

**Titre:** Contributions à l'optimisation de systèmes mécaniques non réguliers : reconception d'aubes de compresseur  
Title: régulier : reconception d'aubes de compresseur

**Auteur:** Solène Kojtych  
Author:

**Date:** 2022

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Kojtych, S. (2022). Contributions à l'optimisation de systèmes mécaniques non réguliers : reconception d'aubes de compresseur [Thèse de doctorat, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/10393/>  
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/10393/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Alain Batailly, & Charles Audet  
Advisors:

**Programme:** PhD.  
Program:

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Contributions à l'optimisation de systèmes mécaniques non réguliers :  
reconception d'aubes de compresseur**

**SOLÈNE KOJTYCH**

Département de génie mécanique

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*  
génie mécanique

Juin 2022

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée :

**Contributions à l'optimisation de systèmes mécaniques non réguliers :  
reconception d'aubes de compresseur**

présentée par **Solène KOJTYCH**

en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*  
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

**Martin LÉVESQUE**, président

**Alain BATAILLY**, membre et directeur de recherche

**Charles AUDET**, membre et codirecteur de recherche

**Sébastien LE DIGABEL**, membre

**Jean DEMANGE**, membre externe

**DÉDICACE**

*À mes parents,  
et à tous les professeurs qui ont suivi.*

*« Je contrais devant dans la prairie et, à un moment, je me suis retourné sur notre petite bande de fous. Étrange. Nous prenons chaque saison davantage la couleur de ce qui nous traverse. »*

*Alain Damasio, La Horde du Contrevent*

## REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord chaleureusement mes directeurs de thèse, Alain Batailly et Charles Audet, pour leur disponibilité, leur expertise et leur support tout au long de ce doctorat. Je les remercie également, ainsi que le FRQNT, pour le support financier apporté. De plus, au-delà du cadre purement scientifique et technique, leur patience, leur écoute et leur bienveillance ont contribué à faire de ce doctorat une très bonne expérience.

Merci également aux membres du jury pour avoir accepté de relire cette thèse et pour les discussions intéressantes initiées lors de la soutenance.

Je remercie aussi mes anciens professeurs de l'Université de Technologie de Compiègne, qui ont éveillé mon intérêt pour la recherche. Merci également à François Nunio de m'avoir guidée lors de ma première expérience de recherche au CEA et pour ses conseils.

J'ai eu la chance, durant ma thèse, de bénéficier du meilleur de deux univers, le Laboratoire d'Analyse Vibratoire et Acoustique de Polytechnique et le Groupe d'Études et de Recherche en Analyse des Décisions. Merci à toutes les personnes « ressources » qui, de près ou de loin, m'ont offert un support technique précieux.

J'ai une reconnaissance toute spéciale envers mes collègues et amis, Juliette et Yann (« Coucou! »), avec qui j'ai échangé presque au quotidien durant ces quatre années de doctorat. Vous entendre sur Discord a fait une différence durant la pandémie. Merci pour tous les bons moments, rires, hotline tikz, support psychologique, service de relecture, improvisations musicales et j'en passe... C'était un plaisir de partager ce doctorat avec vous.

Enfin, cette thèse n'aurait certainement pas été la même sans le soutien de mes amis, de France et du Québec, à qui j'adresse toute ma gratitude. Un grand merci en particulier à Mourad, Florian, Guillaume, Quentin et Julie pour leur disponibilité malgré la distance. Je remercie aussi du fond du cœur mes amis de Polytechnique, Margot, Coralie, Kim, Sarah et Arthur qui ont toujours été là pour moi. J'ai une pensée émue pour tous les Hippies, avec qui j'ai découvert Montréal. Finalement, j'adresse une mention spéciale à Maïwenn, qui me supporte (dans tous les sens du terme) avec la même bienveillance depuis plus de vingt ans.

Mes derniers remerciements, et non les moindres, s'adressent aux membres de ma famille, et en particulier à mes parents, qui m'ont donné la chance et l'envie de poursuivre des études. Je n'aurai pas imaginé au moment du baccalauréat que presque exactement dix ans plus tard je complèterai un doctorat. Papa, Maman, merci de n'avoir jamais douté, à tort ou à raison, de ma réussite.

## RÉSUMÉ

Un système mécanique non linéaire est dit non régulier lorsque ses champs de vitesses ou d'accélération présentent des discontinuités. Tout système mécanique dont des composants subissent des frottements ou des impacts appartient à cette catégorie. Ces systèmes sont très présents dans des domaines industriels clés tels que la production d'énergie et les transports. Leur conception pose un défi particulier aux ingénieurs en raison d'un verrou scientifique majeur : il n'existe pas de cadre théorique unifié permettant de caractériser la réponse vibratoire de ces systèmes.

Par conséquent, les configurations visant à éviter les phénomènes non linéaires ont longtemps été privilégiées, souvent au détriment de la performance ou de l'empreinte environnementale. Dans plusieurs domaines, ces compromis ne sont désormais plus acceptables et soulèvent de nouveaux enjeux de conception. Ce contexte a motivé ces dernières années la mise en place de stratégies numériques visant à prédire au mieux les phénomènes de résonance de systèmes mécaniques non réguliers. Ces stratégies sont aujourd'hui utilisées pour discriminer différentes configurations en fonction de leur réponse vibratoire non linéaire. Cette discrimination est effectuée *a posteriori*, en fin de cycle de conception, ce qui implique nécessairement un allongement de celui-ci.

Cette thèse est consacrée au développement de nouveaux outils pour prendre en compte des phénomènes vibratoires non linéaires en amont dans le cycle de conception. Un cycle de conception repose généralement sur une procédure d'optimisation itérative. L'intégration des stratégies prédictives dans cette procédure requiert, d'une part, des algorithmes d'optimisation adaptés à des simulations prédictives coûteuses, dont les quantités d'intérêts sont potentiellement discontinues, et d'autre part, des critères de conception relatifs aux phénomènes non linéaires.

D'un point de vue mathématique, les dérivées des quantités d'intérêt issues des stratégies numériques prédictives sont généralement inaccessibles. Ces stratégies sont ainsi modélisées par des boîtes noires, c'est-à-dire des processus dont seules les entrées et sorties sont accessibles. Le cadre mathématique considéré est celui des méthodes d'optimisation sans dérivées et de boîtes noires. D'un point de vue industriel, compte tenu de la variété de systèmes mécaniques non réguliers, la détermination de critères de conception requiert de cibler une application spécifique. L'interface de contact aube/carter dans les compresseurs de turbomachines est considérée. Le cadre industriel choisi est celui de la reconception d'aubes afin d'améliorer leur robustesse aux interactions de contact.

Le projet doctoral revêt un caractère multidisciplinaire et comporte quatre contributions. La première contribution, en mathématiques appliquées, est un algorithme d'optimisation de boîtes noires générique permettant de trouver des solutions éloignées des discontinuités des quantités d'intérêt. Pour certains systèmes non réguliers, ces discontinuités peuvent en effet révéler des zones de résonances non linéaires critiques d'un point de vue de la conception.

Les autres contributions, en génie mécanique, sont relatives au processus de reconception d'aubes proposé dans cette thèse, qui repose sur une procédure d'optimisation itérative. La deuxième contribution est un outil de modélisation d'aubes industrielles haute-fidélité, requis en entrée de la procédure d'optimisation. La troisième contribution est la reconception de trois géométries d'aubes ouvertes de la NASA, issues des rotors 37, 35 et 67. Une quantité substitut de la robustesse au contact d'une aube, moins coûteuse qu'une stratégie numérique prédictive, est utilisée dans la procédure d'optimisation : la consommation de jeu. Les aubes optimisées obtenues présentent des gains significatifs en matière de réponse aux interactions de contact. Enfin, la quatrième contribution est la détermination de critères de conception relatifs aux interactions aube/carter. D'une part, une prise de recul sur la pertinence de la consommation de jeu comme substitut est proposée, en fonction du type d'aube et de la richesse du comportement dynamique. D'autre part, des tendances géométriques sont dégagées à partir des aubes optimisées obtenues. Les aubes de compresseur présentant la meilleure robustesse aux interactions de contact présentent généralement une forte flèche axiale arrière et une inclinaison tangentielle avant.

**Mots-clés :** optimisation sans dérivées, optimisation de boîtes noires, optimisation discontinue, recherche directe sur maillage adaptatif, compresseur, contacts aube/carter, reconception, rétro-ingénierie.

## ABSTRACT

A nonlinear mechanical system is said to be nonsmooth when discontinuities occur in its velocity or acceleration field. All mechanical systems undergoing contact or friction between components are nonsmooth. These systems are very common in crucial engineering domains such as the power, automotive and aerospace industries. The design of nonsmooth mechanical systems is constrained due to a major roadblock for designers: there exists no unified theoretical framework to characterize the vibration response of these systems.

Nonlinear vibration phenomena that may arise in nonsmooth mechanical systems have long been avoided, often by means of design solutions increasing the system's environmental footprint. Accounting for more stringent environmental regulations and a very competitive global market, such compromise is no longer acceptable. This is the reason why, over the past few years, several numerical methods have been developed to characterize the vibration response of nonsmooth mechanical systems. These methods are currently used to discriminate design solutions with respect to their nonlinear vibration responses at the end of the design cycle, which unavoidably yields a costlier design process.

The focus of this Ph.D. thesis is the development of new tools to account for nonlinear vibration phenomena in the early stages of the design cycle. As this cycle usually relies on an iterative optimization process, two elements are required to integrate predictive numerical methods in this process. First, optimization algorithms are needed, dedicated to time consuming numerical simulations, which may involve discontinuous quantities of interest. Second, design criteria related to nonlinear phenomena are required.

From a mathematical standpoint, the derivatives of the quantities of interest computed by predictive numerical methods are often nonexistent or difficult to estimate. As a consequence, these numerical methods can be considered as blackboxes: only input and output of the simulations are available. The mathematical framework of derivative-free and black-box optimization methods is thus considered in this thesis. From an industrial standpoint, as there exists a variety of nonsmooth mechanical systems, a specific application should be targeted to identify design criteria. The chosen industrial framework is the redesign of compressor blades in order to increase their robustness to blade-tip/casing contact interactions.

As the research project is at the interface of applied mathematics and mechanical engineering, the four resulting contributions belong to both fields. The first contribution is a blackbox optimization algorithm able to find solutions away from discontinuities of the quantity of interest. For some nonsmooth systems, discontinuities may betray unsafe nonlinear resonances, which



should be avoided. The following contributions, in the field of mechanical engineering, relate to the blade redesign process proposed in this thesis. The second contribution is a modelling tool required to model industrial blades at the beginning of the redesign process. The third contribution is the redesign of the NASA blades rotor 37, rotor 35 and rotor 67. Blades are optimized with respect to a surrogate quantity of the blade robustness, cheaper to compute than predictive numerical methods: the clearance consumption. Significant improvements with respect to the contact robustness are observed for the optimized blades. Finally, the fourth contribution is the identification of design criteria related to blade-tip/casing contact interactions. On the one hand, new insights on the relevance of the clearance consumption as a surrogate are provided and discussed, depending on the blade type and the complexity of the blade dynamics. On the other hand, geometrical trends are deduced from optimized blades geometries: the best robustness with respect to contact interactions is observed for blades featuring a backward axial sweep and a positive tangential lean.

**Keywords:** derivative-free optimization, blackbox optimization, discontinuous optimization, mesh adaptive direct search, compressor, blade-tip/casing contacts, redesign, reverse engineering.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xx
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Cadre mathématique . . . . .	2
1.3 Cadre industriel . . . . .	3
1.4 Objectifs . . . . .	4
1.5 Organisation de la thèse . . . . .	5
1.6 Contributions et publications . . . . .	5
CHAPITRE 2 CONTRIBUTION À L'OPTIMISATION DE BOÎTES NOIRES DIS- CONTINUES . . . . .	7
2.1 Contexte et modélisation . . . . .	8
2.1.1 Caractérisation du problème . . . . .	9
2.1.2 Optimisation sans dérivées et de boîtes noires . . . . .	9
2.1.3 Optimisation de fonctions discontinues . . . . .	14
2.1.4 Modélisation proposée . . . . .	17
2.1.5 Conclusion partielle . . . . .	19
2.2 Fondements algorithmiques . . . . .	19
2.2.1 Recherche par coordonnées . . . . .	19

2.2.2	Recherche sur maillage adaptatif sans contraintes . . . . .	22
2.2.3	Recherche sur maillage adaptatif avec contraintes . . . . .	25
2.3	Algorithme proposé . . . . .	32
2.3.1	Illustration sur un exemple . . . . .	32
2.3.2	Mécanisme de révélation des discontinuités . . . . .	33
2.3.3	Mécanisme d'exclusion des zones révélées . . . . .	34
2.3.4	Itération révélatrice . . . . .	36
2.3.5	Sonde révélatrice de discontinuités . . . . .	38
2.3.6	Algorithme . . . . .	38
2.4	Analyse de convergence . . . . .	40
2.4.1	Préliminaires . . . . .	40
2.4.2	Maillage infiniment fin . . . . .	42
2.4.3	Analyse du point raffinant . . . . .	43
2.5	Résultats numériques . . . . .	51
2.5.1	Choix de paramètres . . . . .	52
2.5.2	Problèmes analytiques . . . . .	53
2.5.3	Application en génie mécanique : problème de flambement . . . . .	57
2.5.4	Application en génie chimique : production de styrène . . . . .	61
2.6	Conclusion . . . . .	64
CHAPITRE 3 PROBLÈME DE VIBRATIONS D'AUBES DE MOTEURS D'AVION		66
3.1	Problème simplifié et application de DiscoMads . . . . .	67
3.1.1	Contexte . . . . .	67
3.1.2	Quantité d'intérêt . . . . .	67
3.1.3	Problème d'optimisation . . . . .	70
3.1.4	Résultats . . . . .	70
3.2	Analyse mécanique et généralisation du cadre d'études . . . . .	72
3.3	Interactions aube/carter : état de l'art . . . . .	74
3.3.1	Caractéristiques de l'interface . . . . .	74
3.3.2	Défis de conception et pratiques industrielles . . . . .	75
3.3.3	Stratégies numériques prédictives . . . . .	78
3.3.4	Évolution des cycles de conception et de reconception des aubes de turbomachines . . . . .	83
3.4	Solution proposée . . . . .	86
3.4.1	Processus de reconception . . . . .	86
3.4.2	Analyse de quantités d'intérêt issues de la stratégie prédictive . . . . .	88
3.5	Conclusion . . . . .	89

CHAPITRE 4	OUTIL DE MODÉLISATION D'AUBES	91
4.1	Revue de littérature : outils de modélisation dans un contexte de reconception	92
4.1.1	Contexte de reconception	92
4.1.2	Paramétrisation	93
4.1.3	Rétro-ingénierie	96
4.1.4	Validation	101
4.1.5	Bilan	102
4.2	Méthodologie de modélisation	102
4.2.1	Paramétrisation	103
4.2.2	Génération d'aube (modules GEN et MAI)	112
4.2.3	Retro-ingénierie d'aube (module RET)	117
4.2.4	Remarque	123
4.3	Validation de la fidélité sur les aubes rotor 37 et rotor 67	124
4.3.1	Critères géométriques	125
4.3.2	Critères dynamiques	129
4.3.3	Bilan	136
4.4	Validation de la robustesse et de l'efficacité numérique	136
4.4.1	Robustesse	136
4.4.2	Temps de calcul	137
4.5	Complément sur la polyvalence	138
4.6	Conclusion	140
CHAPITRE 5	RECONCEPTION D'AUBES INDUSTRIELLES	141
5.1	Méthodologie	142
5.1.1	Modélisation de l'aube initiale	142
5.1.2	Simulation substitut : consommation de jeu	142
5.1.3	Procédure d'optimisation	148
5.2	Aube rotor 37	150
5.2.1	Analyse dynamique de l'aube initiale	151
5.2.2	Optimisation	153
5.2.3	Analyse dynamique des aubes optimisées	156
5.2.4	Conclusion partielle	157
5.3	Aube rotor 35	157
5.3.1	Analyse dynamique de l'aube initiale	158
5.3.2	Optimisation	159
5.3.3	Analyse dynamique des aubes optimisées	162
5.3.4	Conclusion partielle	163

5.4	Aube rotor 67 . . . . .	164
5.4.1	Analyse dynamique de l'aube initiale . . . . .	164
5.4.2	Optimisation . . . . .	166
5.4.3	Analyse dynamique des aubes optimisées . . . . .	168
5.4.4	Conclusion partielle . . . . .	170
5.5	Reconceptions avancées . . . . .	171
5.5.1	Prise en compte de plusieurs nœuds : application à rotor 37 . . . . .	171
5.5.2	Prise en compte de plusieurs modes : application à rotor 35 . . . . .	175
5.6	Analyse des tendances géométriques . . . . .	179
5.6.1	Terminologie . . . . .	180
5.6.2	Aubes initiales . . . . .	181
5.6.3	Aubes optimisées . . . . .	182
5.6.4	Conclusion partielle . . . . .	184
5.7	Conclusion . . . . .	185
CHAPITRE 6 CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES . . . . .		187
6.1	Synthèse des travaux . . . . .	187
6.2	Perspectives . . . . .	189
RÉFÉRENCES . . . . .		192
ANNEXES . . . . .		214

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Cas couverts par l'analyse de convergence de DiscoMads. . . . .	44
Tableau 2.2	Point $\mathbf{x}_s$ décrivant une des meilleures solutions connues au problème STYRENE. . . . .	63
Tableau 3.1	Instances du problème (3.1) de vibrations d'aubes traitées avec DiscoMads. . . . .	71
Tableau 4.1	Paramètres de section. . . . .	106
Tableau 4.2	Valeurs initiales des paramètres et bornes pour le problème d'identification de profil (4.15). . . . .	123
Tableau 4.3	Variations du volume des CAO paramétrées des aubes rotor 37 et rotor 67. . . . .	127
Tableau 4.4	Erreurs sur la consommation de jeu au BA pour le premier mode de flexion des aubes paramétrées par rapport à l'aube d'entrée. . . . .	132
Tableau 5.1	Caractéristiques des maillages éléments finis pour les différents rotors.	143
Tableau 5.2	Instances d'optimisation pour rotor 37. . . . .	153
Tableau 5.3	Variations de consommation de jeu pour les aubes rotor 37 optimisées.	155
Tableau 5.4	Instances d'optimisation pour rotor 35. . . . .	160
Tableau 5.5	Variations de consommation de jeu pour les aubes rotor 35 optimisées.	161
Tableau 5.6	Instances d'optimisation pour rotor 67. . . . .	166
Tableau 5.7	Variations de consommation de jeu pour les aubes rotor 67 optimisées.	168
Tableau 5.8	Instances d'optimisation supplémentaires pour rotor 37. . . . .	172
Tableau 5.9	Variations de consommation de jeu pour les aubes rotor 37 optimisées.	174
Tableau 5.10	Instances d'optimisation supplémentaires pour rotor 35. . . . .	176
Tableau 5.11	Variations de consommation de jeu des aubes rotor 35 optimisées. .	176
Tableau A.1	Fonctions objectif analytiques et solution $\mathbf{x}^*$ du problème de minimisation de $f$ sur $X = [-10; 10] \times [-10; 10]$ . . . . .	214
Tableau A.2	Fonctions analytiques modélisant des contraintes. . . . .	215
Tableau D.1	Paramètres de l'aube rotor 37 paramétrée à 3 sections. . . . .	236
Tableau F.1	Paramètres des simulations de contact pour les aubes rotor 37 et rotor 35. . . . .	238
Tableau F.2	Paramètres des simulations de contact pour les aubes rotor 67. . . . .	239
Tableau G.1	Variations du volume de la CAO paramétrée à 5 sections rotor 35. .	240
Tableau G.2	Erreurs sur les fréquences propres de l'aube paramétrée à 5 sections par rapport à l'aube d'entrée rotor 35. . . . .	241

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Procédure d'optimisation haut-niveau. . . . .	2
Figure 2.1	Résolution d'un problème d'optimisation de boîte noire. . . . .	13
Figure 2.2	Exemple de domaines relatifs au problème (2.4) avec une discontinuité et $n = 2$ : zones $D$ et $M$ , domaine réalisable idéal $\hat{\Omega}$ et domaine non $\Omega$ -réalisable. . . . .	18
Figure 2.3	Exemple de déroulement de Cs. . . . .	20
Figure 2.4	Algorithme de recherche par coordonnées. . . . .	21
Figure 2.5	Maillage $M^k$ , cadre de sonde $E^k$ et points de sonde $P^k = \{\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \mathbf{p}^3\}$ générés autour du centre de sonde. . . . .	24
Figure 2.6	Un algorithme <b>Mads</b> pour les problèmes sans contraintes. . . . .	25
Figure 2.7	Points non dominés et dominés, solution courante réalisable $\mathbf{x}_F^k \in \mathbb{F}^k$ et solution courante non réalisable non dominée $\mathbf{x}_I^k \in \mathbb{I}^k$ dans le plan $(h, f)$ . . . . .	27
Figure 2.8	Types d'itérations selon la position dans le plan $(h, f)$ du meilleur point évalué lors de l'itération et règles de mise à jour correspondantes. Adaptée de [17]. . . . .	28
Figure 2.9	Un algorithme <b>Mads</b> avec barrière progressive pour les problèmes avec contraintes. . . . .	29
Figure 2.10	Mécanismes algorithmiques principaux de <b>DiscoMads</b> illustrés avec Cs. . . . .	33
Figure 2.11	Un algorithme <b>DiscoMads</b> pour révéler et exclure les zones de discontinuités. . . . .	39
Figure 2.12	Illustration de la preuve du théorème 2.4.6. . . . .	50
Figure 2.13	Fonctions analytiques discontinues. . . . .	54
Figure 2.14	Exécution de <b>DiscoMads</b> sur le problème (2.52) comportant des discontinuités. . . . .	55
Figure 2.15	Valeurs de $f$ pour la solution courante réalisable $\mathbf{x}_c^k$ à l'itération $k$ pour les 200 premières évaluations. . . . .	55
Figure 2.16	Caractéristiques des solutions renvoyées par <b>DiscoMads</b> pour 100 exécutions sur le problème (2.52) avec 100 graines aléatoires. . . . .	56
Figure 2.17	Distance à la discontinuité la plus proche des solutions obtenues en fonction du rayon d'exclusion $r_e$ . . . . .	57
Figure 2.18	Caractéristiques du treillis à deux barres. . . . .	58

Figure 2.19	Caractéristiques des solutions renvoyées par DiscoMads pour 100 exécutions sur le problème (2.55) à partir du point de départ $\Omega$ -réalisable $\mathbf{x}_A^0 = (80, 80)$ . . . . .	60
Figure 2.20	Histogramme des distances à la discontinuité des solutions obtenues pour différents budgets d'évaluations en partant du point $\Omega$ -réalisable $\mathbf{x}_A^0 = (80, 80)$ . . . . .	61
Figure 2.21	Valeurs de $f$ des solutions renvoyées par DiscoMads. . . . .	63
Figure 2.22	Histogramme des valeurs de $H(\mathbf{x}', \sigma)$ pour les solutions $\mathbf{x}'$ renvoyées par DiscoMads. . . . .	64
Figure 3.1	Interfaces de contact au sein d'une turbomachine et étages de la turbomachine. Adaptée de [59]. . . . .	68
Figure 3.2	Interface aube/carter : aube de turbomachine, carter environnant et jeux aube/carter. . . . .	68
Figure 3.3	Déplacement maximal radial au bord d'attaque calculé par interpolation des résultats obtenus pour 45 000 configurations $(\bar{s}, \bar{\omega})$ . . . . .	69
Figure 3.4	Exécutions de DiscoMads sur les instances du problème (3.1). . . . .	71
Figure 3.5	Champs de contraintes normalisés dans l'aube pour une configuration critique $\mathbf{x}^0$ , les configurations $\mathbf{x}'_A$ , $\mathbf{x}'_C$ renvoyées par DiscoMads et des configurations voisines $\mathbf{y}_A$ et $\mathbf{y}_C$ . . . . .	73
Figure 3.6	Diagramme de Campbell. . . . .	76
Figure 3.7	Processus de reconception d'aubes intégrant des stratégies numériques prédictives. . . . .	84
Figure 3.8	Processus de reconception proposé. . . . .	87
Figure 3.9	Exemples de graphiques d'intérêt pour une vitesse d'excitation $\omega$ . . . . .	89
Figure 3.10	Exemples de graphiques d'intérêt sur une plage de vitesses d'excitation $[\omega_{\min}; \omega_{\max}]$ . . . . .	90
Figure 4.1	Aube rotor 37 décrite par trois sections en pied, à mi-hauteur et en sommet d'aube. . . . .	95
Figure 4.2	Terminologie relative à un profil d'aube de compresseur, illustrée sur le profil en pied d'aube rotor 37. . . . .	95
Figure 4.3	Modules de modélisation au sein du processus de reconception proposé. . . . .	103
Figure 4.4	Repères de l'aube $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$ tel que $\mathbf{t} = \mathbf{t}^1$ et repères des surfaces porteuses : $\mathcal{R}_{c^1}$ (section conique positive), $\mathcal{R}_{c^2}$ (section cylindrique) et $\mathcal{R}_{c^3}$ (section conique négative). . . . .	104
Figure 4.5	Repères $\mathcal{R}_{c^i}$ des coniques et repères $\mathcal{P}_{d^i}$ de leurs développées respectives pour les trois types de sections. . . . .	105



Figure 4.6	Repère des profils $\mathcal{P}_p$ . . . . .	106
Figure 4.7	Paramètres d'empilement d'une section. . . . .	107
Figure 4.8	Influence de la flèche axiale et de l'angle d'inclinaison sur la forme de l'aube. . . . .	108
Figure 4.9	Conicité $\gamma^i$ de la surface porteuse selon le type de section. . . . .	109
Figure 4.10	Angle de calage $\lambda^i$ selon le type de section. . . . .	109
Figure 4.11	Influence de l'angle de calage $\lambda^i$ sur le vrillage de l'aube. . . . .	110
Figure 4.12	Représentation des paramètres de profil suivant la nomenclature du tableau 4.1. . . . .	111
Figure 4.13	Tracé dans $\mathcal{P}_p$ des profils de l'aube rotor 37 paramétrée à trois sections. . . . .	112
Figure 4.14	Étapes de l'empilement d'une section $i$ dans le module GEN par changements de repères. . . . .	113
Figure 4.15	Étapes de construction de la CAO (module GEN). . . . .	115
Figure 4.16	Maillage de l'aube rotor 37 paramétrée à trois sections (module MAI). . . . .	117
Figure 4.17	CAO d'entrée rotor 37 positionnée dans le repère $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$ . . . . .	118
Figure 4.18	Génératrice d'une surface porteuse dans le plan $(\mathbf{o}_a, \mathbf{e}_{z,a}, \mathbf{e}_{r,a})$ . . . . .	119
Figure 4.19	Intersections de la CAO d'entrée de l'aube rotor 37 avec $n_{\text{sec}} = 3$ surfaces porteuses. . . . .	119
Figure 4.21	Identification des points $\mathbf{a}^i$ au bord d'attaque et $\mathbf{b}^i$ au bord de fuite dans le repère $\mathcal{P}_d^i$ . . . . .	120
Figure 4.20	Étapes de détermination des paramètres d'empilement d'une section $i$ dans le module RET par changements de repères. . . . .	121
Figure 4.22	Profil cible et profil paramétré de la section en pied d'aube rotor 37. . . . .	122
Figure 4.23	Détermination du profil initial à partir du profil cible $N^i$ et de la ligne moyenne. . . . .	124
Figure 4.24	Courbe de convergence de Mads pour le problème (4.15) d'identification des paramètres de profil de la section en pied d'aube rotor 37. . . . .	125
Figure 4.25	CAO d'entrée et CAO paramétrées pour les aubes rotor 37 et rotor 67. . . . .	126
Figure 4.26	Partition du volume $V^e$ de la CAO d'entrée : volume perdu $V_{\text{per}}^e$ et volume central $V_c^e$ . . . . .	126
Figure 4.27	Profils cibles et profils paramétrés de trois sections des aubes rotor 37 et rotor 67. . . . .	128
Figure 4.28	Écart au bord d'attaque entre le profil cible et le profil paramétré de la section en sommet d'aube rotor 37. . . . .	128
Figure 4.29	Erreurs sur les fréquences propres des aubes paramétrées par rapport à l'aube d'entrée. . . . .	131

Figure 4.30	Cartes d'interactions des aubes rotor 37 d'entrée et paramétrées à 3, 5 et 9 sections. . . . .	133
Figure 4.31	CRF des aubes rotor 37 d'entrée et paramétrées à 3, 5 et 9 sections. .	134
Figure 4.32	Déplacement radial du BA en régime permanent pour l'aube rotor 37 d'entrée et paramétrée à 5 sections. . . . .	134
Figure 4.33	Cartes d'interactions des aubes rotor 67 d'entrée et paramétrées à 3, 5 et 9 sections. . . . .	135
Figure 4.34	CRF des aubes rotor 67 d'entrée et paramétrées à 3, 5 et 9 sections. .	135
Figure 4.35	CAO paramétrées générées avec des variations linéaires extrêmes des paramètres d'empilement du pied au sommet d'aube. . . . .	137
Figure 4.36	Durées d'exécution des modules GEN, MAI et RET pour les aubes rotor 37 paramétrées avec $n_{sec} \in \{2, 3, 5, 9, 17\}$ sections. . . . .	138
Figure 4.37	Rétro-ingénierie à 5 sections d'une aube de turbine. . . . .	139
Figure 5.1	Rayons dans $\mathcal{R}_a$ du nœud $\mathbf{v}$ sur l'aube au repos et du nœud correspondant $\mathbf{v}^{p,\delta}$ sur la déformée du mode $p$ modulée par $\delta$ . . . . .	145
Figure 5.2	Courbe de consommation de jeu $c_{BA,1F,\delta}$ pour $\delta \in \{-1, 0, 1\}$ pour l'aube initiale rotor 37 dans le cas d'un carter conique et d'un calcul linéaire. . . . .	145
Figure 5.3	Calcul de la quantité $c_{v,p,\delta}$ dans le cas d'un carter conique. . . . .	148
Figure 5.4	CRF de l'aube initiale rotor 37. . . . .	152
Figure 5.5	Contributions modales relatives normalisées de l'aube initiale rotor 37. . . . .	153
Figure 5.6	Modèles CAO des aubes rotor 37 optimisées et initiale. . . . .	154
Figure 5.7	Consommations de jeu aux nœuds frontière pour les deux premiers modes pour l'aube initiale et les aubes optimisées 37-BA-1F et 37-BA-1T. . . . .	156
Figure 5.8	CRF des aubes rotor 37 initiale et optimisées. . . . .	157
Figure 5.9	CRF de l'aube initiale rotor 35. . . . .	159
Figure 5.10	Contributions modales relatives normalisées de l'aube initiale rotor 35. . . . .	159
Figure 5.11	Modèles CAO des aubes rotor 35 optimisées et initiale. . . . .	160
Figure 5.12	Consommations de jeu aux nœuds frontière pour les trois premiers modes pour l'aube initiale et les aubes optimisées 35-BA-1F, 35-BA-1T et 35-BA-2F. . . . .	162
Figure 5.13	CRF des aubes rotor 35 initiale et optimisées. . . . .	163
Figure 5.14	CRF de l'aube initiale pour rotor 67. . . . .	165
Figure 5.15	Contributions modales relatives normalisées de l'aube initiale rotor 67. . . . .	166
Figure 5.16	Modèles CAO des aubes rotor 67 optimisées et initiale. . . . .	167

Figure 5.17	Consommations de jeu aux nœuds frontière pour les trois premiers modes pour l'aube initiale et les aubes optimisées 67-BA-1F, 67-BA-2F et 67-BA-1T. . . . .	169
Figure 5.18	CRF des aubes rotor 67 optimisées et initiale. . . . .	170
Figure 5.19	Courbes de convergence pour les instances 37-BA-1T, 37-BF-1F et 37-BF-1T. . . . .	172
Figure 5.20	Consommations de jeu aux nœuds frontière pour les deux premiers modes pour les aubes 37-BA-1F, 37-BF-1F, 37-max(BA,BF)-1F et initiale. . . . .	175
Figure 5.21	CRF des aubes rotor 37 optimisée 37-max(BA,BF)-1F et initiale. . .	175
Figure 5.22	Consommations de jeu aux nœuds frontière pour les trois premiers modes pour les aubes 35-BA-1F, 35-BA-1T, 35-BA-2F, 35-BA-max(1F,1T,2F) et initiale. . . . .	177
Figure 5.23	CRF des aubes rotor 35 optimisées supplémentaires, de l'aube 35-BA-1F et de l'aube initiale. . . . .	179
Figure 5.24	Terminologie associée aux formes d'aubes. . . . .	180
Figure 5.25	Flèche axiale $\Delta z^i$ et angle d'inclinaison $\Delta \theta^i$ pour les aubes initiales rotor 37, rotor 35 et rotor 67. . . . .	182
Figure 5.26	Flèche axiale $\Delta z^i$ et angle d'inclinaison $\Delta \theta^i$ pour les aubes optimisées 37-BA-1F, 37-BA-1T, 37-BF-1F, 37-BA-max(1F,1T) et initiale rotor 37.	183
Figure 5.27	Flèche axiale $\Delta z^i$ et angle d'inclinaison $\Delta \theta^i$ pour les aubes optimisées 35-BA-1F, 35-BA-1T, 35-BA-2F, 35-BA-max(1F,1T), 35-BA-max(1F,1T,2F) et initiale rotor 35. . . . .	184
Figure 5.28	Flèche axiale $\Delta z^i$ et angle d'inclinaison $\Delta \theta^i$ pour les aubes optimisées 67-BA-1F, 67-BA-2F, 67-BA-1T et initiale rotor 67. . . . .	185
Figure A.1	Représentation graphique des fonctions objectifs analytiques sur le domaine $X = [-10; 10] \times [-10; 10]$ . . . . .	215
Figure A.2	Représentation graphique des fonctions analytiques modélisant des contraintes sur le domaine $[-10; 10] \times [-10; 10]$ . . . . .	216
Figure A.3	Solutions renvoyées par DiscoMads pour 100 graines aléatoires différentes et solution optimale pour les problèmes avec $f = f_1$ et une contrainte $c(\mathbf{x}) \leq 0$ . . . . .	217
Figure A.4	Solutions renvoyées par DiscoMads pour 100 graines aléatoires différentes et solution optimale pour les problèmes avec $f = f_2$ , sans et avec contrainte $c(\mathbf{x}) \leq 0$ . . . . .	217

Figure A.5	Solutions renvoyées par DiscoMads pour 100 graines aléatoires différentes et solution optimale pour les problèmes avec $f = f_3$ , sans et avec contrainte $c(\mathbf{x}) \leq 0$ . . . . .	218
Figure A.6	Distance à la discontinuité la plus proche des solutions obtenues pour les problèmes avec $f = f_1$ avec une contrainte $c(\mathbf{x}) \leq 0$ en fonction du rayon d'exclusion $r_e$ . . . . .	219
Figure A.7	Distance à la discontinuité la plus proche des solutions obtenues pour les problèmes avec $f = f_2$ sans et avec une contrainte $c(\mathbf{x}) \leq 0$ en fonction du rayon d'exclusion $r_e$ . . . . .	219
Figure A.8	Distance à la discontinuité la plus proche des solutions obtenues pour les problèmes avec $f = f_3$ sans et avec une contrainte $c(\mathbf{x}) \leq 0$ en fonction du rayon d'exclusion $r_e$ . . . . .	220
Figure A.9	Caractéristiques des solutions renvoyées par DiscoMads pour 100 exécutions sur le problème (2.55) à partir du point de départ non $\Omega$ -réalisable $\mathbf{x}_B^0 = (0, 100)$ . . . . .	221
Figure B.1	Génératrices des surfaces porteuses coniques dans le demi-plan $\{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3 : m_{\theta,a} = 0, m_{r,a} > 0\}$ . . . . .	223
Figure B.2	Surface conique dans le repère $\mathcal{R}'_{c_i}$ et sa développée dans $\mathcal{P}_{d^i}$ , point $\mathbf{m} _{\mathcal{R}'_{c_i}}$ sur la surface conique et son image $\mathbf{m} _{\mathcal{P}_{d^i}}$ sur la développée. . .	225
Figure B.3	Surface cylindrique dans $\mathcal{R}'_{c_i}$ et sa développée dans $\mathcal{P}_{d^i}$ , point $\mathbf{m} _{\mathcal{R}'_{c_i}}$ sur la surface cylindrique et son image $\mathbf{m} _{\mathcal{P}_{d^i}}$ sur la développée. . . .	227
Figure B.4	Passage des repères $\mathcal{P}_{d^i}$ à $\mathcal{P}_p$ via le repère intermédiaire $\mathcal{P}_{\psi^i}$ . . . . .	229
Figure E.1	Étude de convergence du maillage sur les dix premières fréquences propres pour l'aube rotor 37 paramétrée à 5 sections. . . . .	237
Figure E.2	Étude de convergence du maillage sur les dix premières fréquences propres pour l'aube rotor 67 paramétrée à 5 sections. . . . .	237
Figure G.1	CAO d'entrée et CAO paramétrée à 5 sections pour l'aube rotor 35. . .	240
Figure G.2	CRF des aubes rotor 35 d'entrée et paramétrée à 5 sections. . . . .	241
Figure G.3	Cartes d'interactions des aubes rotor 35 d'entrée et paramétrée à 5 sections. . . . .	242
Figure H.1	CRF des aubes initiales rotor 37, rotor 35 et rotor 67 sans et avec interpolation quadratique de la flèche axiale et de l'angle d'inclinaison sur la hauteur d'aube. . . . .	243

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

1F	premier mode de flexion
1T	premier mode de torsion
2F	deuxième mode de flexion
2D	deux dimensions
3D	trois dimensions
BA	Bord d'Attaque
BF	Bord de Fuite
B-spline	Basis spline
CAO	Conception Assistée par Ordinateur
CFD	Computational Fluid Dynamics
CRF	Courbe de Réponse en Fréquence
Cs	Coordinate Search
ddl	degré(s) de liberté
DiscoMads	Mesh Adaptive Direct Search to escape Discontinuous Regions
GPS	Generalized Pattern Search
KKT	Karush–Kuhn–Tucker
Mads	Mesh Adaptive Direct Search
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NOMAD	Nonlinear Optimization by Mesh Adaptive Direct Search
NURBS	Non-Uniform Rational Basis Splines

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	Résultats numériques supplémentaires relatifs à DiscoMads . . . . .	214
Annexe B	Changements de repères relatifs à l’outil de modélisation et démonstrations supplémentaires . . . . .	222
Annexe C	Remarques sur la notion de continuité géométrique . . . . .	234
Annexe D	Paramètres d’aube . . . . .	236
Annexe E	Étude de convergence des maillages éléments finis . . . . .	237
Annexe F	Paramètres de la stratégie numérique prédictive . . . . .	238
Annexe G	Modélisation de l’aube rotor 35 . . . . .	240
Annexe H	Détails relatifs à la la procédure d’optimisation . . . . .	243

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Contexte

Les systèmes mécaniques présentant des interfaces non linéaires (comme, par exemple, des interfaces de contact ou frottantes entre différents composants d'un assemblage) sont très courants dans de nombreux domaines industriels parmi lesquels les transports (automobile [166], aérien [103] et ferroviaire [44]) et la production d'électricité [88]. Ce type d'interface se trouve notamment dans les dispositifs de refroidissement des centrales nucléaires [175], au niveau des disques de freins automobiles [166], entre les composants d'un compresseur de moteur d'avion [189] et, plus généralement, dans tout type de joint mécanique (boulonné, bride...) [52, 193]. Du point de vue de leur conception, la présence de frottements ou de contacts au niveau des interfaces de ces systèmes pose un défi particulier aux ingénieurs. En effet, les champs de vitesses et d'accélération de ces systèmes sont discontinus — on parle alors de système mécanique non régulier — et il n'existe pas de cadre théorique unifié permettant de caractériser leur réponse vibratoire.

