ReS/c_1)\,\partial_y\tilde{b} = -GRe/c_1; \\ \Delta\tilde{b} + (c_1 Rm/c_2)\,\partial_y\tilde{u} = 0. \end{cases}$$

On peut voir que $c_1, c_2 \neq 0$. On a deux équations et deux inconnues. La première équation est l'égalité souhaitée entre les termes devant les dérivées et la seconde vient du terme source qu'on pose comme étant égal à 1 par simplicité. Ceci nous donne directement $c_1 = -GRe$. Il nous faut maintenant trouver $c_2$,

$$\frac{c_2 ReS}{c_1} = \frac{c_1 Rm}{c_2} \Rightarrow c_2^2 ReS = c_1^2 Rm = G^2 Re^2 Rm$$
$$\Rightarrow c_2^2 = \frac{G^2 ReRm}{S} \Rightarrow c_2 = \pm G\sqrt{\frac{ReRm}{S}}$$

Voyons ce que chaque terme devient lorsqu'on y substitue les valeurs trouvées :

$$\frac{c_2 ReS}{c_1} = \mp\frac{G\sqrt{ReRm}}{\sqrt{S}}\frac{ReS}{GRe} = \mp\sqrt{ReRmS} = \mp Ha$$
$$\frac{c_1 Rm}{c_2} = \mp\frac{GReRm\sqrt{s}}{G\sqrt{ReRm}} = \mp\sqrt{ReRmS} = \mp Ha$$

On obtient bien les mêmes constantes et celles-ci sont égales au nombre de Hartmann $Ha$. Le choix est valide à un signe près. Peu importe le choix de signe, la propriété recherchée reste la même. L'arbitraire de ce choix devient important plus tard dans la résolution. Prenons le signe positif et appliquons le changement de variables $y \to -y$, $\partial_y \to -\partial_y$ et $\partial_y^2 \to \partial_y^2$.

$$\begin{cases} \Delta u + Ha\partial_y b = 1; \\ \Delta b + Ha\partial_y u = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta u - Ha\partial_y b = 1; \\ \Delta b - Ha\partial_y u = 0. \end{cases}$$

Le choix du signe dépend du sens dans lequel on pointe l'axe des $y$. Prenons le signe positif sans perte de généralité. Notons que cette propriété nous sera utile plus tard. Pour le moment,

le changement de variables nous donne :

$$\begin{cases} \Delta u + Ha\partial_y b = 1; \\ \Delta b + Ha\partial_y u = 0. \end{cases}$$

### 6.2.2 Variables de Elsasser

L'article de Bluck et Wolfendale [36], mentionné plus haut, propose d'utiliser les variables d'Elsasser afin de découpler notre système d'EDP. Ces variables sont $z^+ = u+b$ et $z^- = u-b$ tel que,

$$u = \frac{z^+ + z^-}{2} \text{ et } b = \frac{z^+ - z^-}{2}.$$

Pour découpler le système, on additionne la première EDP à la deuxième, ce qui donne

$$\Delta\left(u+b\right) + Ha\partial_y\left(u+b\right) = \Delta z^+ + Ha\partial_y z^+ = 1.$$

Ensuite, si on soustrait la deuxième équation de la première, on obtient une équation pour $z^-$.

$$\Delta\left(u-b\right) - Ha\partial_y\left(u-b\right) = \Delta z^- - Ha\partial_y z^- = 1$$

Le système à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \Delta z^+ + Ha\partial_y z^+ = 1, \\ \Delta z^- - Ha\partial_y z^- = 1. \end{cases}$$

Ces équations sont les mêmes, à un signe près. C'est ici que notre remarque, faite plus haut, devient très utile. Prenons l'équation pour $z^-(y,z)$, mais faisons le changement de variable $y \to -y$. On obtient alors

$$\Delta z^- + Ha\partial_y z^- = 1.$$

Ainsi, les équations pour $z^+(y,z)$ et $z^-(-y,z)$ possèdent la même solution, puisque les équations sont les mêmes. Notons que nos simplifications n'ont pas changé les conditions aux bords homogènes. Cette observation permet de résoudre seulement l'EDP pour $z^+$ afin d'obtenir la solution pour $z^-$. Le problème de Hartmann devient,

$$\begin{cases} \Delta z^+ + Ha\partial_y z^+ = 1; \\ z^-(y,z) = z^+(-y,z), \end{cases} \quad \text{où } z^+(\pm y_0, z) = z^+(y, \pm z_0) = 0, \;\; u = \frac{z^+ + z^-}{2} \text{ et } b = \frac{z^+ - z^-}{2}.$$

## 6.3 Solution pour $z^+(y,z)$

### 6.3.1 Gestion du terme source

Après ces simplifications, notre tâche se résume maintenant à simplement résoudre une EDP d'ordre 2 avec un terme source constant. La première étape de résolution est de traiter ce terme source. Ce traitement nous aidera pour la séparation des variables, mais rendra les conditions initiales non homogènes en $y = \pm y_0$. Supposons que $z^+(y,z) = g(y,z) + h(z)$. On voudra que $h(z)$ serve à traiter le terme source. L'EDP devient

$$\Delta g + Ha\partial_y g + h''(z) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta g + Ha\partial_y g = 0; \\ h''(z) = 1, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \phi(\pm y_0, z) = g(\pm y_0, z) + h(z) = 0, \;\; g(\pm y_0, z) = -h(z); \\ \phi(y, \pm z_0) = g(y, \pm z_0) + h(\pm z_0) = 0, \;\; g(y, \pm z_0) = -h(\pm z_0). \end{cases}$$

Il est facile de trouver $h(z)$ si on suppose que cette fonction satisfait les conditions initiales. En effet, si on suppose que $g(y, \pm z_0) = 0$, on a également que $h(\pm z_0) = 0$ :

