

Titre: Schéma aux éléments finis en coordonnées polaires appliqué à
Title: l'écoulement visqueux dans une turbine

Auteurs: André Fortin, Ricardo Camarero, & Michel St-Georges
Authors:

Date: 1985

Type: Rapport / Report

Référence: Fortin, A., Camarero, R., & St-Georges, M. (1985). Schéma aux éléments finis en
Citation: coordonnées polaires appliqué à l'écoulement visqueux dans une turbine.
(Technical Report n° EPM-RT-85-06). <https://publications.polymtl.ca/10507/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/10507/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

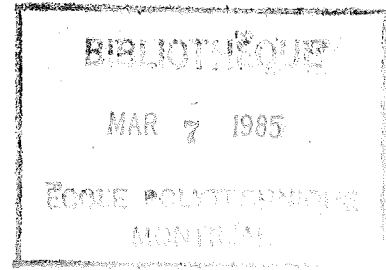
Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EPM-RT-85-06
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:



EPM/RT-85-6

380-C2-44^②
207

(Schéma aux éléments finis en coordonnées polaires...)
appliqué à l'écoulement visqueux dans une turbine

André (Fortin), Ecole Polytechnique, Montréal
Ricardo (Camarero), Ecole Polytechnique, Montréal
Michel (St-Georges), Ecole Polytechnique, Montréal

Ecole Polytechnique de Montréal
Février 1985

Ce travail a été effectué dans le cadre du projet PRAI No. P-8122 et d'octrois de dépenses courantes du CRSNG.

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite de l'auteur.

Dépôt légal, 2^e trimestre 1985
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Service de l'édition
Ecole Polytechnique
Case Postale 6079, Succ. "A"
Montréal, Québec H3C 3A7
(514) 340-4903

Compter 0,05\$ par page (arrondir au dollar le plus près), plus 1,50\$ (Canada) ou 2,50\$ (étranger) pour la couverture, les frais de poste et de manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'Ecole Polytechnique de Montréal. Nous n'honorons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable, dans le cas d'établissements d'enseignement ou d'organismes canadiens.

PLAN

Introduction

Chapitre 1: Présentation du problème

- 1.1 Equations de base
- 1.2 Géométrie
- 1.3 Conditions aux limites
- 1.4 Coordonnées polaires

Chapitre 2: Méthode utilisée

- 2.1 Formulation variationnelle
- 2.2 Discrétisation
- 2.3 Choix de l'élément
- 2.4 Montée en Reynolds

Chapitre 3: Résultats

Conclusion

Liste des symboles

\underline{u}	vecteur vitesse
u_r, u_θ	composantes de u suivant r et θ
p	pression
∇p	gradient de la pression
$\Delta \underline{u}$	Laplacien du vecteur vitesse
$\nabla \cdot \underline{u}$	divergence du vecteur vitesse
Re	nombre de Reynolds
r	rayon à l'origine
θ	position angulaire
\underline{f}	forces massiques
χ, q	fonctions de pondération
V	espace de solution des vitesses
Q	espace de solution de la pression
V_h	approximation de dimension finie de V
Q_h	approximation de dimension finie de Q

Introduction

L'évolution technologique actuelle amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes et coûteux dans les domaines de l'aéronautique, de l'aérospatiale et du nucléaire.

Dans ces domaines et dans bien d'autres, l'ingénieur a besoin de savoir le plus précisément possible l'influence de ses décisions lors de la conception: il a besoin de modèles pour simuler le comportement de systèmes physiques.

La mécanique des fluides et des solides permet de décrire le comportement de ces systèmes physiques au moyen d'équations aux dérivées partielles; la méthode des éléments finis est une méthode utilisée pour résoudre ces équations. Cette méthode fait appel aux sciences de l'ingénieur pour établir les équations, aux méthodes numériques pour les discrétiser et à l'informatique pour effectuer efficacement les calculs sur ordinateur.

Le texte qui suit décrit les équations aux dérivées partielles qui régissent ces écoulements, les grandes lignes de la méthode de solution utilisée et quelques-uns des résultats obtenus. La méthode est développée autour d'un problème précis: modéliser le comportement d'un fluide passant entre deux aubes directrices d'une turbine hydraulique. Pour des raisons géométriques, l'algorithme présenté est développé en coordonnées polaires.

Chapitre 1 - Présentation du problème

1.1 Equations de base

Le présent algorithme est basé sur les équations de Navier-Stokes en deux dimensions régissant le comportement des fluides visqueux incompressibles.