Longtemps, les phénomènes vibratoires préjudiciables ont pu être évités par les concepteurs en faisant un compromis sur la performance ou le rendement du système mécanique. Cependant, dans un contexte global de plus en plus concurrentiel et avec l'application de normes environnementales plus strictes, de tels compromis deviennent inacceptables et imposent aux ingénieurs de maîtriser ces phénomènes et de repenser les cycles de conception. C'est dans ce contexte qu'ont été développées depuis plusieurs années des méthodes d'analyse, liées à une multitude de programmes de recherche et en lien étroit avec des applications industrielles stratégiques, pour tenter de prédire au mieux les conditions de résonance de systèmes mécaniques non réguliers. Le haut degré de maturité atteint par ces stratégies numériques permet aujourd'hui leur utilisation en fin de cycle de conception où elles permettent de discriminer *a posteriori* différentes configurations en fonction de leur réponse vibratoire non linéaire.

La discrimination *a posteriori* de plusieurs configurations d'un système mécanique non régulier implique cependant un surcoût important en ce qui concerne le temps de conception. Outre le fait que plusieurs configurations doivent être envisagées, la caractérisation mécanique de chaque configuration peut aussi être coûteuse en fonction du type d'interface non linéaire à analyser. C'est ce qui motive, dans le cadre de ce projet de recherche doctorale, de développer de nouveaux outils pour prendre en compte des phénomènes vibratoires non linéaires plus en amont dans la conception de systèmes mécaniques non réguliers, dès la phase de préconception.

Un cycle de conception repose généralement sur une procédure d'optimisation itérative dont une représentation est donnée sur la figure 1.1. L'intégration de stratégies numériques prédictives de phénomènes non linéaires dans cette procédure d'optimisation itérative requiert :

- des algorithmes d'optimisation adaptés aux particularités des simulations prédictives considérées, en matière de coût de calcul et de régularité des quantités d'intérêt,
- des critères de conception relatifs aux phénomènes non linéaires, permettant d'assurer le respect des normes et certifications.

Les cadres d'études relatifs à ces deux aspects sont précisés dans les sections suivantes.

## 1.2 Cadre mathématique

Les stratégies numériques prédictives de phénomènes non linéaires reposent généralement sur des simulations numériques complexes [115, 189], impliquant des quantités d'intérêt non différentiables. L'accès aux dérivées des quantités d'intérêt est alors impossible. Même lorsque les dérivées existent, il est parfois difficile de les extraire en sortie de simulation, en raison de la densité des codes de calcul et de l'imbrication de plusieurs simulations de natures variées, possiblement multiphysiques et impliquant éventuellement des codes propriétaires fermés ou confidentiels. Dans ce contexte, l'obtention des dérivées peut représenter un effort incompatible avec les exigences de conception industrielles. Pour ces raisons, les stratégies numériques prédictives de phénomènes non linéaires peuvent être modélisées mathématiquement par des boîtes noires [20, 62], c'est-à-dire des processus clos dont seules les entrées et sorties sont considérées.

Un problème d'optimisation peut être formulé sans perte de généralité comme la minimisation d'une fonction objectif sous respect d'un ensemble de contraintes. Lorsque la fonction objectif et les contraintes sont fournies par une boîte noire, il s'agit d'un problème d'optimisation de boîtes noires. Ce type de problème pose de nombreux défis. Le fait que les dérivées ne soient pas connues représente un défi en soi, puisque le gradient donne la direction de



Figure 1.1 Procédure d'optimisation haut-niveau.



plus forte augmentation d'une fonction, une information inestimable d'un point de vue de l'optimisation. Les méthodes d'optimisation classiques basées sur le gradient, efficaces, ne sont ainsi pas adaptées. Un deuxième défi est lié au coût d'évaluation de la boîte noire. En effet, les stratégies prédictives évoquées peuvent être très coûteuses en temps de calcul ; elles impliquent par exemple plusieurs résolutions d'un modèle éléments finis pour différents paramètres tels que la fréquence d'excitation du système.

Par conséquent, la réalisation de multiples simulations relatives à différentes configurations du système n'est pas envisageable : le nombre d'évaluations de la boîte noire doit impérativement être limité. Enfin, la complexité des phénomènes prédits peut induire la présence de discontinuités, de plusieurs minima locaux ou même de configurations pour lesquelles la simulation échoue. Ces éléments sont autant de défis supplémentaires à prendre en compte lors de l'optimisation.

La résolution de problèmes d'optimisation de boîtes noires requiert des algorithmes d'optimisation non intrusifs qui n'utilisent que les entrées et sorties de la boîte noire. Deux domaines de l'optimisation sont dédiés au développement de tels algorithmes : l'optimisation sans dérivées et l'optimisation de boîtes noires. L'optimisation sans dérivées est définie comme l'étude mathématique d'algorithmes n'utilisant pas les dérivées [20, p. 5]. Toutefois, celles-ci peuvent exister même si elles ne sont pas connues de l'utilisateur. Elles peuvent alors être estimées au cours de l'optimisation pour guider celle-ci. Dans le cas de l'optimisation de boîtes noires [20, p. 6] en revanche, rien n'assure que les dérivées existent. Par conséquent, les algorithmes associés ne s'appuient pas sur celles-ci. Le cadre mathématique considéré dans cette thèse est celui des méthodes d'optimisation sans dérivées et de boîtes noires.

### 1.3 Cadre industriel

Du point de vue industriel, trois principaux types d'interfaces non linéaires peuvent être distingués :

- les interfaces de frottement caractérisées par des vitesses relatives faibles, telles que les joints boulonnés [32, 52] ou les joints de bride [93, 193] ;
- les interfaces de frottement à vitesses relatives élevées, comme les disques de freins automobiles [165] ;
- les interfaces de contact, souvent caractérisées par des vitesses relatives très élevées, comme dans les turbomachines [40].

Pour chacun de ces types d'interfaces, de nombreuses études ont été menées sur les plans théorique, numérique et expérimental pour lever les verrous scientifiques associés à la ca-

ractérisation des systèmes mécaniques non réguliers. Expérimentalement, plusieurs équipes de recherche se sont notamment intéressées à l'estimation des pressions de contact et à la caractérisation des raideurs tangentielles dans différents types de joints [73, 172]. Du point de vue numérique, des enjeux majeurs sont à relever en lien avec des aspects de modélisation et de méthodes de résolution. Concernant la modélisation, la prise en compte des interfaces non linéaires par les méthodes de synthèse modale — très fréquemment utilisées dans l'industrie pour analyser efficacement des systèmes de très grande dimension — a été l'objet de nombreux travaux récents [105, 161]. Le développement de nouvelles méthodes de synthèse modale, surtout liées aux modèles réduits paramétriques, a également été proposé dans le but de développer des jumeaux numériques de systèmes mécaniques avec des non-linéarités localisées [184, 186]. Pour ce qui est des méthodes de résolution, l'accent a été mis sur le développement de stratégies multiéchelles pour la prise en compte de phénomènes multiphysiques [14, 74, 91] et la gestion d'incertitudes [76] (comme au niveau de la rugosité des interfaces de contact par exemple).

En l'absence de cadre théorique unifié, et compte tenu de la grande variété de systèmes mécaniques non réguliers, il n'est pas envisageable de proposer une procédure de conception générique. Par ailleurs, il est remarquable que la quasi-totalité des travaux de recherche portant sur la modélisation de systèmes mécaniques avec interfaces non linéaires soit focalisée sur des interfaces où les vitesses relatives entre les composants sont très faibles. Le cas des interfaces de contact avec des vitesses relatives élevées reste rarement étudié du point de vue de la conception. Pour cette raison, le présent travail est appliqué à un système mécanique non régulier comportant une interface de contact avec des vitesses relatives très élevées entre les composants : l'interface aube/carter de compresseurs de turbomachines. La conception des aubes de compresseurs de moteurs d'avion (ou de turbines de production d'électricité) est au cœur des travaux présentés dans cette thèse. En raison de la complexité géométrique d'une aube de compresseur, les développements effectués s'appuient sur des géométries ouvertes d'aubes développées par la NASA [151, 181]. Autrement dit, c'est par l'intermédiaire de la reconception de ces aubes qu'est envisagée la possibilité de définir des critères de conception pertinents pour assurer une plus grande robustesse des aubes de compresseurs aux contacts aube/carter.

## 1.4 Objectifs

Les objectifs de la thèse sont :

- ① le développement d'un algorithme d'optimisation générique dédié aux systèmes non réguliers ;

- ② le développement d'un outil de modélisation d'aubes industrielles, nécessaire pour envisager leur reconception ;
- ③ la reconception de plusieurs aubes industrielles afin d'améliorer leur robustesse aux interactions de contact qui peuvent survenir entre les aubes et le carter ;
- ④ la détermination de critères de conception pertinents par :
  - a. la validation de la pertinence de la consommation de jeu comme quantité d'optimisation au sein de la reconception,
  - b. la détermination de premières tendances géométriques sur les aubes optimisées.

Étant donné le caractère multidisciplinaire de la thèse, la pertinence de ces différents objectifs est discutée dans les chapitres correspondants.

## 1.5 Organisation de la thèse

La thèse est constituée de six chapitres. Le chapitre 1 présente le contexte, délimite le cadre d'études et définit les objectifs. Le chapitre 2 est dédié à l'algorithme d'optimisation développé. Dans le chapitre 3, l'application industrielle est introduite et ses enjeux sont discutés. Le chapitre 4 est consacré à un outil de modélisation d'aubes industrielles, requis pour le processus de reconception proposé. Le chapitre 5 présente la mise en œuvre du processus de reconception sur des aubes industrielles et l'identification de critères de conception. Enfin, le chapitre 6 présente les conclusions et perspectives des travaux réalisés.

En raison du caractère multidisciplinaire de la thèse, il a été choisi de présenter la revue de littérature en plusieurs parties, selon les thématiques abordées : une revue dédiée à l'optimisation est présentée dans le chapitre 2, une revue dédiée à l'application industrielle est donnée dans le chapitre 3 et une revue dédiée à la modélisation d'aubes est présentée dans le chapitre 4. Par ailleurs, afin d'assurer l'homogénéité des notations tout au long du document, les vecteurs et matrices sont notés en gras, selon la convention usuelle en génie mécanique. Lors de l'utilisation de coordonnées de points dans l'espace, les coordonnées sont séparées par une virgule en gras entourée d'espaces : « **,** » en cas d'ambiguïté avec le séparateur décimal. Enfin, les encarts gris sont utilisés pour décrire des aspects techniques spécifiques.

## 1.6 Contributions et publications

En lien avec les objectifs, les travaux de recherche effectués dans le cadre du projet doctoral ont conduit à quatre contributions originales. La contribution ① est relative aux mathématiques appliquées et les contributions ②, ③ et ④ au génie mécanique.

### Contributions

- ① un algorithme d'optimisation de boîtes noires permettant de trouver des solutions éloignées des discontinuités des sorties de la boîte noire (chapitre 2) ;
- ② un outil de modélisation d'aubes industrielles, focalisé sur des considérations structurelles (chapitre 4) ;
- ③ une preuve de concept pour la reconception d'aubes industrielles afin d'améliorer leur réponse dynamique à des interactions structurelles non linéaires (chapitre 5) ;
- ④ des critères et tendances de conception relatifs aux interactions structurelles non linéaires (chapitre 5).

Ces contributions ont conduit aux publications suivantes :

1. article de revue accepté dans *SIAM Journal On Optimization* : « Escaping unknown discontinuous regions in blackbox optimization », C. Audet, A. Batailly et S. Kojtych (contribution ①) ;
2. article de revue soumis sur l'outil de modélisation et sa validation sur les aubes rotor 37 et rotor 67 : « Two-way blade modeling method for the structural redesign of compressor blades », S. Kojtych, C. Audet et A. Batailly (contribution ②) ;
3. article recommandé pour publication dans le *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, issu d'un acte de conférence soumis pour la conférence ASME Turbo Expo 2022 : « Methodology for the redesign of compressor blades undergoing nonlinear structural interactions : application to blade-tip/casing contacts », S. Kojtych, F. Nyssen, C. Audet et A. Batailly (contributions ③ et ④).

## CHAPITRE 2 CONTRIBUTION À L'OPTIMISATION DE BOÎTES NOIRES DISCONTINUES

Une des difficultés majeures pour la conception de systèmes non réguliers est la possible co-existence de solutions stables d'amplitudes différentes. Un léger changement des conditions opératoires peut induire un changement d'une solution à une autre, c'est-à-dire une bifurcation [160] du système. Ces bifurcations peuvent induire des changements importants de la réponse dynamique du système. Par exemple, dans le cas de systèmes soumis à des interactions de type contact, des zones de solutions coexistantes sont observées au voisinage de résonances non linéaires caractérisées par de hautes amplitudes de vibrations.

Au voisinage des résonances non linéaires, l'amplitude de la réponse d'un système non régulier est donc discontinue, ce qui se traduit par la présence d'une zone de discontinuités sur sa surface de réponse. Bien que le système étudié soit déterministe, la position de cette zone de discontinuités est *a priori* inconnue, car il n'existe pas de cadre théorique unifié permettant de prédire les fréquences de résonance non linéaires. Il s'agit d'un défi majeur pour la conception sécuritaire de systèmes non réguliers, qui constitue la motivation principale des développements présentés dans ce chapitre. Pour des raisons de sécurité, une solution éloignée des zones de discontinuité est ainsi requise.

Du point de vue mathématique, le problème de conception évoqué précédemment est modélisé par un problème d'optimisation de boîtes noires contraint de la forme :

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \\ & \text{sujet à } \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \text{et } d(\mathbf{x}) \leq 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où :

- $X \subseteq \mathbb{R}^n$  est le domaine des variables et  $n$  la dimension du problème ;
- $\mathbf{x} \in X$  est le vecteur des variables ;
- $\mathbf{c} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^m$  avec  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  contient  $m$  fonctions  $c_j(\mathbf{x})$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  modélisant les contraintes  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0$  satisfaites dans le domaine réalisable  $\Omega = \{\mathbf{x} \in X, \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0\}$  ;
- $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est la fonction objectif, également notée  $c_0(\mathbf{x})$  selon le contexte ;
- $d : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction modélisant la contrainte additionnelle  $d(\mathbf{x}) \leq 0$  assurant que  $\mathbf{x}$  est loin des discontinuités de certaines sorties de la boîte noire d'indice(s)  $j \in J$ , où  $J \subseteq \{0, 1, \dots, m\}$  est choisi par l'utilisateur.

Dans un contexte d’optimisation de boîtes noires, il est possible que certaines évaluations de la boîte noire échouent. Pour modéliser ces évaluations échouées, il est considéré que les sorties  $f$  et  $\mathbf{c}$  renvoient l’infini dans ce cas, d’où la présence de l’ensemble  $\overline{\mathbb{R}}$ .

L’objectif de ce chapitre est de présenter un algorithme visant à résoudre le problème (2.1) et basé sur l’algorithme de recherche directe sur maillage adaptatif **Mads** (de l’anglais *Mesh Adaptive Direct Search*) [17]. La contribution originale du chapitre est rappelée dans l’encart ; les travaux réalisés ont conduit à un article accepté pour publication dans *SIAM Journal On Optimization*<sup>1</sup>.

### Contribution

Un algorithme d’optimisation de boîtes noires permettant de trouver des solutions éloignées des discontinuités des sorties de la boîte noire.

Une revue de littérature relative au problème (2.1) et la modélisation choisie sont présentées dans la section 2.1. Des fondements algorithmiques relatifs à l’algorithme **Mads** sont introduits dans la section 2.2. L’algorithme proposé, nommé **DiscoMads**, est présenté dans la section 2.3. Sa convergence est analysée dans la section 2.4 afin d’établir des conditions d’optimalité sur les solutions renvoyées par l’algorithme. Des résultats numériques relatifs à des problèmes analytiques et d’ingénierie sont ensuite présentés dans la section 2.5. Pour un des problèmes d’ingénierie, un usage original de **DiscoMads** est présenté, visant à trouver des solutions loin des zones de contraintes cachées, c’est-à-dire des zones de l’espace des variables dans lesquelles l’évaluation de la boîte noire échoue. Enfin, un bilan est donné dans la section 2.6 et les perspectives d’utilisation de **DiscoMads** sont discutées.

## 2.1 Contexte et modélisation

Généralement, les processus industriels de conception de systèmes non linéaires complexes sont confidentiels et non publiés. De plus, la prise en compte des phénomènes non linéaires dans ces processus est un enjeu de recherche récent. Par conséquent, il n’existe pas de méthode de référence pour résoudre le problème (2.1) dans un contexte industriel. Les caractéristiques du problème sont détaillées dans la section 2.1.1. Des méthodes de boîte noire et d’optimisation sans dérivées sont présentées dans la section 2.1.2 puis des stratégies d’optimisation de fonctions discontinues sont introduites dans la section 2.1.3. À la suite de ces éléments bibliographiques, une modélisation plus explicite du problème (2.1) est fournie dans la section 2.1.4 et une approche de résolution est dégagée dans la section 2.1.5.

---

1. « Escaping unknown discontinuous regions in blackbox optimization », C. Audet, A. Batailly et S. Kojtych

### 2.1.1 Caractérisation du problème

Le problème de conception (2.1) peut être abordé comme un problème d'optimisation robuste, où la variabilité de la fonction objectif et des contraintes doit être minimisée, ou comme un problème de boîte noire. En raison des coûts de calcul associés aux outils de simulation non linéaires et au besoin de méthodes non invasives, le cadre d'optimisation de boîtes noires est privilégié.

Une difficulté importante du problème (2.1) est le traitement de la contrainte  $d(\mathbf{x}) \leq 0$ . En effet, comme la position des discontinuités dans  $X$  n'est pas connue analytiquement, la valeur de  $d$  en un point  $X$  ne peut être calculée à partir d'une seule évaluation de la boîte noire. En théorie, la contrainte  $d(\mathbf{x}) \leq 0$  requiert un nombre infini d'évaluations pour être jugée satisfaite en un point ; il s'agit d'une contrainte infinie et le problème (2.1) est dit semi-infini. Les contraintes infinies sont rencontrées dans certains champs de l'optimisation robuste, tels que l'optimisation fiabiliste (*reliability-based design optimization* en anglais) [131] où une solution acceptable doit respecter une probabilité de défaillance limite. Les méthodes de résolution employées dans ce contexte reposent sur une approximation de cette probabilité. À la connaissance de l'auteure, le traitement de contraintes infinies en optimisation de boîtes noires est limité aux problèmes de minmax, par exemple avec une méthode d'approximations extérieures successives [126].

Le problème (2.1) relève également du domaine de l'optimisation discontinue. Des problèmes d'optimisation discontinus sont présents dans des contextes très variés, tels que : l'analyse de phénomènes de dynamiques non linéaires transitoires aérodynamiques [85] ou structurels [51, 128], comme les problèmes de crash, le traitement de signaux [96, 152, 173], d'images [152] ou de nuages de points 3D [68] pour la détection de défauts notamment, les problèmes de contrôle et de réseaux [46] et la résolution d'équations aux dérivées partielles discontinues [96, 173].

### 2.1.2 Optimisation sans dérivées et de boîtes noires

Deux catégories de méthodes d'optimisation sans dérivées et de boîtes noires peuvent être considérées [20] : les méthodes heuristiques et les méthodes possédant une analyse de convergence. Les méthodes heuristiques n'offrent aucune garantie d'optimalité sur la solution renvoyée par l'algorithme, c'est-à-dire qu'elles ne reposent pas sur un critère d'arrêt prouvé mathématiquement. Pour les autres méthodes en revanche, une analyse de convergence garantit en général que, quel que soit le point de départ choisi pour débiter l'optimisation, l'algorithme converge vers un point qui satisfait des conditions nécessaires d'optimalité, sous

réserve que certaines hypothèses sur la fonction objectif et les contraintes soient respectées (notamment concernant la différentiabilité des fonctions). Cette convergence est toutefois théorique, car elle suppose en général un nombre infini d'itérations de l'algorithme.

Quelques méthodes heuristiques sont brièvement présentées (section 2.1.2.1), puis deux familles de méthodes possédant une analyse de convergence sont présentées : les méthodes basées sur des modèles (section 2.1.2.2), et les méthodes de recherche directe (section 2.1.2.3).

### 2.1.2.1 Méthodes heuristiques

De par leur compréhension relativement aisée et leur facilité d'implémentation, les méthodes heuristiques sont populaires dans un contexte industriel [51, 164, 191]. Une revue de leur utilisation en mécanique des structures a par exemple été publiée [86]. Il existe une multitude de méthodes heuristiques. Certaines méthodes, comme Nelder-Mead [134] ou Tabou [80], visent à explorer localement le domaine des variables, tandis que d'autres s'appuient sur une exploration globale du domaine, comme les stratégies évolutionnaires. Parmi les stratégies évolutionnaires, les algorithmes génétiques, introduits en 1975 [87], font partie des heuristiques les plus connues et les plus utilisées en ingénierie [51, 56, 57, 164]. Les caractéristiques de ces algorithmes sont brièvement décrites.

Les algorithmes génétiques s'inspirent des principes de l'évolution naturelle. À partir d'individus bien choisis, c'est-à-dire de points présentant des valeurs de  $f$  faibles, des règles imitant la théorie de l'évolution sont appliquées pour produire de nouveaux points. Ces nouveaux points sont censés bénéficier des qualités de leurs « parents » et sont considérés comme de bons candidats où évaluer la boîte noire. Les algorithmes génétiques ont l'avantage d'explorer globalement le domaine des variables et tentent ainsi de détecter plusieurs minima locaux. De plus, ils ne nécessitent pas d'avoir un point de départ respectant les contraintes pour lancer l'optimisation et sont adaptés aux fonctions bruitées [119]. Néanmoins, les algorithmes génétiques requièrent un grand nombre d'évaluations de la boîte noire pour les problèmes de grande taille, ce qui peut poser problème pour des boîtes noires coûteuses en temps de calcul. De plus, la prise en compte des contraintes  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0$  telles qu'énoncées dans le problème (2.1) est délicate : elles sont en général agrégées à la fonction objectif par méthode de pénalité pour se ramener à un problème sans contraintes.

Un inconvénient majeur des méthodes heuristiques est qu'elles ne garantissent pas la convergence vers un minimum local, même pour des fonctions simples. Du point de vue strict de l'analyse de convergence, les algorithmes génétiques ne présentent par exemple pas de conditions d'optimalité plus fortes qu'une recherche aléatoire sur l'ensemble du domaine [20].



### 2.1.2.2 Méthodes basées sur des modèles

Dans le contexte de l'optimisation sans dérivées, les dérivées de la fonction objectif et des fonctions modélisant les contraintes sont supposées inaccessibles. Toutefois, il est possible que celles-ci existent. Les dérivées étant un outil extrêmement précieux pour guider l'optimisation, il est alors judicieux de chercher à les estimer. Pour cela, un modèle local de la fonction objectif peut être construit en utilisant uniquement les valeurs connues de la fonction au voisinage d'un point d'intérêt. L'idée est d'utiliser des modèles différentiables, typiquement linéaires ou quadratiques [61, 62] dont le gradient peut servir à guider l'optimisation. Les méthodes basées sur des modèles, itératives, exploitent les informations des modèles construits à chaque itération afin de trouver un point prometteur, dit point candidat, où évaluer la boîte noire. Le but est de trouver un point ayant une valeur de fonction objectif plus faible que le meilleur point connu jusqu'alors, appelé solution courante.

Deux types de méthodes peuvent être distinguées : les méthodes de descente et les méthodes de régions de confiance. Les méthodes de descente [20, 71] calculent le gradient du modèle et l'utilisent pour estimer une direction de descente de la véritable fonction objectif. Cette direction de descente sert à effectuer une recherche linéaire visant à trouver un point candidat. Les méthodes de descente sont classiquement employées dans le cas de fonctions différentiables. Les méthodes de région de confiance [20] consistent quant à elles à minimiser le modèle sur un domaine contraint, appelé région de confiance, dont la taille est mise à jour à chaque itération. Le point obtenu par minimisation est choisi comme point candidat. Le bon fonctionnement des méthodes de région de confiance repose sur l'hypothèse que les sorties de la boîte noire sont régulières, bien que les dérivées ne soient pas accessibles. L'utilisation de modèles est toutefois pertinente même dans le cas de fonctions non différentiables, en particulier si leur calcul est peu coûteux : un modèle fournit à l'algorithme d'optimisation une information supplémentaire sur le problème, même si la fonction d'intérêt est mal approximée.

### 2.1.2.3 Méthodes de recherche directe directionnelle

Les méthodes de recherche directe directionnelle sont des méthodes itératives qui reposent uniquement sur les valeurs des sorties de la boîte noire pour guider l'optimisation. Elles ne requièrent pas d'approximation des dérivées et sont ainsi particulièrement bien adaptées aux problèmes de boîtes noires non lisses. À partir d'un point de départ  $\mathbf{x}^0$ , ces méthodes génèrent à chaque itération un ensemble fini de points candidats où évaluer la boîte noire, dans le but de trouver une nouvelle solution courante. Les points candidats sont générés autour de la solution courante par une sonde locale s'appuyant sur des directions de sonde. L'évolution des méthodes de recherche directe [20] est brièvement décrite par trois algorithmes principaux.

**Recherche par coordonnées.** L'algorithme de recherche par coordonnées (abrégé CS de l'anglais *Coordinate Search*) est souvent considéré comme l'un des premiers algorithmes de recherche directe; il a été mis au point en 1952 [77]. Comme son nom l'indique, cet algorithme utilise uniquement les directions de coordonnées pour déterminer les points candidats. Les résultats de convergence associés à cet algorithme sont riches dans le cas de fonctions différentiables, mais relativement limités dans le cas non différentiable en raison de la fixité des directions de sonde.

**Recherche par motifs.** Une évolution de l'algorithme de recherche par coordonnées est l'algorithme de recherche par motifs (abrégé GPS de l'anglais *Generalized Pattern Search*) proposé en 1997 [178]. Avec cet algorithme, les directions de sonde ne sont plus restreintes aux directions de coordonnées, mais sont sélectionnées à chaque itération parmi un ensemble de bases positives<sup>2</sup> [20, Def. 6.3]. Des résultats de convergence plus forts que CS sont ainsi obtenus et sont valides pour les directions de sonde contenues dans l'ensemble.

De plus, GPS peut évaluer la boîte noire ailleurs qu'aux points proposés par la sonde : chaque itération comporte une étape de recherche globale, flexible, en plus de l'étape de sonde. Lors de l'étape de recherche globale, un nombre fini de points peut être évalué selon les choix de l'utilisateur, qui peut par exemple intégrer sa connaissance du problème au sein de l'algorithme d'optimisation. Cette étape permet également de diversifier l'exploration du domaine des variables et peut permettre à l'algorithme d'échapper à l'attraction d'un minimum local.

**Recherche sur maillage adaptatif.** Dans la continuité de GPS, l'algorithme de recherche directe sur maillage adaptatif **Mads** [17] a permis de renforcer encore les résultats de convergence en recherche directe. Dans ce cas, les directions de sonde sont choisies dans un ensemble dense, ce qui permet d'assurer la convergence théorique vers un minimum local pour une fonction objectif qui soit seulement Lipschitz<sup>3</sup> et non plus forcément différentiable. Comme pour GPS, des méthodes heuristiques peuvent être judicieusement intégrées dans la phase de recherche globale pour permettre une meilleure exploration du domaine. Il est également possible de bénéficier de certains avantages des méthodes basées sur des modèles : la prise en compte de modèles quadratiques est possible dans **Mads** [61] et permet généralement d'augmenter grandement l'efficacité de l'algorithme.

De nombreuses améliorations et extensions de l'algorithme **Mads** ont été proposées ces quinze

---

2. Un exemple de base positive dans  $\mathbb{R}^2$  est donné par  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2\}$  où  $\mathbf{e}_i$  est un vecteur unitaire.

3. Une fonction  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite Lipschitz sur  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  s'il existe un scalaire  $L > 0$  tel que  $|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$  pour tout  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X$ .

dernières années. Des développements majeurs ont été effectués sur le choix des directions de sonde afin de réduire le nombre d'évaluations (OrthoMads [2]) par rapport à l'algorithme d'origine. De nouvelles stratégies ont été mises en place pour la gestion des contraintes pour gérer les points de départ non réalisables [18] ou les contraintes d'égalité [26]. Concernant la gestion des variables, des développements spécifiques ont permis d'intégrer les variables de catégories discrètes [1] et de mieux gérer les variables périodiques [22]. De plus, une mise à l'échelle dynamique des variables [27] a été développée, permettant d'explorer plus efficacement le domaine des variables. Une autre part importante des développements réalisés concerne l'adaptation de Mads pour des problèmes de grandes dimensions, par exemple par le biais d'un algorithme parallèle asynchrone (PSD-Mads [25]) ou de procédures statistiques de sélection des variables d'influence (STATS-Mads [3]). Mads a également été adapté pour l'optimisation de boîtes noires stochastiques (StoMads [24]) ou la résolution de problèmes comportant plusieurs objectifs (BiMads [28], Multi-Mads [29], DMulti-Mads [47]). Concernant spécifiquement les boîtes noires discontinues, une analyse de convergence supplémentaire a été proposée [183], ainsi qu'un algorithme permettant de gérer les boîtes noires bruitées caractérisées par des discontinuités stochastiques (RobustMads [21]). Ces derniers développements ne permettent toutefois pas d'obtenir une solution éloignée des discontinuités.

L'algorithme Mads a par ailleurs été utilisé dans des domaines d'ingénierie très variés [8]. Cette utilisation diversifiée est favorisée par l'existence d'une implémentation en libre accès de Mads : le logiciel NOMAD [112]. Ce logiciel, implémenté en C++, inclut également les algorithmes CS et GPS et contient de nombreuses fonctionnalités associées au traitement des contraintes et des variables. La résolution d'un problème de boîte noire avec un optimiseur tel que NOMAD est schématisée sur la figure 2.1.

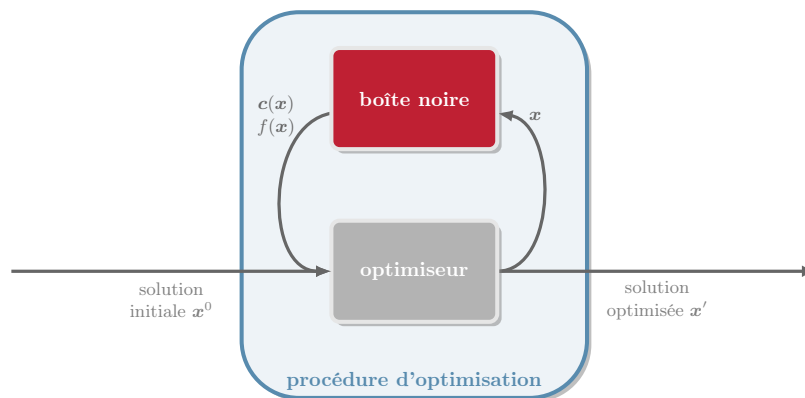


Figure 2.1 Résolution d'un problème d'optimisation de boîte noire.