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{z^2}{2} + \mathcal{C}_1 z + \mathcal{C}_2; \\ h(z_0) &= \frac{z_0^2}{2} + \mathcal{C}_1 z_0 + \mathcal{C}_2; \\ h(-z_0) &= \frac{z_0^2}{2} - \mathcal{C}_1 z_0 + \mathcal{C}_2. \end{aligned}$$

Si on ajoute la troisième équation à la deuxième, on obtient

$$z_0^2 + 2\mathcal{C}_2 = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_2 = -\frac{z_0^2}{2}.$$

Ensuite, pour trouver $\mathcal{C}_1$, on peut soustraire la troisième équation de la deuxième,

$$2\mathcal{C}_1 = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 = 0.$$

On trouve donc la fonction $h(z)$ permettant d'éliminer le terme source. Notre problème devient donc

$$\Delta g + Ha\partial_y g = 0 \;\text{ où } g(\pm y_0, z) = \frac{z_0^2 - z^2}{2} \;\text{ et } g(y, \pm z_0) = 0.$$

### 6.3.2 Solution pour $g(y, z)$

Puisque ce problème ressemble à l'équation du télégraphe, qui est elle-même une variation de l'équation des ondes, la forme du problème est maintenant favorable pour la méthode de la séparation des variables. On pose $g(y, z) = Y(y)Z(z)$ et on insère le tout dans l'EDP,

$$\begin{aligned} Y''(y)Z(z) + Y(y)Z''(z) + HaY'(y)Z(z) = 0 &\Rightarrow \frac{Y''(y) + HaY'(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{Y''(y) + HaY'(y)}{Y(y)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On a deux EDO à résoudre. Puisqu'on a toutes les conditions initiales homogènes en $z$, alors on débute en trouvant $Z(z)$,

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0 \Rightarrow r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda}.$$

La solution dépend de $\lambda$. Vérifions les différents cas et trouvons les solutions non triviales.

**Cas $\lambda = 0$**

Dans ce cas, on a $r = 0$ et $Z(z) = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 z$. Les conditions aux bords nous donnent,

$$\begin{aligned} Z(-z_0) &= \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 z_0 = 0 \\ Z(z_0) &= \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 z_0 = 0. \end{aligned}$$

L'addition des deux équations donne $2\mathcal{C}_1 = 0$ et donc $\mathcal{C}_1 = 0$. Si on soustrait la première à la deuxième, on a $2\mathcal{C}_2 z_0 = 0$. Puisque $z_0 \neq 0$, alors $\mathcal{C}_2 = 0$ et $Z(z)$ est la solution triviale.

**Cas $\lambda = -\sigma^2$ pour $\sigma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$**

Pour ces valeurs de $\lambda$, on a $r = \pm\sigma$ et la solution est de la forme $Z(z) = \mathcal{C}_1 e^{-\sigma z} + \mathcal{C}_2 e^{\sigma z}$. Les conditions aux bords permettent de trouver les constantes :

$$\begin{aligned} Z(-z_0) &= \mathcal{C}_1 e^{\sigma z_0} + \mathcal{C}_2 e^{-\sigma z_0} = 0; \\ Z(z_0) &= \mathcal{C}_1 e^{-\sigma z_0} + \mathcal{C}_2 e^{\sigma z_0} = 0. \end{aligned}$$

On additionne et on soustrait les équations pour obtenir

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)\, e^{\sigma z_0} + (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)\, e^{-\sigma z_0} = 2\,(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)\cosh(\sigma z_0); \\ 0 &= (\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)\, e^{\sigma z_0} - (\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)\, e^{-\sigma z_0} = 2\,(\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2)\sinh(\sigma z_0). \end{aligned}$$

La deuxième équation implique que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$. Ainsi, la première équation devient $4\mathcal{C}_1 \cosh(\sigma z_0) = 0$ et donc $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = 0$. Ces valeurs de $\lambda$ mènent à la solution triviale.

**Cas $\lambda = \sigma^2$ pour $\sigma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$**

Dans ce dernier cas, les racines sont $r = \pm i\sigma$ et les solutions sont $Z(z) = \mathcal{C}_1 \cos(\sigma z) + \mathcal{C}_2 \sin(\sigma z)$. Appliquons les conditions initiales :

$$\begin{aligned} Z(-z_0) &= \mathcal{C}_1 \cos(\sigma z_0) - \mathcal{C}_2 \sin(\sigma z_0); \\ Z(z_0) &= \mathcal{C}_1 \cos(\sigma z_0) + \mathcal{C}_2 \sin(\sigma z_0). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Il y a deux situations possibles afin de satisfaire les conditions aux bords. La première est d'avoir $\mathcal{C}_1 = 0$ et $\sigma = n\pi/z_0$. La seconde est $\mathcal{C}_2 = 0$ et $\sigma = (2n+1)\pi/2z_0$. Le choix n'est pas arbitraire. Ce choix nous donne une fonction $Z_n(z)$ avec laquelle on trouvera la série de Fourier de $-h(z)$. Puisque $h(z)$ est une fonction paire, sa série de Fourier sera en cosinus. Ainsi, on conserve la fonction cosinus de l'équation (6.2). C'est le choix fait dans la thèse de Gerbeau [7], [1]

$$Z_n(z) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

**EDO pour $Y(y)$**

Il nous faut maintenant résoudre l'EDO pour $Y(y)$. Puisqu'on connait la valeur de $\sigma$, il sera possible de trouver la forme générale. Cependant, les conditions initiales ne sont pas homogènes et dépendent de $z$. Il faudra décomposer $g(y, z)$ de la façon suivante,

$$g(y,z) = g_1(y,z) + g_2(y,z) \ \text{ où } \begin{cases} g_1(-y_0, z) = g_2(y_0, z) = -h(z); \\ g_1(y_0, z) = g_2(-y_0, z) = 0. \end{cases}$$