Les équations s'écrivent:

équation de Navier-Stokes:

$$(\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\underline{u} = \underline{f} - \underline{\nabla}p + \frac{1}{Re} \Delta \underline{u} \quad (1.1.1)$$

équation de continuité (conservation de la masse):

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \quad (1.1.2)$$

où Re est le nombre de Reynolds, le rapport adimensionnel entre les forces d'inertie et les forces de viscosité rencontré fréquemment en mécanique des fluides. Le terme $(\underline{u} \cdot \underline{\nabla})\underline{u}$ représente le terme de transport, $\underline{\nabla}p$ les forces de pression et $(1/Re)\Delta \underline{u}$ les termes de diffusion; les forces massiques \underline{f} sont négligées.

Deux dimensions seulement seront considérées; les effets tridimensionnels dus à l'épaisseur du canal sont négligés.

Noter que les équations décrites ci-dessus sont valides pour des écoulements stationnaires, qui ne varient pas en fonction du temps.

1.2 Géométrie

L'algorithme de calcul présenté a pour but d'obtenir le comportement d'un fluide dans une région ou portion de l'espace physique appelée domaine à l'intérieur de laquelle il est intéressant de connaître le comportement du fluide.

Dans le cas présent, le domaine est un canal interaube de turbine hydraulique, soit l'espace compris entre deux aubes directrices, une portion de l'espace devant les aubes appelée entrée et une portion après les aubes appelée sortie (voir figure 1). Le programme vise particulièrement le calcul dans le canal formé des aubes directrices et avant directrices de turbines Kaplan (voir figure 2). Un canal interaube typique est présenté à la figure 3.