### 2.1.3 Optimisation de fonctions discontinues

Les méthodes d'optimisation basées sur le gradient sont par nature peu adaptées à l'optimisation de fonctions discontinues. Les méthodes sans dérivées et de boîtes noires sont généralement privilégiées [125] et adaptées pour les problèmes discontinus. Pour des problèmes industriels, des heuristiques peuvent être utilisées [46, 51] pour tenter de trouver une solution globale sur le domaine des variables. Parmi les méthodes reposant sur une analyse de convergence, des conditions d'optimalité ont été énoncées dans le cas de fonctions discontinues pour l'algorithme de recherche directe Mads [183] et pour des méthodes de régions de confiance [122]. Certaines méthodes, hybrides, combinent des heuristiques à des méthodes de recherche directe [125] afin de tirer profit des différentes approches.

Pour s'affranchir des discontinuités, une stratégie courante consiste à construire des modèles substitués continus de la fonction objectif et des contraintes. La définition 2.1.1 d'un substitut, issue d'un ouvrage de référence [20], est volontairement vague : dans le cadre de l'optimisation discontinue, le modèle substitut vise généralement à représenter au mieux la fonction ciblée. Il peut s'agir par exemple d'interpolation, d'approximations ou des modèles quadratiques évoqués précédemment. Le problème d'optimisation peut être résolu en faisant uniquement appel au problème substitut, construit préalablement, ou en évaluant tour à tour les vraies fonctions et le modèle substitut [51], qui peut être mis à jour dynamiquement. Une approche de pénalisation a par exemple été proposée, pour laquelle une série d'approximations continues remplace la fonction objectif discontinue [48]. Toutefois, aucune des approches évoquées ne permet de contrôler l'éloignement aux discontinuités des solutions obtenues.

**Définition 2.1.1** (Substitués). *Le problème :*

$$\min_{\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n} \{ \tilde{f}(\mathbf{x}) : \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) \leq 0 \}$$

*est dit substitut du problème  $\min_{\mathbf{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n} \{ f(\mathbf{x}) : \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0 \}$  si  $\tilde{f} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  et  $\tilde{\mathbf{c}} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^m$  partagent des similitudes avec  $f$  et  $\mathbf{c}$  mais sont usuellement plus rapides à évaluer. Les fonctions  $\tilde{f}$  et  $\tilde{\mathbf{c}}$  sont des fonctions substitués des fonctions  $f$  et  $\mathbf{c}$ .*

Plusieurs traitements numériques jugés pertinents pour la résolution de problèmes avec discontinuités sont présentés dans cette section. Des modèles substitués (section 2.1.3.1), des critères de détection de discontinuités (section 2.1.3.2) et des méthodes permettant de localiser ces discontinuités dans le domaine des variables (section 2.1.3.3) sont discutés. Ces traitements sont applicables à la fonction objectif et aux contraintes. Ils requièrent un jeu de données, c'est-à-dire un ensemble  $\{\mathbf{x}^i, g(\mathbf{x}^i)\}$  comportant un nombre fini de points où

une fonction d'intérêt  $g$  a été évaluée. Ces traitements numériques sont issus de domaines de recherche variés et peuvent par ailleurs excéder le cadre de l'optimisation de fonctions discontinues déterministes.

### 2.1.3.1 Modèles substituts

La construction d'un modèle vise à déterminer une fonction  $\tilde{g}$  qui représente au mieux le jeu de données discrètes  $\{\mathbf{x}^i, g(\mathbf{x}^i)\}$  [68]. Des modèles globaux sur l'ensemble du domaine des variables peuvent être construits. Ces modèles sont très sensibles à la base de fonctions d'approximation choisie ; en présence de discontinuités, des oscillations indésirables dues au phénomène de Gibbs peuvent survenir si une base de fonctions lisses est considérée. Pour corriger ce problème, une solution consiste à enrichir la base avec des fonctions discontinues [158], mais cela requiert une connaissance *a priori* des quantités du problème. Des approximations de Padé-Legendre [7] ou Padé-Tchebychev [173] s'appuyant sur une base de fonctions rationnelles permettent de mieux représenter les quantités discontinues. Il est toutefois nécessaire de contrôler la précision des modèles obtenus, ce qui requiert de localiser précisément les discontinuités dans le domaine des variables. Le phénomène de Gibbs peut également être mitigé par des modèles de krigeage, couplés à une localisation précise des discontinuités pour contrôler l'échantillonnage des points et éviter les oscillations indésirables [46, 51].

Dans le cadre de l'optimisation discontinue, des modèles substituts locaux sont plus communément utilisés. Le caractère local peut être assuré par une base de fonctions d'approximations à portée locale, telles que les fonctions de base radiale [96] ou des noyaux à échelle variable (*variably scaled kernel* en anglais) [46, 68, 152]. Un choix judicieux de paramètres est requis pour assurer la qualité du modèle ; la prise en compte de la position des discontinuités dans le domaine des variables permet d'améliorer leur fiabilité [68]. Le caractère local peut aussi être obtenu en partitionnant le domaine des variables en sous-domaines sur lesquels la fonction à approximer est continue, puis en construisant des modèles continus sur ces sous-domaines [7, 13, 51, 128, 158]. La qualité des modèles construits repose sur la bonne superposition des frontières des sous-domaines aux discontinuités. Par conséquent, la localisation de ces discontinuités joue un rôle crucial.

### 2.1.3.2 Critères de détection

Pour un jeu de données discrètes, les discontinuités ne peuvent être distinguées numériquement des zones de fort accroissement. Le terme de discontinuités faibles est utilisé dans la littérature pour désigner à la fois les discontinuités et les zones de fort accroissement [158]. À partir d'un jeu de données  $\{\mathbf{x}^i, g(\mathbf{x}^i)\}$ , plusieurs critères sont utilisés dans la littérature pour

détecter les discontinuités faibles de  $g$ . Ils sont généralement basés sur :

- les valeurs de  $g$ . Une première approche consiste à discriminer les sauts de  $g$  entre deux points proches par un seuil limite  $\epsilon$  ; les sauts excédant ce seuil sont considérés comme des discontinuités. La fonction  $g$  est  $\epsilon$ -continue s'il n'existe pas de saut dépassant le seuil  $\epsilon$  [122]. Cette détection est hautement dépendante de la valeur de  $\epsilon$ , souvent fixée manuellement, qui requiert une bonne connaissance des données ou une normalisation [51]. D'autres approches s'appuient sur une répartition des points selon les valeurs de  $g$  en différentes classes, obtenues par un algorithme de classification tel que l'algorithme des K-moyennes [128] ou en découpant manuellement la plage de valeurs de sorties [68]. Dans ce cas, un jeu de données couvrant globalement le domaine des variables est requis. Les différentes approches mentionnées ne caractérisent pas explicitement la proximité entre deux points, qui intervient pourtant dans le critère de détection.
- le taux d'accroissement de  $g$  entre deux points. Les discontinuités faibles sont alors explicitement détectées par deux paramètres : un taux d'accroissement limite et un paramètre de voisinage indiquant si deux points sont proches [46, 85]. Les méthodes basées sur ce critère assument ainsi la détection de zones de fort accroissement en plus des discontinuités et offrent une caractérisation explicite de la proximité entre deux points. L'accès à deux paramètres permet une grande flexibilité dans la détection de discontinuités.
- les coefficients de fonctions d'approximations, construites à partir du jeu de données [13, 96, 152, 173]. Ce critère exploite les oscillations indésirables dues au phénomène de Gibbs au voisinage des discontinuités : ces oscillations sont reflétées par les valeurs des coefficients d'approximation.

### 2.1.3.3 Méthodes de localisation

La localisation des discontinuités désigne l'identification des zones du domaine des variables où se situent les discontinuités faibles, caractérisées par un des critères de détection précédents.

Les méthodes de localisation de discontinuités incluent nécessairement un mécanisme d'échantillonnage des points dans le domaine des variables pour construire ou enrichir le jeu de données. Plutôt qu'un échantillonnage sur une grille régulière nécessitant un grand nombre de points, les plans d'expérience sont privilégiés pour limiter le nombre d'évaluations [7, 128]. Un échantillonnage adaptatif peut également être considéré pour échantillonner au mieux les fonctions au voisinage des discontinuités [81, 85]. Les techniques de grille creuses (*sparse*

*grids* en anglais) sont en particulier bien adaptées aux problèmes de grande dimension [46, 92, 192]. Des améliorations de ces techniques pour le cas spécifique de fonctions discontinues ont par ailleurs été proposées [192]. Pour certaines méthodes de localisation, un étiquetage des points échantillonnés est également requis. Cet étiquetage peut par exemple être réalisé par l'algorithme des K-moyennes [128] ou le plus souvent par des machines à vecteur de support [7, 51, 68, 81].

Les résultats de la localisation peuvent être fournis à l'utilisateur sous différentes formes. Dans la forme la plus simple, il s'agit d'un étiquetage des points échantillonnés selon leur appartenance ou non à la zone de discontinuités faibles [152]. Un grand nombre de points est alors requis pour localiser précisément la discontinuité. Les méthodes d'annihilation polynomiale [13, 92] renvoient quant à elles une fonction estimant l'amplitude des sauts en tout point du domaine des variables. Un grand nombre de points est également nécessaire pour une localisation précise. Certaines méthodes plus sophistiquées visent à obtenir une expression paramétrée de la position des discontinuités dans le domaine des variables. Cette représentation peut être explicite et fournie sous forme de spline en 2D [122] ou de fonction paramétrée obtenue par inférence bayésienne dans un contexte probabiliste [12, 158]. Une caractérisation implicite de la position des discontinuités peut également être fournie, correspondant par exemple aux courbes de niveau d'une fonction [146], ou à un hyperplan obtenu par des méthodes de classification [68, 81, 128].

#### 2.1.4 Modélisation proposée

La résolution du problème (2.1) requiert une caractérisation numérique des discontinuités faibles. Une zone de discontinuités faibles  $D$  (abrégée zone de discontinuités) est introduite et caractérisée par un taux de variation limite  $\tau > 0$  sur une boule ouverte de rayon  $r_d \geq 0$ , appelé rayon de détection :

$$D = \{\mathbf{y} \in X : \exists j \in J, \exists \mathbf{z} \in X \cap B_{r_d}(\mathbf{y}), |c_j(\mathbf{y}) - c_j(\mathbf{z})| > \tau \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|\}, \quad (2.2)$$

où  $\|\bullet\|$  désigne la norme euclidienne et  $B_{r_d}(\mathbf{y})$  est la boule ouverte de rayon  $r_d$  centrée en  $\mathbf{y}$ . Dans le cas où les fonctions sont différentiables par morceaux, soit  $L$  la constante de Lipschitz de toutes les sorties d'indices  $j \in J$ , si  $\tau > L$  et si un point  $\mathbf{y} \in D$  (avec un point  $\mathbf{z}$  satisfaisant l'inégalité pour  $\mathbf{y}$ ), alors il existe une discontinuité entre  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  pour une des sorties d'indice  $j \in J$ . Dans les autres cas,  $D$  contient également des zones sans discontinuités, mais dans lesquelles au moins une des sorties d'indice  $j \in J$  subit un fort accroissement. Par conséquent, des zones de discontinuités faibles de pleine dimension dans  $X$  peuvent être caractérisées avec la modélisation proposée. Un exemple de zone  $D$  entourant une unique discontinuité (----)

est présenté sur la figure 2.2 pour un problème (2.1) à deux dimensions.

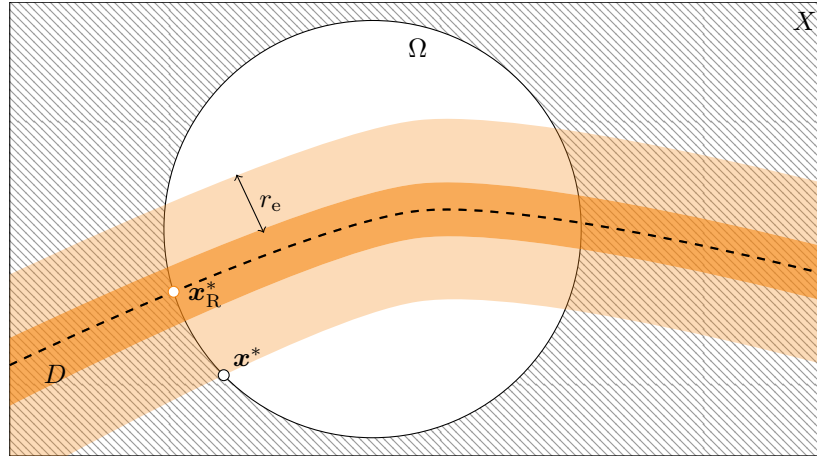


Figure 2.2 Exemple de domaines relatifs au problème (2.4) avec  $n = 2$  et une discontinuité (----) : zones  $D$  (■) et  $M$  (■ ∪ □), domaine réalisable idéal  $\hat{\Omega}$  (□) et domaine non  $\Omega$ -réalisable (▨). Solution optimale  $\mathbf{x}^*$  et solution  $\mathbf{x}_R^*$  du problème avec contrainte  $d(\mathbf{x}) \leq 0$  relaxée.

Comme la zone  $D$  est définie par les deux paramètres  $r_d$  et  $\tau$  fixés par l'utilisateur, la position exacte des discontinuités dans la zone est inconnue. Afin d'obtenir des solutions éloignées des discontinuités, une marge de sécurité  $M$  englobant  $D$  est introduite et définie par un rayon  $r_e > 0$  fixé par l'utilisateur :

$$M = X \cap (\cup_{\mathbf{x} \in D} B_{r_e}(\mathbf{x})). \quad (2.3)$$

La marge de sécurité  $M$  contient les points qui doivent être exclus lors de la résolution du problème (2.1) ; le paramètre  $r_e$  est nommé rayon d'exclusion.

Finalement, le problème d'optimisation (2.1) est modélisé de la façon suivante :

$$\min_{\mathbf{x} \in \hat{\Omega}} f(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

où  $\hat{\Omega} = \Omega \setminus M$  est le domaine réalisable idéal. En cas d'ambiguïté, le terme  $\Omega$ -réalisable est utilisé pour caractériser le domaine où les contraintes  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0$  sont satisfaites. Les problèmes (2.4) et (2.1) sont équivalents si la contrainte additionnelle satisfait  $d(\mathbf{x}) \leq 0 \iff \mathbf{x} \notin M$ . Un exemple d'agencement des différentes zones et domaines est visible sur la figure 2.2. La solution du problème (2.4) est représentée par le point  $\mathbf{x}^* \in \hat{\Omega}$  tandis que le point  $\Omega$ -réalisable  $\mathbf{x}_R^*$  est la solution du problème de minimisation de  $f$  sur  $\Omega$ .



### 2.1.5 Conclusion partielle

La difficulté majeure du problème (2.1) est le traitement de la contrainte infinie  $d(\mathbf{x}) \leq 0$ . Sur base de la littérature, il est envisagé de construire un modèle local, non pas de  $f$  et  $\mathbf{c}$ , mais directement de la fonction  $d$ . L'idée est de localiser les discontinuités en cours d'optimisation, de façon à améliorer le modèle de  $d$  et ainsi guider l'algorithme vers des solutions situées loin de la zone de discontinuités  $D$ . Pour le critère de détection de discontinuités, un taux d'accroissement limite et un paramètre de voisinage sont utilisés pour leur flexibilité. Compte tenu du contexte d'optimisation de boîtes noires, le nombre d'évaluations dédiées à la localisation des discontinuités doit être limité : une localisation locale est privilégiée. L'algorithme de recherche directe **Mads**, qui repose sur une exploration locale du domaine  $X$ , semble suffisamment flexible pour incorporer un mécanisme de localisation des discontinuités faibles, désigné plus simplement comme mécanisme de révélation.

## 2.2 Fondements algorithmiques

Cette section vise à présenter en détail l'algorithme de recherche sur maillage adaptatif **Mads**. Pour faciliter la présentation, et fournir une première illustration algorithmique des méthodes de recherche directe, la recherche par coordonnées est d'abord présentée (section 2.2.1). L'algorithme **Mads** est ensuite détaillé pour la résolution de problèmes sans contraintes (section 2.2.2) et avec contraintes (section 2.2.3).

### 2.2.1 Recherche par coordonnées

La recherche par coordonnées est présentée sur un exemple en deux dimensions, puis l'algorithme complet est donné et les résultats de convergence principaux sont rappelés.

#### Exemple

Un problème de minimisation sans contraintes d'une fonction de  $n = 2$  variables est considéré :  $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{x})$ . Les premières étapes de l'algorithme CS sur ce problème sont illustrées sur la figure 2.3.

Au début de l'itération 0, un point initial  $\mathbf{x}^0$  où  $f$  a été évaluée est connu. Une étape de sonde commence : l'algorithme génère  $2n = 4$  points de sonde situés dans les directions de coordonnées  $\pm \mathbf{e}_i, i \in \{1, 2\}$  autour de  $\mathbf{x}^0$ , sur un maillage régulier de pas  $\delta^0$ . Le point  $\mathbf{x}^0$  est le centre de sonde et les directions de coordonnées sont les directions de sonde. Le point de sonde  $\mathbf{t}^1$  est d'abord évalué (figure 2.3a), et la valeur de  $f$  en  $\mathbf{t}^1$  est comparée à la valeur de  $f$

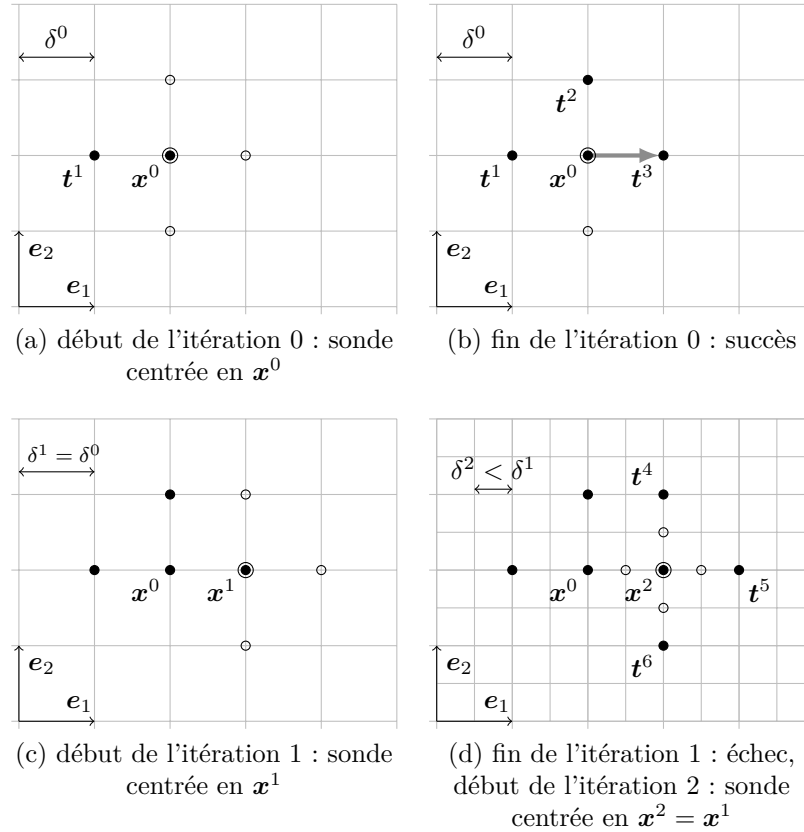


Figure 2.3 Exemple de déroulement de Cs : point non évalué ( $\circ$ ), point évalué ( $\bullet$ ), centre de sonde ( $\odot$ ).

en  $\mathbf{x}^0$ , la solution courante. Ici,  $f(\mathbf{t}^1) \geq f(\mathbf{x}^0)$  : la solution courante, encadrée sur la figure, demeure  $\mathbf{x}^0$ . L'itération 0 est poursuivie en évaluant le point  $\mathbf{t}^2$ , au nord de  $\mathbf{x}^0$ . Comme  $f(\mathbf{t}^2) \geq f(\mathbf{x}^0)$ ,  $\mathbf{x}^0$  reste la solution courante à ce stade. L'algorithme continue en évaluant  $\mathbf{t}^3$  (figure 2.3b). Cette fois,  $f(\mathbf{t}^3) < f(\mathbf{x}^0)$  : le point  $\mathbf{t}^3$  est meilleur que la solution courante. L'itération 0 est qualifiée de succès, tout comme l'itéré  $\mathbf{x}^0$ . La solution courante est mise à jour pour la prochaine itération :  $\mathbf{x}^1 = \mathbf{t}^3$ .

À l'itération 1, la solution courante  $\mathbf{x}^1$  est utilisée comme centre de sonde (figure 2.3c). Les points non évalués dans les directions de coordonnées sont évalués sur un maillage de pas  $\delta^1 = \delta^0$  et leurs valeurs de  $f$  comparées avec  $f(\mathbf{x}^1)$ . Cette fois, aucun des points de sonde n'est meilleur que  $\mathbf{x}^1$ , l'itération 1 est qualifiée d'échec, tout comme l'itéré  $\mathbf{x}^1$ . La solution courante est inchangée :  $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1$  et la taille de maillage est réduite pour l'itération 2 :  $\delta^2 < \delta^1$  (figure 2.3d). L'itération 2 commence sur ce maillage plus fin avec  $\mathbf{x}^2$  comme centre de sonde. Les itérations se poursuivent jusqu'à ce qu'une taille de maillage minimale soit atteinte.

## Algorithme

L'algorithme de recherche par coordonnées est résumé sur la figure 2.4 dans le cas d'un problème de dimension  $n$ . Lors de l'étape de sonde,  $2n$  directions de sonde sont considérées. Toutefois, l'itération peut être stoppée dès qu'un point meilleur que la solution courante est évalué, comme c'est le cas dans l'exemple de la figure 2.3. Cette stratégie, dite opportuniste, vise à préserver le budget d'évaluations, c'est-à-dire le nombre maximal autorisé d'évaluations de la boîte noire.

### RECHERCHE PAR COORDONNÉES

- INITIALISATION : définir un pas de maillage initial  $\delta^0 > 0$ , un point de départ  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ , un critère d'arrêt  $\epsilon_{\text{stop}} \geq 0$  et initialiser le compteur d'itérations  $k \leftarrow 0$ ;
- SONDE LOCALE : générer l'ensemble des points de sonde  $P^k := \{\mathbf{x}^k \pm \delta^k \mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n\}$  et évaluer  $f$  aux points de sonde,
  - si  $f(\mathbf{t}) < f(\mathbf{x}^k)$  pour  $\mathbf{t} \in P^k$ , le point  $\mathbf{t}$  est meilleur que l'itéré courant  $\mathbf{x}^k$ , l'itération est un succès :  $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{t}$  et  $\delta^{k+1} \leftarrow \delta^k$ ,
  - sinon l'itération est un échec :  $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{x}^k$  et  $\delta^{k+1} \leftarrow \frac{\delta^k}{2}$ ,
  - si  $\delta^{k+1} \geq \epsilon_{\text{stop}}$ , retourner à SONDE LOCALE, sinon arrêter l'algorithme.

Figure 2.4 Algorithme de recherche par coordonnées.

## Résultats de convergence

Les résultats de convergence associés à Cs font appel à la notion de dérivée directionnelle, dont la définition est rappelée ci-dessous.

**Définition 2.2.1** (Dérivée directionnelle). *La dérivée directionnelle d'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dans la direction  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  est définie par :*

$$f'(\mathbf{x}; \mathbf{p}) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{p}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

*quand la limite existe.*

Contrairement au gradient, qui n'est défini que pour une fonction différentiable, la dérivée directionnelle peut exister pour une fonction non différentiable, comme c'est le cas par exemple pour la fonction  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$  en  $\mathbf{x} = 0$ . Le théorème 2.2.1 fournit une condition d'optimalité sur la solution renvoyée par Cs pour un nombre infini d'itérations.

**Théorème 2.2.1.** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^0$  dont les ensembles de niveau<sup>4</sup> sont bornés et soit  $\{\mathbf{x}^k\}$  la séquence d'itérés produits par Cs pour  $\epsilon_{stop} = 0$ . Soit  $\hat{\mathbf{x}}$  un point d'accumulation des échecs de  $\{\mathbf{x}^k\}$ , si  $f'(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{p})$  existe pour une direction  $\mathbf{p} \in \{\pm \mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n\}$ , alors  $f'(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{p}) \geq 0$ . De plus, si  $f \in \mathcal{C}^1$  alors  $\hat{\mathbf{x}}$  est un point stationnaire :  $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ .*

Ce théorème ne caractérise la dérivée directionnelle au point d'accumulation que pour les  $2n$  directions de coordonnées. Il est possible que l'algorithme converge en un point où des directions de descente existent, mais ne correspondent pas aux directions de coordonnées ; l'algorithme reste alors bloqué en ce point [20, exemple 3.3]. Par ailleurs, la recherche par coordonnées présentée ne permet pas de traiter les problèmes avec contraintes.

### 2.2.2 Recherche sur maillage adaptatif sans contraintes

L'algorithme Mads peut être vu comme une version très sophistiquée de Cs dans le cas de problèmes sans contraintes. Pour Mads, tous les points évalués par l'algorithme à l'itération  $k$  doivent appartenir à un maillage de pas  $\delta^k$ , défini formellement ci-après<sup>5</sup>.

**Définition 2.2.2** (Maillage). *Le maillage de pas  $\delta^k > 0$ , généré par un ensemble de directions  $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$  et centré autour de la solution courante  $\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ , est défini par :*

$$M^k := \{\mathbf{x}^k + \delta^k \mathbb{D} \mathbf{y} : \mathbf{y} \in \mathbb{N}^{2n}\},$$

avec  $\mathbb{D} = [\mathbf{I} \quad -\mathbf{I}]$  et  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice identité.

Deux améliorations majeures sont présentes dans Mads par rapport à Cs :

- (1) les directions de sonde sont plus diversifiées, ce qui conduit à des résultats de convergence [17] plus forts qu'avec Cs. Ces résultats sont rendus possible par l'ajout d'un paramètre de sonde  $\Delta^k$ , différent du pas du maillage  $\delta^k$ , défini tel que  $\delta^k = \min\{\Delta^k, (\Delta^k)^2\}$  à chaque itération.
- (2) une exploration plus globale du domaine des variables est possible : une étape de recherche globale, héritée de l'algorithme GPS [178], et l'augmentation possible de  $\Delta^k$  en cas de succès permettent de diversifier l'exploration du domaine des variables et éventuellement d'échapper à l'attraction d'un minimum local.

4. L'ensemble de niveau  $l$  d'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est défini par  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq l\}$ .

5. Une définition simplifiée est énoncée ici en considérant un ensemble de directions  $\mathbb{D}$  usuel.

## Déroulement d'une itération

Tout comme CS, le but d'une itération  $k$  de **Mads** est de trouver un point avec une meilleure valeur de  $f$  que la solution courante  $\mathbf{x}^k$ . Chaque itération comporte une étape de recherche globale, flexible et optionnelle, suivie d'une étape de sonde locale, définie rigoureusement. Durant l'étape de recherche globale, la boîte noire peut être évaluée en un nombre fini de points  $S^k \subseteq M^k$  fournis par l'utilisateur.

Si l'étape de recherche globale échoue (aucun point évalué n'est meilleur que la solution courante), l'étape de sonde est effectuée pour évaluer des points autour du centre de sonde  $\mathbf{x}^k$ . L'ensemble des points de sonde  $P^k$  (de l'anglais *poll*), défini plus en détail dans l'encart ci-dessous, contient des points à distance au plus  $\Delta^k$  de  $\mathbf{x}^k$  en norme infinie.

Si les deux étapes échouent à trouver un meilleur point, alors l'itération est un échec. Les paramètres  $\delta^k$  et  $\Delta^k$  sont réduits [17]. Sinon, l'itération est un succès, et ces paramètres sont augmentés ou gardés constants, de façon à ce que le maillage à l'itération  $k + 1$  ne soit pas plus fin que le maillage à l'itération  $k$ . Le meilleur point évalué est utilisé comme nouvel itéré  $\mathbf{x}^{k+1}$ . Pendant une itération, si un point de  $S^k$  ou  $P^k$  s'avère meilleur que la solution courante, alors l'itération peut s'arrêter de manière opportuniste.

### Directions de sonde

Une limitation de CS est due au nombre fini de directions de sonde : une suite d'échecs conduit à une réduction du pas  $\delta^k$ , le maillage devient infiniment fin, mais les directions de sonde restent les mêmes. Dans **Mads**, au contraire, les directions de sonde sont choisies dans un ensemble de plus en plus grand à mesure que l'algorithme converge. Ceci est possible grâce au paramètre de sonde  $\Delta^k$ , distinct du pas de maillage  $\delta^k$ .

Le paramètre de sonde  $\Delta^k$  permet de définir un cadre de sonde noté  $E^k$ , centré en  $\mathbf{x}^k$  :

$$E^k := \{\mathbf{x} \in M^k : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_\infty \leq \Delta^k\}. \quad (2.5)$$

Les points de sonde sont choisis dans le cadre de sonde  $E^k$  à partir d'un ensemble générateur positif [20, définition 6.1] de directions  $\mathbb{D}_\Delta^k$  ; l'ensemble  $P^k$  des points de sonde est donné par :

$$P^k := \{\mathbf{x}^k + \delta^k \mathbf{d} : \mathbf{d} \in \mathbb{D}_\Delta^k\}. \quad (2.6)$$

Les ensembles  $E^k$  et  $P^k$  sont illustrés sur la figure 2.5 ; les points du maillage  $M^k$  sont matérialisés par les intersections des lignes fines. Le cadre de sonde  $E^k$  est l'ensemble des points de  $M^k$  situés à l'intérieur du domaine délimité par les traits plus épais.

Lors des échecs, le pas de maillage  $\delta^k$  est réduit plus agressivement que la taille du

cadre de sonde donnée par  $\Delta^k$ . Ainsi, lors d'une suite d'échecs, le nombre de directions de sonde contenues dans le cadre de sonde est de plus en plus important.

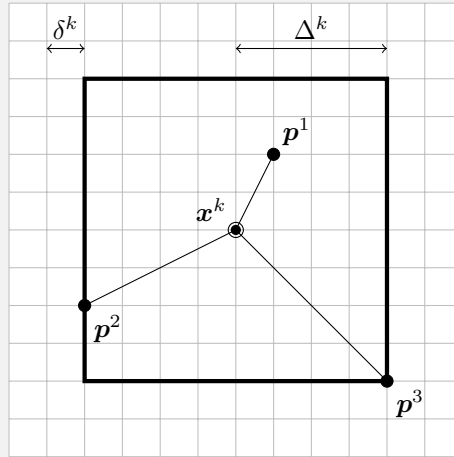


Figure 2.5 Maillage  $M^k$  (—), cadre de sonde  $E^k$  (□) et points de sonde  $P^k = \{p^1, p^2, p^3\}$  (●) générés autour du centre de sonde (⊙).

## Algorithme

L'algorithme **Mads** possède une certaine flexibilité dans le choix des paramètres algorithmiques, tels que les règles de mise à jour utilisées si l'itération est un échec ou un succès. Un algorithme **Mads** usuel pour les problèmes sans contraintes est résumé sur la figure 2.6, avec une stratégie opportuniste. Les critères d'arrêt les plus courants sont une taille de maillage minimale et un budget d'évaluations.

## Résultats de convergence

Les résultats de convergence de l'algorithme reposent uniquement sur l'étape de sonde et sont basés sur des outils mathématiques issus du calcul non lisse de Clarke [58]. Ces résultats exploitent le fait que les directions de sonde normalisées deviennent denses dans la sphère unité à mesure que le nombre d'itérations augmente [17]. Ceci permet d'établir des résultats de convergence plus forts que Cs. La définition d'un sous-ensemble dense est rappelée.

**Définition 2.2.3** (Sous-ensemble dense). *Un ensemble  $S$  est un sous-ensemble dense de  $A$  si  $S \subseteq A$ , et pour tout point  $\mathbf{x} \in A$  et tout seuil de distance  $\delta > 0$ , il existe un point  $\mathbf{y} \in S$  tel que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ .*

### Mads POUR PROBLÈMES SANS CONTRAINTES

- INITIALISATION : définir  $\Delta^0 > 0$  le paramètre de sonde,  $\mathbf{x}^0$  un point de départ et initialiser le compteur d'itérations  $k \leftarrow 0$  ;
- PRÉPARATION DE L'ITÉRATION : calculer le pas du maillage  $\delta^k = \min\{\Delta^k, (\Delta^k)^2\}$  ;
- RECHERCHE GLOBALE : évaluer la boîte noire aux points définis par l'utilisateur  $S^k \subset M^k$  ( $S^k = \emptyset$  est autorisé). Si un point  $\mathbf{t} \in S^k$  est tel que  $f(\mathbf{t}) < f(\mathbf{x}^k)$ , aller à MISE À JOUR ;
- SONDE LOCALE : générer l'ensemble des points de sonde  $P^k$  selon (2.6). Si un point  $\mathbf{t} \in P^k$  est tel que  $f(\mathbf{t}) < f(\mathbf{x}^k)$ , aller directement à MISE À JOUR ;
- MISE À JOUR
  - si  $f(\mathbf{t}) < f(\mathbf{x}^k)$  pour  $\mathbf{t} \in S^k \cup P^k$ , l'itération est un succès :  $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{t}$  et  $\Delta^{k+1} \leftarrow 2\Delta^k$ ,
  - sinon l'itération est un échec :  $\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{x}^k$  et  $\Delta^{k+1} \leftarrow \frac{\Delta^k}{2}$ ,
  - si aucun critère d'arrêt n'est satisfait,  $k \leftarrow k+1$  et retourner à PRÉPARATION DE L'ITÉRATION.

Figure 2.6 Un algorithme Mads pour les problèmes sans contraintes.

Les conditions d'optimalité énoncées pour Mads dans la littérature [17, 18] réfèrent à des problèmes contraints. Par conséquent, ces conditions sont présentées en partie dans la section suivante.

### 2.2.3 Recherche sur maillage adaptatif avec contraintes

L'algorithme Mads permet de résoudre des problèmes avec contraintes de la forme :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in X} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujet à} \quad & \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

où  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Une distinction est requise entre les différents types de contraintes [111]. Les contraintes non relaxables doivent toujours être satisfaites, sans quoi les valeurs d'autres sorties de la boîte noire peuvent ne plus avoir de sens. Par exemple, une longueur négative peut faire échouer d'autres calculs dans la boîte noire. Les contraintes non relaxables définissent ainsi le domaine des variables  $X$ . À l'inverse, les contraintes relaxables conservent un sens même lorsqu'elles sont violées ; elles sont contenues dans le vecteur de contraintes  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^m$  et définissent le domaine réalisable  $\Omega = \{\mathbf{x} \in X, \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0\}$ . Lorsqu'un point

$\mathbf{x}$  respecte toutes les contraintes, il est réalisable, sinon il est non réalisable.

Deux approches permettent de résoudre le problème contraint (2.7) dans Mads : la barrière extrême [17], qui rejette tous les points non réalisables, et la barrière progressive [18], qui utilise un seuil de rejet sur la violation des contraintes, progressivement réduit à mesure que l'algorithme se déploie. Les contraintes non relaxables sont traitées avec l'approche de barrière extrême, tandis que les contraintes relaxables peuvent être traitées avec les deux approches. Comme l'algorithme développé dans ce chapitre requiert l'usage de la barrière progressive pour au moins une contrainte, plus de détails sur cette approche sont fournis.