Ainsi, il y a une condition au bord homogène pour $Y(y)$ dans chaque cas. On doit donc trouver $Y_{1,n}(y)$ et $Y_{2,n}(y)$ tels que $g_n(y,z) = Y_{1,n}(y)Z_n(z) + Y_{2,n}(y)Z_n(z)$. Débutons avec $Y_{1,n}(y)$ :

$$\begin{aligned} Y''_{1,n}(y) + HaY'_{1,n}(y) - \sigma^2 Y_{1,n}(y) = 0 &\Rightarrow r^2 + Har - \sigma^2 = 0 \\ &\Rightarrow r_{1,2} = -\frac{Ha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{Ha^2 + 4\sigma^2} \\ &\Rightarrow Y_{1,n}(y) = \mathcal{C}_{1,n} e^{r_1 y} + \mathcal{C}_{2,n} e^{r_2 y}. \end{aligned}$$

1. L'article de Bluck et Wolfendale [36] présente également une solution faisant ce choix. Cette solution vient d'un article de Shercliff [37].

On peut utiliser la condition au bord $g_1(y_0, z) = Y_{1,n}(y_0)Z_n(z) = 0$ avec $Y_{1,n}(y_0) = 0$ pour trouver une relation entre $\mathcal{C}_{1,n}$ et $\mathcal{C}_{2,n}$,

$$Y_{1,n}(y_0) = \mathcal{C}_{1,n}e^{r_1 y_0} + \mathcal{C}_{2,n}e^{r_2 y_0} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{2,n} = -\mathcal{C}_{1,n}e^{(r_1-r_2)y_0}$$

$$\Rightarrow$$

$$Y_{1,n}(y) = \mathcal{C}_{1,n}e^{r_1 y_0}\left(e^{r_1(y-y_0)} - e^{r_2(y-y_0)}\right).$$

Avec cette solution, nous avons une forme générale pour

$$g_1(y, z) = \sum_{n\geq 0} \mathcal{C}_n \left(e^{r_1(y-y_0)} - e^{r_2(y-y_0)}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right).$$

Pour trouver $\mathcal{C}_n$, il faut utiliser la seconde condition au bord. On donne la série de Fourier pour $-h(z)$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{z_0}\int_{-z_0}^{z_0}\left(\frac{z_0^2 - z^2}{2}\right)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right)\mathrm{d}z = \frac{16z_0^2(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3} \text{ et } b_n = 0 \\ &\Rightarrow -h(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{16z_0^2(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right). \end{aligned}$$

Avec la condition en $y = -y_0$, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{n\geq 0}\mathcal{C}_n\left(e^{-2r_1 y_0} - e^{-2r_2 y_0}\right)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{16z_0^2(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{C}_n = \frac{16z_0^2(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3}\frac{1}{e^{-2r_1 y_0} - e^{-2r_2 y_0}}. \end{aligned}$$

La solution pour $g_1(y, z)$ devient

$$g_1(y, z) = \sum_{n\geq 0}\frac{16z_0^2(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3}\left(\frac{e^{r_1(y-y_0)} - e^{r_2(y-y_0)}}{e^{-2r_1 y_0} - e^{-2r_2 y_0}}\right)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right).$$

Pour trouver $g_2(y, z)$, la démarche est très similaire,

$$Y_{2,n}(y) = \mathcal{C}_{1,n}e^{r_1 y} + \mathcal{C}_{2,n}e^{r_2 y} \Rightarrow Y_{2,n}(-y_0) = \mathcal{C}_{1,n}e^{-r_1 y_0} + \mathcal{C}_{2,n}e^{-r_2 y_0} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{2,n} = -\mathcal{C}_{1,n}e^{(r_2-r_1)y_0}$$

$$\Rightarrow$$

$$Y_{2,n}(y) = \mathcal{C}_{2,n}e^{-r_1 y_0}\left(e^{r_1(y+y_0)} - e^{r_2(y+y_0)}\right).$$

On obtient ainsi une forme générale pour

$$g_2(y,z) = \sum_{n\geq 0} \mathcal{C}_n \left(e^{r_1(y+y_0)} - e^{r_2(y+y_0)}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right).$$

Puisqu'on a déjà la série de Fourier de $-h(z)$ on peut directement passer au calcul de $\mathcal{C}_n$. On applique la condition à $y = y_0$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 0} \mathcal{C}_n \left(e^{2r_1y_0} - e^{2r_2y_0}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{16z_0^2(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{C}_n = \frac{16z_0^2(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3} \frac{1}{e^{2r_1y_0} - e^{2r_2y_0}}.
\end{aligned}$$

Ceci nous permet d'écrire

$$g_2(y,z) = \sum_{n\geq 0} \frac{16z_0^2(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3} \left(\frac{e^{r_1(y+y_0)} - e^{r_2(y+y_0)}}{e^{2r_1y_0} - e^{2r_2y_0}}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right).$$

La somme de $g_1(y,z)$ et $g_2(y,z)$ nous donne

$$g(y,z) = \sum_{n\geq 0} \frac{16z_0^2(-1)^n}{(2n+1)^3\pi^3} \left(\frac{e^{r_1(y-y_0)} - e^{r_2(y-y_0)}}{e^{-2r_1y_0} - e^{-2r_2y_0}} + \frac{e^{r_1(y+y_0)} - e^{r_2(y+y_0)}}{e^{2r_1y_0} - e^{2r_2y_0}}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2z_0}\right).$$

Finalement, avec $g(y,z)$ en main, il est possible de trouver les formules pour $z^+(y,z)$ et $z^-(y,z)$.

$$z^+(y,z) = \frac{z^2 - z_0^2}{2} + \frac{16z_0^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{r_2y}\sinh(r_1y_0) - e^{r_1y}\sinh(r_2y_0)}{(2n+1)^3\sinh(y_0(r_1-r_2))}\right) \sin(\beta_n(z+z_0))$$