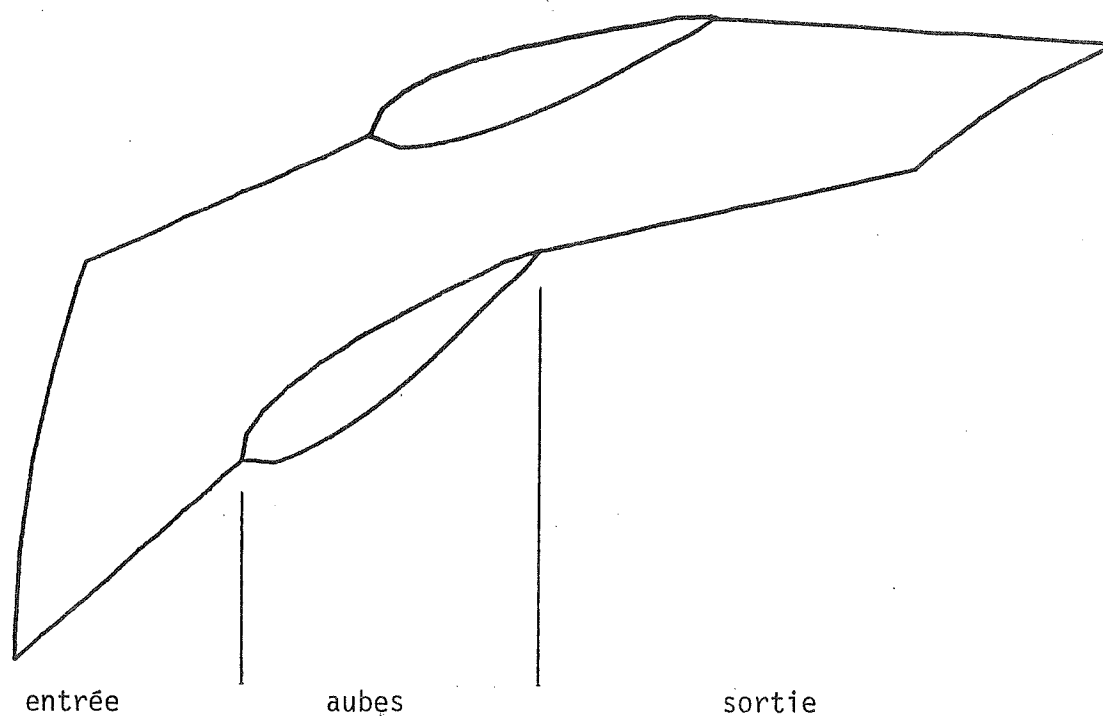


Figure 1. Canal interaube

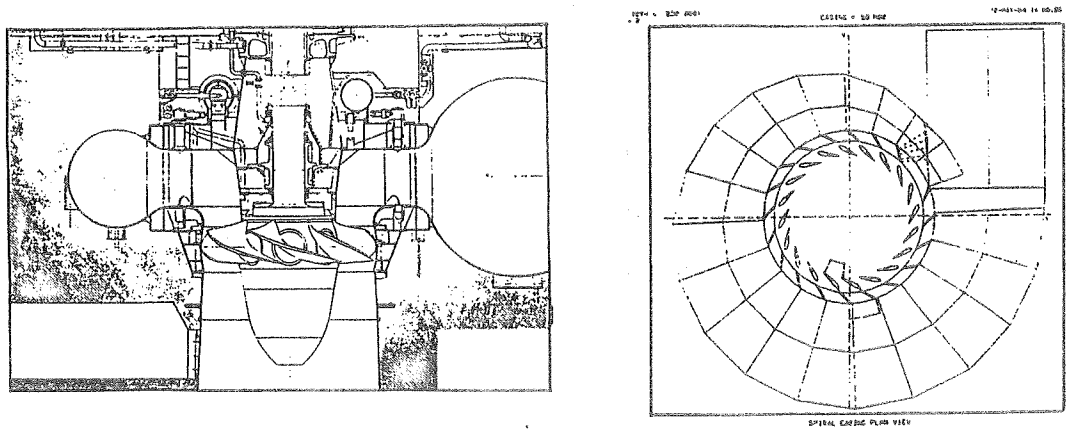


Figure 2. Turbine Kaplan

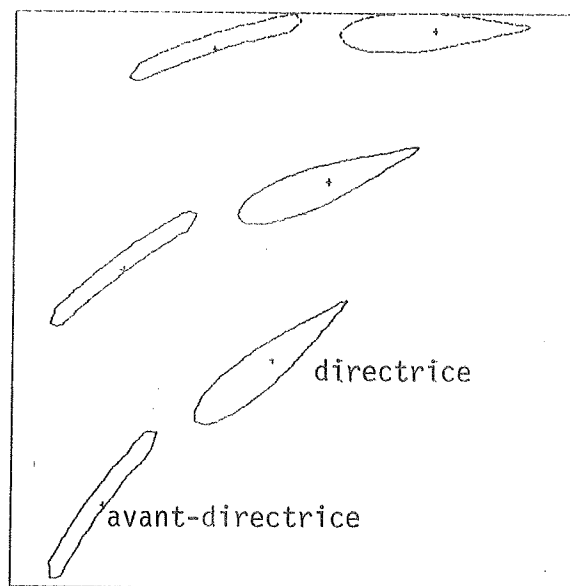


Figure 3. Canal interaube d'autres directrices

1.3 Conditions aux limites

A l'entrée du canal, la vitesse est imposée et connue. De chaque côté il y a une condition de périodicité, c'est-à-dire que le comportement du fluide sur le bord inférieur du canal est le même que sur le bord supérieur. En effet ce qui se passe dans un canal donné doit être identique à ce qui se passe dans les canaux voisins par symétrie. Sur les aubes il y a une condition de non-glissement: la vitesse doit être nulle le long d'une paroi solide à cause de la viscosité. A la sortie, il n'y a aucune condition imposée; c'est une sortie libre (voir figure 4).