### Violation des contraintes et relation de dominance

Avec l'approche de barrière progressive, la violation par un point  $\mathbf{x}$  des contraintes est quantifiée grâce à la fonction d'agrégation des contraintes  $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  [78], définie par :

$$h(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m (\max(c_j(\mathbf{x}), 0))^2 & \text{si } \mathbf{x} \in X, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.8)$$

La fonction  $h$  est toujours positive. Si  $h(\mathbf{x}) = 0$ , alors le point est réalisable, car il respecte toutes les contraintes relaxables et non relaxables ( $\mathbf{x} \in \Omega$ ). Autrement, si  $0 < h(\mathbf{x}) < \infty$ ,  $\mathbf{x}$  respecte les contraintes non relaxables, mais pas toutes les contraintes relaxables ( $\mathbf{x} \in X \setminus \Omega$ ). Finalement si  $h(\mathbf{x}) = \infty$ , le point  $\mathbf{x}$  viole au moins une contrainte non relaxable.

La connaissance des valeurs de  $f$  et de  $h$  permet de définir un ordonnancement des points *via* la notion de dominance [20, définition 12.2].

**Définition 2.2.4** (Dominance en optimisation sous contraintes).

- Un point réalisable  $\mathbf{x} \in \Omega$  domine  $\mathbf{y} \in \Omega$ , noté  $\mathbf{x} \prec_f \mathbf{y}$ , si  $h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{y}) = 0$  et  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{y})$ .
- Un point non réalisable  $\mathbf{x} \in X \setminus \Omega$  domine  $\mathbf{y} \in X \setminus \Omega$ , noté  $\mathbf{x} \prec_h \mathbf{y}$ , si  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$  et  $h(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{y})$  avec au moins une inégalité stricte.
- Un point  $\mathbf{x}$  d'un ensemble quelconque  $S \subseteq X$  est non dominé s'il n'existe pas de point  $\mathbf{y} \in S$  qui domine  $\mathbf{x}$ .

La relation de dominance n'est pas définie entre un point réalisable et un point non réalisable, car ce type de comparaison n'est pas utilisé dans l'algorithme. Sur la figure 2.7, des points évalués dans  $\mathbb{R}^n$  sont représentés dans le plan  $(h, f)$  : il existe deux points réalisables tels que  $h = 0$  et huit points non réalisables avec des valeurs de  $h$  strictement positives. Cinq points



sont non dominés (●) et cinq sont dominés (○)

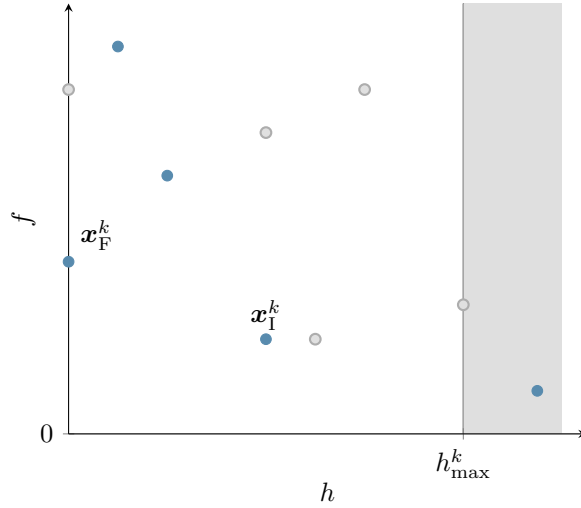


Figure 2.7 Points non dominés (●) et dominés (○), solution courante réalisable  $\mathbf{x}_F^k \in \mathbb{F}^k$  et solution courante non réalisable non dominée  $\mathbf{x}_I^k \in \mathbb{I}^k$  dans le plan  $(h, f)$ .

### Déroulement d'une itération

Au début de l'itération  $k$ , deux ensembles de solutions courantes sont construits. L'ensemble  $\mathbb{F}^k$  des solutions courantes réalisables non dominées à l'itération  $k$  est défini par :

$$\mathbb{F}^k = \arg \min_{\mathbf{x} \in V^k} \{f(\mathbf{x}) : h(\mathbf{x}) = 0\}, \quad (2.9)$$

où  $V^k$  est la cache, c'est-à-dire l'ensemble des points où la boîte noire a déjà été évaluée en début d'itération  $k$ . L'ensemble  $\mathbb{I}^k$  des solutions courantes non réalisables non dominées à l'itération  $k$  est défini par :

$$\mathbb{I}^k = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{U}^k} \{f(\mathbf{x}) : 0 < h(\mathbf{x}) < h_{\max}^k\}, \quad (2.10)$$

où  $\mathbb{U}^k$  est l'ensemble des points non réalisables non dominés au début de l'itération  $k$  et  $h_{\max}^k$  le seuil de rejet de la barrière à l'itération  $k$ . Sur la figure 2.7,  $\mathbb{F}^k = \{\mathbf{x}_F^k\}$  et  $\mathbb{I}^k = \{\mathbf{x}_I^k\}$ .

Le but de l'itération consiste à évaluer un point  $\mathbf{x} \in V^{k+1}$  meilleur que la solution courante réalisable ou non réalisable. Une étape de recherche globale peut être effectuée, puis l'étape de sonde commence. Différentes règles de décision sont appliquées pour le choix du centre de sonde [18]. En particulier si  $\mathbb{F}^k$  et  $\mathbb{I}^k$  sont non vides, la sonde est effectuée à l'itération  $k$

autour d'une solution courante réalisable  $\mathbf{x}_F^k \in \mathbb{F}^k$  et d'une solution courante non réalisable  $\mathbf{x}_I^k \in \mathbb{I}^k$ . Trois types d'itérations sont distingués et illustrés sur la figure 2.8 :

- (a) l'itération est dominante si un point  $\mathbf{x}$  dominant la solution courante réalisable ou non réalisable a été évalué. Dans ce cas, le point  $(h(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}))$  appartient à la demi-droite  $\{(0, f) : f < f(\mathbf{x}_F^k)\}$  ou à la zone colorée sur la figure 2.8a ;
- (b) l'itération est améliorante si elle n'est pas dominante et si un point  $\mathbf{x}$  non réalisable ayant une meilleure valeur de  $h$  que la solution courante non réalisable a été évalué (figure 2.8b) ;
- (c) l'itération est un échec dans tous les autres cas (figure 2.8c).

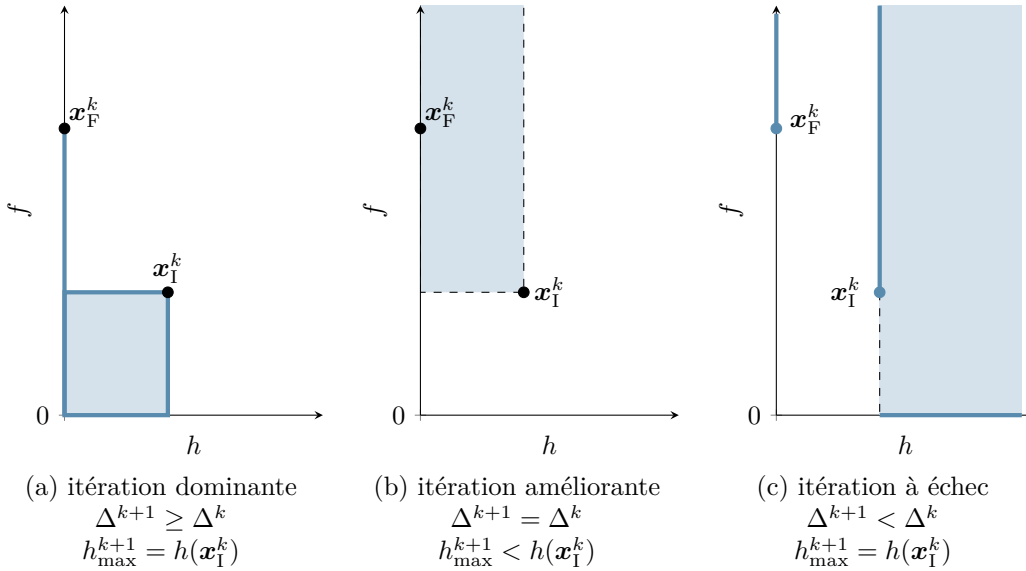


Figure 2.8 Types d'itérations selon la position (zones (□) et (—)) dans le plan  $(h, f)$  du meilleur point évalué lors de l'itération et règles de mise à jour correspondantes. Adaptée de [17].

Selon le type d'itération, le paramètre de sonde  $\Delta^k$  et le seuil de rejet de la barrière  $h_{\max}^k$  sont mis à jour selon des règles spécifiques [17], résumées sur la figure 2.8. En particulier, lors d'une itération améliorante, le seuil de la barrière est réduit pour favoriser la recherche de solutions réalisables. Un choix usuel de mise à jour est donné par :

$$\begin{cases} \Delta^{k+1} = 2\Delta^k & \text{si l'itération est dominante,} \\ \Delta^{k+1} = \Delta^k & \text{si l'itération est améliorante,} \\ \Delta^{k+1} = \frac{\Delta^k}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Le seuil de rejet de la barrière  $h_{max}^k$  est mis à jour selon les règles suivantes :

$$\begin{cases} h_{max}^{k+1} < h(\mathbf{x}_I^k) & \text{si l'itération est améliorante,} \\ h_{max}^{k+1} = h(\mathbf{x}_I^k) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.12)$$

### Algorithme

Un algorithme **Mads** avec la barrière progressive est résumé sur la figure 2.9 avec les choix de paramètres expliqués dans les paragraphes précédents ; une stratégie opportuniste est employée.

#### Mads AVEC BARRIÈRE PROGRESSIVE POUR PROBLÈMES AVEC CONTRAINTES

- INITIALISATION : définir  $\Delta^0 > 0$  le paramètre de sonde, un point de départ  $\mathbf{x}^0$  vérifiant  $h(\mathbf{x}^0) < \infty$  et initialiser le seuil de rejet de la barrière  $h_{max}^0 \leftarrow \infty$  et le compteur d'itérations  $k \leftarrow 0$  ;
- PRÉPARATION DE L'ITÉRATION : calculer le pas du maillage  $\delta^k = \min\{\Delta^k, (\Delta^k)^2\}$  et choisir les solutions courantes  $\mathbf{x}_F^k \in \mathbb{F}^k$  et  $\mathbf{x}_I^k \in \mathbb{I}^k$  selon les équations (2.9) et (2.10) ;
- RECHERCHE GLOBALE : évaluer  $f$  et  $h$  aux points  $S^k \subset M^k$  définis par l'utilisateur ( $S^k = \emptyset$  est autorisé). Si un point  $\mathbf{x} \in S^k$  est dominant ou améliorant, aller à MISE À JOUR ;
- SONDE LOCALE : générer l'ensemble des points de sonde  $P^k$  [18] et évaluer  $f$  et  $h$ . Si un point  $\mathbf{x} \in P^k$  est dominant ou améliorant, aller à MISE À JOUR ;
- MISE À JOUR
  - en fonction du type d'itération, mettre à jour  $\Delta^{k+1}$  et  $h_{max}^{k+1}$  selon les équations (2.11) et (2.12),
  - si aucun critère d'arrêt n'est satisfait, incrémenter  $k \leftarrow k + 1$  et retourner à PRÉPARATION DE L'ITÉRATION.

Figure 2.9 Un algorithme **Mads** avec barrière progressive pour les problèmes avec contraintes.

### Résultats de convergence

Deux hypothèses sont considérées pour l'analyse de convergence de **Mads** [18]. L'hypothèse 1 est relative au point de départ  $\mathbf{x}^0$  tandis que l'hypothèse 2 est relative aux bornes. L'hypothèse 2 est nécessaire car les points générés par l'algorithme peuvent appartenir à un ensemble non borné. Toutefois dans le cas où  $X$ , défini par des contraintes non relaxables,

est borné, alors l'hypothèse 2 découle directement de l'hypothèse 1. L'hypothèse 2 est par ailleurs raisonnable, car les variables sont bornées dans la grande majorité des problèmes d'ingénierie.

**Hypothèse 1.** *Il existe un point de départ  $\mathbf{x}^0$  fourni par l'utilisateur, possiblement non réalisable, mais tel que  $\mathbf{x}^0 \in X$  et  $f(\mathbf{x}^0)$ ,  $h(\mathbf{x}^0)$  sont des valeurs finies.*

**Hypothèse 2.** *Tous les points générés lors du déroulement de l'algorithme appartiennent à un ensemble borné.*

Sous respect des hypothèses 1 et 2, la première étape de l'analyse de convergence de **Mads** consiste à montrer que le maillage devient infiniment fin lorsqu'un nombre infini d'itérations est considéré [20, théorème 8.1]. Il est ensuite possible de montrer l'existence d'au moins une sous-suite raffinante  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  convergeant vers un point raffinant  $\hat{\mathbf{x}}$ . Les définitions requises, adaptées d'un ouvrage de référence [20], sont retranscrites ci-dessous.

**Définition 2.2.5** (Optimiseur local du maillage). *Le point  $\mathbf{x}^k$  est appelé optimiseur local du maillage si, et seulement si, l'étape de recherche et l'étape de sonde autour de  $\mathbf{x}^k$  ont échoué à l'itération  $k$ .*

**Définition 2.2.6** (Sous-suite raffinante, point raffinant et direction raffinante). *Une sous-suite convergente d'optimiseurs locaux  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  (où  $K$  est un ensemble infini d'indices) est dite raffinante si, et seulement si,  $\lim_{k \in K} \delta^k = 0$ . La limite d'une sous-suite raffinante est appelée son point raffinant. Étant donné une sous-suite raffinante  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  et son point raffinant  $\hat{\mathbf{x}}$ , une direction  $\mathbf{p}$  est dite raffinante si, et seulement si, il existe un sous-ensemble infini  $L \subseteq K$  avec des directions de sonde  $\mathbf{p}^k \in \mathbb{D}_\Delta^k$  (introduit à l'équation (2.6)) telles que  $\mathbf{x}^k + \delta^k \mathbf{p}^k \in X$  et  $\lim_{k \in L} \frac{\mathbf{p}^k}{\|\mathbf{p}^k\|} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$ .*

Une hiérarchie des conditions d'optimalité au point  $\hat{\mathbf{x}}$  est énoncée pour **Mads** avec la barrière progressive [18], en fonction de la régularité des sorties de la boîte noire. Ces conditions d'optimalité font appel à la dérivée directionnelle généralisée, également appelée dérivée de Clarke [58], qui peut être considérée comme une généralisation de la dérivée directionnelle dans un contexte non lisse.

**Définition 2.2.7** (Dérivée de Clarke). *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lipschitz près de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . La dérivée de Clarke de  $f$  en  $\mathbf{x}$  dans la direction  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  est définie par :*

$$f^\circ(\mathbf{x}; \mathbf{p}) := \limsup_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}, t \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{y} + t\mathbf{p}) - f(\mathbf{y})}{t}.$$

L'analyse de convergence fait également appel à la notion de cône hypertangent [90] :

**Définition 2.2.8** (Cône hypertangent). *Un vecteur  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  est dit hypertangent à un ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  en un point  $\mathbf{x} \in \Omega$  si, et seulement si, il existe un scalaire  $\epsilon > 0$  tel que :*

$$y + tw \in \Omega \quad \text{pour tout } y \in B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap \Omega, w \in B_\epsilon(\mathbf{p}) \quad \text{et } 0 < t < \epsilon.$$

*L'ensemble des vecteurs hypertangents à  $\Omega$  en  $\mathbf{x}$  est appelé le cône hypertangent à  $\Omega$  en  $\mathbf{x}$  et est noté  $T_\Omega^H(\mathbf{x})$ .*

Les principaux résultats de convergence sont donnés par le théorème 2.2.2 dans le cas d'une sous-suite raffinante réalisable et par le théorème 2.2.3 dans le cas d'une sous-suite raffinante non réalisable. Lorsque des hypothèses supplémentaires sur la régularité des fonctions  $f$  et  $h$  sont considérées, des résultats de convergence supplémentaires [18] impliquant d'autres types de cônes tangents démontrent la convergence en un point stationnaire de Karush–Kuhn–Tucker (abrégé KKT) dans le cône de Bouligand<sup>6</sup> [17].

**Théorème 2.2.2.** *Sous respect des hypothèses 1 et 2, soit  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  une sous-suite raffinante générée par Mads telle que  $\mathbf{x}^k \in \Omega$  et convergeant vers un point raffinant  $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$  près duquel  $f$  est Lipschitz, si  $\mathbf{p} \in T_\Omega^H(\hat{\mathbf{x}})$  est une direction raffinante pour  $\hat{\mathbf{x}}$ , alors :*

$$f^\circ(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{p}) \geq 0.$$

*De plus, si l'ensemble des directions raffinantes pour  $\hat{\mathbf{x}}$  est dense dans  $T_\Omega^H(\hat{\mathbf{x}}) \neq \emptyset$ , alors  $\hat{\mathbf{x}}$  est un point stationnaire de Clarke<sup>7</sup> pour le problème (2.7).*

**Théorème 2.2.3.** *Sous respect des hypothèses 1 et 2, soit  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  une sous-suite raffinante générée par Mads telle que  $\mathbf{x}^k \in X \setminus \Omega$  convergeant vers un point raffinant  $\hat{\mathbf{x}} \in X$  près duquel  $h$  est Lipschitz, si  $\mathbf{p} \in T_X^H(\hat{\mathbf{x}})$  est une direction raffinante pour  $\hat{\mathbf{x}}$ , alors :*

$$h^\circ(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{p}) \geq 0.$$

*De plus, si l'ensemble des directions raffinantes pour  $\hat{\mathbf{x}}$  est dense dans  $T_X^H(\hat{\mathbf{x}}) \neq \emptyset$ ,*

6. Un tel point satisfait  $f'(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \geq 0$  pour toutes les directions  $\mathbf{p}$  dans le cône de Bouligand.

7. Un tel point satisfait  $f^\circ(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{p}) = 0$  pour tout  $\mathbf{p} \in \Omega$ .

alors  $\hat{\mathbf{x}}$  est un point stationnaire de Clarke pour :

$$\min_{\mathbf{x} \in X} h(\mathbf{x}).$$

### 2.3 Algorithme proposé

L'algorithme proposé permet de résoudre le problème d'optimisation de boîtes noires (2.4) en révélant en cours d'optimisation la zone de discontinuités  $D$  afin de formuler explicitement des contraintes visant s'en éloigner. Plus précisément, l'algorithme construit une série d'approximations intérieures de la zone  $M$ , enrichies à mesure que l'algorithme se déploie. L'algorithme est nommé **DiscoMads** car il est fondé sur l'algorithme **Mads** et peut trouver une solution loin des zones de Discontinuités faibles. Quand le paramètre  $r_d$  est nul, la zone de discontinuités  $D$  est vide et le comportement de l'algorithme est identique à celui de **Mads**.

Par rapport à **Mads**, **DiscoMads** inclut deux mécanismes algorithmiques clés : un mécanisme de révélation des discontinuités faibles, utilisé après chaque évaluation, et un mécanisme d'exclusion des zones révélées, pour guider l'algorithme loin de la zone  $D$ . Pour faciliter la compréhension de ces mécanismes, ceux-ci sont d'abord présentés avec la recherche par coordonnées sur un exemple à deux dimensions, dans la section 2.3.1. Les mécanismes sont ensuite détaillés dans les sections 2.3.2 et 2.3.3. Un nouveau type d'itération détaillé dans la section 2.3.4 est également ajouté par rapport à **Mads** ainsi qu'une sonde spécifique, décrite dans la section 2.3.5.

#### 2.3.1 Illustration sur un exemple

Le problème de minimisation  $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} f(\mathbf{x})$  traité dans la section 2.2.1 est considéré, auquel la contrainte d'éloignement des discontinuités est ajoutée. Les premières itérations de Cs, enrichi des deux mécanismes clés, sont illustrées sur la figure 2.10. Les paramètres  $r_d$ ,  $\tau$  et  $r_e$  du problème (2.4) doivent être fournis par l'utilisateur.

L'algorithme débute au point  $\mathbf{x}^0$ , puis le point  $\mathbf{t}^1$  est évalué par la sonde locale de Cs. Afin de vérifier si l'évaluation de  $\mathbf{t}^1$  a permis de révéler une discontinuité, le mécanisme de révélation est utilisé. La boule de rayon  $r_d$  centrée en  $\mathbf{t}^1$  (grisée sur la figure 2.10a) est utilisée comme zone de détection. Pour chaque point précédemment évalué situé dans cette boule, le taux d'accroissement de la fonction  $f$  entre  $\mathbf{t}^1$  et ce point est calculé et comparé au taux

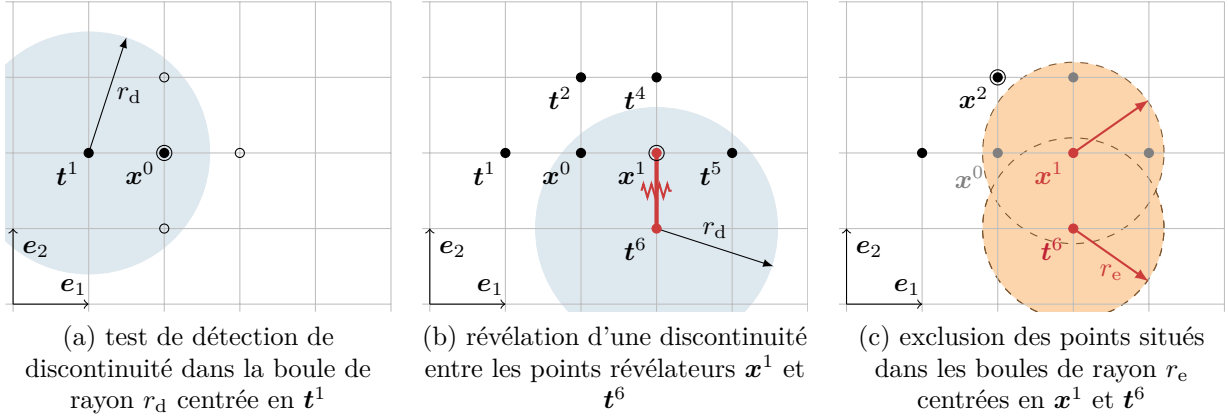


Figure 2.10 Mécanismes algorithmiques principaux de DiscoMads illustrés avec Cs. Centre de sonde ( $\odot$ ), point évalué ( $\bullet$ ), point non évalué ( $\circ$ ), point révélateur ( $\bullet$ ), autre point non réalisable ( $\odot$ ), boule de rayon  $r_d$  ( $\blacksquare$ ), boule de rayon  $r_e$  ( $\square$ ).

d'accroissement limite  $\tau$ . Ici, le seul point précédemment évalué dans la boule est  $x^0$ . Le taux d'accroissement de  $f$  entre les points  $t^1$  et  $x^0$  n'excède pas  $\tau$ , par conséquent l'algorithme Cs se poursuit comme dans la section 2.2.1. Après chaque nouvelle évaluation, le mécanisme de révélation est utilisé. Aucune discontinuité n'est révélée en début d'exécution et l'algorithme se poursuit jusqu'à l'état correspondant à la figure 2.10b. Le point  $t^6$  est alors évalué et le mécanisme de révélation est utilisé entre  $t^6$  et les points  $x^0, x^1$  et  $t^5$  précédemment évalués situés dans la boule de rayon  $r_d$  centrée en  $t^6$ . Le taux d'accroissement de  $f$  entre  $x^1$  et  $t^6$  est supérieur à  $\tau$ , une discontinuité est donc révélée. Les points  $x^1$  et  $t^6$  sont appelés points révélateurs, ils appartiennent nécessairement à  $D$ . L'itération est révélatrice et les évaluations sont stoppées pour cette itération. Le mécanisme d'exclusion est enclenché pour exclure les solutions trop proches de la discontinuité révélée : les points situés dans les boules de rayons  $r_e$  centrées autour de  $x^1$  et  $t^6$  sont désormais considérés comme non réalisables (figure 2.10c). La prochaine itération débute avec une nouvelle solution courante, par exemple  $x^2 = t^2$ , le point ayant la plus faible valeur de  $f$  parmi les points réalisables restants.

### 2.3.2 Mécanisme de révélation des discontinuités

Le mécanisme de révélation s'applique aux sorties  $c_j, j \in J$ , appelées sorties révélatrices, et requiert deux paramètres : le rayon de détection  $r_d \geq 0$  et le taux d'accroissement limite  $\tau > 0$ . Le mécanisme est utilisé après chaque évaluation réussie de la boîte noire en un point  $y \in X$ . Pour chaque point  $z \neq y$  précédemment évalué tel que  $z \in B_{r_d}(y) \cup X$ , le taux

d'accroissement  $\tau_j(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  de chaque sortie révélatrice  $j \in J$  est calculé :

$$\tau_j(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{|c_j(\mathbf{y}) - c_j(\mathbf{z})|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|}. \quad (2.13)$$

Chaque valeur  $\tau_j(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  est comparée au taux d'accroissement limite  $\tau$ . Si  $\tau_j(\mathbf{y}, \mathbf{z}) > \tau$ , alors une discontinuité faible est révélée pour la sortie  $j$  par les points  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ , identifiés comme points révélateurs.

**Définition 2.3.1** (Point révélateur). *Un point  $\mathbf{y} \in V^k$  est dit révélateur pour la sortie  $j \in J$  de la boîte noire si  $\mathbf{y} \in X$  et s'il existe un point  $\mathbf{z} \in V^k \cap X \cap B_{r_d}(\mathbf{y})$  tel que :*

$$|c_j(\mathbf{y}) - c_j(\mathbf{z})| > \tau \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

*La paire de points  $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  est dite révélatrice.*

Soit  $D^k$  l'ensemble des points révélateurs en début d'itération  $k$ , toutes sorties révélatrices confondues :

$$D^k = \left\{ \mathbf{y} \in V^k \cap X : \exists \mathbf{z} \in V^k \cap X \cap B_{r_d}(\mathbf{y}), \exists j \in J, |c_j(\mathbf{y}) - c_j(\mathbf{z})| > \tau \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \right\}. \quad (2.14)$$

Cet ensemble de points révélateurs est construit à partir de la cache  $V^k$  en début d'itération  $k$ . À mesure que de nouveaux points révélateurs sont détectés, de nouvelles informations enrichissent la définition de l'ensemble  $D^k$ . Comme les points révélateurs indiquent la présence de zones de fort accroissement,  $D^k \subseteq D$ , où  $D$  est la zone de discontinuités faibles définie à l'équation (2.2).

### 2.3.3 Mécanisme d'exclusion des zones révélées

Le mécanisme d'exclusion vise à guider DiscoMads vers une solution éloignée d'une distance  $r_e$  de  $D$  et donc de l'ensemble de points révélateurs  $D^k$ . Considérant les informations connues en début d'itération  $k$ , une solution  $\mathbf{x}$  du problème (2.4) qui vérifie la contrainte  $d(\mathbf{x}) \leq 0$  satisfait nécessairement à partir de cette itération, pour tout  $\mathbf{y} \in D^k$  :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq r_e \iff r_e - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq 0 \iff r_e - \text{dist}(\mathbf{x}, D^k) \leq 0, \quad (2.15)$$

où  $\text{dist}(\mathbf{x}, D^k) = \inf_{\mathbf{y} \in D^k} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$  est la distance entre  $\mathbf{x}$  et l'ensemble  $D^k$ . Étant donné cette observation, une fonction  $d^k(\mathbf{x}) : X \rightarrow \mathbb{R}$  est définie pour quantifier l'éloignement d'un point



$\mathbf{x}$  aux points révélateurs contenus dans  $D^k$  à l'itération  $k$  :

$$d^k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - \frac{\text{dist}(\mathbf{x}, D^k)}{r_e} & \text{si } D^k \cap B_{r_e}(\mathbf{x}) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.16)$$

S'il n'existe pas de points révélateurs dans  $B_{r_e}(\mathbf{x})$  à l'itération  $k$ , alors  $d^k(\mathbf{x}) = 0$ , le point  $\mathbf{x}$  n'est pas jugé proche d'une discontinuité à ce stade. En revanche, s'il existe un point révélateur de  $D^k$  dans  $B_{r_e}(\mathbf{x})$ , alors  $\mathbf{x}$  est dans la marge  $M$  et doit être pénalisé :  $d^k(\mathbf{x}) > 0$ . Le terme  $r_e$  au dénominateur permet de normer  $d^k$  tel que  $0 \leq d^k(\mathbf{x}) \leq 1$ . À noter que seul le point  $\mathbf{y} \in D^k \cap B_{r_e}(\mathbf{x})$  le plus proche de  $\mathbf{x}$  intervient dans le calcul de  $d^k(\mathbf{x})$ .

Contrairement aux contraintes  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0$ , qui sont indépendantes de  $k$ , la contrainte  $d^k(\mathbf{x}) \leq 0$  dépend de  $k$  car  $D^k$  peut être enrichi à chaque itération. Par conséquent, le problème traité par DiscoMads peut changer en fonction de l'itération  $k$ . Le problème traité par DiscoMads à l'itération  $k$  peut s'écrire sous la forme :

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega^k} f(\mathbf{x}), \quad (2.17)$$

avec  $\Omega^k = \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0, d^k(\mathbf{x}) \leq 0\}$  le domaine réalisable à l'itération  $k$ . La contrainte  $d^k(\mathbf{x}) \leq 0$  est une contrainte *a priori* [111] : il est possible de vérifier si la contrainte est satisfaite en un point  $\mathbf{x}$  sans évaluation de la boîte noire. Cette contrainte est également relaxable et quantifiable ; elle est traitée avec l'approche de barrière progressive développée pour Mads (voir section 2.2.3). La prise en compte de  $d^k$  requiert une nouvelle définition dépendante de  $k$  de la fonction d'agrégation des contraintes par rapport à Mads. Dans le cadre de DiscoMads, la fonction d'agrégation des contraintes à l'itération  $k$ ,  $h^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , est définie par :

$$h^k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m \max(c_j(\mathbf{x}), 0)^2 + \max(d^k(\mathbf{x}), 0)^2 & \text{si } \mathbf{x} \in X, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.18)$$

La relation de dominance dans DiscoMads est ainsi basée sur les valeurs de  $f$  et  $h^k$  (la fonction  $h$  est remplacée par  $h^k$  dans la définition 2.2.4). Par conséquent, certains ensembles sont redéfinis par rapport à Mads :

- $U^k$  l'ensemble des points non réalisables et non dominés en début d'itération  $k$  ;
- $I^k$  l'ensemble des solutions courantes non réalisables non dominées en début d'itéra-

tion  $k$  :

$$I^k = \arg \min_{\mathbf{x} \in U^k} \{f(\mathbf{x}) : 0 < h^k(\mathbf{x}) < h_{\max}^k\}; \quad (2.19)$$

—  $F^k$  l'ensemble des solutions courantes réalisables en début d'itération  $k$  :

$$F^k = \arg \min_{\mathbf{x} \in V^k} \{f(\mathbf{x}) : h^k(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (2.20)$$

Les ensembles  $F^k$  et  $I^k$  sont utilisés pour le choix du centre de sonde selon les mêmes règles que pour Mads.

### 2.3.4 Itération révélatrice

Si aucun point révélateur n'est détecté à l'itération  $k$ , alors DiscoMads se comporte comme Mads et  $D^{k+1} = D^k$ . En revanche, après l'évaluation d'un point  $\mathbf{y}$  à l'itération  $k$ , si au moins un nouveau point révélateur  $\mathbf{z} \notin D^k$  est détecté, alors une information supplémentaire sur la zone défavorable  $D$  est révélée. Pour prendre en compte cette information, un nouveau type d'itération, nommée révélatrice, est introduit dans DiscoMads en plus des types d'itérations usuels de Mads.

**Mise à jour de l'ensemble de points révélateurs et de la cache.** Les évaluations à l'itération  $k$  sont stoppées de manière opportuniste après l'évaluation de  $\mathbf{z}$  car il n'est pas judicieux de continuer à évaluer des points dans la zone de discontinuités faibles révélée. Soit  $R$  l'ensemble des nouveaux points révélateurs, l'ensemble des points révélateurs  $D^{k+1}$  est mis à jour pour préparer la prochaine itération :

$$D^{k+1} \leftarrow D^k \cup R. \quad (2.21)$$

Soit  $Y$  l'ensemble des points évalués à l'itération  $k$ , la cache en début d'itération  $k + 1$  est également mise à jour :

$$V^{k+1} \leftarrow V^k \cup Y. \quad (2.22)$$

**Mise à jour des contraintes.** Les fonctions  $d^{k+1}$  et  $h^{k+1}$  doivent ensuite être calculées pour tous les points de la cache  $V^{k+1} \cap X$  à partir des équations (2.16) et (2.18). En pratique, seuls les points de la cache situés à distance inférieure à  $r_e$  d'un des nouveaux points révélateurs de  $R$  sont concernés par la mise à jour. Dans un contexte d'optimisation de boîtes noires, le temps de calcul requis par le mécanisme de révélation et la mise à jour éventuelle des contraintes est supposé faible devant le temps d'une évaluation. Quel que soit le type

d'itération,  $D^k \subseteq D^{k+1}$ ; par conséquent, la valeur de la fonction  $d^k$  ne peut pas décroître d'une itération à l'autre. Pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $X$ , l'équation suivante est donc satisfaite :

$$d^{k+1}(\mathbf{x}) \geq d^k(\mathbf{x}) \quad \implies \quad h^{k+1}(\mathbf{x}) \geq h^k(\mathbf{x}). \quad (2.23)$$

L'ensemble  $U^{k+1}$  des points non réalisables non dominés à l'itération  $k+1$  est calculé à partir des valeurs  $h^{k+1}$ ; il peut donc différer de  $U^k$ . Toutefois,  $U^{k+1}$  est non vide car il contient au moins un point révélateur détecté à l'itération  $k$  ( $R \neq \emptyset$ ).

**Mise à jour du seuil de rejet de la barrière progressive.** D'après l'équation (2.23), il est possible qu'après calcul de  $h^{k+1}$ , tous les points de  $V^{k+1}$  excèdent le seuil de rejet de la barrière progressive  $h_{\max}^k$ . Cette situation est problématique, car l'ensemble  $F^{k+1}$  peut être vide à la suite d'une mise à jour de  $d^k$ . Pour continuer l'algorithme à l'itération  $k+1$ , il est donc essentiel de s'assurer que l'ensemble  $I^{k+1}$  est non vide. Par conséquent, le seuil  $h_{\max}^{k+1}$  doit être judicieusement choisi afin de conserver au moins un point sous ce seuil.

Soit  $N(k, h_{\lim})$  le nombre de points non réalisables non dominés à l'itération  $k$  dont la valeur de  $h$  est inférieure à un seuil  $h_{\lim} > 0$  :

$$N(k, h_{\lim}) = \# \{ \mathbf{x} \in U^k : h(\mathbf{x}) \leq h_{\lim} \}, \quad (2.24)$$

où  $\#$  désigne la cardinalité de l'ensemble. Soit  $\bar{\mathbf{x}} \in U^{k+1} \neq \emptyset$  l'unique point non réalisable non dominé tel que :

$$N(k+1, h(\bar{\mathbf{x}})) = \begin{cases} \min(N(k, h_{\max}^k), \# \{U^{k+1}\}) & \text{si } N(k, h_{\max}^k) \neq 0, \\ \# \{U^{k+1}\} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Comme  $U^{k+1} \neq \emptyset$ , alors  $N(k+1, h(\bar{\mathbf{x}})) > 0$ . Le seuil de rejet de la barrière  $h_{\max}^{k+1}$  à l'itération  $k+1$  est fixé tel que :

$$h_{\max}^{k+1} = h^k(\bar{\mathbf{x}}). \quad (2.26)$$

Ce seuil est choisi de façon à conserver si possible le même nombre de points non réalisables non dominés sous le seuil de barrière après la détection d'un point révélateur.