Pour $z^+(y,z)$, il faut se souvenir qu'on a la propriété $z^-(y,z) = z^+(-y,z)$. On peut donc tout simplement écrire

$$z^-(y,z) = \frac{z^2 - z_0^2}{2} + \frac{16z_0^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-r_2y}\sinh(r_1y_0) - e^{-r_1y}\sinh(r_2y_0)}{(2n+1)^3\sinh(y_0(r_1-r_2))}\right) \sin(\beta_n(z+z_0)).$$

Cette fonction est symétrique à $z^+(y,z)$ autour de $y = 0$. On utilise ces variables afin de donner les solutions :

$$\begin{aligned}
u(y,z) = {} & GRe\left(\frac{z_0^2 - z^2}{2}\right) \\
& + \frac{16GRez_0^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sinh(r_1y_0)\cosh(r_2y) - \sinh(r_2y_0)\cosh(r_1y)}{(2n+1)^3\sinh(y_0(r_2-r_1))}\right) \sin(\beta_n(z+z_0));
\end{aligned}$$

$$b(y,z) = \frac{16GHaz_0^2}{S\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sinh(r_1y_0)\sinh(r_2y) - \sinh(r_2y_0)\sinh(r_1y)}{(2n+1)^3\sinh(y_0(r_2-r_1))}\right)\sin(\beta_n(z+z_0)).$$

On utilise les formules $u = (z^+ + z^-)/2$ et $b = (z^+ - z^-)/2$.

## 6.4 Débit de l'écoulement

Pour calculer le débit de l'écoulement, on calcule l'intégrale de $u(y,z)$ sur la surface $A = [-y_0, y_0] \times [-z_0, z_0]$. On doit calculer

$$Q = \int_A u(y,z)\mathrm{d}z = 2GRey_0\int_0^{z_0}\left(z_0^2 - z^2\right)\mathrm{d}z$$
$$+ \frac{32GRez_0^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sinh(r_1y_0)\int_0^{y_0}\cosh(r_2y)\mathrm{d}y - \sinh(r_2y_0)\int_0^{y_0}\cosh(r_1y)\mathrm{d}y)}{(2n+1)^3\sinh(y_0(r_2-r_1))}\int_{-z_0}^{z_0}\sin(\beta_n(z+z_0))\,\mathrm{d}z.$$

Après quelques simplifications, on trouve le débit pour l'écoulement de Hartmann,

$$Q = G\left[\frac{4Rey_0z_0^3}{3} + \frac{128Rez_0^3}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sinh(r_1y_0)\sinh(r_2y_0)}{(2n+1)^4\sinh(y_0(r_2-r_1))}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\right].$$

Le choix de $G$ ou $Q$ permet d'obtenir l'autre valeur. On propose de définir un débit unitaire dans les simulations et de définir

$$G = \left[\frac{4Rey_0z_0^3}{3} + \frac{128Rez_0^3}{\pi^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sinh(r_1y_0)\sinh(r_2y_0)}{(2n+1)^4\sinh(y_0(r_2-r_1))}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\right]^{-1}.$$

## 6.5 Résultats

Pour nos simulations, nous avons choisi de prendre $Re = Rm = 1$ avec $y_0 = 1$ et $z_0 = 1/2$. Les simulations sont basées sur quatre nombres de Hartmann, $Ha \in \{1,3,5,7\}$. Puisque le paramètre de couplage $S = Ha^2/ReRm$, on a $S \in \{1,9,25,49\}$.

Notons que $G$ dépend également du nombre de Hartmann via les racines $r_1$ et $r_2$,

$$\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2z_0} \text{ et } r_{1,2} = \frac{Ha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{Ha^2 + 4\beta_n^2}.$$

On obtient le tableau 6.1 des erreurs obtenues pour les vitesses dans les simulations, où on

utilise les normes suivantes :

$$\|u-u^*\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i - u_i^*|\,, \quad \|u-u^*\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i-u_i^*)^2},$$
$$\|u-u^*\|_\infty = \max_i |u_i - u_i^*|\,, \quad \mathrm{MAE}(u,u^*) = \mathbb{E}\left(|u-u^*|\right)$$

Plus précisément,

$$\mathrm{MAE}(u,u^*) = \mathbb{E}\left(|u-u^*|\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|u_i-u_i^*| = \frac{\|u-u^*\|_1}{n}.$$

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ nous permettent de comparer avec d'autres travaux utilisant ces normes classiques. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et MAE sont choisies pour leur facilité d'interprétation. Cette dernière permet de normaliser la norme $\|\cdot\|_1$ selon le nombre de données.

Tableau 6.1 Erreurs sur la vitesse le problème de l'écoulement de Hartmann.

| $Ha$ | $\|\cdot\|_1$ | $\|\cdot\|_2$ | $\|\cdot\|_\infty$ | MAE |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $1,76\times10^2$ | $1,08$ | $1,32\times10^{-1}$ | $3,66\times10^{-3}$ |
| 3 | $3,66\times10^2$ | $2,30$ | $1,33\times10^{-1}$ | $7,60\times10^{-3}$ |
| 5 | $2,27\times10^2$ | $1,49$ | $1,46\times10^{-1}$ | $4,72\times10^{-3}$ |
| 7 | $2,61\times10^2$ | $1,80$ | $1,58\times10^{-1}$ | $5,42\times10^{-3}$ |

Les résultats du tableau 6.1 montrent que les simulations correspondent bien à la théorie. On peut le voir dans le graphique de la figure 6.1.

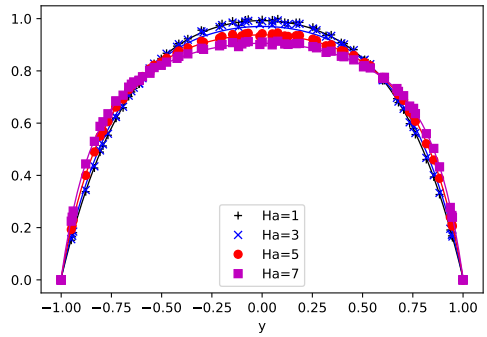


Figure 6.1 Vitesse $u(y, z = 0)$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann pour le problème de l'écoulement de Hartmann. Les courbes continues sont les valeurs théoriques.