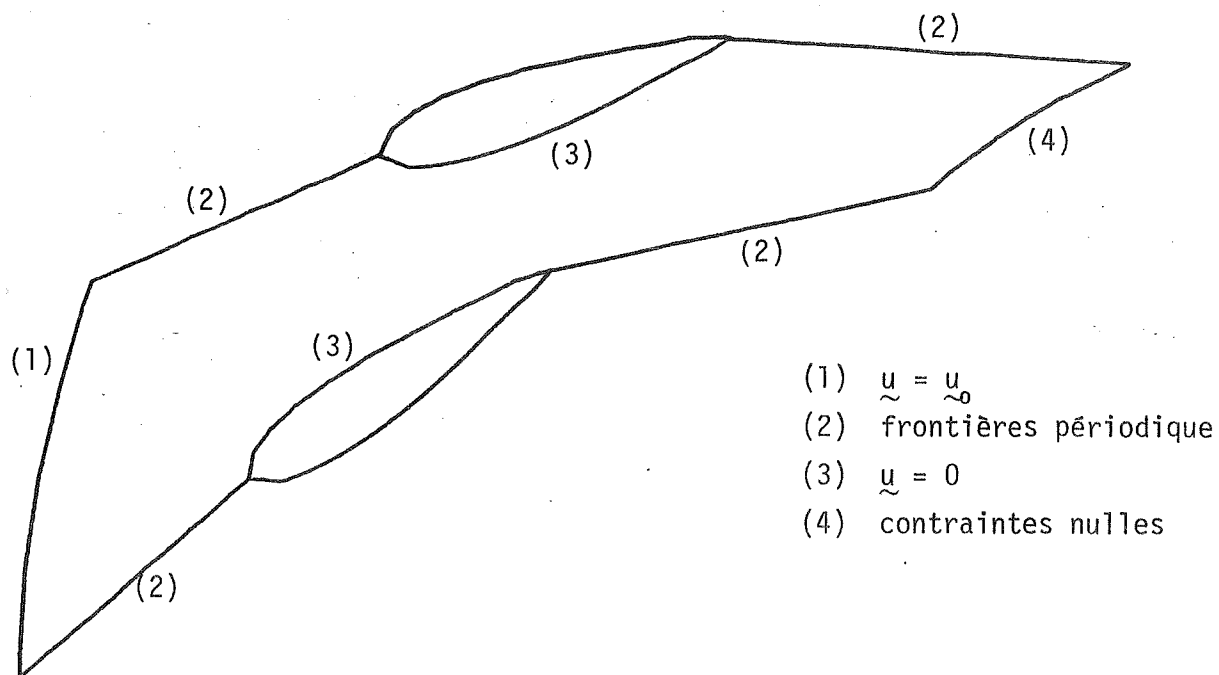


Figure 4. Conditions aux frontières

1.4 Coordonnées polaires

Le canal interaube décrit précédemment, de par sa symétrie radiale, est facilement représenté en coordonnées polaires. De plus, dans le système r, θ la périodicité est très simple à imposer: u_r et u_θ doivent être identiques de chaque côté du canal.

La principale raison de l'utilisation des coordonnées polaires est la simplicité du traitement de la périodicité aux frontières.

La suite du développement est en coordonnées cartésiennes par souci de simplicité; les équations en coordonnées polaires sont équivalentes et peuvent être dérivées avec un changement de variables approprié.

En coordonnées polaires les équations de Navier-Stokes s'écrivent:

$$\frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} = f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left\{ \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right\} \quad (1.4.1)$$

$$\frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left\{ \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right\} \quad (1.4.2)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (1.4.3)$$

Chapitre 2: Méthode utilisée

Le comportement du fluide est obtenu en calculant la vitesse de l'écoulement et la pression par une méthode d'éléments finis. Le calcul et les résultats sont en coordonnées primitives u_r, u_θ, p soit respectivement les deux composantes de vitesse et la pression.

Pour les écoulements laminaires à bas nombre de Reynolds considérés, on peut supposer que la viscosité et la densité du fluide sont constantes et les effets thermiques négligeables.

2.1 Formulation variationnelle

Utilisant la convention de sommation sur les indices répétés, les équations (1.1.1) et (1.1.2) se réduisent à

$$\frac{-2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} (D_{ij}(\underline{u})) + (\underline{u} \cdot \nabla) u_i + (\nabla p)_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\text{où} \quad D_{ij}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.3)$$

Multipliant l'équation (2.1.1) par $\underline{v} \in V$ et l'équation (2.1.2) par $\underline{q} \in Q$ et intégrant (2.1.1) par parties, on obtient la formulation faible suivante:

$$\frac{2}{\text{Re}} (D_{ij}(\underline{u}), D_{ij}(\underline{v})) + ((\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u}, \underline{v}) - (p, \nabla \cdot \underline{v}) = (f, \underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V, \quad (2.1.4)$$

$$(q, \nabla \cdot \underline{u}) = 0 \quad \forall q \in Q. \quad (2.1.5)$$

Les espaces V et Q doivent être judicieusement choisis de sorte que (2.1.4) - (2.1.5) soit équivalent à (2.1.1) - (2.1.2). Pour de plus amples détails voir la référence [4].

2.2 Discrétisation

Le domaine est d'abord divisé en sous-domaines appelés éléments (voir figure 5). Nous construisons alors des espaces de dimension finie V_h et Q_h approximant V et Q et la vitesse et la pression sont approximées par