À la fin de l'itération révélatrice, les pas du maillage et de la sonde pour l'itération suivante sont choisis comme suit :

$$\delta^{k+1} = \delta^k \quad \text{et} \quad \Delta^{k+1} = \Delta^k. \quad (2.27)$$

### 2.3.5 Sonde révélatrice de discontinuités

L'étape de sonde de **Mads** est enrichie pour la résolution du problème (2.4). En effet, à mesure que **DiscoMads** converge vers une solution prometteuse à la suite d'itérations ayant mené à des échecs, le paramètre de sonde  $\Delta^k$  diminue. Lorsque  $\Delta^k < r_d + r_e$ , la sonde de **Mads** ne permet plus de détecter des points révélateurs à une distance suffisante des solutions courantes pour satisfaire les résultats de convergence décrits dans la section 2.4. Par conséquent, une sonde additionnelle, dite sonde révélatrice, est définie si  $r_d > 0$ . Dans le cas où  $r_d = 0$ , la zone proscrite  $D$  est vide et il n'y a aucun point à révéler.

Soit  $C^k$  un ensemble contenant la ou les meilleures solutions courantes et défini comme suit :

$$C^k = \begin{cases} \{\mathbf{x}_F\} & \text{où } \mathbf{x}_F \in F^k \quad \text{si } F^k \neq \emptyset, \\ \{\mathbf{x}_I\} & \text{où } \mathbf{x}_I \in I^k \quad \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.28)$$

L'ensemble de points  $P_+^k \subset M^k$  de la sonde révélatrice à l'itération  $k$  contient  $n_{\text{alea}} \geq 1$  point(s) candidat(s) généré(s) aléatoirement dans la boule de rayon  $r_s > r_d + r_e$  centrée en un point de  $\mathbf{x}_c \in C^k$ , puis arrondi(s) sur le maillage  $M^k$ . Lors du déroulement de **DiscoMads**, à chaque étape de sonde, les points de  $P_+^k$  sont évalués avec une stratégie opportuniste avant les points  $P^k$  de la sonde usuelle de **Mads** [18].

### 2.3.6 Algorithme

L'algorithme **DiscoMads** est présenté sur la figure 2.11. Les sorties  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  de la boîte noire relatives à des contraintes relaxables (y compris les contraintes révélatrices) peuvent être traitées sans restriction avec une approche de barrière progressive ou de barrière extrême. Toutefois, un point  $\mathbf{x}$  violant des contraintes de barrière extrême ( $\mathbf{x} \notin X$ ) est rejeté par l'algorithme et traité de la même façon que dans **Mads** [17] (ce traitement n'est pas détaillé sur la figure 2.11 afin de ne pas en alourdir la lecture). Un tel point  $\mathbf{x}$  ne peut donc pas être révélateur de discontinuités.

### DiscoMads : RÉVÉLATION ET EXCLUSION DES ZONES DE DISCONTINUITÉ

- INITIALISATION (étant donné un point initial  $\mathbf{x}^0 \in X$  tel que  $f(\mathbf{x}^0) < \infty$  et  $h(\mathbf{x}^0) < \infty$ ) :
  - définir les paramètres du problème (2.1)  $r_d \geq 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $r_e > 0$  et  $J \subseteq \{0, 1, \dots, m\}$ ,
  - définir les paramètres de la sonde révélatrice  $n_{\text{alea}}$  et  $r_s > r_e + r_d$ ,
  - définir les paramètres usuels de **Mads** et la cache initiale  $V^0 \leftarrow \{\mathbf{x}^0\}$ ,
  - initialiser l'ensemble de points révélateurs  $D^0 = \emptyset$  et le compteur d'itération  $k \leftarrow 0$ ;
- PRÉPARATION DE L'ITÉRATION :
  - générer un ensemble  $S^k \subset M^k$  de points définis par l'utilisateur pour la phase de recherche ( $S^k = \emptyset$  est autorisé),
  - générer l'ensemble  $P_+^k$  des points de sonde révélatrice (section 2.3.5) et l'ensemble  $P^k$  des points de la sonde usuelle de **Mads** [18],
  - préparer la cache  $V^{k+1} \leftarrow V^k$ ;
- ÉVALUATION DES POINTS : pour chaque point  $\mathbf{x} \in S^k \cup P_+^k \cup P^k$  évalué avec succès, si  $\mathbf{x} \in X$  :
  - calculer  $d^k(\mathbf{x})$  selon l'équation (2.16) et  $h^k(\mathbf{x})$  selon l'équation (2.18),
  - mettre à jour la cache  $V^{k+1} \leftarrow V^{k+1} \cup \{\mathbf{x}\}$ ,
  - utiliser le mécanisme de révélation (section 2.3.2) avec la cache  $V^{k+1}$  pour les sorties d'indices  $J$ ,
  - si un nouveau point révélateur est détecté, alors l'itération est révélatrice, aller directement à la MISE À JOUR,
  - si  $\mathbf{x}$  est dominant ou améliorant, l'itération peut s'arrêter de manière opportuniste; aller à la MISE À JOUR;
- MISE À JOUR :
  - si l'itération est révélatrice, préparer l'ensemble  $D^{k+1}$  de points révélateurs pour l'itération suivante selon l'équation (2.21); pour tous les points  $\mathbf{v} \in V^{k+1}$ , mettre à jour  $d^{k+1}(\mathbf{v})$  et  $h^{k+1}(\mathbf{v})$  selon les équations (2.16) et (2.18); mettre à jour le seuil de rejet de la barrière  $h_{\text{max}}^{k+1}$  selon l'équation (2.26) et les paramètres de maillage  $\delta^{k+1}$  et de sonde  $\Delta^{k+1}$  selon l'équation (2.27),
  - sinon, mettre à jour le paramètre de sonde comme dans **Mads** (équation (2.11)) et le seuil de barrière (équation (2.12) en remplaçant  $h$  par  $h^k$ ) et mettre à jour  $D^{k+1} \leftarrow D^k$ ,
  - si aucun critère d'arrêt n'est satisfait,  $k \leftarrow k+1$  et retourner à PRÉPARATION DE L'ITÉRATION.

Figure 2.11 Un algorithme DiscoMads pour révéler et exclure les zones de discontinuités.

## 2.4 Analyse de convergence

L'analyse de convergence de **DiscoMads** vise à fournir des conditions d'optimalité sur la solution renvoyée par l'algorithme en considérant un nombre infini d'itérations. Les hypothèses et propriétés requises à l'analyse sont introduites dans la section 2.4.1. L'analyse proposée suit les mêmes étapes que l'analyse de convergence de **Mads** [17, 18]. Sous respect de certaines hypothèses, il est d'abord montré dans la section 2.4.2 que le maillage devient infiniment fin pour un nombre infini d'itérations. Ceci permet de montrer que l'algorithme produit une suite de points convergeant vers un point  $\hat{\mathbf{x}}$ . Selon la position de la suite et du point  $\hat{\mathbf{x}}$  dans  $X$ , des conditions locales d'optimalité sont énoncées dans la section 2.4.3. La contribution originale de l'analyse réside dans le théorème 2.4.6 qui couvre le cas où  $\hat{\mathbf{x}}$  appartient à la marge  $M$ .

### 2.4.1 Préliminaires

#### Hypothèses

Les sorties de la boîte noire sont générées par des fonctions déterministes de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Le point de départ  $\mathbf{x}^0$  peut être dans la marge  $M$ , mais il doit satisfaire l'hypothèse 1 requise par la barrière progressive. La zone de discontinuités étant inconnue en début d'optimisation ( $D^0 = \emptyset$ ), les quantités  $h^0(\mathbf{x}^0)$  et  $h(\mathbf{x}^0)$  sont égales et l'hypothèse 1 assure donc que  $h^0(\mathbf{x}^0)$  possède une valeur finie. De manière générale, pour tout point  $\mathbf{x} \in X$  et pour toute itération  $k$ , si  $h(\mathbf{x})$  est borné alors  $h^k(\mathbf{x})$  est borné car  $d^k(\mathbf{x}) \leq 1$  d'après l'équation (2.16).

L'hypothèse 2 héritée de **Mads** qui impose que les solutions produites par l'algorithme appartiennent à un ensemble borné est également requise. Enfin, une hypothèse sur la continuité des sorties de la boîte noire est nécessaire à l'analyse de convergence. Une définition enrichie de la continuité par morceaux d'une fonction est introduite pour énoncer l'hypothèse 3.

**Définition 2.4.1** (Fonction continue par morceaux). *La fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite continue par morceaux s'il existe un ensemble fini d'indices  $I \subseteq \mathbb{N}$  et un ensemble fini d'ouverts  $\{X_i\}_{i \in I}$  vérifiant :*

$$\begin{cases} X_i \cap X_j = \emptyset & \forall i \in I, \forall j \in I, j \neq i, \\ \cup_{i \in I} \overline{X}_i = \overline{X}, \\ f|_{X_i} \in \mathcal{C}^0 & \forall i \in I, \end{cases}$$

et si, pour tout  $\mathbf{y} \in X$ , il existe  $i \in I$  tel que :

$$\mathbf{y} \in \overline{X}_i \quad \text{et} \quad f|_{X_i \cup \{\mathbf{y}\}} \in \mathcal{C}^0,$$

où  $\overline{X}$  désigne l'adhérence<sup>8</sup> de  $X$  et  $f|_A$  la restriction de  $f$  à un ensemble  $A$ .

**Hypothèse 3.** Les sorties de la boîte noire sont continues par morceaux sur  $X$ .

### Propriétés

Une expression explicite de la contrainte d'éloignement aux discontinuités du problème (2.1) est donnée sous la même forme que la contrainte  $d^k(\mathbf{x}) \leq 0$  du problème (2.17) résolu par DiscoMads à chaque itération. La fonction  $d : X \rightarrow \mathbb{R}$  indiquant si un point  $\mathbf{x}$  appartient à la marge  $M$  est définie par :

$$d(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - \frac{\text{dist}(\mathbf{x}, D)}{r_e} & \text{si } D \cap B_{r_e}(\mathbf{x}) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.29)$$

Il s'ensuit que  $0 \leq d(\mathbf{x}) \leq 1$  et  $\mathbf{x} \in M \iff d(\mathbf{x}) > 0$ . La fonction d'agrégation des contraintes associée  $\hat{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est définie par :

$$\hat{h}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m \max(c_j(\mathbf{x}), 0)^2 + \max(d(\mathbf{x}), 0)^2 & \text{si } \mathbf{x} \in X, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.30)$$

Ainsi,  $\mathbf{x} \in \hat{\Omega} \iff \hat{h}(\mathbf{x}) = 0$ .

Une propriété de continuité sur les fonctions  $d$  et  $\hat{h}$  et les fonctions associées  $d^k$  et  $h^k$  à l'itération  $k$  est d'abord démontrée, puis la suite  $\{d^k\}$  quand  $k$  tend vers l'infini est caractérisée.

**Propriété 2.4.1** (Continuité de  $d$ ,  $\hat{h}$ ,  $d^k$  et  $h^k$ ).

i)  $d$  est continue sur  $X$  et  $\hat{h}$  est continue sur  $\Omega$  ;

ii)  $d^k$  est continue sur  $X$  et  $h^k$  est continue sur  $\Omega$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* i) Si  $D$  est vide, alors  $d$  est constante donc continue d'après l'équation (2.29). Si  $D$  est non vide, alors  $\text{dist}(\mathbf{x}, D)$  est bien définie et la distance d'un point

8. L'adhérence d'un ensemble  $A$  est le plus petit ensemble fermé contenant  $A$ .

à un ensemble est continue sur  $\mathbb{R}^n$ . Donc  $d$  est continue sur  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Pour  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\hat{h}(\mathbf{x}) = \max(d(\mathbf{x}), 0)^2$ , le maximum de deux fonctions continues, donc  $\hat{h}$  est continue sur  $\Omega$ . ii) La preuve est identique à la partie i) en remplaçant  $D$  par  $D^k$ ,  $d$  par  $d^k$  et  $\hat{h}$  par  $h^k$ .  $\square$

**Propriété 2.4.2** (Caractérisation de la suite  $\{d^k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}}$ ). *Soit un point  $\mathbf{x} \in X$ , la suite  $\{d^k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie quand  $k$  tend vers l'infini.*

*Démonstration.* Soit un point  $\mathbf{x} \in X$ . Si  $D^k$  est vide pour tout  $k$ , alors  $d^k(\mathbf{x}) = 0$  et la suite  $\{d^k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}}$  est convergente. Sinon, il existe un rang  $\bar{k}$  suffisamment grand tel que  $D^{\bar{k}}$  est non vide. Soit  $k \geq \bar{k}$ , par construction la cache à l'itération  $k+1$  contient la cache à l'itération  $k$  :  $V^k \subseteq V^{k+1}$ . Par conséquent  $D^k \subseteq D^{k+1}$  et  $\text{dist}(\mathbf{x}, D^{k+1}) \leq \text{dist}(\mathbf{x}, D^k)$ ; ainsi  $d^{k+1}(\mathbf{x}) \geq d^k(\mathbf{x})$ . La suite  $\{d^k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}}$  est monotone croissante à partir du rang  $\bar{k}$  et bornée supérieurement par 1 par définition de  $d^k$ . Ainsi, la suite  $\{d^k(\mathbf{x})\}_{k \in \mathbb{N}}$  admet une limite finie.  $\square$

Enfin, une autre caractérisation d'un sous-ensemble dense existe sera utile pour l'analyse. Elle est donnée ici sous la forme d'une propriété.

**Propriété 2.4.3** (Sous-ensemble dense). *Si  $S$  est un sous-ensemble dense de  $A$ , alors pour tout  $\mathbf{x} \in A$  il existe une suite  $\{\mathbf{y}^l\}_{l \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $S$  qui converge vers  $\mathbf{x}$ .*

## 2.4.2 Maillage infiniment fin

La première étape de l'analyse consiste à montrer que le maillage devient infiniment fin lorsqu'un nombre infini d'itérations est considéré (théorème 2.4.1). La preuve est très similaire à celle de Mads mais doit prendre en compte la sonde révélatrice.

**Théorème 2.4.1.** *La suite  $\{\delta^k\}$  de paramètres de maillage générés par DiscoMads sur un problème vérifiant les hypothèses 1 et 2 satisfait :*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \delta^k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta^k = 0.$$



*Démonstration.* La démonstration est faite par l'absurde ; on suppose qu'il existe une borne inférieure  $\delta_{\min}$  sur la taille de maillage telle que  $0 < \delta_{\min} \leq \delta^k$  pour tout  $k \geq 0$ . D'après l'hypothèse 2, tous les itérés appartiennent à un ensemble borné, en considérant la fermeture de cet ensemble, il s'ensuit que tous les itérés appartiennent à un ensemble compact. Par ailleurs, il est montré ([16, proposition 3.4] ou [20, proposition 7.4])<sup>9</sup> que tous les itérés générés par DiscoMads appartiennent à un maillage de taille  $\delta^m$ . Or, l'intersection d'un compact et d'un maillage est finie. Il y a donc seulement un nombre fini  $n_{\text{it}} \in \mathbb{N}$  d'itérés générés par l'algorithme et l'un d'entre eux, noté  $\mathbf{x}$ , doit donc être visité un nombre infini de fois.

Par conséquent, il existe un rang  $\bar{k} \in \mathbb{N}$  au-delà duquel tous les itérés dans  $B_{r_d}(\mathbf{x})$  ont été générés par la sonde révélatrice. Ainsi, pour les évaluations  $k \geq \bar{k}$ , l'évaluation de  $\mathbf{x}$  ne peut mener à une itération révélatrice. Le point  $\mathbf{x}$  peut donc être visité un nombre infini de fois seulement s'il y a un nombre infini d'échecs (car dans ce cas  $\mathbf{x}$  reste le centre de sonde). D'après les règles de mise à jour de Mads (algorithme 2.9), cela implique que la taille de maillage est réduite un nombre infini de fois, ce qui contredit l'hypothèse d'une borne inférieure  $\delta_{\min}$  sur la taille de maillage. Il en découle :  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \delta^k = 0$ . Enfin, comme  $\delta^k = \min(\Delta^k, (\Delta^k)^2)$ , il s'ensuit que  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Delta^k = 0$ .  $\square$

### 2.4.3 Analyse du point raffinant

Sous respect des hypothèses 1 et 2 et en utilisant le théorème 2.4.1, il est montré qu'il existe au moins une sous-suite raffinante  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  convergeant vers un point raffinant  $\hat{\mathbf{x}}$  (preuve identique à celle de GPS [16, théorème 3.6]). En fonction de la position de la sous-suite raffinante et du point raffinant dans  $X$ , différentes conditions d'optimalité sont obtenues. Les cas couverts par l'analyse de convergence sont résumés dans le tableau 2.1.

Pour les cas où la suite raffinante n'appartient pas à la marge  $M$ , les résultats de convergence de Mads sont préservés avec des preuves similaires, car  $h^k = \hat{h} = h$  hors de la marge  $M$ . Les théorèmes 2.4.2 et 2.4.3 couvrant ces cas sont présentés respectivement dans les sections 2.4.3.1 et 2.4.3.2. La sonde révélatrice n'est pas exploitée dans les preuves.

Pour les cas relatifs à la marge  $M$ , seule la quantité  $h^k$  peut être calculée à chaque itération. Pour énoncer un résultat de convergence portant sur  $\hat{h}$ , la sonde révélatrice et l'hypothèse 3 sont alors requises. La prise en compte de ces deux éléments permet d'obtenir une condition d'optimalité (théorème 2.4.6) plus forte que celles de Mads. Le théorème 2.4.6 peut égale-

9. Ces propositions concernent l'algorithme GPS et sont valables pour Mads et DiscoMads.

Tableau 2.1 Cas couverts par l'analyse de convergence de DiscoMads.

cas		couvert par	hypothèses requis	résultat sur
$\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$	$\hat{\mathbf{x}}$			
$\hat{\Omega}$	$\hat{\Omega}$	théorème 2.4.2	1, 2	$f$
$X \setminus M$	$\hat{\Omega}$	section 2.4.3.2 (premières lignes)	1, 2	$\hat{h}$
	$X \setminus M$	théorème 2.4.3	1, 2	$\hat{h}$
		théorème 2.4.6	1, 2, 3	$\hat{h}$
	$M$	$M$	théorème 2.4.3	1, 2
théorème 2.4.6			1, 2, 3	$\hat{h}$
$M$	$\hat{\Omega}$	section 2.4.3.2 (premières lignes)	1, 2	$\hat{h}$
	$X \setminus M$	théorème 2.4.6	1, 2, 3	$\hat{h}$
	$M$	théorème 2.4.6	1, 2, 3	$\hat{h}$

ment être appliqué aux sous-suites raffinantes contenues dans  $X \setminus M$ . Il est présenté dans la section 2.4.3.3 et constitue la contribution originale liée à DiscoMads en matière d'analyse de convergence.

### 2.4.3.1 Sous-suite réalisable : résultat sur $f$ fondé sur Mads

Le résultat énoncé dans cette section est similaire au théorème 3.3 de l'article fondateur de Mads [17]; la preuve ne repose pas sur la sonde révélatrice de DiscoMads.

**Théorème 2.4.2.** *Sous respect des hypothèses 1 et 2, soit  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  une sous-suite raffinante générée par DiscoMads telle que  $\mathbf{x}^k \in \hat{\Omega}$  et convergeant vers un point raffinant  $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$  près duquel  $f$  est Lipschitz, si  $\mathbf{p} \in T_{\hat{\Omega}}^H(\hat{\mathbf{x}})$  est une direction raffinante pour  $\hat{\mathbf{x}}$ , alors :*

$$f^\circ(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{p}) \geq 0.$$

*De plus, si l'ensemble des directions raffinantes pour  $\hat{\mathbf{x}}$  est dense dans  $T_{\hat{\Omega}}^H(\hat{\mathbf{x}}) \neq \emptyset$ , alors  $\hat{\mathbf{x}}$  est un point stationnaire de Clarke pour le problème (2.4).*

*Démonstration.* Comme les points  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  sont contenus dans  $\hat{\Omega}$ , alors  $d^k(\mathbf{x}^k) = 0$  et  $h^k(\mathbf{x}^k) = 0$  pour tout  $k \in K$  car  $d^k$  ne peut être modifiée par la connaissance de nouveaux points révélateurs. Par conséquent, le théorème 2.2.2 relatif à Mads s'applique pour cette sous-suite raffinante et le théorème 2.4.2 est immédiatement démontré.  $\square$

Il est à noter que si toutes les sorties de la boîtes noires sont révélatrices ( $J = \{0, 1, \dots, m\}$ ),

alors si  $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{\Omega}$ , la fonction  $f$  est nécessairement Lipschitz près de  $\hat{\mathbf{x}}$  par définition de  $\hat{\Omega}$ .

### 2.4.3.2 Sous-suite non réalisable : résultat sur $\hat{h}$ fondé sur Mads

La fonction  $\hat{h}$  à la limite  $\hat{\mathbf{x}}$  d'une sous-suite raffinante non réalisable est étudiée. Dans le cas où  $\hat{h}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ , alors  $\hat{\mathbf{x}}$  est un minimum global de  $\hat{h}$  sur  $X$  et donc le domaine réalisable  $\hat{\Omega}$  est non vide. Sinon,  $\hat{\mathbf{x}}$  satisfait certaines conditions nécessaires pour être un minimum local de  $\hat{h}$ . Le théorème 2.4.3 couvre le cas où la sous-suite raffinante appartient à  $X \setminus M$ .

**Théorème 2.4.3.** *Sous respect des hypothèses 1 et 2, soit  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  une sous-suite raffinante de points  $\mathbf{x}^k \in X \setminus M$  convergeant vers un point raffinant  $\hat{\mathbf{x}} \in X$  près duquel  $\hat{h}$  est Lipschitz. Si  $\mathbf{p} \in T_X^H(\hat{\mathbf{x}})$  est une direction raffinante pour  $\hat{\mathbf{x}}$ , alors :*

$$\hat{h}^\circ(\hat{\mathbf{x}}; \mathbf{p}) \geq 0.$$

*De plus, si l'ensemble des directions raffinantes pour  $\hat{\mathbf{x}}$  est dense dans  $T_X^H(\hat{\mathbf{x}}) \neq \emptyset$ , alors  $\hat{\mathbf{x}}$  est un point stationnaire de Clarke pour :*

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \hat{h}(\mathbf{x}). \quad (2.31)$$

*Démonstration.* Pour tous les itérés de la sous-suite raffinante  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$ ,  $d^k(\mathbf{x}^k) = 0$  par définition de  $d^k$  (équation (2.16)). La contribution de  $d^k$  est donc nulle dans le calcul de  $h^k(\mathbf{x}^k)$  et donc  $h^k(\mathbf{x}^k) = \hat{h}(\mathbf{x}^k) = h(\mathbf{x}^k)$ . Le théorème 2.2.3 relatif à Mads est alors valide et le théorème 2.4.3 en découle immédiatement.  $\square$

### 2.4.3.3 Sous-suite non réalisable : résultat sur $\hat{h}$ s'appuyant sur la sonde révélatrice

Avec des hypothèses additionnelles et en utilisant la sonde révélatrice, un résultat de convergence plus fort sur  $\hat{h}$  est énoncé dans le théorème 2.4.6. Pour faciliter sa démonstration, le lemme 2.4.4 est d'abord énoncé et prouve que la sonde révélatrice génère un sous-ensemble dense de points au voisinage du point raffinant  $\hat{\mathbf{x}}$ .

**Lemme 2.4.4.** *Sous respect des hypothèses 1 et 2, si  $\hat{\mathbf{x}}$  est le point raffinant d'une sous-suite raffinante  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$ , alors la sonde révélatrice génère un sous-ensemble dense de*

points candidats dans  $B_{r_s}(\hat{\mathbf{x}})$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{y}$  appartenant à la boule ouverte  $B_{r_s}(\hat{\mathbf{x}})$  et  $\epsilon_1 > 0$ ; il suffit de montrer que la sonde révélatrice autour d'un itéré  $\mathbf{x}^k$  génère un point  $\mathbf{z}^k \in B_{\epsilon_1}(\mathbf{y})$ . Soit  $\epsilon = \min\left(\frac{r_s - \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}\|}{2}, \epsilon_1\right)$  une quantité strictement positive. Comme  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  est une sous-suite raffinante, par définition  $\lim_{k \in K} \delta^k = 0$ . Par conséquent, il existe un pas de maillage  $\delta' > 0$  vérifiant :

$$\text{arrondi}(\mathbf{u}) \in B_\epsilon(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{u} \in B_{\epsilon/2}(\mathbf{y}), \forall \delta < \delta', \quad (2.32)$$

où  $\text{arrondi}(\mathbf{u})$  est l'arrondi de  $\mathbf{u}$  sur le maillage de pas  $\delta$ .

Il existe un nombre d'itérations  $\bar{k}$  suffisamment grand tel que  $\delta^k < \delta'$  et  $\mathbf{x}^k \in B_\epsilon(\hat{\mathbf{x}})$  pour tout  $k \in K$  tel que  $k \geq \bar{k}$ . Ainsi, pour tout  $k \in K$  vérifiant  $k \geq \bar{k}$  et pour  $\mathbf{v} \in B_\epsilon(\mathbf{y})$ , l'équation suivante est satisfaite :

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{x}^k\| \leq \underbrace{\|\mathbf{v} - \mathbf{y}\|}_{< \epsilon} + \underbrace{\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{x}}\|}_{\substack{< r_s - 2\epsilon \\ \text{par définition de } \epsilon}} + \underbrace{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^k\|}_{< \epsilon} < r_s. \quad (2.33)$$

Par conséquent,  $B_\epsilon(\mathbf{y}) \subset B_{r_s}(\mathbf{x}^k)$ . La probabilité que la sonde révélatrice autour de  $\mathbf{x}^k$  génère un point aléatoire (avant arrondi) dans  $B_{\epsilon/2}(\mathbf{y})$  est donné par la constante strictement positive :

$$\frac{\text{vol}(B_{\epsilon/2}(\mathbf{y}))}{\text{vol}(B_{r_s}(\mathbf{x}^k))} > 0, \quad (2.34)$$

où  $\text{vol}(\bullet)$  désigne le volume. Par conséquent, il existe un indice  $k \in K$  pour lequel un point aléatoire  $\mathbf{u}^k$  généré par la sonde révélatrice autour de  $\mathbf{x}^k$  appartient à  $B_{\epsilon/2}(\mathbf{y})$ . De l'équation (2.32), le point candidat  $\mathbf{z}^k = \text{arrondi}(\mathbf{u}^k)$  appartient nécessairement à  $B_\epsilon(\mathbf{y})$ . Or  $\epsilon < \epsilon_1$  par définition, donc  $B_\epsilon(\mathbf{y})$  est incluse dans  $B_{\epsilon_1}(\mathbf{y})$ . Il existe donc un point candidat  $\mathbf{z}^k \in B_{\epsilon_1}(\mathbf{y})$ .  $\square$

Le lemme 2.4.5 établit ensuite un lien entre  $h^k$  et  $\hat{h}$  grâce à la sonde révélatrice. La quantité  $\Delta r = r_s - r_e - r_d > 0$  est introduite.

**Lemme 2.4.5.** *Sous respect des hypothèses 1, 2 et 3 et soit une sous-suite raffinante  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  générée par DiscoMads convergeant en un point raffinant  $\hat{\mathbf{x}} \in X$ , si  $\mathbf{y} \in X \cap B_{\Delta r}(\hat{\mathbf{x}})$  alors :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h^k(\mathbf{y}) = \hat{h}(\mathbf{y}).$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{y}$  un point tel que  $\mathbf{y} \in X \cap B_{\Delta r}(\hat{\mathbf{x}})$ . Trois cas peuvent survenir : i)  $\mathbf{y} \in D$ , ii)  $\mathbf{y} \in M \setminus D$  et iii)  $\mathbf{y} \in X \setminus M$ . Si  $r_d = 0$ , alors  $D = M = \emptyset$  et seul le cas iii) est possible.

i) Soit  $\mathbf{y} \in D$ , alors il existe au moins une sortie de la boîte noire  $c_j$ ,  $j \in J$  et un point  $\mathbf{z} \in X \cap B_{r_d}(\mathbf{y})$  satisfaisant  $\frac{|c_j(\mathbf{y}) - c_j(\mathbf{z})|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|} > \tau$ . D'après l'hypothèse 3,  $c_j$  est continue par morceaux sur  $X$ , donc il existe un ouvert  $X_{\mathbf{y}} \subseteq X$  tel que  $\mathbf{y} \in \overline{X_{\mathbf{y}}}$  et  $c_j$  continue sur  $X_{\mathbf{y}} \cup \{\mathbf{y}\}$ . D'après le lemme 2.4.4, un sous-ensemble dense  $S$  de points candidats est généré par la sonde révélatrice dans  $B_{r_s}(\hat{\mathbf{x}})$ . Comme  $X_{\mathbf{y}} \cap B_{r_s}(\hat{\mathbf{x}})$  est un ensemble ouvert non vide de  $B_{r_s}(\hat{\mathbf{x}})$ , alors  $S \cap X_{\mathbf{y}}$  est dense dans  $X_{\mathbf{y}} \cap B_{r_s}(\hat{\mathbf{x}})$ . D'après la propriété 2.4.3 sur les sous-ensembles denses, il est alors possible de construire une suite de points  $\{\mathbf{y}^k\}_{k \in L} \in S \cap X_{\mathbf{y}}$  convergeant vers  $\mathbf{y}$  :

$$\lim_{k \in L} \mathbf{y}^k = \mathbf{y}, \quad (2.35)$$

où  $L \subseteq K$ .

D'après l'hypothèse 3, il existe également un ouvert  $X_z \subseteq X$  tel que  $\mathbf{z} \in \overline{X_z}$  et  $c_j$  est continue sur  $X_z \cup \{\mathbf{z}\}$ . De plus  $\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\| < \Delta r$  et  $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| < r_d$ , donc  $\mathbf{z} \in B_{r_s}(\hat{\mathbf{x}})$ . Comme l'ensemble  $S$  est dense sur  $B_{r_s}(\hat{\mathbf{x}})$ , il est possible de construire une suite de points  $\{\mathbf{z}^k\}_{k \in L'} \in S \cap X_z$  convergeant vers  $\mathbf{z}$  :

$$\lim_{k \in L'} \mathbf{z}^k = \mathbf{z}, \quad (2.36)$$

où  $L' \subseteq L$ .

Par continuité de  $c_j$  sur  $X_{\mathbf{y}}$  et  $X_z$ , l'équation suivante est satisfaite :

$$\lim_{k \in L'} \frac{|c_j(\mathbf{y}^k) - c_j(\mathbf{z}^k)|}{\|\mathbf{y}^k - \mathbf{z}^k\|} = \frac{|c_j(\mathbf{y}) - c_j(\mathbf{z})|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|} > \tau. \quad (2.37)$$

Par conséquent, il existe un rang  $k \in L'$  à partir duquel la paire de points  $(\mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)$  est révélatrice pour la sortie  $c_j$ . Ceci implique que  $d^k(\mathbf{y}^k) = 1$  pour un rang  $k \in L'$  suffisamment grand.

D'après la propriété 2.4.1,  $d^k$  est continue sur  $X$ , donc :

$$\lim_{k \in L'} d^k(\mathbf{y}^k) = \lim_{k \in L'} d^k(\mathbf{y}). \quad (2.38)$$

Puisque la suite  $\{d^k(\mathbf{y})\}_{k \in \mathbb{N}}$  possède une limite finie (propriété 2.4.2), toute sous-

suite tend vers la même limite :

$$\lim_{k \in L'} d^k(\mathbf{y}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d^k(\mathbf{y}). \quad (2.39)$$

D'après les équations (2.38) et (2.39), il s'ensuit que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d^k(\mathbf{y}) = \lim_{k \in L'} d^k(\mathbf{y}^k) = 1 = d(\mathbf{y})$ .

ii) Soit  $\mathbf{y} \in M \setminus D$ , alors il existe un point  $\mathbf{z} \in D$  tel que  $\text{dist}(\mathbf{y}, D) = \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$  et  $\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| < r_e$ . Comme  $\mathbf{z} \in D$ , il existe nécessairement un point  $\mathbf{z}'$  de  $X \cup B_{r_d}(\mathbf{z})$  et une sortie  $c_j$  de la boîte noire telle que la paire de points  $(\mathbf{z}, \mathbf{z}')$  est révélatrice pour  $c_j$ . Comme les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}\| \leq \underbrace{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|}_{< \Delta r} + \underbrace{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|}_{< r_e} < r_s \quad \text{et} \quad \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}'\| \leq \underbrace{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}\|}_{< \Delta r + r_e} + \underbrace{\|\mathbf{z} - \mathbf{z}'\|}_{< r_d} < r_s, \quad (2.40)$$

alors  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{z}'$  appartiennent à  $B_{r_s}(\hat{\mathbf{x}})$ . Par conséquent, il est possible de construire des suites de points  $\{\mathbf{z}^k\}_{k \in L \subseteq K}$  et  $\{\mathbf{z}'^k\}_{k \in L' \subseteq L}$  convergeant respectivement vers  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{z}'$ , de la même façon que pour le cas *i*). Il existe un rang  $k \in L'$  suffisamment grand tel que la paire de points  $(\mathbf{z}^k, \mathbf{z}'^k)$  est révélatrice pour la sortie  $c_j$ . Pour un tel rang,  $D^k$  est donc non vide et la distance  $\text{dist}(\mathbf{y}, D^k)$  est bien définie. Comme  $D^k \subset D$  et  $\mathbf{z}^k \in D^k$ , l'équation suivante est vérifiée pour tout  $k \in L'$  :

$$\text{dist}(\mathbf{y}, D) \leq \text{dist}(\mathbf{y}, D^k) \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{z}^k\|. \quad (2.41)$$

La distance d'un point à un ensemble étant continue, la limite de cette inégalité peut être considérée :

$$\text{dist}(\mathbf{y}, D) \leq \lim_{k \in L'} \text{dist}(\mathbf{y}, D^k) \leq \underbrace{\lim_{k \in L'} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}^k\|}_{\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = \text{dist}(\mathbf{y}, D)}. \quad (2.42)$$

Il en résulte que  $\lim_{k \in L'} \text{dist}(\mathbf{y}, D^k) = \text{dist}(\mathbf{y}, D)$ . Par conséquent par définition de  $d$  et  $d^k$  :

$$\lim_{k \in L'} d^k(\mathbf{y}) = d(\mathbf{y}). \quad (2.43)$$

D'après la propriété 2.4.2,  $\{d^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente. Toute sous-suite d'une suite convergente tend vers la même limite, donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d^k(\mathbf{y}) = d(\mathbf{y}). \quad (2.44)$$

iii) Soit  $\mathbf{y} \in X \setminus M$ , alors  $d(\mathbf{y}) = 0$ . Or, pour tout rang  $k$  et pour tout  $\mathbf{x} \in X$ ,  $0 \leq d^k(\mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x})$ , donc  $d^k(\mathbf{y}) = 0$ . Par conséquent,  $\lim_{k \rightarrow \infty} d^k(\mathbf{y}) = d(\mathbf{y})$ .