Les erreurs en norme infinie et les erreurs moyennes des distances en valeurs absolues (« Mean

Absolute Error »- MAE) sont les deux erreurs les plus simples à interpréter [2]. L'erreur en norme infinie permet de savoir quelle est la distance maximale entre nos données et les valeurs théoriques. Dans notre cas, ces valeurs sont de l'ordre de $10^{-1}$ pour $u \in [0, 1]$. L'erreur MAE donne l'erreur moyenne en valeur absolue et est de l'ordre de $10^{-3}$. Ainsi, bien que l'erreur maximale soit autour de $10^{-1}$, en moyenne, les distances en valeur absolue entre les valeurs théoriques et nos résultats de simulations sont deux ordres de grandeur plus petits que la norme infinie.

Faisons la même analyse pour le champ magnétique, à l'aide du tableau 6.2.

TABLEAU 6.2 Erreurs sur le champ magnétique pour le problème de l'écoulement de Hartmann.

| $Ha$ | $\|\cdot\|_1$ | $\|\cdot\|_2$ | $\|\cdot\|_\infty$ | MAE |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $1,17 \times 10^2$ | $1,43$ | $5,69 \times 10^{-2}$ | $2,42 \times 10^{-3}$ |
| 3 | $1,19 \times 10^2$ | $1,32$ | $5,36 \times 10^{-2}$ | $2,46 \times 10^{-3}$ |
| 5 | $9,67 \times 10^1$ | $1,20$ | $4,90 \times 10^{-2}$ | $2,01 \times 10^{-3}$ |
| 7 | $8,61 \times 10^1$ | $1,06$ | $4,44 \times 10^{-2}$ | $1,79 \times 10^{-3}$ |

Les résultats sont similaires à ceux pour la vitesse. On peut voir la qualité des résultats dans le graphique 6.2. Dans le tableau 6.2, on note que les erreurs en norme MAE sont de l'ordre de $10^{-3}$, soit le même ordre de grandeur que les erreurs en norme MAE pour la vitesse. Néanmoins, pour la norme infinie, l'ordre de grandeur est plus petit pour le champ magnétique que pour le champ de vitesse. En effet, c'est ordre de grandeur est de $10^{-2}$ et donc ces résultats sont également excellents.

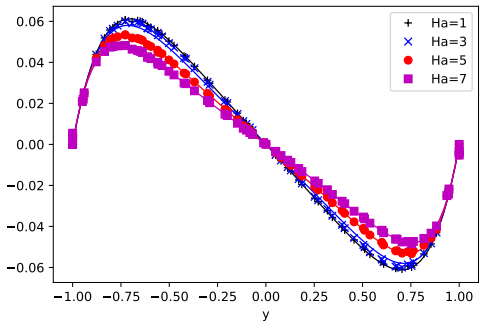


FIGURE 6.2 Champ d'induction $b(y, z = 0)$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann pour le problème de l'écoulement de Hartmann. Les courbes continues sont les valeurs théoriques.

Terminons notre analyse des résultats en observant les erreurs sur la pression. Elle est moins

2. On ne calcule pas les erreurs relatives afin d'éviter les problèmes de division par 0.

bien modélisée que la vitesse ou le champ magnétique. L'importance de l'erreur MAE est importante afin de faire la différence avec l'erreur en norme infinie.

TABLEAU 6.3 Erreurs sur la pression pour le problème de l'écoulement de Hartmann.

| $Ha$ | $\|\cdot\|_1$ | $\|\cdot\|_2$ | $\|\cdot\|_\infty$ | MAE |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $1,70 \times 10^4$ | $1,14 \times 10^2$ | $2,29 \times 10^1$ | $3,54 \times 10^{-1}$ |
| 3 | $2,40 \times 10^4$ | $1,44 \times 10^2$ | $2,38 \times 10^1$ | $4,98 \times 10^{-1}$ |
| 5 | $1,81 \times 10^4$ | $1,26 \times 10^2$ | $2,57 \times 10^1$ | $3,75 \times 10^{-1}$ |
| 7 | $1,99 \times 10^4$ | $1,42 \times 10^2$ | $2,79 \times 10^1$ | $4,14 \times 10^{-1}$ |

Les erreurs sur la pression sont environ deux ordres de grandeur plus grandes que les erreurs sur la vitesse et le champ magnétique. L'erreur MAE suggère qu'en général, la pression semble suivre la théorie, mais l'erreur en norme infinie montre qu'au moins un point a une erreur autour 25. Cette erreur est significative. On peut voir ce problème dans la figure 6.3.

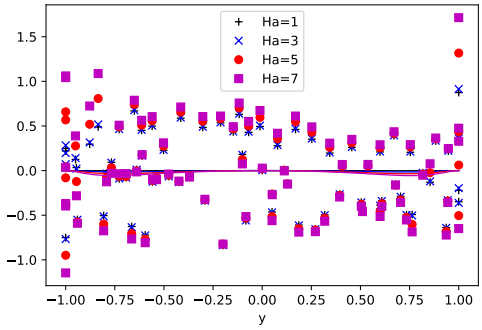


FIGURE 6.3 Pression $p(x = 5, y, z = 0)$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann pour le problème de l'écoulement de Hartmann.

Les valeurs numériques sont prises dans une tranche autour des valeurs $x \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ et $z \in [z^* - \delta, z^* + \delta]$ avec $x^* = 5$ et $z^* = 0$. On prend $\delta = h = 0,07$, ou $h$ est la taille d'un élément. La variation en pression étant grande, on propose de considérer $\delta = h/2$. On peut observer dans la figure 6.4, que la pression ne suit pas la théorie.