$$u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x) \quad (2.2.1)$$

$$p_h = \sum_{i=1}^M p_i \psi_i(x) \quad (2.2.2)$$

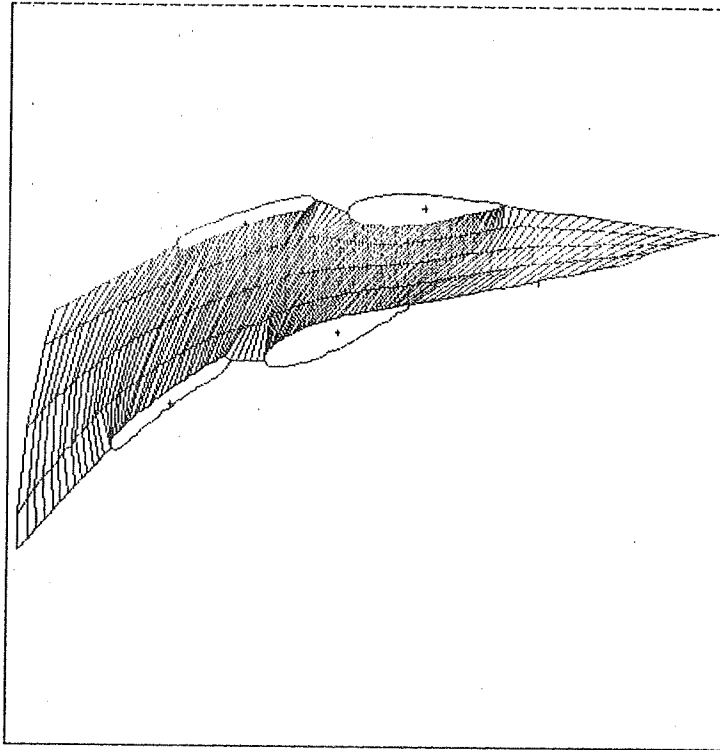


Figure 5. Maillage typique

où N est le nombre de noeuds d'interpolation en vitesse et M le nombre de noeuds d'interpolation en pression. Les fonctions ϕ_j et ψ_j sont des bases de V_h et Q_h respectivement. Le problème discret consiste à trouver u_h, p_h tels que

$$\frac{2}{Re} (D_{ij}(u_h), D_{ij}(v_h)) + ((u_h \cdot \nabla) u_h, v_h) - (p_h, \nabla \cdot v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (2.2.3)$$

$$(q_h, \nabla \cdot u_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (2.2.4)$$

que l'on peut réécrire sous forme matricielle

$$K u_h + N(u_h) u_h + C p_h = f \quad (2.2.5)$$

$$C^T u_h = 0 \quad (2.2.6)$$

La non-linéarité de l'équation (2.2.5) requérant un traitement spécial, une généralisation de l'algorithme d'Usawa a été développée et utilisée pour les équations de Navier-Stokes (voir la référence [4]).

2.3 Choix de l'élément

Il est maintenant bien connu que les espaces V_h et Q_h ne peuvent pas être choisis indépendamment: il faut respecter une condition théorique dite condition de Babuska-Brezzi (référence [2]) pour que le problème soit bien posé. L'élément choisi satisfait la condition précitée et est un des meilleurs en deux dimensions: l'élément $Q_2^{(9)} - P_1$ (voir figure 6).

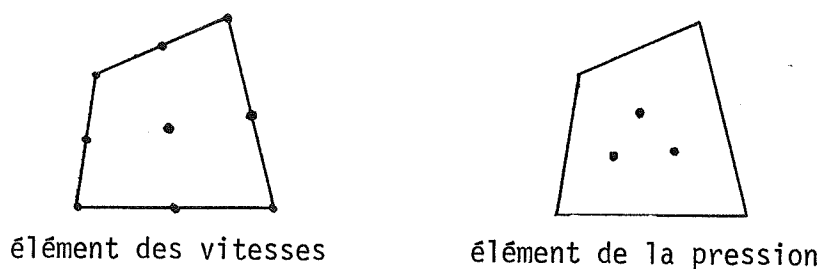


Figure 6. Élément $Q_2^{(9)} - P_1$

La vitesse est biquadratique sur chaque élément et continue d'un élément à l'autre tandis que la pression est linéaire et discontinue.

Avec cet élément, on définit la vitesse comme étant de la forme

$$a + br + c\theta + dr^2 + er^2\theta + fr^2\theta^2 + gr^2\theta^2 + hr\theta^2 + i\theta^2 \quad (2.3.1)$$

et la pression de la forme

$$a + br + c\theta \quad (2.3.2)$$

2.4 Montée en Reynolds

Etant donné le caractère itératif de la solution, on ne peut obtenir directement le comportement du fluide pour la valeur du nombre de Reynolds désirée. On doit d'abord calculer une première solution à $Re = 1$ puis on augmente le nombre de Reynolds graduellement jusqu'à la valeur désirée. Quelques séries expérimentales typiques de nombres de Reynolds sont illustrées à la figure 7.