Dans tous les cas,  $\lim_{k \rightarrow \infty} d^k(\mathbf{y}) = d(\mathbf{y})$ . Or  $h^k(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^m \max(c_j(\mathbf{y}), 0)^2 + \max(d^k(\mathbf{y}), 0)^2$ , par conséquent :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h^k(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^m \max(c_j(\mathbf{y}), 0)^2 + \max(d(\mathbf{y}), 0)^2 = \hat{h}(\mathbf{y}). \quad (2.45)$$

□

Enfin, le théorème 2.4.6 couvre le cas d'une sous-suite raffinante appartenant à  $M$ . Ce théorème nécessite que  $\hat{h}$  soit continue par morceaux près de  $\hat{\mathbf{x}}$ . Si  $\mathbf{x} \in \Omega$  cette hypothèse est immédiatement vérifiée d'après la propriété 2.4.1. Le théorème établit la convergence de DiscoMads en un minimum local de  $\hat{h}$  sur  $X$ ; cette condition d'optimalité est plus forte que celles obtenues pour Mads, mettant en jeu un point stationnaire de KKT dans le cône de Bouligand [18]. Cette condition d'optimalité plus forte est obtenue en tirant profit de la sonde révélatrice et de l'hypothèse 3 de continuité par morceaux. Pour faciliter la lecture de la preuve, un schéma est fourni sur la figure 2.12.

**Théorème 2.4.6.** *Sous respect des hypothèses 1,2,3, soit  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  une sous-suite raffinante générée par DiscoMads convergeant vers  $\hat{\mathbf{x}} \in X$  près duquel  $\hat{h}$  est continue par morceaux, alors  $\hat{\mathbf{x}}$  est un minimum local de  $\hat{h}$  sur  $X$ .*

*Démonstration.* Soit  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  une sous-suite raffinante convergeant vers  $\hat{\mathbf{x}} \in X$ . La démonstration est faite par l'absurde; on suppose que  $\hat{\mathbf{x}}$  n'est pas un minimum local de  $\hat{h}$  sur  $X$ . Il existe donc  $\mathbf{z}$  près de  $\hat{\mathbf{x}}$  tel que  $\mathbf{z} \in B_{\Delta r}(\hat{\mathbf{x}}) \cap X$  et :

$$\hat{h}(\hat{\mathbf{x}}) > \hat{h}(\mathbf{z}). \quad (2.46)$$

Comme  $\hat{h}$  est continue par morceaux près de  $\hat{\mathbf{x}}$ , d'après la définition 2.4.1, il existe deux ensembles ouverts  $X_{\hat{\mathbf{x}}}$  et  $X_{\mathbf{z}}$  tels que :  $\hat{\mathbf{x}} \in \overline{X_{\hat{\mathbf{x}}}}$ ,  $\mathbf{z} \in \overline{X_{\mathbf{z}}}$  et  $\hat{h}$  continue sur  $\{\hat{\mathbf{x}}\} \cup \overline{X_{\hat{\mathbf{x}}}}$  et sur  $\{\mathbf{z}\} \cup \overline{X_{\mathbf{z}}}$ . Les points  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\mathbf{z}$  (o) et les morceaux  $X_{\hat{\mathbf{x}}}$  et  $X_{\mathbf{z}}$  (□) sont représentés sur la figure 2.12.

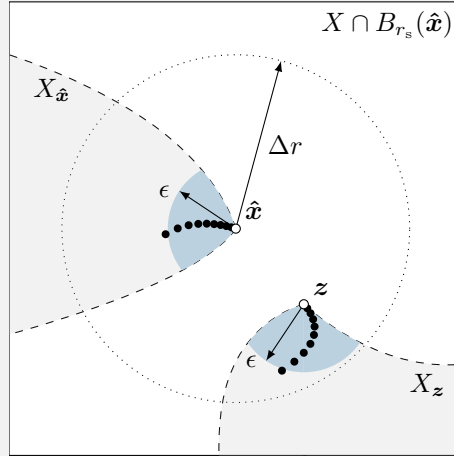


Figure 2.12 Illustration de la preuve du théorème 2.4.6 : morceaux  $X_{\hat{x}}$  et  $X_z$  (□), suites de points  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in L}$  et  $\{\mathbf{z}^k\}_{k \in L'}$  (•) convergeant respectivement vers  $\hat{x}$  et  $z$  (o).  $B_\epsilon(\hat{x}) \cap X_{\hat{x}}$  et  $B_\epsilon(z) \cap X_z$  (■).

De par la continuité par morceaux de  $\hat{h}$  et d'après l'équation (2.46), il existe un couple  $\epsilon > 0$  et  $\delta > 0$  tels que :

$$\hat{h}(a) > \hat{h}(b) + \delta \quad \forall a \in B_\epsilon(\hat{x}) \cap X_{\hat{x}}, \forall b \in B_\epsilon(z) \cap X_z. \quad (2.47)$$

Comme  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in K}$  converge vers  $\hat{x}$ , d'après le lemme 2.4.4, un ensemble dense  $S$  de points est généré par la sonde révélatrice dans  $B_{r_s}(\hat{x})$ . Puisque l'ensemble  $X_{\hat{x}} \cap B_{r_s}(\hat{x})$  est un ensemble ouvert non vide inclus dans  $B_{r_s}(\hat{x})$ , une infinité de points sont générés par l'algorithme dans  $X_{\hat{x}}$ . D'après la propriété 2.4.3 sur les sous-ensembles denses, il existe une sous-suite raffinante  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in L}$  dans  $S \cap X_{\hat{x}}$  convergeant vers  $\hat{x}$  :

$$\lim_{k \in L} \mathbf{x}^k = \hat{x}. \quad (2.48)$$

Comme  $z \in (B_{\Delta r}(\hat{x}) \cap X) \subset (B_{r_s}(\hat{x}) \cap X)$ , il est possible de construire de la même façon une suite de points  $\{\mathbf{z}^k\}_{k \in L' \subseteq L}$  dans  $S \cap X_z$  convergeant vers  $z$  :

$$\lim_{k \in L'} \mathbf{z}^k = z. \quad (2.49)$$

Les suites  $\{\mathbf{x}^k\}_{k \in L}$  et  $\{\mathbf{z}^k\}_{k \in L' \subseteq L}$  sont visibles (•) sur la figure 2.12.

Il existe un rang  $k$  suffisamment grand tel que  $\mathbf{x}^k \in B_\epsilon(\hat{x}) \cap X_{\hat{x}}$ ,  $\mathbf{z}^k \in B_\epsilon(z) \cap X_z$  (■).

En appliquant le lemme 2.4.5 et par définition de la limite, les inégalités suivantes sont



satisfaites :

$$\hat{h}(\mathbf{x}^k) - \frac{\delta}{2} < h^k(\mathbf{x}^k) < \hat{h}(\mathbf{x}^k) + \frac{\delta}{2}, \quad (2.50)$$

$$\hat{h}(\mathbf{z}^k) - \frac{\delta}{2} < h^k(\mathbf{z}^k) < \hat{h}(\mathbf{z}^k) + \frac{\delta}{2}. \quad (2.51)$$

Pour un tel rang  $k$ , il s'ensuit :

$$\begin{aligned} h^k(\mathbf{x}^k) &> \hat{h}(\mathbf{x}^k) - \frac{\delta}{2} && \text{d'après l'inégalité (2.50),} \\ &> \hat{h}(\mathbf{z}^k) + \delta - \frac{\delta}{2} && \text{d'après l'inégalité (2.47),} \\ &= \hat{h}(\mathbf{z}^k) + \frac{\delta}{2} \\ &> h^k(\mathbf{z}^k) && \text{d'après l'inégalité (2.51).} \end{aligned}$$

Ainsi,  $h^k(\mathbf{x}^k) > h^k(\mathbf{z}^k)$ , donc  $\mathbf{x}^k$  n'est pas un optimiseur local du maillage à l'itération  $k$ , ce qui contredit le fait que  $\mathbf{x}^k \in \{\mathbf{x}^k\}_{k \in L}$  est une sous-suite raffinante. Par conséquent,  $\hat{\mathbf{x}}$  est un minimum local de  $\hat{h}$  sur  $X$ .  $\square$

## 2.5 Résultats numériques

DiscoMads est implémenté avec NOMAD 3.9.1 [112], l'implémentation ouverte de Mads. Le choix des paramètres relatifs à NOMAD et de ceux spécifiques à DiscoMads est décrit dans la section 2.5.1. Le comportement de DiscoMads est d'abord validé dans la section 2.5.2 sur dix problèmes en deux dimensions dont les expressions de la fonction objectif et des contraintes sont connues analytiquement. Les performances et la flexibilité de l'algorithme sont ensuite validées sur deux problèmes de conception de systèmes non linéaires issus de la littérature. Ces problèmes, faisant appel à une simulation numérique pour calculer la fonction objectif et les contraintes, sont représentatifs de problèmes d'optimisation de boîtes noires. La conception d'un treillis à deux barres est considérée dans la section 2.5.3, puis l'optimisation d'un processus de production de styrène est considérée dans la section 2.5.4. Pour ce dernier problème, DiscoMads est utilisé pour trouver des solutions loin des zones de contraintes cachées. À la connaissance de l'auteure, ce type de problème n'a jamais été traité dans la littérature.

### 2.5.1 Choix de paramètres

#### Paramètres de NOMAD

Sauf mention contraire, les paramètres par défaut de NOMAD sont utilisés. En particulier, les critères d'arrêt sont un budget d'évaluations et une taille de maillage minimale  $\delta_{\min}$ . Le premier critère atteint arrête l'exécution de l'algorithme. Le maillage anisotrope [27] est désactivé pour faciliter le calcul des distances avec DiscoMads. Les modèles quadratiques [61], utilisés par défaut dans NOMAD, sont considérés peu appropriés pour la représentation de fonctions discontinues et sont donc désactivés. Pour l'étape de recherche globale, seule la recherche spéculative [17], utilisée par défaut dans NOMAD 3.9.1, est utilisée. Il s'agit d'une recherche exécutée après une itération dominante ou améliorante visant à évaluer un unique point dans la direction de recherche correspondant au précédent succès. La stratégie opportuniste est employée pour l'étape de recherche globale et l'étape de sonde.

#### Paramètres spécifiques à DiscoMads

DiscoMads requiert cinq paramètres : les paramètres  $r_d$ ,  $\tau$  et  $r_e$ , relatifs à la définition du problème (2.1), et les paramètres  $r_s$  et  $n_{\text{alea}}$ , relatifs à la sonde révélatrice. Les paramètres  $r_d$ ,  $\tau$  et  $r_e$  sont considérés avec différents statuts. Les quantités  $r_d$  et  $\tau$  caractérisent numériquement la zone  $D$  de discontinuités faibles et résultent de choix de modélisation. Ils sont fixés par l'utilisateur à partir de sa connaissance de la dynamique du système, comme pour les méthodes visant à détecter les discontinuités [46, 51]. Un exemple de valeurs de  $r_d$  et  $\tau$  est donné pour chaque problème présenté dans cette section. De plus, quelques recommandations sur le choix de ces valeurs sont fournies, considérant une unique sortie révélatrice  $c_j$  :

- dans le cas où une solution éloignée des discontinuités est recherchée, si une estimation de la constante de Lipschitz est connue, alors celle-ci peut être utilisée comme valeur de  $\tau$ . Une valeur de  $r_d$  suffisamment grande permet alors une détection plus rapide des points révélateurs lors d'une exécution de Mads. Si une approximation  $\Delta c_j$  de l'amplitude des « sauts » relatifs aux discontinuités est connue, alors  $\tau$  peut être choisi comme  $\frac{\Delta c_j}{r_d}$ . Dans les autres cas, l'utilisateur doit avoir une connaissance des amplitudes de  $c_j$ . Une valeur par défaut peut alors être choisie pour  $r_d$  (par exemple  $r_d = 1$  quand les variables  $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$  sont normalisées entre 0 et 100) et  $\tau$  peut être choisi comme la variation maximale sécuritaire autorisée sur  $c_j$  considérant une variation de  $r_d$  sur  $\mathbf{x}$  ;
- dans le cas où une solution éloignée des zones de fort accroissement est recherchée,  $r_d$  et  $\tau$  découlent directement du choix de l'utilisateur pour caractériser un fort accroissement.

Le paramètre  $r_e$  définissant la marge peut au contraire être vu comme un paramètre d'ajustement pour obtenir une solution éloignée de la zone  $D$ , en particulier quand le budget d'évaluations est limité. Dans ce cas, il est possible que la zone  $D$  ne soit pas approximée suffisamment précisément. L'influence de  $r_e$  est analysée pour les problèmes analytiques.

Enfin, concernant la sonde révélatrice, l'analyse de convergence impose uniquement pour le rayon de sonde que  $r_s > r_e + r_d$  et que le nombre de points aléatoires générés  $n_{\text{alea}}$  soit strictement supérieur à zéro. Pour tous les tests numériques, le rayon  $r_s$  est arbitrairement fixé à  $1,01(r_e + r_d)$  et le nombre de points  $n_{\text{alea}}$  à  $n$ , la dimension du problème.

### 2.5.2 Problèmes analytiques

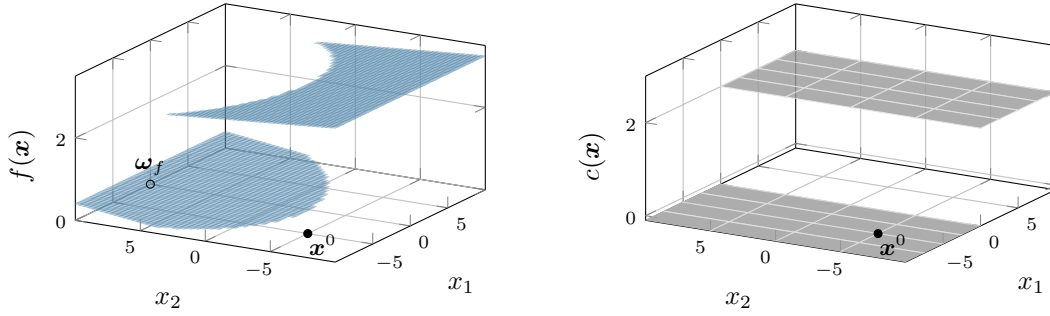
Dix problèmes analytiques à deux dimensions de la forme du problème (2.4) sont formulés afin de valider le comportement de l'algorithme. Les résultats d'un de ces problèmes sont détaillés dans cette section et les résultats sur l'ensemble des problèmes se trouvent en annexe A.1. L'intérêt de ces problèmes en deux dimensions est de pouvoir représenter graphiquement les différentes zones et le comportement de l'algorithme. Bien que les discontinuités faibles soient caractérisées par deux paramètres, localement, la frontière de la zone  $D$  est en général limitée par un seul des deux paramètres  $r_d$  ou  $\tau$ . Pour cette raison, il peut être difficile d'obtenir une expression analytique de la frontière, même pour les problèmes de faible dimension. La frontière de  $D$  est parfois approximée dans les graphiques présentés, en particulier aux abords des frontières de  $X$ .

#### Résultats d'une instance typique

Le problème suivant à deux dimensions et une contrainte est considéré :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in X} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujet à} \quad & \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0 \\ & \text{et } d(\mathbf{x}) \leq 0, \end{aligned} \tag{2.52}$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $X = [-10; 10] \times [-10; 10]$  et les sorties de la boîte noire sont les deux fonctions analytiques  $f$  et  $c$  présentées sur la figure 2.13. Les deux sorties sont révélatrices pour DiscoMads et la contrainte  $c(\mathbf{x}) \leq 0$  est traitée avec la barrière progressive. La zone de discontinuités faibles  $D$  est définie par les paramètres  $r_d = 0,25$  et  $\tau = 0,3$ . Le rayon d'exclusion définissant la marge  $M$  est fixé à  $r_e = 0,25$ . La figure 2.14a représente la position des discontinuités (----) de  $f$  et  $c$  dans  $X$  et les différents domaines.



$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \\
 f(\mathbf{x}) &= \begin{cases} -0,025x_2 + 3 & \text{si } \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}_f\| > 12, \\ 0,04x_2 & \text{sinon,} \end{cases} \\
 & \text{avec } \boldsymbol{\omega}_f = (0, 10) \\
 & \text{(b)} \\
 c(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 2 & \text{si } x_1 > 0, \\ -0,1 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Figure 2.13 Fonctions analytiques discontinues.

Une instance du problème (2.52) est résolue avec **DiscoMads** à partir du point de départ  $\Omega$ -réalisable  $\mathbf{x}^0 = (-5, -5)$ . Le budget est fixé à 2000 évaluations et la taille minimale de maillage à  $10^{-9}$ . L'algorithme est stoppé après 1140 évaluations car la taille de maillage minimale est atteinte, ce qui est cohérent avec le fait que l'algorithme converge. La solution renvoyée par **DiscoMads**, notée  $\mathbf{x}'$ , est visible (●) sur la figure 2.14a. Elle se trouve hors de la zone de discontinuités  $D$  (■) comme attendu, mais à l'intérieur de la marge  $M$  (■  $\cup$  ■). Ceci ne contredit pas les résultats de convergence qui s'appuient sur un nombre infini d'itérations. Pour cette instance, sur 299 itérations, 152 sont des itérations révélatrices. Les points évalués dans  $X = [-4; 4] \times [-4; 4]$  durant le déploiement de **DiscoMads** sont présentés sur la figure 2.14b. Les zones exclues par les points révélateurs sont délimitées par des cercles de rayon  $r_e$ . La localisation de ces cercles sur la marge  $M$  montre que l'algorithme est capable de révéler la zone  $D$  et de s'en éloigner.

Soit  $\{\mathbf{x}_c^k\}_{k \in K}$  la suite de solutions courantes réalisables où  $\mathbf{x}_c^k \in F^k$  (défini à l'équation (2.20)) et  $K$  est l'ensemble des indices des itérations pour lesquels  $F^k$  est non vide. La figure 2.15 présente la suite de valeurs  $\{f(\mathbf{x}_c^k)\}_{k \in K}$ , en fonction du nombre d'évaluations pour plus de lisibilité. Contrairement au comportement usuel de l'algorithme **Mads**, la courbe de convergence  $\{f(\mathbf{x}_c^k)\}_{k \in K}$  n'est pas décroissante. En effet, dans le cas de **DiscoMads**, une itération révélatrice conduit à une mise à jour de la fonction  $d^k$  des points de la cache et la solution courante peut devenir non réalisable.

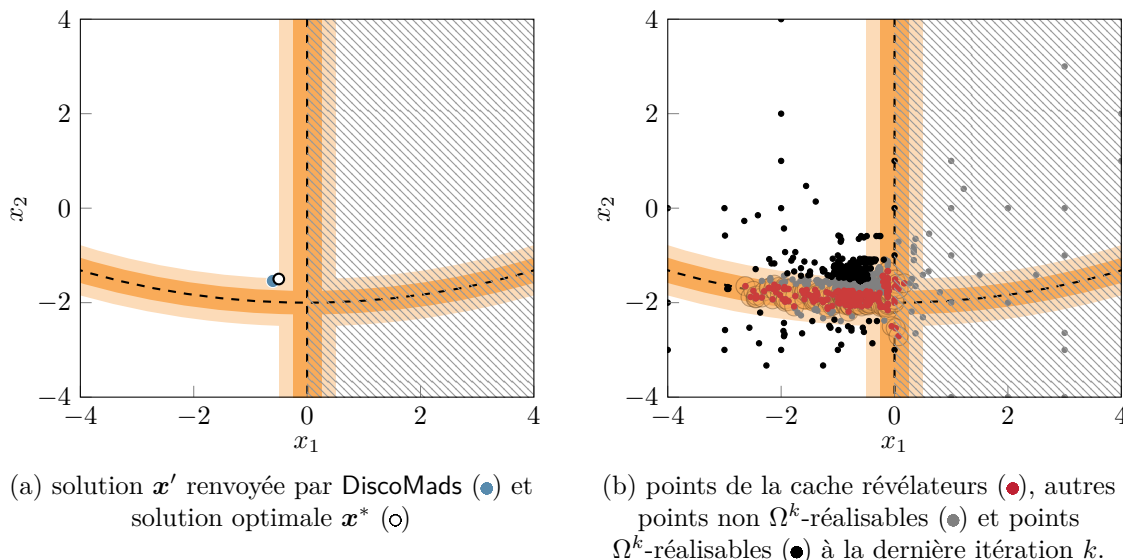


Figure 2.14 Exécution de DiscoMads sur le problème (2.52) comportant des discontinuités (----). Zones  $D$  (■) et  $M$  (■  $\cup$  ■), domaine réalisable idéal  $\hat{\Omega}$  (□) et domaine non  $\Omega$ -réalisable (▨).

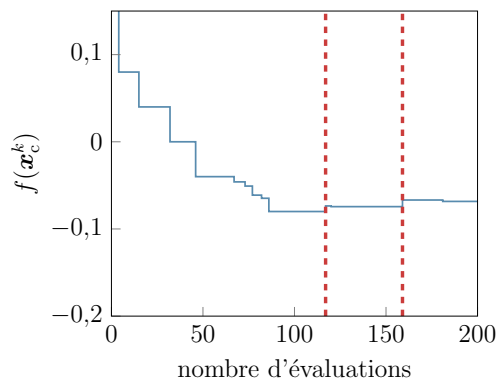


Figure 2.15 Valeurs de  $f$  pour la solution courante réalisable  $\mathbf{x}_c^k$  à l'itération  $k$  pour les 200 premières évaluations. Évaluations ayant conduit à une itération révélatrice modifiant la réalisabilité de  $\mathbf{x}_c^k$  (----).

### Validation pour différentes graines aléatoires

L'exécution précédente a été réalisée pour une graine aléatoire fixée, conditionnant les directions aléatoires générées lors de la sonde révélatrice. Afin de valider la robustesse de l'algorithme, il est nécessaire de répéter les exécutions pour différentes graines aléatoires. Pour chacun des dix problèmes analytiques, 100 exécutions de DiscoMads avec 100 graines aléatoires distinctes sont réalisées avec les mêmes paramètres que pour la section précédente.

Les résultats relatifs au problème (2.52) sont présentés sur la figure 2.16a. Les solutions renvoyées par DiscoMads ( $\bullet$ ) sont toutes situées à proximité de la solution optimale du problème  $\mathbf{x}^*$  ( $\circ$ ), loin de la zone de discontinuités  $D$ . Les solutions semblent réparties sur une même ligne horizontale. Ceci est dû au fait que les lignes de niveau de la fonction objectif sont des droites de la forme  $x_2 = \text{constante}$ . Les distances des solutions à la discontinuité la plus proche sont calculées et présentées sous forme d’histogramme sur la figure 2.16b. Toutes les solutions sont situées dans la marge  $M$  ( $\square \cup \blacksquare$ ) et la majorité est proche de la frontière avec le domaine  $\hat{\Omega}$ . L’algorithme semble donc robuste par rapport au caractère aléatoire de la sonde révélatrice pour le problème (2.52).

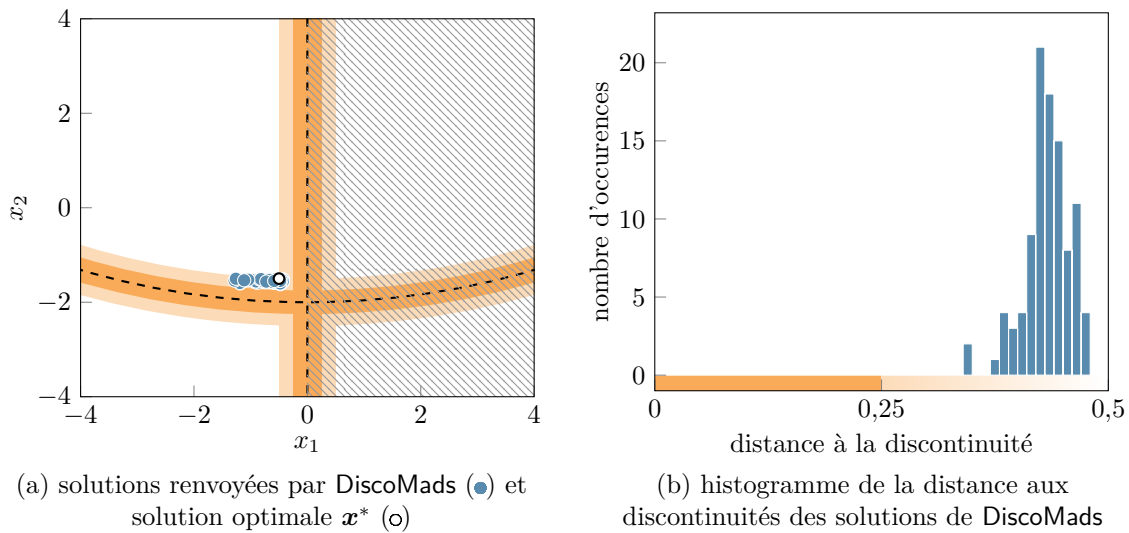


Figure 2.16 Caractéristiques des solutions renvoyées par DiscoMads pour 100 exécutions sur le problème (2.52) avec 100 graines aléatoires.

Pour les autres problèmes analytiques, les résultats sont présentés en annexe A.1.1. Pour toutes les exécutions, les solutions obtenues sont hors de la zone  $D$  et proches de la frontière du domaine  $\hat{\Omega}$ . La robustesse de l’algorithme vis-à-vis du caractère aléatoire de la sonde révélatrice est donc validée pour ces cas tests analytiques.

### Influence du paramètre $r_e$

D’après les résultats de la figure 2.16a et de l’annexe A.1.1, les solutions sont généralement situées à la frontière de la marge  $M$  et du domaine  $\hat{\Omega}$ . Le paramètre  $r_e$  peut être ajusté par l’utilisateur pour obtenir des solutions éloignées de la zone de discontinuités  $D$ . Afin d’illustrer la flexibilité du choix de  $r_e$ , 100 instances de chaque problème analytique ont été résolues avec 100 rayons d’exclusion  $r_e$  distincts, variant de 0,001 à 0,5. Les autres paramètres

sont ceux utilisés en début de section ; une seule graine aléatoire est utilisée pour toutes les instances.

Pour le problème (2.52), les distances des solutions à la discontinuité la plus proche sont présentées sur la figure 2.17 en fonction de  $r_e$ . Une tendance générale peut être observée : à mesure que  $r_e$  augmente, la distance de la solution à la discontinuité la plus proche tend également à augmenter. Les solutions obtenues sont généralement proches de la frontière de  $M$  (.....). Les écarts plus importants entre certains points et la frontière de la marge sont dus à un arrêt prématuré de l'algorithme, qui peut survenir après une itération révélatrice ayant remis en cause la réalisabilité de certains points évalués. Les mêmes observations sont faites pour les autres tests analytiques dont les résultats sont donnés en annexe A.1.2.

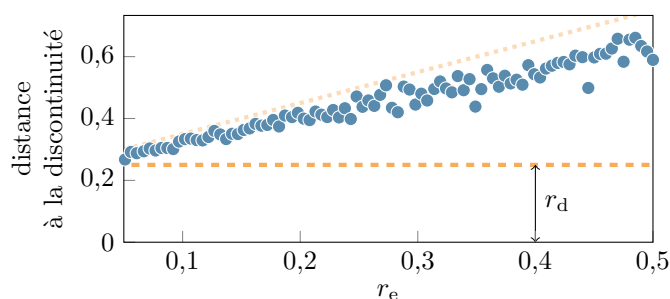


Figure 2.17 Distance à la discontinuité la plus proche des solutions obtenues (●) en fonction du rayon d'exclusion  $r_e$ . Distances aux frontières de  $D$  (---) et de la marge  $M$  (.....).

### 2.5.3 Application en génie mécanique : problème de flambement

La conception d'un treillis à deux barres est considérée et conduit à la résolution d'un problème d'optimisation à deux variables avec une seule discontinuité. Ce problème simplifié est représentatif de problèmes de stabilité, rencontrés par exemple lors de simulations de crash [51]. Le problème a par ailleurs été utilisé à plusieurs reprises dans la littérature comme problème test pour des méthodes de détection de discontinuités [51, 128].

#### Présentation du système et de la simulation

Le treillis, présenté sur la figure 2.18a, est modélisé par deux barres identiques, de module de Young  $E$ , de section  $A$  au repos et de longueur à vide  $l_0$ . Les barres sont contraintes par des liaisons pivot au bâti aux points  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  et par une liaison pivot entre elles au point  $\mathbf{c}$ . Au repos, le point  $\mathbf{c}$  a pour coordonnées  $(b, h)$ . Les paramètres sont fixés tels que  $b = 1$  m,  $h = 0,5$  m et les barres sont en aluminium de module de Young  $E = 70\,000$  MPa. Une force ( $\rightarrow$ ) de norme  $F$  est appliqué vers le bas au point  $\mathbf{c}$  et entraîne une compression des deux

barres, voire un flambement de la structure, pouvant conduire à la destruction de celle-ci. Par conséquent, la norme  $v$  du déplacement vertical du point  $c$  ( $\rightarrow$ ) est discontinue par rapport à  $F$  et à  $A$ . La norme  $v$  ( $\blacksquare$ ) est présentée sur la figure 2.18b en fonction des quantités  $\bar{A}$  et  $\bar{F}$  obtenues par normalisation entre 0 et 100 des bornes réelles :  $A \in [50; 300]$  mm<sup>2</sup> et  $F \in [5; 10]$  kN.

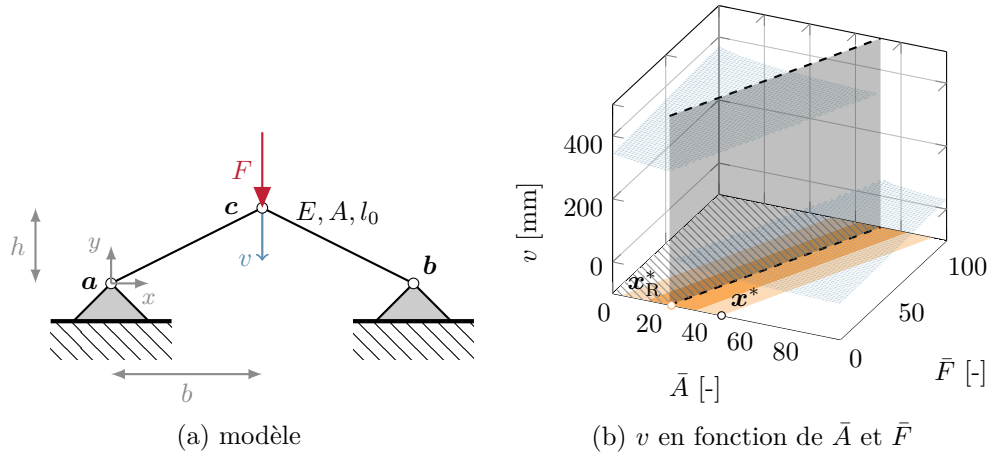


Figure 2.18 Caractéristiques du treillis à deux barres.

Le déplacement du point  $c$  résulte d'un calcul quasi statique ; l'équation de l'équilibre non linéaire du système peut s'écrire sous la forme  $g(v) = 0$ . Cette équation est résolue itérativement par la méthode de Newton-Raphson. La simulation est implémentée dans une boîte noire disponible en libre accès<sup>10</sup>. Le temps de calcul de  $v$  pour un couple de valeurs  $(A, F)$  donné est d'environ 0,5 ms<sup>11</sup>.

#### Précisions sur le calcul de $v$

Sous l'hypothèse des petites déformations et d'un chargement statique, la mise en équation de l'équilibre énergétique du système [64, section 1.1] conduit à l'équation d'équilibre non linéaire :

$$g(v) = F - F_{\text{int}} = 0, \quad (2.53)$$

où  $F_{\text{int}}$  est l'énergie interne du système donnée par :

$$F_{\text{int}} = -\frac{AE}{l_0^2}(h-v)(\sqrt{b^2 + (h-v)^2} - l_0). \quad (2.54)$$

Pour la résolution de cette équation avec la méthode de Newton-Raphson, une erreur

10. [https://gitlab.lava.polymtl.ca/depots\\_publics/codes/blackbox\\_buckling](https://gitlab.lava.polymtl.ca/depots_publics/codes/blackbox_buckling)

11. sur une machine comportant 8 processeurs Intel Core i7-8700T CPU, 2.40GHz.



absolue sur  $v$  de  $10^{-2}$  mm est utilisée comme critère d'arrêt. Dans le cas où la méthode n'a pas convergé, la simulation renvoie une erreur. L'équation d'équilibre (2.53) étant non linéaire, pour certaines valeurs de  $F$  plusieurs solutions  $v$  existent, stables ou non. Le point de départ de la méthode de Newton est judicieusement choisi afin de toujours renvoyer une solution stable. Cette solution est obtenue en supposant que la force est appliquée progressivement de 0 à la valeur  $F$  souhaitée.

### Problème d'optimisation

Le problème de conception du treillis à deux barres est posé comme un problème de minimisation de masse (2.55) pour un cas de charge donné; les variables sont  $\bar{A}$  et  $\bar{F}$ . Pour éviter le phénomène de flambement, une contrainte  $c(\bar{A}, \bar{F}) \leq 0$  limite le déplacement  $v$  à  $v_{\max} = 200$  mm et la solution recherchée doit être loin des discontinuités de cette contrainte pour des raisons de sécurité. La formulation du problème est donnée par :

$$\begin{aligned} \min_{(\bar{A}, \bar{F}) \in X} \quad & f(\bar{A}, \bar{F}) \\ \text{sujet à} \quad & c(\bar{A}, \bar{F}) \leq 0 \\ \text{et} \quad & d(\bar{A}, \bar{F}) \leq 0, \end{aligned} \tag{2.55}$$

avec  $X = \{(\bar{A}, \bar{F}) : 0 \leq \bar{A} \leq 100, 0 \leq \bar{F} \leq 100\}$ ,  $f(\bar{A}, \bar{F}) = \bar{A}$  et  $c(\bar{A}, \bar{F}) = v(\bar{A}, \bar{F}) - v_{\max}$ . La contrainte  $d(\bar{A}, \bar{F}) \leq 0$  est la contrainte d'éloignement aux discontinuités du problème (2.1). Sur la figure 2.18b, la position de la discontinuité, estimée numériquement, est tracée (---) dans le domaine des variables sur le plan inférieur. La solution  $\mathbf{x}_R^*$  du problème (2.55) avec la contrainte  $d(\bar{A}, \bar{F}) \leq 0$  relaxée est également représentée.

Pour résoudre le problème (2.55) avec DiscoMads, la fonction  $c$  est choisie comme unique sortie révélatrice et la contrainte associée est traitée avec la barrière progressive. La zone de discontinuités  $D$  est définie par  $r_d = 5$  et  $\tau = 0,02$ . Le rayon d'exclusion  $r_e$  est fixé à 10. Le budget d'évaluations est fixé à 2000 évaluations et la taille de maillage minimale à  $10^{-9}$ . Deux points de départ sont considérés : un point  $\Omega$ -réalisable  $\mathbf{x}_A^0 = (80, 80)$  décrivant une configuration sans flambement ( $c(\mathbf{x}) \leq 0$ ) et un point non  $\Omega$ -réalisable  $\mathbf{x}_B^0 = (0, 100)$ . Le point  $\mathbf{x}_B^0$  correspondant à une configuration qui n'est pas réaliste et est uniquement utilisé pour valider le comportement de l'algorithme dans ce cas. Chaque instance du problème est résolue pour 100 graines aléatoires différentes.

## Résultats

Pour les 100 exécutions à partir du point de départ  $\mathbf{x}_A^0$ , l'algorithme est arrêté en atteignant la taille minimale de maillage, fixée à  $10^{-9}$ , avant d'avoir épuisé le budget d'évaluations. Les solutions renvoyées par DiscoMads ( $\bullet$ ) sont présentées sur la figure 2.19a avec la solution optimale  $\mathbf{x}^*$  ( $\circ$ ) du problème (2.55) et la solution  $\mathbf{x}_R^*$  ( $\circ$ ) du problème avec la contrainte  $d(\mathbf{x}) \leq 0$  relaxée. Les solutions renvoyées par DiscoMads sont très localisées et proches de  $\mathbf{x}^*$ , ce qui témoigne à nouveau de la robustesse de l'algorithme par rapport au caractère aléatoire de la sonde révélatrice. Les solutions sont situées dans la marge  $M$ , mais loin de la zone de discontinuités  $D$ . Ce comportement est attendu compte tenu du budget d'évaluations et de la topologie relativement simple du problème qui facilite la détection précise de la zone  $D$ . D'un point de vue mécanique, les solutions obtenues représentent des configurations sécuritaires, car de petites variations des paramètres autour de ces points n'engendrent pas de risques de flambement.