Les simulations de l'écoulement de Hartmann pour $Ha \in \{1, 3, 5, 7\}$ ont été produites avec succès. La vitesse et le champ magnétique correspondent aux résultats prédits par la théorie. Cependant, la pression ne semble pas suivre la théorie et donne des erreurs deux ordres de grandeurs plus grandes que les erreurs sur $u$ et $b$. Pour le moment, l'option est d'utiliser les résultats sur $b$ afin d'obtenir la pression via la formule (6.1). Un futur travail pourrait s'intéresser à la raison pour laquelle la pression ne permet pas de retrouver les résultats théoriques. Il serait possible d'imposer un saut en pression unitaire entre le plan $x = 0$ et

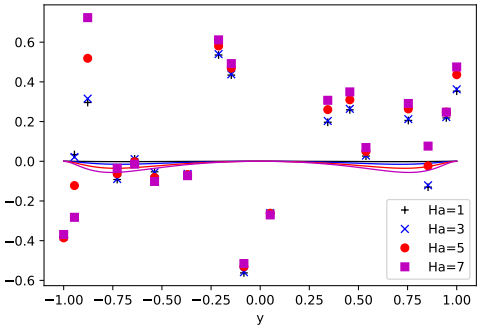


FIGURE 6.4 Pression $p(x = 5, y, z = 0)$ pour différentes valeurs du nombre de Hartmann avec $\delta = 0,035$ pour le problème de l'écoulement de Hartmann.

$x = x_0$, pour $x_0$ la longueur du domaine. La variation étant rapide, il est difficile d'observer le comportement théorique.

# CHAPITRE 7 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

L'objectif principal de ce travail était de modéliser des écoulements magnétohydrodynamiques à surface libre. L'objectif a été partiellement atteint puisque les objectifs spécifiques suivants ont été réalisés à l'exception du dernier. Afin de satisfaire ce dernier objectif, il était prévu d'étudier un problème MHD à surface libre ainsi qu'une instabilité MHD à surface libre.

1. modéliser les écoulements hydrodynamiques à surface libre ;
2. modéliser une instabilité hydrodynamique à surface libre ;
3. modéliser un écoulement magnétohydrodynamique ;
4. modéliser des écoulements magnétohydrodynamiques à surface libre avec la méthode de Galerkin discontinue.

Les écoulements hydrodynamiques à surfaces libres ont été modélisés au moyen du problème de Young-Laplace et de la bulle soumise à la poussée d'Archimède. Pour le premier problème, on peut voir qu'en absence de reconstruction d'interface, la méthode SUPG n'atteint jamais l'état stationnaire, alors que la méthode de GD nécessite au maximum 9 pas de temps. Cette dernière méthode permet également d'obtenir la plus petite erreur sur le saut en pression, lorsqu'on utilise le nombre maximal de processeur. Ensuite, le problème de la bulle soumise à la poussée d'Archimède à permi de vérifier que la méthode de GD permet de perdre moins de masse, tout en respectant la physique du problème. Cependant, lorsque le nombre de Reynolds terminal augmente, on remarque que les deux méthodes performent de moins en moins adéquatement. Pour $Re_t = 20$, on peut même voir que la méthode SUPG perd moins de masse que la méthode de GD. Néanmoins, les avantages de cette dernière méthode, soit la vitesse d'exécution du code, la vitesse de convergence vers des solutions stationnaires, la diminution de la diffusion numérique et la possibilité de paralléliser le calcul, nous amènent à sélectionner cette méthode par la suite.

Ensuite, nous avons modélisé une instabilité hydrodynamique à surface libre au moyen de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. On valide ce problème en mesurant la demi-hauteur de pénétration du fluide plus dense dans le fluide moins dense. On développe également une méthode afin de rendre compte des conditions initiales du problème, mais également de la diffusion numérique présente. La première simulation avec $Re = 10$ ne permet pas d'atteindre le régime inertiel de la simulation, ce qui permet de voir qu'une transition du paramètre $\alpha$ semble se produire, confirmant ainsi que celui-ci ne peut pas être constant. Au final, les simulations permettent de retrouver les résultats théoriques.

Finalement, nous avons modélisé un écoulement MHD en se basant sur le problème de Hart-

mann, pour lequel un fluide se déplaçant à débit constant est soumis à un champ magnétique perpendiculaire au sens de l'écoulement. L'expression théorique est obtenue avec succès ce qui nous permet de vérifier que nos simulations retrouvent les bons profils pour le champ de vitesse, le champ magnétique et la pression. Au final, ces profils sont retrouvés avec succès sauf pour le profil de la pression. Ce dernier ne correspond pas aux résultats théoriques. Néanmoins, via la formule (6.1), il est possible d'utiliser le champ magnétique afin de reconstruire la pression au besoin.

## 7.1 Limitations de la solution proposée

Ce travail a été limité par le nombre de processeurs et la taille du maillage que nou pouvions utiliser. Il serait nécessaire d'obtenir un plus grand nombre de processeurs afin de pouvoir diminuer la taille des éléments et donc gagner en précision. Il serait intéressant de prendre a profit les symétries présentes dans nos simulations afin de limiter la taille du domaine. Par exemple, l'instabilité de Rayleigh-Taylor pourrait être simulée simplement d'un côté du plan $x = 0$. On réduirait ainsi de moitié le nombre d'éléments.

De plus, nous avons été limité par l'impossibilité d'utiliser PARDISO à la fin du projet de recherche. Sans cette librairie, la résolution de problèmes simples devient complexe et impossible lorsqu'on considère des problèmes de MHD. Il serait nécessaire d'avoir accès à une nouvelle librairie tout aussi performente pour la suite des travaux.