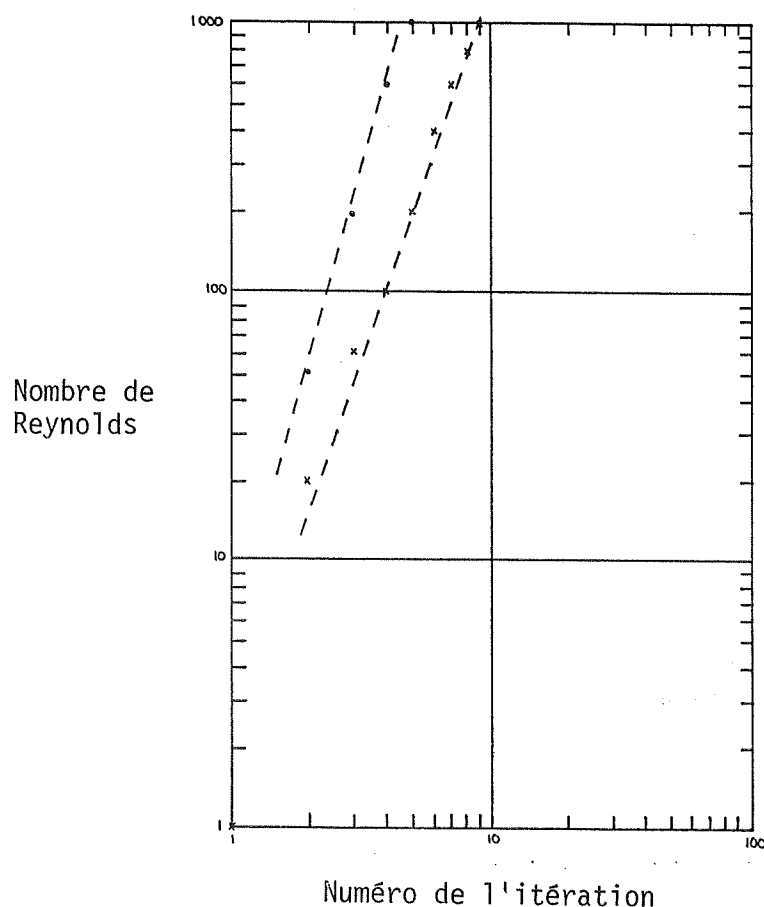


Figure 7. Séries typiques de nombres de Reynolds

La série des nombres de Reynolds utilisée dépend d'une caractéristique du maillage que nous avons convenu d'appeler sévérité; un maillage peu sévère permet la montée rapide en Reynolds alors qu'un maillage sévère requiert une montée plus prudente. De plus nous avons remarqué que l'algorithme d'éléments finis est borné en Reynolds, c'est-à-dire que pour un maillage donné, il existe une valeur maximale du nombre de Reynolds au-delà de laquelle l'algorithme n'obtient plus de solution stable et diverge. Cette limite peut varier de Reynolds = 800 ou moins à 3000 et plus selon que le maillage est très sévère ou peu sévère: un maillage peu sévère a une solution stable à un nombre de Reynolds plus élevé.

Par expérience, nous observons qu'un maillage sévère est en général un maillage où les aubes obstruent beaucoup l'écoulement ou un maillage qui a des angles très prononcés (voir figure 8). Pour un canal polaire, il semble que la convergence du canal diminue considérablement la sévérité; un canal divergent serait donc plus sévère.

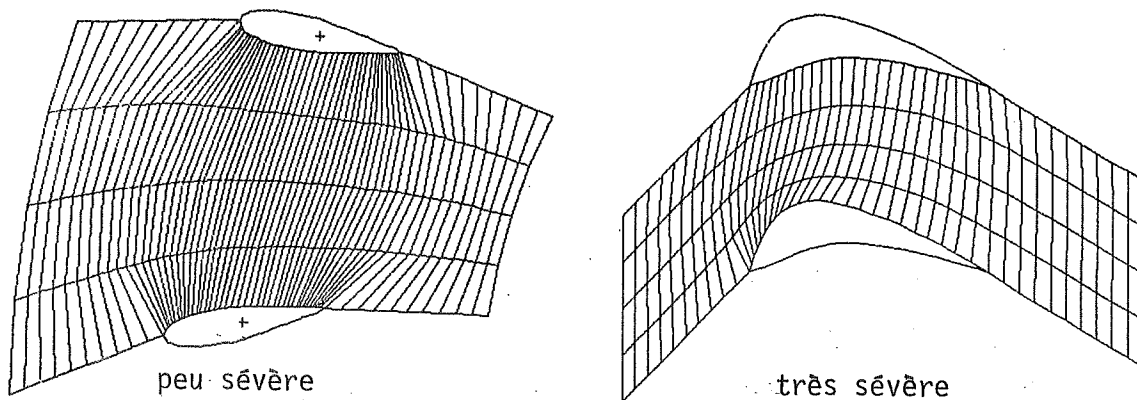


Figure 8. Sévérité des maillages

Etant donné la délicatesse requise pour choisir la meilleure série de nombres de Reynolds pour obtenir la solution désirée le plus vite possible tout en conservant des solutions intermédiaires stables, nous avons tenté d'optimiser de façon automatique le choix des nombres de Reynolds intermédiaires.