Les valeurs de fonction objectif des solutions obtenues sont présentées sur la figure 2.19b ( $\bullet$ ), en comparaison avec les valeurs optimales  $f(\mathbf{x}^*)$  (----) et  $f(\mathbf{x}_R^*)$  (- - - -). Comme attendu, les valeurs de  $f$  des solutions obtenues sont plus élevées que la valeur  $f(\mathbf{x}_R^*)$  de la solution du problème sans prise en compte des discontinuités.

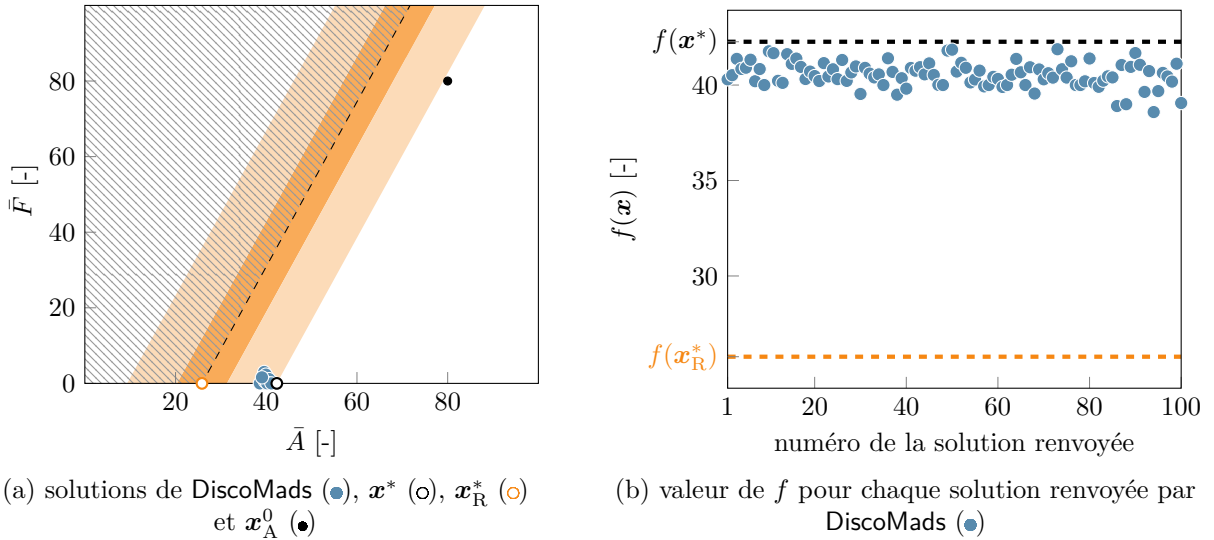


Figure 2.19 Caractéristiques des solutions renvoyées par DiscoMads pour 100 exécutions sur le problème (2.55) à partir du point de départ  $\Omega$ -réalisable  $\mathbf{x}_A^0 = (80, 80)$ .

Les résultats obtenus à partir du point de départ  $\mathbf{x}_B^0$  non  $\Omega$ -réalisable sont très similaires et présentées en annexe A.2. Les solutions obtenues sont très proches de la solution optimale  $\mathbf{x}^*$ , ce qui démontre la robustesse de l'algorithme sur ce problème avec un point de départ

non  $\Omega$ -réalisable.

Finalement, l'influence du budget d'évaluations sur la qualité des solutions renvoyées par DiscoMads est analysée. Un histogramme représentant la distance de chaque solution à la discontinuité est présenté sur la figure 2.20, pour des budgets de 100, 200 et 2 000 évaluations avec le point de départ  $\mathbf{x}_A^0$ . Pour le budget de 100 évaluations (figure 2.20a), la distance à la discontinuité des solutions varie fortement. Certaines solutions sont même dans la zone  $D$  (■); DiscoMads n'a donc pas pu révéler la discontinuité précisément avec le budget fourni. Avec le budget de 200 évaluations (figure 2.20b), les solutions obtenues sont moins dispersées dans la marge et pour le budget de 2 000 évaluations (figure 2.20c), toutes les solutions se situent loin de la zone de discontinuités  $D$  et proches de la frontière du domaine réalisable idéal  $\hat{\Omega}$  (□). Ceci s'explique par le fait qu'un budget d'évaluations augmenté conduit à un échantillonnage plus intensif des points avec la sonde révélatrice et donc une localisation plus précise de la discontinuité.

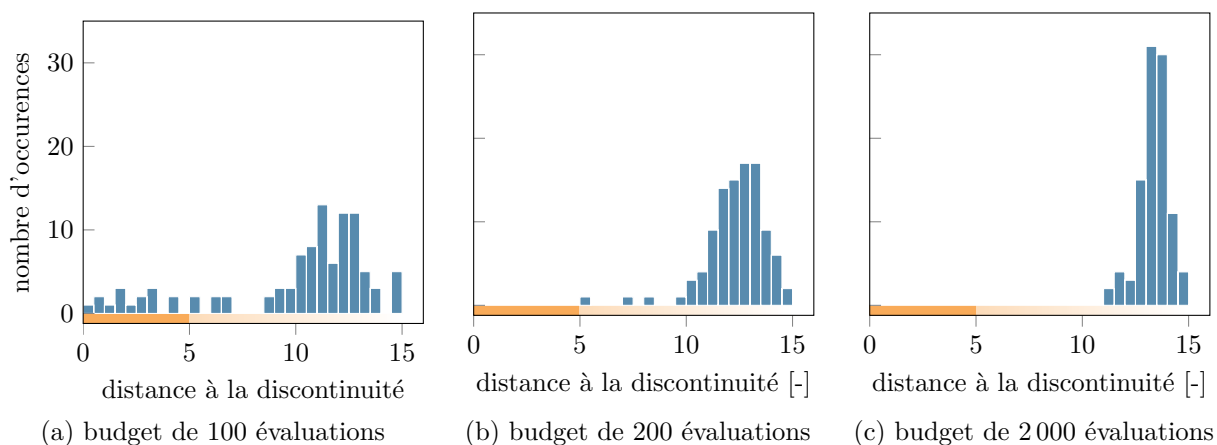


Figure 2.20 Histogramme des distances à la discontinuité des solutions obtenues pour différents budgets d'évaluations en partant du point  $\Omega$ -réalisable  $\mathbf{x}_A^0 = (80, 80)$ .

#### 2.5.4 Application en génie chimique : production de styrène

Un processus chimique de fabrication de styrène est optimisé afin de minimiser les coûts de production, tout en respectant des contraintes industrielles et environnementales [15]. Le problème d'optimisation considéré, appelé STYRENE, a été étudié à plusieurs reprises [15, 19, 23, 82] et constitue aujourd'hui un cas test en optimisation de boîtes noires.

## Présentation du problème

Le processus de fabrication est simulé par une boîte noire disponible en libre accès<sup>12</sup> [15] qui met en œuvre différentes méthodes numériques (Newton, Runge-Kutta...). Le temps d'évaluation de la boîte noire en un point est d'environ 600 ms<sup>13</sup>. Le problème d'optimisation considéré comporte 8 variables normalisées entre 0 et 100 et 11 contraintes : 7 contraintes relaxables et quantifiables et 4 contraintes binaires.

Le problème STYRENE est notoire pour la présence de contraintes cachées [111] : pour certains points  $\mathbf{x}$ , la simulation échoue et les sorties de la boîte noire ne peuvent être calculées correctement, même si  $\mathbf{x}$  est  $\Omega$ -réalisable. Cela est par exemple dû à des erreurs au sein des solveurs numériques. Lors d'exécutions de **Mads** sur ce problème, environ 20% des évaluations de la boîte noire violent des contraintes cachées d'après un article publié [82]. L'algorithme **Mads**, capable de gérer les échecs d'évaluations de la boîte noire, a été employé avec succès dans le cas de STYRENE. Cependant, la solution renvoyée par **Mads** peut être proche de points violant des contraintes cachées.

## Mise en œuvre de DiscoMads

L'algorithme **DiscoMads** est appliqué sur le problème STYRENE pour obtenir une solution éloignée de zones défavorables où des contraintes cachées sont violées. Pour ce faire, la boîte noire est légèrement modifiée afin de renvoyer une valeur artificiellement élevée ( $10^{20}$ ) de la fonction objectif et des contraintes relaxables lorsqu'une contrainte cachée est violée. Un point violant une contrainte cachée est ainsi considéré comme appartenant à  $X$  et la violation de contraintes cachées conduit à des discontinuités de la fonction objectif pouvant être révélées par **DiscoMads**.

Afin de caractériser la qualité d'une solution  $\mathbf{x}$ , un indicateur  $H(\mathbf{x}, \sigma)$  est introduit et correspond au nombre de points violant des contraintes cachées sur 1 000 points générés aléatoirement dans  $X \cap B_\sigma(\mathbf{x})$ . Au moment de la réalisation des tests numériques, une des meilleures solutions réalisables du problème STYRENE est le point réalisable  $\mathbf{x}_s$  décrit dans le tableau 2.2 et vérifiant  $f(\mathbf{x}_s) = -33\,709\,000$ . Comme  $H(\mathbf{x}_s, 15) = 435$ , ce point est proche d'au moins 435 points violant des contraintes cachées.

Le point  $\mathbf{x}_s$  est utilisé comme point de départ et l'algorithme est exécuté 100 fois avec 100 graines aléatoires différentes. La fonction objectif est la seule sortie révélatrice considérée, le mécanisme de révélation est régi par les paramètres  $r_d = 5$  et  $\tau = 10^{15}$  et le rayon d'exclusion

12. <https://github.com/bbopt/styrene>

13. sur une machine comportant 8 processeurs Intel Core i7-8700T CPU, 2.40GHz.

est fixé à  $r_e = 10$ . Les autres paramètres sont basés sur les précédentes publications relatives à STYRENE. En particulier, le budget est fixé à 1 000 évaluations et la taille de maillage minimale à  $10^{-7}$ . Les contraintes binaires sont traitées avec l’approche de barrière extrême et les contraintes relaxables avec la barrière progressive.

Tableau 2.2 Point  $\mathbf{x}_s$  décrivant une des meilleures solutions connues au problème STYRENE.

$\mathbf{x}_s$	(100, 87, 82280202, 95, 36797348, 0, 0, 49,04338841, 42,41599794, 41,01732603)
$f(\mathbf{x}_s)$	-33 709 000

## Résultats

Pour toutes les exécutions, l’algorithme est stoppé en atteignant la taille de maillage minimale. L’algorithme est capable de renvoyer une solution  $\Omega$ -réalisable pour toutes les exécutions. La valeur de  $f$  de chaque solution est représentée sur la figure 2.21 avec la valeur  $f(\mathbf{x}_s)$ . Les solutions renvoyées par DiscoMads (●) possèdent des valeurs de  $f$  similaires et sont peu sensibles à la génération aléatoire des points de la sonde révélatrice pour ce problème. De plus, ces valeurs sont plus élevées que  $f(\mathbf{x}_s)$  (---) : comme attendu, l’algorithme s’éloigne du point de départ  $\mathbf{x}_s$ , près duquel des contraintes cachées sont révélées en cours d’optimisation.

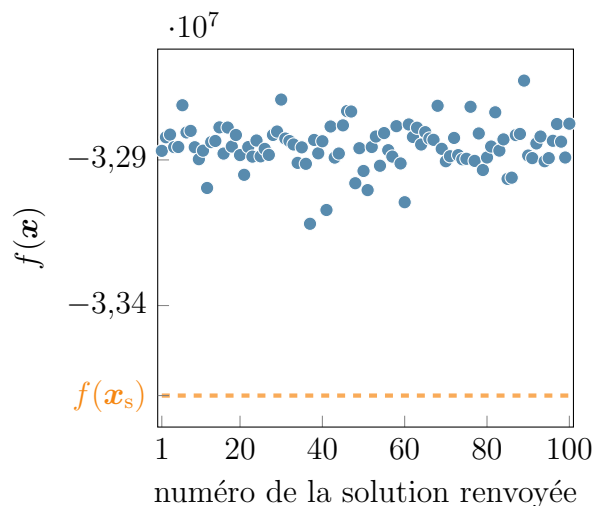


Figure 2.21 Valeur de  $f$  des solutions renvoyées par DiscoMads (●).

Pour chaque solution  $\mathbf{x}'$  renvoyée par DiscoMads, l’indicateur de violation des contraintes cachées  $H(\mathbf{x}', \sigma)$  est calculé pour deux rayons  $\sigma$  distincts et la distribution des valeurs de  $H$  est présentée sur la figure 2.22. Lorsque  $\sigma = r_e + r_d = 15$  (figure 2.22a), la plupart des solutions ont une valeur  $H(\mathbf{x}', \sigma)$  inférieure à 400, mais la dispersion des valeurs est importante. Dans ce

cas, l'indicateur  $H(\mathbf{x}, r_e + r_d)$  permet de vérifier s'il existe des points de  $D$  à distance inférieure à  $r_e + r_d$  de la solution renvoyée. Cet indicateur est sévère, car la plupart des solutions renvoyées par DiscoMads se situent dans la zone  $M \setminus D$  d'après les résultats numériques précédents. Par conséquent, il est difficile de tirer des conclusions sur la performance de l'algorithme à partir de cet unique indicateur. Lorsque  $\sigma = r_d = 5$  (figure 2.22b), les valeurs de  $H(\mathbf{x}', 5)$  sont globalement faibles et inférieures à  $H(\mathbf{x}_s, 5) = 120$ , ce qui indique que peu de points violant des contraintes cachées ont été détectés dans les boules de rayon  $\sigma = 5$  autour des solutions  $\mathbf{x}'$ . L'algorithme DiscoMads a donc permis d'obtenir pour ce problème à 8 variables des solutions éloignées des zones de violation des contraintes cachées.

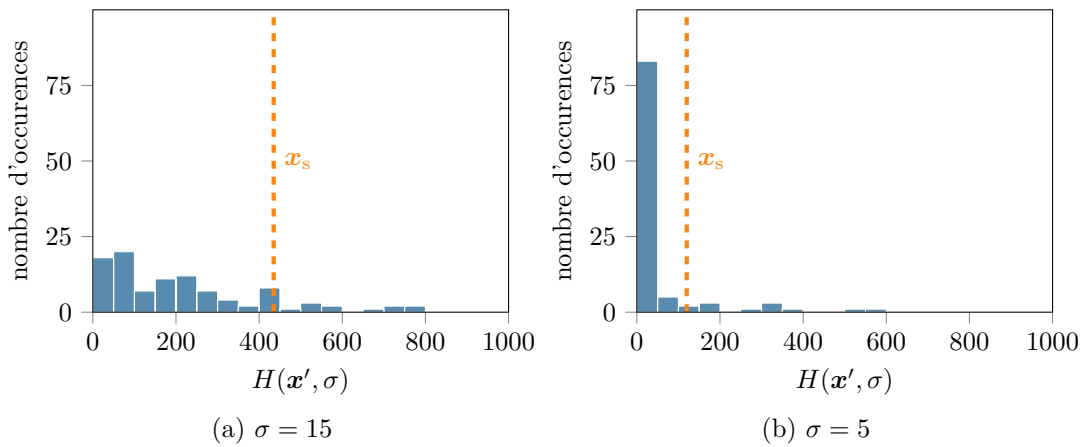


Figure 2.22 Histogramme des valeurs de  $H(\mathbf{x}', \sigma)$  pour les solutions  $\mathbf{x}'$  renvoyées par DiscoMads.

## 2.6 Conclusion

**Bilan.** L'algorithme DiscoMads proposé dans ce chapitre permet de résoudre des problèmes contraints d'optimisation de boîtes noires où la solution doit être éloignée des zones de discontinuités faibles. L'algorithme est fondé sur Mads et repose sur un mécanisme de révélation des discontinuités et un mécanisme d'exclusion des zones révélées. À mesure que l'algorithme se déploie, ces deux mécanismes permettent ainsi de construire des approximations intérieures successives de la marge de sécurité  $M$  et orientent la recherche de solutions loin des discontinuités.

Les résultats de convergence de Mads sont préservés et des conditions d'optimalité plus fortes sont obtenues en utilisant la sonde révélatrice, sous respect d'une hypothèse de continuité par morceaux des sorties de la boîte noire. L'algorithme est validé sur une série de problèmes analytiques et les résultats numériques obtenus sur deux problèmes d'ingénierie démontrent

sa pertinence pour la conception de systèmes non réguliers. Une utilisation différente de l'algorithme est par ailleurs illustrée sur un de ces problèmes pour trouver une solution loin des zones de contraintes cachées.

**Futurs développements.** Afin de favoriser l'utilisation de l'algorithme dans un contexte d'ingénierie, il serait approprié de proposer des valeurs par défaut des paramètres de **DiscoMads**. Ceci est en particulier pertinent lorsqu'une solution loin des zones de contraintes cachées est recherchée. De plus, une comparaison de **DiscoMads** avec des méthodes heuristiques fréquemment utilisées en ingénierie, comme les algorithmes génétiques, serait pertinente pour compléter l'analyse des performances de l'algorithme. Cette comparaison nécessiterait des développements spécifiques au sein de ces méthodes pour y inclure les mécanismes de révélation et d'exclusion des discontinuités faibles.

De futurs développements peuvent viser à étendre le champ d'application de **DiscoMads** en relaxant certaines hypothèses. La normalisation des variables, nécessaire pour assurer la pertinence du mécanisme de révélation, pourrait être évitée en adaptant la fonctionnalité de maillage anisotropique [27] de **Mads** ou en utilisant des zones de détection mises à l'échelle. Un taux de variation limite distinct pourrait également être considéré pour chaque sortie de la boîte noire, mais nécessiterait une analyse de convergence plus complexe.

Une autre direction de recherche consisterait à améliorer l'efficacité numérique de l'algorithme. D'une part, une mise à l'échelle de la contrainte d'éloignement aux discontinuités par rapport aux autres contraintes est envisagée. D'autre part, l'utilisation d'une sonde plus sophistiquée ou d'un indice de fiabilité inspiré de l'optimisation fiabiliste [98], permettant d'arrêter prématurément l'algorithme, peut être considérée. De plus, l'utilisation de substituts appropriés pourrait accélérer la convergence de l'algorithme.

## CHAPITRE 3 PROBLÈME DE VIBRATIONS D'AUBES DE MOTEURS D'AVION

Souvent présentée comme la dernière frontière en conception mécanique, la prise en compte d'interfaces frottantes ou de contact constitue un défi d'envergure pour les ingénieurs. Ce défi est notamment lié au fait que les interactions structurelles sur les interfaces non linéaires induisent une dépendance des fréquences propres des différents composants vis-à-vis du niveau d'énergie dans le système. De ce fait, des analyses modales linéaires ne permettent plus de prédire les conditions d'interaction potentielles.

Les phénomènes vibratoires préjudiciables inhérents aux interfaces non linéaires, longtemps évités, doivent désormais être pris en compte dans la conception dans plusieurs secteurs industriels. Dans l'industrie aéronautique par exemple, de nouvelles réglementations environnementales ont motivé la mise en place de plusieurs programmes de recherche visant à minimiser les émissions polluantes des moteurs d'avion. Outre le développement de nouveaux matériaux plus légers, une augmentation significative du rendement d'un moteur peut être obtenue en réduisant les jeux entre les aubes et le carter. Cette réduction permet de limiter les pertes aérodynamiques, mais favorise inexorablement les contacts entre les aubes et le carter [89].

Des contacts répétés peuvent engendrer de la fatigue polycyclique [149] ou des phénomènes divergents [127], qui conduisent à une augmentation des amplitudes de vibration et des contraintes dans l'aube. À long terme, ceci peut conduire à des phénomènes de fissuration, voire à des pertes d'aubes [127]. Cette situation est à éviter à tout prix car elle engendre des opérations de maintenance très coûteuses et soulève d'évidents enjeux de sécurité, primordiaux dans le domaine du transport aérien [31]. La maîtrise des phénomènes vibratoires inhérents à l'interface de contact aube/carter est ainsi stratégique pour les constructeurs de moteurs d'avion.

L'objectif du chapitre est **(1)** de mettre en évidence l'intérêt d'intégrer des stratégies numériques prédictives relatives aux contacts aube/carter dans un cycle de conception d'aubes, **(2)** de préciser le contexte de conception associé et **(3)** de proposer un processus de reconception visant à identifier des critères de conception pertinents.

Dans la section 3.1, la recherche de configurations visant à éviter des phénomènes vibratoires non linéaires préjudiciables à la durée de vie d'une aube est formulée comme un problème d'optimisation. Un problème simplifié — sans variation possible de la géométrie de l'aube — est considéré et résolu avec **DiscoMads**. Les configurations obtenues sont analysées d'un point de vue mécanique dans la section 3.2 pour mettre en évidence les gains significatifs



observés en termes de niveaux de contraintes mécaniques. Afin de cerner les verrous scientifiques inhérents au développement d’aubes robustes au contact et les enjeux de redéfinition des cycles de conception des aubes, la section 3.3 présente un état de l’art des interactions aube/carter. À partir des conclusions tirées de l’application de DiscoMads et de la mise en contexte bibliographique, la section 3.4 présente le processus de reconception proposé pour résoudre une extension du problème d’optimisation, visant cette fois à modifier la géométrie de l’aube.

### 3.1 Problème simplifié et application de DiscoMads

Un problème d’optimisation simplifié relatif aux vibrations résultant de contact aube/carter est considéré. Des éléments de contexte sont donnés dans la section 3.1.1. Une quantité d’intérêt, relative à la robustesse au contact d’une aube par rapport aux interactions aube/carter, est ensuite présentée dans la section 3.1.2. Le problème d’optimisation simplifié est formellement décrit dans la section 3.1.3 et résolu avec DiscoMads ; les résultats obtenus sont présentés en dernière section 3.1.4.

#### 3.1.1 Contexte

Dans le contexte de conception actuel, les contacts entre les parties fixes et tournantes sont considérés comme des phénomènes attendus en configuration non accidentelle. Leur prise en compte en amont dans le cycle de conception est cruciale, car ils peuvent avoir un impact négatif sur la durée de vie des composants [33, 127].

Plusieurs interfaces de contact entre parties fixes et mobiles existent au sein d’une turbomachine et sont représentées sur la figure 3.1. Dans le cadre de ce travail, l’emphase est mise sur l’interface de contact entre le sommet des aubes et le carter, schématisée sur la figure 3.2. La maîtrise des interactions de contact à cette interface est un enjeu clé pour les concepteurs, compte tenu de son influence majeure sur le rendement de la turbomachine.

#### 3.1.2 Quantité d’intérêt

De récentes études [40, 149] ont montré que des déplacements radiaux importants en bout d’aube sont préjudiciables pour la durée de vie de l’aube. Dans cette section, le déplacement radial en bout d’aube à la suite d’une interaction de contact est utilisé comme indicateur de la robustesse au contact. L’influence de deux paramètres de fonctionnement est considérée : la vitesse de rotation de l’aube  $\omega$  et le jeu  $s$  entre l’aube et le carter, supposé uniforme sur le sommet d’aube. Le déplacement radial est prédit *via* une stratégie numérique existante [115]

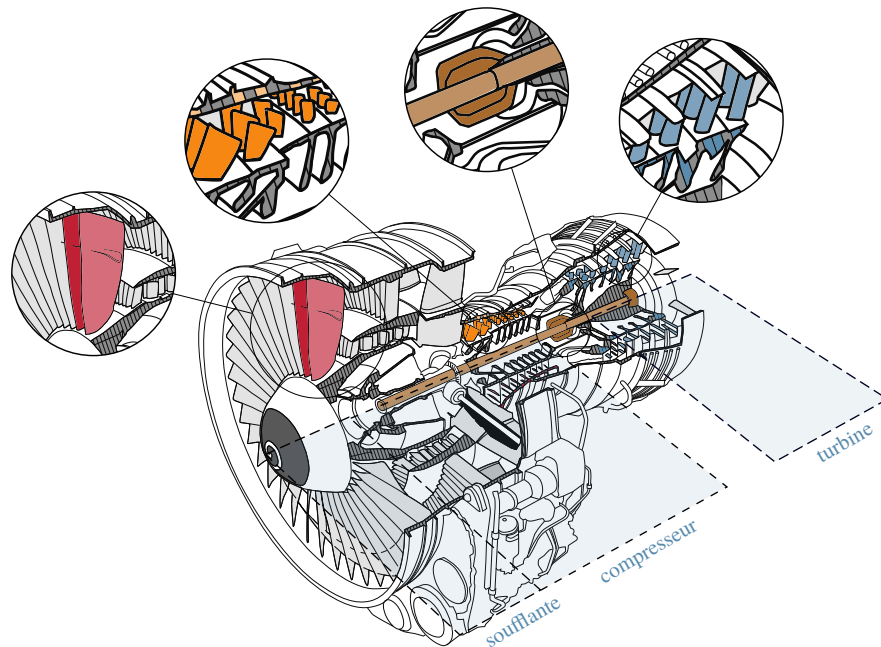


Figure 3.1 Interfaces de contact au sein d'une turbomachine et étages (■) de la turbomachine. Adaptée de [59].

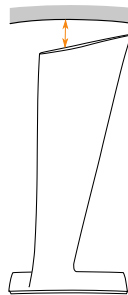


Figure 3.2 Interface aube/carter : aube de turbomachine (□), carter environnant (■) et jeux aube/carter (↔).

à partir d'un modèle éléments finis industriel d'une aube de compresseur basse pression [35]. Pour une configuration  $(s, \omega)$  donnée, 20 rotations de l'aube à vitesse constante  $\omega$  sont simulées. Le déplacement radial maximal  $v(s, \omega)$  du nœud en sommet d'aube au bord d'attaque (c.-à-d. en amont du flux) sur ces 20 tours est retenu. Chaque simulation nécessite environ 1 min 40 s de calcul sur un seul processeur standard<sup>1</sup>.

Afin de diminuer le coût de calcul des tests réalisés avec DiscoMads, une surface de réponse du déplacement  $v(s, \omega)$  est calculée. Soient  $s_0$  un jeu nominal typique pour une aube de

1. Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2698 v4, 2.20GHz

compresseur et  $\omega_0$  la vitesse de rotation nominale de l'aube,  $s$  varie de  $0,8s_0$  à  $6,5s_0$  et  $\omega$  de  $0,85\omega_0$  à  $1,15\omega_0$ . Le déplacement  $v(s, \omega)$  est calculé pour 45 000 configurations  $(s, \omega)$  dans ces plages. La surface de réponse est calculée par interpolation linéaire barycentrique sur une triangulation de Delaunay des configurations  $(s, \omega)$ . À l'aide de cette surface, le temps de calcul d'un déplacement  $v(s, \omega)$ , essentiellement dû au temps de chargement de l'interpolation, est réduit à 0,25 s sur un processeur standard.

La surface de réponse calculée est présentée sur la figure 3.3 en fonction du jeu et de la vitesse normalisés entre 0 et 100, notés respectivement  $\bar{s}$  et  $\bar{\omega}$ . Les déplacements sont normalisés entre 0 et 1 pour des raisons de confidentialité. D'importantes variations du déplacement en fonction de la vitesse et du jeu sont visibles. En effet, sur certaines plages de vitesses (■), de grandes amplitudes de vibration sont visibles (■). Les configurations optimales, en revanche, doivent conduire à de faibles déplacements (■), et correspondre à un jeu faible afin de limiter les pertes aérodynamiques. En raison de la nature intrinsèquement non linéaire du système étudié, ces configurations optimales peuvent être très proches de configurations dangereuses.

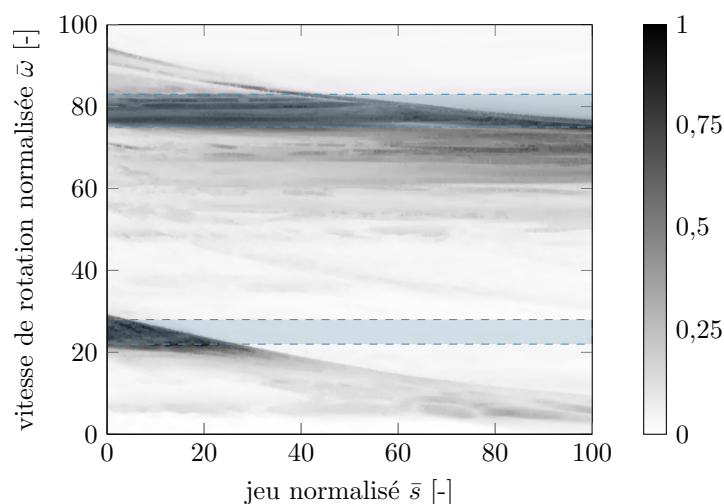


Figure 3.3 Déplacement maximal radial au bord d'attaque calculé par interpolation des résultats obtenus pour 45 000 configurations  $(\bar{s}, \bar{\omega})$ . Déplacement normalisé. Plages de vitesses d'intérêt (■).

Bien que la surface présentée permette d'obtenir une quantification précise de la réponse vibratoire de l'aube, elle nécessite des coûts de calcul très élevés : 52 jours sont nécessaires pour effectuer l'ensemble des simulations si les calculs ne sont pas parallélisés. De plus, seule l'influence de deux paramètres de fonctionnement est quantifiée. En pratique, une quantification précise globale de la réponse de l'aube pour tous les paramètres de conception, incluant

des paramètres relatifs à la géométrie de l'aube, n'est pas envisageable. La réponse ne peut être simulée que pour un nombre restreint de configurations. L'utilisation de méthodes d'optimisation de boîtes noires est ainsi requise pour identifier des configurations avantageuses à moindre coût.

### 3.1.3 Problème d'optimisation

Le problème d'optimisation traité vise à minimiser le jeu aube/carter  $\bar{s}$  pour une plage de vitesses fixée. Le déplacement vibratoire de l'aube en fonction du jeu et de la vitesse normalisée est abusivement noté  $v(\bar{s}, \bar{\omega})$ . Pour prendre en compte les contraintes structurelles, ce déplacement est limité à  $v_{\max}$ , qui correspond à un déplacement normalisé de 0,37 sur la figure 3.3. La configuration recherchée doit de plus être sécuritaire et éloignée des zones de discontinuités et de fort accroissement. Sur une plage de vitesses d'intérêt  $[\bar{\omega}_{\min}; \bar{\omega}_{\max}] \subseteq [0, 100]$ , le problème est finalement formulé :

$$\begin{aligned} \min_{(\bar{s}, \bar{\omega}) \in X} \quad & f(\bar{s}, \bar{\omega}) = \bar{s} \\ \text{sujet à} \quad & c(\bar{s}, \bar{\omega}) \leq 0 \\ \text{et} \quad & d(\bar{s}, \bar{\omega}) \leq 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec  $X = \{(\bar{s}, \bar{\omega}) : 0 \leq \bar{s} \leq 100, \bar{\omega}_{\min} \leq \bar{\omega} \leq \bar{\omega}_{\max}\}$ ,  $c(\bar{s}, \bar{\omega}) = v(\bar{s}, \bar{\omega}) - v_{\max}$  et  $d(\bar{s}, \bar{\omega}) \leq 0$  est la contrainte d'éloignement aux discontinuités faibles de  $c$ .

L'algorithme **DiscoMads** est utilisé pour résoudre quatre instances du problème (3.1) sur deux plages distinctes de vitesses d'intérêt, visibles sur la figure 3.3. Pour chaque plage, une configuration de départ  $\hat{\Omega}$ -réalisable et une configuration non  $\Omega$ -réalisable sont considérées. Les quatre instances du problème sont décrites dans le tableau 3.1. La zone de discontinuités faibles  $D$  est définie par les paramètres  $r_d = 1$  et  $\tau = 0,4$  et le rayon d'exclusion est fixé à  $r_e = 1$ . Seule la sortie  $c$  est révélatrice et la contrainte  $c(\bar{s}, \bar{\omega}) \leq 0$  est traitée avec la barrière progressive.  $n_{\text{alea}} = 2$  points candidats sont générés à chaque sonde révélatrice. Le budget est fixé à 2000 évaluations et la taille minimale de maillage à  $10^{-9}$ . Les autres paramètres sont fixés comme décrits dans la section 2.5.1. Pour chaque instance, le problème est résolu avec une seule graine aléatoire.

### 3.1.4 Résultats

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3.4 dans le plan  $(\bar{s}, \bar{\omega})$ . La configuration optimale (○) déterminée graphiquement et la configuration renvoyée par **DiscoMads** (●) sont représentées, ainsi que les autres configurations évaluées lors de l'exécution. Les zones ex-

Tableau 3.1 Instances du problème (3.1) de vibrations d'aubes traitées avec DiscoMads.

instance	A	B	C	D
plage de vitesses $[\bar{\omega}_{\min}; \bar{\omega}_{\max}]$	[22; 28]	[22; 28]	[75; 83]	[75; 83]
configuration de départ $\mathbf{x}^0 = (\bar{s}, \bar{\omega})$	(40, 25)	(5, 25)	(90, 80)	(25, 76)
réalisabilité de la configuration de départ $\mathbf{x}^0$	$\mathbf{x}^0 \in \hat{\Omega}$	$\mathbf{x}^0 \notin \Omega$	$\mathbf{x}^0 \in \hat{\Omega}$	$\mathbf{x}^0 \notin \Omega$

clues (■) par des configurations révélatrices (●) sont des cercles, dilatés verticalement en raison de l'échelle utilisée.