## 7.2 Améliorations futures

Dans de futures recherches, il serait intéressant de s'attaquer aux problèmes de Young-Laplace et de la dynamique des bulles dans leur version MHD. Ce premier problème est difficile puisqu'il est très raide, mais le raffinement de maillage adaptatif ainsi que l'adaptation des pas de temps pourrait permettre de simuler ce problème. Il en est de même pour les bulles soumises à la poussée d'Archimède.

Pour ces dernières, il serait également intéressant de diminuer la taille du maillage afin de vérifier si la méthode de GD performe toujours mieux que la méthode SUPG. De plus, il serait intéressant de développer une méthode de reconstruction de maillage mettant à profit une observation de Roland Rivard [4]. Soit $\tilde{F}_i$ une pseudo-concentration mise à jour. Celle-ci est donnée par $\tilde{F}_i = F_i + \delta F_i$ où $\delta F_i$ est la mise à jour de la pseudo-concentration. On utilise le schéma de Yann-Meing Law-Kam-Cio [3] afin de séparer les indices $i \in \{0, \cdots, k\}$ en deux sommes pour lesquelles il y a eu mise à jour ($i \in M$) et pour lesquelles il n'y en a pas eu

($i \notin M$). Par simplicité, on suppose que le temps $n$ n'est pas mise à jour

$$\frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{i \in M} \alpha_i \tilde{F}_h^{n-i} + \frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{i \notin M} \alpha_i F_h^{n-i} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla F_h^n = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i F_h^{n-i} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla F_h^n = -\frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{i \in M} \alpha_i \delta F_h^{n-i}.$$

Ainsi, il semble que plus il y a des mises à jour, plus la somme donne un terme source problématique. Appliquons maintenant une mise à jour à tous les instants,

$$\frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \tilde{F}_h^{n-i} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \tilde{F}_h^n = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i F_h^{n-i} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla F_h^n = -\left( \frac{1}{\beta_0 \Delta t} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \delta F_h^{n-i} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \delta F_h^n \right)$$

Le membre de droite est maintenant une équation de transport discrète selon $\delta F$. Ainsi, a priori, bien discrétiser l'équation de transport pour la mise à jour à chaque pas de temps permet de bien discrétiser $F$ également.

Cette idée a deux problèmes. Le premier est qu'on ne résout pas l'équation de transport parfaitement, même dans le meilleur des cas. Il y a toujours une erreur numérique et donc un terme source. Le deuxième est qu'il faut une méthode de mise à jour suffisamment flexible pour discrétiser l'équation de transport comme une contrainte.

Le premier problème dépend simplement de notre abilité à bien discrétiser l'équation de transport, ce qui n'est pas un problème, mais le deuxième est un vrai défi et mériterait à être investigué, puisque la reconstruction d'interface a le potentiel de limiter le nombre d'éléments nécessaire à la modélisation.

Je ne connais pas de méthode ayant cette propriété sur ces mises à jour. L'idée de cette exploration vient du fait que la pseudo-concentration est un classificateur et les problèmes de classification de points sont à la base de l'apprentissage automatique (« Machine Learning »). Aussi, la question apparaît. Peut-on modéliser $F$ avec l'apprentissage automatique ? Dans l'éventualité où la réponse était positive, il faudrait encore propager la pseudo-concentration avec l'équation de transport. Cette idée introduit donc systématiquement des mises à jour. Afin d'effectuer cet apprentissage automatique, il est possible d'utiliser les solutions théoriques pour l'équation de transport. Lorsque le champ de vitesse est connu, les solutions sont

connues et peuvent servir de comparaisons pour l'entrainement.

Une autre amélioration intéressante serait de modifier le modèle de Ristorcelli et Clark afin d'obtenir la bonne équation différentielle à résoudre pour la demi-hauteur de pénétration avec les bonnes conditions initiales. Par la suite, il serait également intéressant d'approfondir notre compréhension du terme $\alpha$ pour lequel il ne peut pas être constant. Finalement, puisqu'on propose une méthode qui permet de rendre compte du la diffusion numérique présente, il serait intéressant d'observer les effets des méthodes SUPG et de GD avec ces modèles.

Pour terminer, il faudrait être en mesure d'obtenir une bonne modélisation de la pression, pour le problème de l'écoulement de Hartmann, directement à partir de la modélisation et non pas avec une reconstruction par la suite. Il est connu que l'apprentissage automatique peut résoudre le problème de Hartmann [38] et il serait intéressant de voir si cette méthode pouvait retrouver la pression et se généraliser au reste de la méthodologie.

# RÉFÉRENCES


[1] A. Acrivos, “Bubbles, drops and particles. by r. clift, j. r. grace and m. e. weber. academic press, 1978. 380 pp.” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 94, n°. 4, p. 795–796, 1979.

[2] Y.-M. Law-Kam-Cio, “Mise en œuvre d’un solveur de galerkin discontinue pour la modélisation d’écoulements à surfaces libres viscoélastiques tridimensionnels,” mémoire de maîtrise, Dép. de mathématiques et de génie industriel, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC, 2014. [En ligne]. Disponible : https://publications.polymtl.ca/1502/

[3] Y.-M. Law, R. Rivard et D. Steven, “Comparison between the discretization of the transport equation using the dg method and the supg method on mass conservation in free surface flow problems,” 2018, soumis pour publication.

[4] R. Rivard, “Simulation des grandes échelles appliquée à la modélisation des écoulements turbulents à surface libre,” thèse de doctorat, Dép. de mathématiques et de génie industriel, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC, 2012. [En ligne]. Disponible : https://publications.polymtl.ca/962/

[5] J. Ristorcelli et T. Clark, “Rayleigh–taylor turbulence : self-similar analysis and direct numerical simulations,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 507, p. 213–253, mai 2003. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1017/S0022112004008286

[6] Y.-M. Law-Kam-Cio, “Méthode de galerkin discontinue pour la discrétisation par éléments finis des équations de maxwell pour la modélisation de problèmes d’électromagnétisme en basses fréquences,” thèse de doctorat, Dép. de mathématiques et de génie industriel, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC, 2018. [En ligne]. Disponible : https://publications.polymtl.ca/3111/

[7] J.-F. Gerbeau, “Problèmes mathématiques et numériques posés par la modélisation de l’electrolyse de l’aluminium,” thèse de doctorat, Mathématiques appliquées, École des Ponts ParisTech, 1998. [En ligne]. Disponible : https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00005593/document

[8] J.-F. Gerbeau, C. Le Bris et T. Lelièvre, *Mathematical Methods for the Magnetohydrodynamics of Liquid Metals*. Oxford University Press Inc., 2006.