Premièrement, nous avons remarqué que les séries de nombres de Reynolds utilisées expérimentalement donnent une progression à peu près linéaire sur papier logarithmique, d'où une relation du type

$$Re = i^a \quad (2.4.1)$$

où i est le numéro de l'étape et a un exposant à déterminer. On remarque que a seul varie entre un maillage sévère et un maillage peu sévère.

En deuxième lieu, nous avons défini un facteur de sévérité compris entre 1 et 10 qui tient compte de la sévérité du maillage; l'exposant a est calculé en fonction de ce facteur. Le facteur de sévérité est ajusté à chaque étape intermédiaire en tenant compte de la facilité à laquelle l'algorithme obtient une solution stable, c'est-à-dire le nombre d'itérations à un Reynolds donné.

Nous obtenons finalement un algorithme capable de s'ajuster au comportement particulier de chaque maillage en essayant constamment d'optimiser la montée en Reynolds, donc en diminuant le temps de calcul.

Chapitre 3 - Résultats

L'algorithme présenté aux pages précédents est encore un test, c'est pourquoi très peu de résultats sont disponibles en ce moment.

Les pages qui suivent montrent le genre de résultats obtenus avec un maillage de 8 rangées par 30 colonnes à un nombre de Reynolds de 2730.

La figure 9 représente le champ de vitesses au centre de chaque élément. On remarque l'inflexion de la vitesse au bord d'attaque et la présence d'une zone de recirculation au bord de fuite de l'aube supérieure; cette zone de recirculation peut être associée au décrochement de la couche limite.

La figure 10 montre les isobares correspondants. Noter la perte de pression brusque au bord d'attaque de l'aube supérieure surtout qui correspond bien au changement de direction de la vitesse remarqué à la figure 9.