[9] S. Galtier, *Magnéto-hydrodynamique : des plasmas de laboratoire à l’astrophysique*. Vuibert, 2014.

[10] A. Choudhuri, *The Physics of Fluids and Plasmas, An Introduction for Astrophysicists*. Cambridge University Press, 1998. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1017/CBO9781139171069

[11] D. Tritton, *Physical Fluid Dynamics*. Springer Dordrecht, 1977. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1007/978-94-009-9992-3

[12] E. Thompson, "Use of pseudo-concentrations to follow creeping viscous flows during transient analysis," *Numerical Methods in Fluids*, vol. 6, n°. 10, p. 749–761, 1986. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1002/fld.1650061005

[13] S. Dufour, "Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements multifluides," thèse de doctorat, Dép. de mathématiques et de génie industriel, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC, 1999. [En ligne]. Disponible : https://publications.polymtl.ca/8606/

[14] J. Brackbill, D. Kothe et C. Zemach, "A continuum method for modeling surface tension," *Journal of Computational Physics*, vol. 100, n°. 2, p. 335–354, 1992. [En ligne]. Disponible : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919290240Y

[15] E. Marchandise *et al.*, "A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for the computation of bubble dynamics," *Journal of Computational Physics*, vol. 225, n°. 1, p. 949–974, 2007. [En ligne]. Disponible : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999107000125

[16] M. Sussman, P. Smereka et S. Osher, "A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow," *Journal of Computational Physics*, vol. 114, n°. 1, p. 146–159, 1994. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1155

[17] M. Sussman *et al.*, "An improved level set method for incompressible two-phase flows," *Computers & Fluids*, vol. 27, n°. 5-6, p. 663–680, 1998. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1016/S0045-7930(97)00053-4

[18] M. v. S. Annaland, N. Deen et J. Kuipers, "Numerical simulation of gas bubbles behaviour using a three-dimensional volume of fluid method," *Chemical Engineering Science*, vol. 60, n°. 11, p. 2999–3011, 2005. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1016/j.ces.2005.01.031

[19] D. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, 4e éd. Pearson, 2013.

[20] V. Girault et P. Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*. Springer Berlin, Heidelberg, 1979. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1007/BFb0063447

[21] A. Fortin et A. Garon, *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. GIREF, 2020. [En ligne]. Disponible : https://giref.ulaval.ca/afortin/elements_finis.pdf

[22] F. Brezzi, “On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers,” *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, vol. 8, n°. R2, p. 129–151, 1974. [En ligne]. Disponible : http://www.numdam.org/item/M2AN_1974___8_2_129_0/

[23] E. Süli et D. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press, 2012. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1017/CBO9780511801181

[24] C. Johnson, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Dover Publications, 1987.

[25] J. S. Hesthaven et T. Warburton, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods, Algorithms, Analysis, and Applications*. Springer, 2008. [En ligne]. Disponible : https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-72067-8

[26] D. Munger, “Simulation numérique des instabilités magnétohydrodyuamiques dans les cuves de production de l’aluminium,” mémoire de maîtrise, Département de physique, Université de Montréal, Montréal, QC, 2004. [En ligne]. Disponible : https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/14764

[27] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2e éd. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. [En ligne]. Disponible : https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898718003

[28] E. Marchandise, “Simulation of three-dimensional two-phase flows : coupling of a stabilized finite element method with a discontinuous level set approach,” thèse de doctorat, Université catholique de Louvain, 2006. [En ligne]. Disponible : https://dial.uclouvain.be/pr/boreal/object/boreal:5000

[29] R. J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, 2e éd. Birkhäuser Basel, 1992. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8629-1

[30] T. Faber, *Fluid Dynamics for Physicists*. Cambridge University Press, 1995. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1017/CBO9780511806735

[31] A. Cook et P. Dimotakis, “Transition stages of rayleigh–taylor instability between miscible fluids,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 443, p. 69–99, sept. 2001. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1017/S0022112001005377

[32] C. Audet et W. Hare, *Derivative-Free and Blackbox Optimization*. Springer Cham, 2017. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1007/978-3-319-68913-5

[33] J. Hartmann, “Hg-Dynamics I. Theory of the Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field,” *Mathematisk-fysiske Meddelelser. XV*, vol. 15, p. 6, déc. 1937.

[34] S. Molokov, M. René et K. Moffatt, *Magnetohydrodynamics : Historical Evolution and Trends*, 1er éd. Springer Dordrecht, 2007. [En ligne]. Disponible : https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4020-4833-3

[35] D. D. Schnack, *Lectures in Magnetohydrodynamics*, 1er éd. Springer Berlin, Heidelberg, 2009. [En ligne]. Disponible : https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-00688-3

[36] M. Bluck et M. Wolfendale, "An analytical solution to electromagnetically coupled duct flow in mhd," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 771, avr. 2015. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1017/jfm.2015.202

[37] J. Shercliff, "Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 49, p. 136–144, janv. 1953. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1017/S0305004100028139

[38] M. H. Taheri, M. Abbasi et M. Khaki Jamei, "Using artificial neural network for computing the development length of mhd channel flows," *Mechanics Research Communications*, vol. 99, p. 8–14, 2019. [En ligne]. Disponible : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0093641319301223