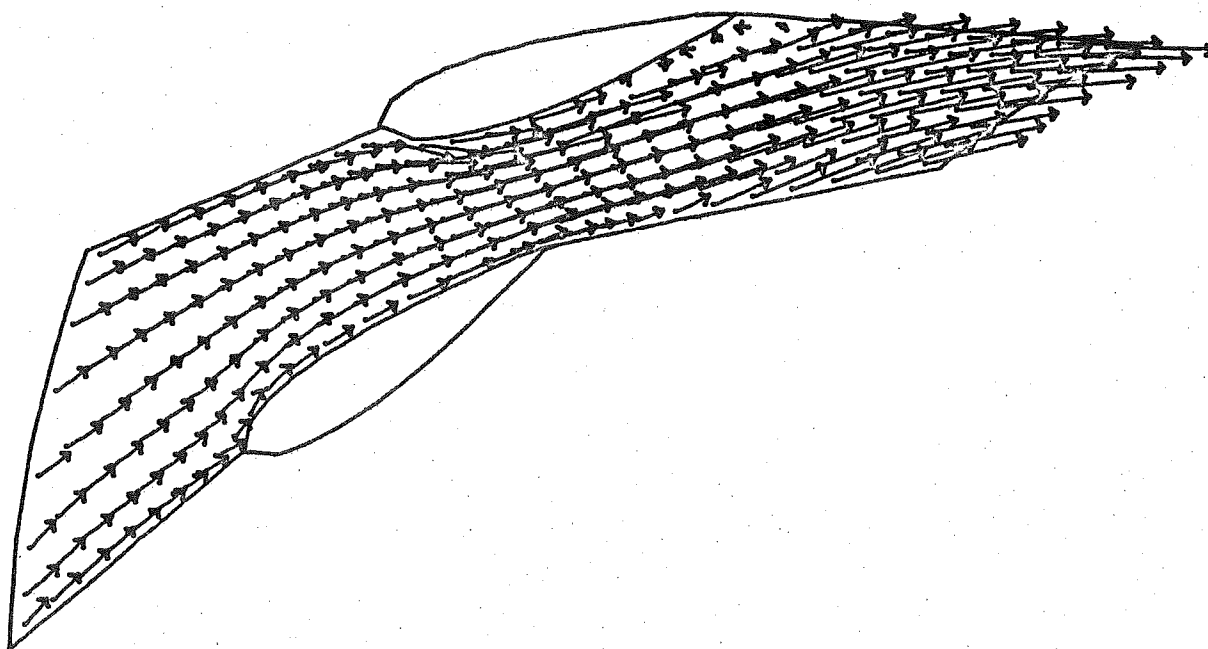


Figure 9. Champ des vitesses

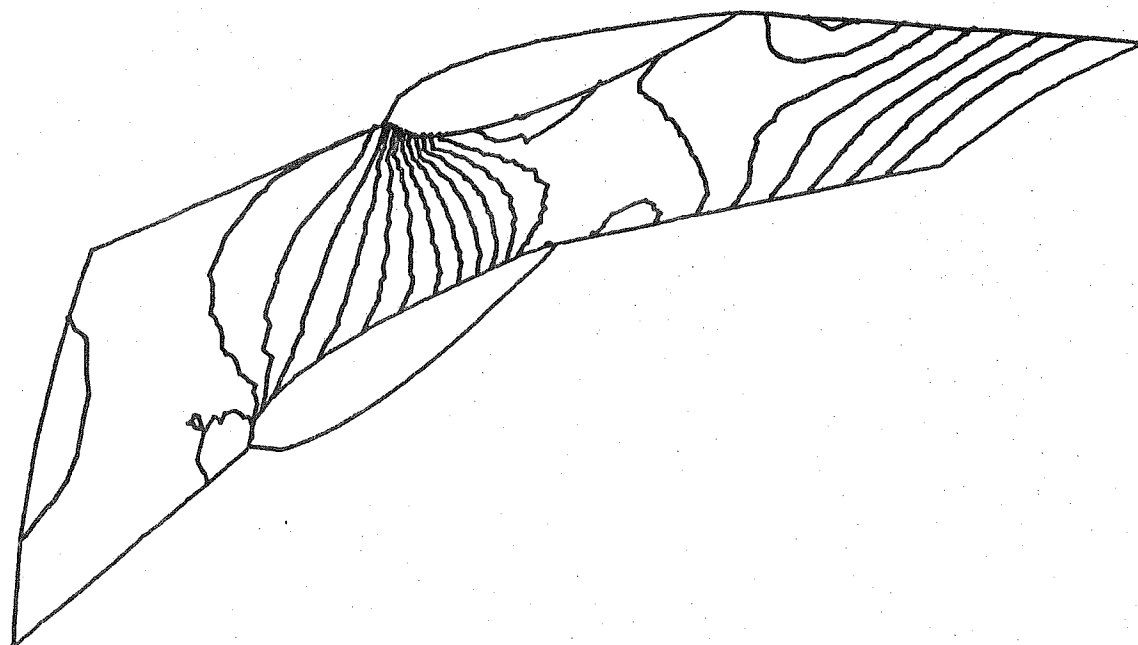


Figure 10. Isobares

Conclusion

Nous avons développé un algorithme d'éléments finis en coordonnées polaires capable de modéliser le comportement d'un fluide incompressible en régime stationnaire entre deux aubes directrices d'une turbine hydraulique. En première analyse, cet algorithme semble donner de bons résultats.

Le programme sera testé sur plusieurs géométries dont le canal avec aubes avant-directrices présenté à la figure 5 et sur des maillages très fins, jusqu'à 20 rangées par 120 colonnes environ. Finalement, les résultats obtenus seront confrontés aux résultats d'autres algorithmes d'éléments finis et de différences finies et si possible à des résultats expérimentaux pour évaluer la précision et la vitesse de calcul de l'algorithme. Ces tests, nous l'espérons, démontreront les capacités de l'algorithme ainsi que ses limites.

L'avancement des tests étant ce qu'il est, il nous est malheureusement impossible de présenter une série complète de résultats. Toutefois, le lecteur pourra trouver une description détaillée des tests et des résultats obtenus en se référant au mémoire de maîtrise de M. Michel St-Georges, à paraître à l'Ecole Polytechnique de Montréal.

Références

- 1) G. Dhatt et G. Touzot, "Une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A. éditeur, 1981.
- 2) F. Brezzi, "On the existence, uniqueness and approximation of Saddle-points problems arising from Lagrangian Multipliers", RAIRO, 8, R2, p. 129-151, (1974).
- 3) A. Fortin, "Méthodes d'éléments finis pour les équations de Navier-Stokes", Université Laval, 1984.
- 4) A. Fortin, M. Fortin, V.C. Thi, R. Camarero, "Simulation numérique d'écoulements visqueux dans une turbine hydraulique", Rapport EPM/RT-85-4, Ecole Polytechnique, 1985.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289360 8