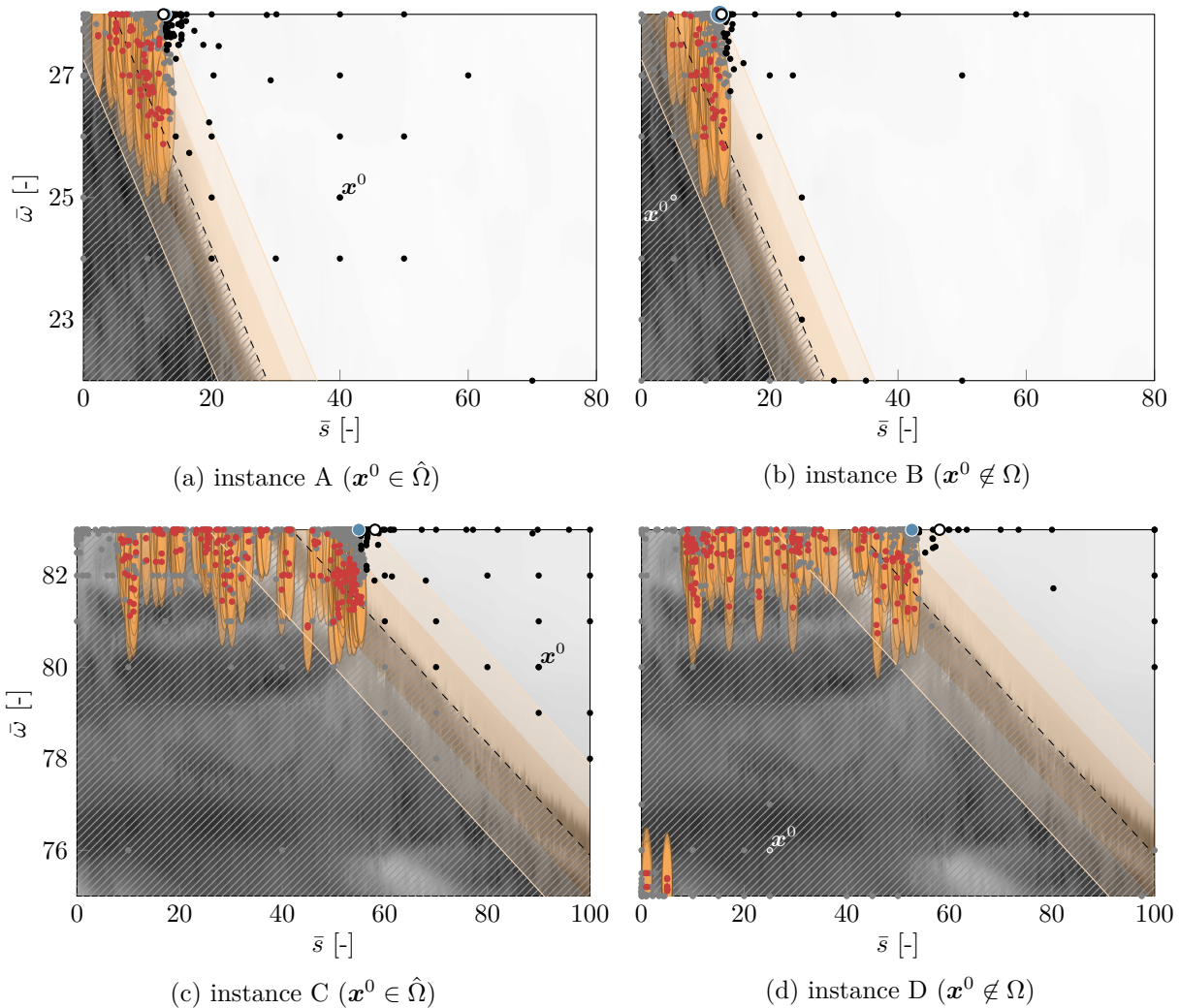


Figure 3.4 Exécutions de DiscoMads sur les instances du problème (3.1) : configuration optimale (o), configuration renvoyée par DiscoMads (●), configurations révélatrices (●), autres configurations non  $\Omega^k$ -réalisables (●), configurations  $\Omega^k$ -réalisables (●) après la dernière itération  $k$ .

Pour toutes les instances, la configuration obtenue avec **DiscoMads** est proche de la configuration optimale et loin de la zone dangereuse de fortes variations (■), comme attendu. Ce comportement est observé y compris lorsque la configuration de départ  $\mathbf{x}^0$  ne respecte pas la contrainte de déplacement  $c(\bar{s}, \bar{\omega}) \leq 0$  (instances B et D). Pour ces deux cas, le problème est plus difficile à résoudre, car l’algorithme doit à la fois se diriger vers le domaine réalisable  $\Omega$  et s’éloigner de la zone de discontinuités  $D$ .

Pour toutes les instances, l’algorithme est stoppé avant d’atteindre le budget d’évaluations, car la taille de maillage minimale est atteinte. Pour l’instance 3, la plus coûteuse, 1278 évaluations sont effectuées. Si cette instance avait été résolue en faisant appel à la simulation originelle plutôt qu’à l’interpolation construite dans la section 3.1.2, le coût de calcul associé serait d’environ 16 heures. Ce coût est faible par rapport au temps requis pour construire la surface de réponse de la figure 3.3 (2 jours environ sur 20 processeurs en parallèle). Ce constat reste valide même lorsque le budget maximal d’évaluations est atteint, ce qui représente environ 25 heures de calcul. Par conséquent, l’utilisation de **DiscoMads** permet de résoudre plus efficacement le problème (3.1). Les résultats présentés ici démontrent la pertinence et l’applicabilité de **DiscoMads** dans un contexte industriel pour la résolution d’un problème d’optimisation simplifié restreint à deux paramètres de fonctionnement. Cependant, la mise en œuvre de **DiscoMads** dans un contexte de conception plus réaliste d’aubes robustes aux interactions de contact nécessite de prendre en compte de nombreux défis liés à la prédiction de telles interactions.

### 3.2 Analyse mécanique et généralisation du cadre d’études

Afin de maximiser la durée de vie des aubes, le niveau des contraintes mécaniques dans l’aube doit rester inférieur à une fraction de la limite d’élasticité du matériau de l’aube. À titre illustratif, une analyse des contraintes mécaniques est réalisée pour une des configurations initiales précédentes,  $\mathbf{x}^0 = (5, 25)$ , pour laquelle de grandes amplitudes vibratoires sont prédites (voir figure 3.4b). Les contraintes dans l’aube sont calculées au pas de temps pour lequel le bord d’attaque atteint un déplacement radial maximal, sur les 20 tours de rotation simulés. Le champ de contraintes normalisé est présenté sur la figure 3.5a, la valeur 1 (■) correspond à la limite d’élasticité du matériau. Dans certaines zones localisées sur le bord d’attaque, les contraintes subies atteignent jusqu’à 1,6 fois la limite d’élasticité. Cette configuration n’est donc pas acceptable d’un point de vue structurel.

La même analyse des contraintes mécaniques est réalisée pour les configurations  $\mathbf{x}'_A$  et  $\mathbf{x}'_C$ , solutions des instances A et C du problème (3.1) produites par **DiscoMads**, et deux configurations voisines  $\mathbf{y}_A$  et  $\mathbf{y}_C$ . Ces dernières sont choisies à distance  $r_e$  dans le plan  $(\bar{s}, \bar{\omega})$  des

configurations  $\mathbf{x}'_A$  et  $\mathbf{x}'_C$  respectivement, dans la direction de la discontinuité la plus proche. Les champs de contraintes pour ces quatre configurations sont représentés sur la figure 3.5, les configurations exactes sont précisées dans la légende. Les contraintes mécaniques subies sont bien en deçà de la limite d'élasticité, les zones de plus fortes contraintes sont pour la plupart localisées près du bord d'attaque. Les contraintes pour les configurations  $\mathbf{y}_A$  et  $\mathbf{y}_C$  sont légèrement plus élevées que celles des configurations renvoyées  $\mathbf{x}'_A$  et  $\mathbf{x}'_C$  mais restent tout à fait acceptables par rapport à la limite d'élasticité. Les configurations produites par DiscoMads sont donc pertinentes en matière d'ingénierie, y compris pour de petites variations des paramètres de fonctionnement.

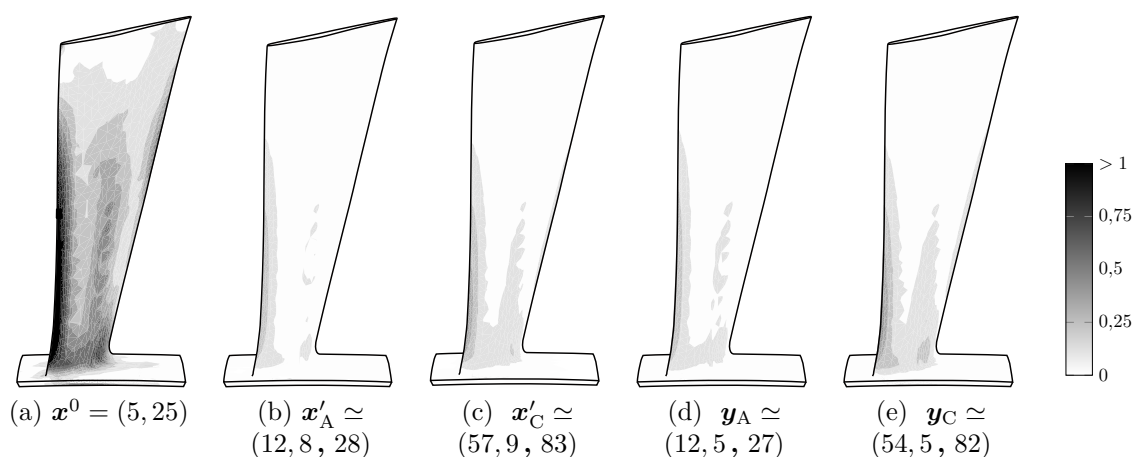


Figure 3.5 Champs de contraintes normalisés dans l'aube pour une configuration critique  $\mathbf{x}^0$ , les configurations  $\mathbf{x}'_A$ ,  $\mathbf{x}'_C$  renvoyées par DiscoMads et des configurations voisines  $\mathbf{y}_A$  et  $\mathbf{y}_C$ .

## Bilan

Pour le problème d'optimisation simplifié (3.1) où le choix de la vitesse de rotation et du jeu aube/carter est très peu restreint, les configurations situées loin des zones de fort déplacement sont sécuritaires d'un point de vue mécanique. Un changement de configuration permet ainsi une diminution significative des amplitudes de déplacement à la suite d'une interaction de contact et souligne le potentiel d'amélioration des aubes.

Dans le cas d'un problème de conception plus réaliste, le choix du jeu est lié à de nombreuses considérations, notamment aérodynamiques, et la vitesse ne peut être variée aussi librement. Par conséquent, afin d'améliorer la robustesse au contact des aubes, il est nécessaire de modifier d'autres paramètres au sein du processus de conception, tels que les paramètres géométriques. Ceci implique des changements dans les processus de conceptions actuels, liés aux enjeux et spécificités des interactions de contact aube/carter.

### 3.3 Interactions aube/carter : état de l'art

La revue de littérature qui suit est centrée sur l'interface de contact aube/carter, dont les caractéristiques sont décrites dans la section 3.3.1. Les défis de conception associés et les pratiques industrielles pour mitiger les contacts aube/carter sont présentés en section 3.3.2. Pour soutenir ces pratiques, le développement de stratégies prédictives sophistiquées, présentes dans la section 3.3.3 est requis. La maturité atteinte par ces stratégies permet aujourd'hui d'envisager des évolutions du cycle de conception des aubes, décrites dans la section 3.3.4.

#### 3.3.1 Caractéristiques de l'interface

Contrairement aux autres types d'interfaces de contact, les interfaces aube/carter se manifestent à tous les étages de la turbomachine. L'interface aube/carter est caractérisée par des vitesses relatives élevées, pouvant atteindre  $500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et combine à la fois des non-régularités dues au contact et des non-linéarités géométriques telles que de grandes déformations [69], notamment pour des aubes de soufflante ou de turbine plus allongées. De plus, cette interface est le siège de phénomènes multiphysiques, intrinsèquement couplés. Les aubes subissent à la fois des chargements aérodynamiques [10], parfois instables [75], et des vibrations non linéaires engendrées par les contacts. Tout contact entre les composants engendre aussi inévitablement un certain niveau d'usure [124] de l'aube et du revêtement abrasable déposé sur le carter, modifiant les conditions de contact. Enfin, les températures de fonctionnement extrêmes, notamment en turbine, et l'échauffement causé par des contacts répétés imposent de considérer les effets thermiques [4, 127, 137] sur la dynamique de l'ensemble.

Trois causes majeures d'interactions aube/carter peuvent être distinguées :

- les **interactions modales** : elles peuvent survenir entre les modes de la roue aubagée et ceux du carter, et sont causées par des échanges d'énergie dus à la flexibilité des composants. Elles surviennent essentiellement en soufflante et en compresseur haute pression et peuvent être extrêmement destructrices ; elles auraient causé l'accident du 3 novembre 1973 au Nouveau-Mexique [133]. Les premières études relatives aux interactions modales datent de la fin des années 90 [159] et les conditions nécessaires à leur apparition sont rappelées dans une thèse plus récente [113].
- les **mouvements de précession** de l'arbre de la turbomachine : la flexibilité de l'arbre de rotation peut entraîner un orbitage de celui-ci et ainsi engendrer des contacts [132]. Ce phénomène survient en particulier en soufflante et peut également entraîner des contacts aux interfaces arbre/palier (voir figure 3.1). Ces contacts peuvent subvenir sous différentes formes [89]. La configuration la plus destructrice est le phénomène de



*dry whip* : l'arbre en mouvement de précession inverse entre en contact avec le carter et le frottement rend le phénomène instable [156] ;

- les **interactions frottantes** (*rubbing* en anglais) : elles peuvent survenir suite aux contacts répétés d'une seule aube avec le carter, en particulier en compresseur basse pression [180], haute pression [33] et en turbine [137]. Une condition nécessaire à l'apparition de ces interactions est la coïncidence de la fréquence propre de l'aube avec un régime moteur (un multiple de la fréquence d'excitation). Ces interactions sont intimement liées à la réponse vibratoire de l'aube et à l'évolution du jeu aube/carter causée par l'usure de l'abradable [123]. Les contacts répétés engendrent également un échauffement localisé, influant directement la dynamique de l'aube [137].

Le cadre d'études est restreint à l'analyse des interactions frottantes. Inévitables, celles-ci sont les plus courantes et peuvent se manifester à tous les étages de la turbomachine.

### 3.3.2 Défis de conception et pratiques industrielles

La conception d'aubes robustes au contact, en réponse à des enjeux industriels majeurs, est aujourd'hui encore un problème ouvert. En effet, il n'existe pas à l'heure actuelle de critères de conception établis permettant d'assurer la robustesse des aubes au contact. La recherche de tels critères est freinée par un verrou scientifique majeur : le manque de cadre théorique unifié pour la caractérisation des phénomènes non réguliers tels que les interactions de contact (section 3.3.2.1). La prédiction des fréquences de résonance dans ce contexte est difficile et les phénomènes de résonance en fonctionnement ne peuvent être totalement évités. Par conséquent, pour résoudre ce problème, les pratiques industrielles se sont axées autour de deux aspects : **(1)** le développement de matériaux abradables, déposés sur le carter et destinés à amortir les contacts (section 3.3.2.2), et **(2)** la prédiction de la réponse vibratoire des aubes à des événements de contact par des stratégies numériques prédictives, afin de mieux comprendre les phénomènes physiques associés (section 3.3.2.3).

#### 3.3.2.1 Défi de caractérisation théorique

Afin d'éviter les fortes amplitudes de vibrations des aubes, un principe générique en industrie consiste à éviter l'excitation des modes propres et les phénomènes de résonance résultants en ajustant la plage de fonctionnement. Pour cela, il est nécessaire de caractériser très précisément les fréquences de résonance du système.

Dans un contexte linéaire, l'analyse modale permet de déterminer précisément les fréquences propres et donc de prédire les éventuelles interactions avec des sources d'excitation. Elle

permet notamment de tracer un diagramme de Campbell, tel que présenté sur la figure 3.6. Sur une plage donnée de vitesses de rotation  $\omega \in [\omega_{\min}; \omega_{\max}]$ , les fréquences  $i\omega, i \in \mathbb{N}$  des régimes moteurs, notés  $rm_i$ , et les fréquences propres de l'aube sont tracées en fonction de  $\omega$ . Seuls les régimes moteurs pairs et les fréquences du premier mode de flexion (1F) et du premier mode de torsion (1T) sont représentés sur la figure. Les fréquences propres sont habituellement normalisées par rapport à la fréquence du premier mode propre, calculée pour  $\omega = 0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Les vitesses d'interaction linéaires correspondent aux intersections entre les régimes moteurs et les fréquences propres. Ce sont des vitesses critiques pour lesquelles une interaction de frottement peut survenir. Toutefois, il ne s'agit que d'une condition nécessaire et non suffisante à l'apparition d'une telle interaction. L'intersection du premier mode de flexion avec le régime moteur  $rm_6$ , notée 1F/ $rm_6$  est mise en évidence sur la figure (●) et prédite à la vitesse  $\omega_{1F/rm_6}$  (-----).

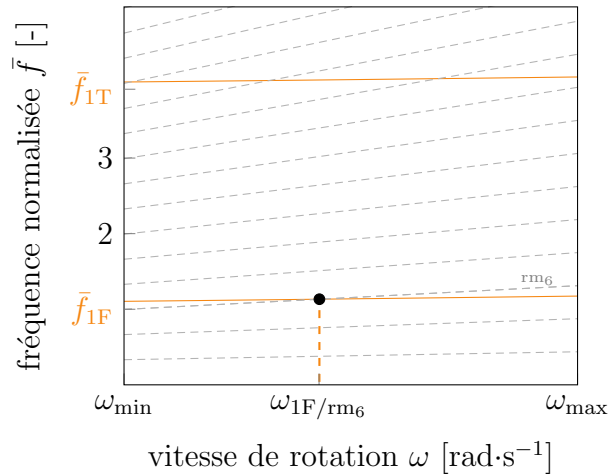


Figure 3.6 Diagramme de Campbell. Fréquences propres normalisées (—) et régimes moteurs pairs (-----). Vitesse d'interaction linéaire (-----).

Dans un contexte non linéaire, les fréquences de résonance dépendent du niveau d'énergie dans le système et ne coïncident pas forcément avec les fréquences propres calculées par analyse modale. La théorie des modes non linéaires, introduite dans les années 60 [155], peut être vue comme une généralisation de l'analyse modale. Elle a fait l'objet de nombreux développements [99] visant notamment à étendre son champ d'application aux systèmes non conservatifs [101, 162, 182]. À l'heure actuelle, l'analyse modale non linéaire est un outil mature pour la caractérisation de systèmes non linéaires, mais elle reste encore peu utilisée dans un contexte industriel en raison de coûts de calcul importants. Elle n'est, de plus, pas adaptée aux systèmes non réguliers.

Un cadre théorique pour l'analyse modale non régulière a récemment été proposé [110, 176],

mais la prise en compte des non-régularités rend le calcul des modes non linéaires très coûteux. Ce calcul est de plus effectué dans un cadre très spécifique (pas de contact collant, pas de frottement, restriction à des solutions périodiques) et il nécessite de fixer *a priori* le nombre d'impacts par période d'excitation. La phénoménologie observée sur les systèmes traités — le plus souvent à 1, 2 ou 3 degrés de liberté — est particulièrement complexe et pas nécessairement représentative de phénomènes survenant sur des modèles de grande dimension. Pour ces raisons, l'analyse modale non régulière reste encore confinée au cadre de la recherche fondamentale.

### 3.3.2.2 Matériaux abrasables et recherche expérimentale

Les zones de résonances ne pouvant être absolument prédites et évitées sur toute la plage de fonctionnement, une stratégie couramment employée consiste à diminuer la sévérité des contacts *via* l'ajout d'un revêtement abrasable sur la surface interne du carter [35]. Ce revêtement joue le rôle d'un matériau sacrificiel. Cette pratique a motivé le développement de bancs de recherche expérimentaux depuis 1975, à la fois pour tester de nouveaux matériaux abrasables [163] et pour investiguer les phénomènes d'usure [50], dans un contexte où les contacts étaient encore considérés comme accidentels.

Depuis les années 2000, à mesure que les contacts ont été considérés comme normaux en fonctionnement, les recherches expérimentales se sont concentrées sur l'étude des vibrations des aubes et des interactions chimiques complexes liées à l'abrasable. Ces recherches visent notamment à caractériser les efforts de contacts [67] ou de nouveaux matériaux plus légers [137]. Le développement de multiples matériaux abrasables, nécessitant des analyses des interactions de contact à chaque étage de la turbomachine, a motivé le développement de bancs d'essai de plus en plus proches des conditions opératoires. À titre d'exemple, Alstom a développé en 2007 un banc d'essai monoaube modulable permettant de tester des aubes industrielles [150]. La collaboration entre General Electric et l'université de l'Ohio a conduit entre 2002 et 2010 au développement d'un banc [139-141] imitant les conditions opératoires en termes de vitesse de rotation et de contact. Ce banc a notamment permis la création d'une base de données dédiée aux interactions de frottement. Une collaboration récente entre l'Université de Dresde et Rolls-Royce a conduit à la mise en place d'un banc autorisant de multiples impacts par rotation, en conditions opératoires [135]. Plus récemment, un banc d'essai visant à obtenir une meilleure compréhension des interactions frottantes sur plusieurs aubes avec des conditions mécaniques réalistes a été mis au point par Safran Aero Boosters [138], en collaboration avec l'Université de Liège.

Afin de bénéficier de résultats les plus réalistes possibles, la tendance actuelle est au dévelop-

pement de bancs à échelle 1 : 1 modélisant des roues aubagées complètes [11, 109, 127]. La mise en place de tels systèmes expérimentaux est aujourd’hui encore un défi, à la fois pour reproduire les conditions de fonctionnement extrêmes et pour modéliser plusieurs étages de roues aubagées. De plus, en raison du coût des bancs d’essai expérimentaux (environ 10 millions d’euros pour le projet PHARE<sup>2</sup> [11]) et de la durée des tests, des simulations numériques complémentaires sont indispensables. Par ailleurs, les phénomènes d’usure ne sont pas encore pleinement compris et sont intimement liés à la dynamique vibratoire de l’aube, car ils modifient les efforts de contact à l’interface. La modélisation de l’usure de l’abradable est ainsi particulièrement délicate [167], et par là même son intégration dans des simulations numériques de contacts aube/carter [45]. Les recherches expérimentales liées à l’abradable sont ainsi indissociables de la mise en place de stratégies numériques prédictives de la dynamique vibratoire de l’aube. Ceci est d’autant plus important que des ruptures d’aubes ont été observées expérimentalement, y compris en présence de revêtements abrasables [127].

### 3.3.2.3 Dynamique vibratoire

Dans les processus de conception actuels, une discrimination des aubes est réalisée à partir des résultats de simulations éléments finis prédictives de la réponse au contact. Cette discrimination n’est réalisée qu’*a posteriori*, après un processus de conception centré sur les performances aérodynamiques, qui tend le plus souvent à réduire les jeux aube/carter. De récentes recommandations de conception relatives aux performances aérodynamiques ont en effet mis en avant des formes d’aubes réduisant les jeux à mesure qu’elles vibrent [75]. Or, des considérations opposées ont récemment été mises en évidence dans la littérature pour mitiger les interactions de contact [40, 149]. La considération *a posteriori* des aspects structuraux non linéaires allonge donc considérablement le processus de conception et motive la prise en compte de ces aspects en amont.

De récents progrès ont été réalisés dans ce sens, par exemple en utilisant des critères existants liés aux considérations structurelles [39] comme contraintes d’un problème d’optimisation des performances au contact [40]. À la suite de ces travaux, un cadre d’optimisation automatisée [108] a été proposé pour améliorer la robustesse au contact d’aubes académiques.

### 3.3.3 Stratégies numériques prédictives

Le cadre numérique relatif aux simulations d’interactions de contact aube/carter dépend fortement du type d’interaction considéré. Dans le cas des interactions frottantes, les simulations

---

2. Plateforme macHines tournantes pour la mÂîtrise des Risques Environnementaux.

mettent en jeu une seule aube en rotation, le plus souvent à vitesse constante, dans un carter rigide ou flexible. Une modélisation très précise de l'interface aube/carter est requise [114], ainsi que la prise en compte de l'usure du revêtement abrasable au cours du temps. Par conséquent, les simulations sont généralement réalisées sur des modèles éléments finis industriels. Les simulations visent alors à résoudre un problème de dynamique transitoire décrit par une équation du mouvement de la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}_c(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \mathbf{f}_{\text{ext}}(t), \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\text{ddl}}}$  est le vecteur contenant les déplacements des  $n_{\text{ddl}}$  degrés de liberté (abrégiés ddl) du modèle à l'instant  $t$ ;  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de taille  $n_{\text{ddl}} \times n_{\text{ddl}}$  de masse, amortissement et rigidité du modèle éléments finis,  $\mathbf{f}_c \in \mathbb{R}^{n_{\text{ddl}}}$  est le vecteur des efforts de contact et  $\mathbf{f}_{\text{ext}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{ddl}}}$  celui des efforts externes. Ce dernier contient notamment les efforts dus à l'excitation.

Dans ce contexte, la prédiction des interactions de contact soulève plusieurs défis quant à la modélisation (section 3.3.3.1), la gestion du contact (section 3.3.3.2) et la résolution de l'équation du mouvement (section 3.3.3.3). La maîtrise de ces trois aspects a permis la mise au point de stratégies numériques prédictives précises, présentées dans la section 3.3.3.4.

### 3.3.3.1 Modélisation

Des modèles éléments finis très fidèles à plusieurs millions de degrés de liberté [145] sont requis pour la prédiction de la réponse vibratoire d'une roue aubagée et la représentation de l'interface de contact. Ces modèles ont un coût de calcul prohibitif [154] et imposent l'utilisation de méthodes de synthèse modale avancées [89] pour réduire la taille du système (3.2) à résoudre. En particulier, la robustesse numérique des modèles réduits de type Craig-Bampton [63] a été mise en évidence pour la représentation d'événements non réguliers localisés tels que le contact [34]. La recherche de fidélité conduit également à prendre en compte dans ces modèles réduits les effets centrifuges [171].

Étant donné les multiples phénomènes physiques à l'interface aube/carter, les modèles actuels visent de plus à prendre en compte l'usure de l'abrasable dans  $\mathbf{f}_c$  [114, 124, 189], ainsi que les chargements aérodynamiques, même de façon simplifiée [127], et les effets thermomécaniques [5, 36] dans  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ .

### 3.3.3.2 Gestion du contact

La résolution de l'équation (3.2) nécessite de prédire les efforts de contact  $\mathbf{f}_c$  à l'interface. La gestion numérique de contacts unilatéraux est encore aujourd'hui un champ de recherche très actif [177]. Elle requiert la connaissance des jeux aube/carter, calculés à partir de la distance des nœuds du modèle éléments finis à la surface de contact. Ce type de calcul, bien que coûteux, est bien maîtrisé dans les procédures industrielles [190].

Le calcul des efforts de contact est également requis ; de multiples algorithmes ont été développés dans ce but [89]. Les méthodes de pénalité sont couramment utilisées [123, 190] : l'effort  $\mathbf{f}_c$  est alors modélisé comme la force de réaction d'un ressort fictif comprimé dès lors qu'il y a pénétration dans la matière. En fonction de la pénétration, une loi de contact permet de calculer l'effort  $\mathbf{f}_c$  à partir de la raideur du ressort, appelé aussi facteur de pénalité. Dans le cas d'une loi bilinéaire, la raideur est constante et l'effort est donc proportionnel à la pénétration. Une régularisation de la loi de contact par le biais d'une raideur polynomiale peut également être considérée pour supprimer la non différentiabilité entre états de contact et de non-contact. Dans tous les cas, un choix judicieux du facteur de pénalité est requis pour minimiser les pénétrations résiduelles dans la matière et assurer un bon conditionnement numérique du problème.

Pour palier à cet inconvénient, les méthodes s'appuyant sur des multiplicateurs de Lagrange sont également utilisées [54] et se basent sur une contrainte de non-pénétration. Les conditions de Hertz-Signorini-Moreau<sup>3</sup> de la mécanique du contact sont utilisées [190] pour lier cette contrainte aux efforts de réaction  $\mathbf{f}_c$  engendrés par le contact à tout instant. Ceci conduit cependant à des discontinuités des champs de vitesse et d'accélération. Le calcul des efforts de contact a ainsi un impact significatif sur la prédiction des phénomènes et des vitesses d'interaction.

### 3.3.3.3 Paradigme de résolution

La résolution de l'équation du mouvement (3.2) est envisageable dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel.

**Intégration temporelle.** Plusieurs aspects motivent l'utilisation de méthodes d'intégration temporelles directes. D'une part, elles permettent de simuler la phase de régime transitoire, qui correspond à la naissance des interactions de contact. De grandes amplitudes vibratoires, voire des phénomènes divergents liés aux interactions de contact, ont en effet été

---

3. Ces conditions correspondent aux conditions de Karush–Kuhn–Tucker en optimisation.

observés lors de cette phase [127]. D'autre part, leur facilité d'implémentation autorise une gestion précise du contact. De multiples confrontations des résultats numériques avec des données expérimentales ont par ailleurs été réalisées, pour différents étages de la turbomachine [5, 33, 137]. Les solutions obtenues par intégration temporelle sont ainsi considérées comme solutions de référence dans l'industrie pour les analyses quantitatives prédictives.

Les coûts de calculs associés à l'intégration temporelle sont toutefois importants. Dans le cadre des systèmes non réguliers, l'équation du mouvement (3.2) peut être raide et un petit pas de temps est alors nécessaire pour assurer la convergence des méthodes. Pour une vitesse d'excitation fixée, lorsque l'amortissement est faible, le temps de simulation du régime transitoire est alors particulièrement long. De plus, comme la solution calculée dépend de conditions initiales telles que la vitesse d'excitation, de multiples simulations sur une large plage de vitesses sont requises pour quantifier adéquatement la réponse du système. La réalisation, *via* des méthodes d'intégration temporelle, d'études paramétriques et d'analyses qualitatives, telles qu'une étude de la stabilité des solutions de l'équation (3.2), est ainsi particulièrement coûteuse.

**Méthodes fréquentielles.** Les méthodes fréquentielles, pouvant prédire des solutions périodiques, voire quasi périodiques, sans calculer le régime transitoire, offrent *a priori* des coûts de résolution plus faibles que l'intégration temporelle. L'étude facilitée de la stabilité des solutions a également motivé leur développement pour la prédiction des vibrations non linéaires dans les turbomachines, en particulier pour l'interface arbre/palier [185]. Parmi ces méthodes, celle de l'équilibrage harmonique, qui consiste à décomposer le vecteur  $\mathbf{q}$  des ddl sur une base harmonique, a fait l'objet de multiples développements. Ces développements impliquent notamment la prise en compte de multiples harmoniques [145], de régimes quasi périodiques [84, 142] ou d'autres bases de décomposition que celle de Fourier [95].

Bien que la méthode de l'équilibrage harmonique soit à l'origine dédiée aux systèmes réguliers [143], des développements ont été proposés pour la prise en compte de non-régularités spécifiques (linéaires par morceaux) [102] ou d'interfaces frottantes [104]. Très récemment, une adaptation de la méthode spécifiquement pour l'interface non régulière aube/carter a été proposée [60]. Le traitement de non-régularités requiert en effet des développements *ad hoc*, la base de décomposition de Fourier n'étant pas adaptée à la représentation de quantités discontinues. Par ailleurs, les coûts de calcul augmentent de façon exponentielle avec le nombre de ddl non linéaires considérés.

Les deux approches sont ainsi complémentaires : l'intégration temporelle, considérée comme solution de référence quantitative dans l'industrie, renseigne sur le régime transitoire, tandis

que les méthodes fréquentielles sont bien adaptées pour la réalisation d'analyses qualitatives.

### 3.3.3.4 Outils *ad hoc*

En raison de l'absence de cadre théorique relatif à la caractérisation des interactions aube/carter et des défis de simulations évoqués, la mise en place de stratégies prédictives impose le développement d'outils *ad hoc*, dépassant le cadre des logiciels commerciaux [115]. Ces outils numériques résultent souvent de collaborations entre des compagnies et des universités, par exemple entre Rolls-Royce et l'Imperial College de Londres [189] ou entre Polytechnique Montréal et Safran [115]. De tels outils permettent actuellement de prédire précisément *comment* les aubes répondent au contact aube/carte, mais ne permettent pas encore d'expliquer l'origine de ces contacts, c'est-à-dire de caractériser *a priori* les interactions.

**Stratégie prédictive considérée.** Les simulations de contact réalisées dans le cadre du projet s'appuient sur une stratégie numérique existante [115], permettant de simuler les interactions de contact d'une aube seule avec le carter. Cette stratégie a été validée expérimentalement à différents étages de la turbomachine : compresseur basse pression [5, 35], haute pression [33] et turbine [137].

Un seul secteur de la roue aubagée peut être modélisé, ou une roue aubagée complète [38]. Pour chaque secteur, un modèle réduit de type Craig-Bampton [114] est construit pour diminuer le coût de calcul des simulations. Pour construire ce modèle,  $n_f$  nœuds frontière utilisés pour la gestion du contact sont choisis en sommet d'aube, et  $\eta$  degrés de liberté modaux sont considérés. Des détails sur la base de réduction sont donnés dans l'encart. Le raidissement centrifuge peut être directement intégré dans le modèle réduit [171].

Pour une vitesse de rotation  $\omega$  donnée, une simulation en intégration temporelle est réalisée à partir de conditions initiales nulles [115]. La gestion du contact est basée sur des multiplicateurs de Lagrange [54]. Le carter est supposé parfaitement circulaire en début de simulation puis progressivement déformé pour initier le contact. Le carter peut être considéré rigide [35] ou flexible [37], nu ou recouvert d'un revêtement d'abradable. L'usure de l'abradable est régie par une loi de déformation plastique [114]. Les phénomènes thermomécaniques peuvent de plus être pris en compte dans la simulation [5, 36].

#### Base de réduction de Craig-Bampton

La base de réduction modale considérée contient des modes statiques et des modes encastrés. Un mode statique est la déformée statique de l'aube obtenue en imposant un déplacement unitaire sur chaque degré de liberté d'un nœud frontière, tous les autres



degrés de liberté de l'aube étant encastres. La base contient donc  $3 \times n_f$  modes statiques. Un mode encastres correspond à la déformée modale d'un des  $\eta$  premiers modes libres de l'aube lorsque les nœuds frontière et le pied d'aube sont encastres. La base contient donc  $\eta$  modes encastres. Plus  $\eta$  est grand, plus la base est représentative du modèle complet.

### 3.3.4 Évolution des cycles de conception et de reconception des aubes de turbomachines

Le contexte de collaboration entre l'industrie et les laboratoires de recherche, qui a permis la mise en place de stratégies numériques prédictives pour les interactions aube/carter, a aussi permis le développement de telles stratégies pour d'autres interfaces non linéaires, telles que les interfaces frottantes en pied d'aube [103]. Pour chacune de ces interfaces, le degré de maturité atteint par les stratégies prédictives permet d'envisager leur intégration en amont dans les cycles de conception d'aubes. Une telle évolution des cycles de conception ambitieuse notamment de rééquilibrer l'importance des considérations structurelles et aérodynamiques.

Outre la conception, des enjeux importants peuvent se poser dans le cadre de procédures de reconception. En effet, la non-prise en compte d'interactions structurelles dans les cycles de conception des aubes peut avoir pour effet de réduire leur durée de vie à un point tel que des procédures de reconception s'avèrent parfois nécessaires. Leur impact économique est très important, par exemple lorsque des centrales doivent être arrêtées [88]. Lorsque la reconception est motivée par la présence de phénomènes structuraux non linéaires préjudiciables, la reconception de plusieurs formes d'aubes est requise. Les stratégies numériques prédictives permettent alors, dans le meilleur des cas, une discrimination relative des aubes en fonction de leur robustesse aux interactions étudiées.

Sur la base des outils actuels, le moyen le plus efficace de dégager des tendances de conception pour des aubes robustes aux interactions de contact est d'envisager la reconception d'aubes en prenant en compte ces interactions. L'intégration de stratégies numériques prédictives dans un processus de reconception itératif est d'abord présentée (section 3.3.4.1), suivie des défis et verrous scientifiques associés (section 3.3.4.2).

#### 3.3.4.1 Processus itératif

L'intégration de stratégies numériques prédictives dans le cycle de reconception d'aubes de turbomachines permet d'envisager des gains économiques et de performances considérables.

Un processus de reconception incorporant des stratégies numériques prédictives est schématisé sur la figure 3.7. Ce processus itératif repose sur trois piliers essentiels :

**une procédure de rétro-ingénierie**, qui permet de paramétrer des aubes industrielles avec un haut niveau de fidélité, tout en s'appuyant sur des paramètres géométriques intuitifs ayant une influence sur la réponse au contact de l'aube ;

**une procédure d'optimisation** itérative, supervisée par un optimiseur, qui vise à améliorer les performances en un nombre réduit de simulations numériques, potentiellement coûteuses. L'optimiseur est non intrusif vis-à-vis des simulations considérées. Il peut prendre en compte certaines exigences liées à la présence de non-différentiabilités dans le problème d'optimisation traité, comme l'éloignement à des discontinuités semblables à celles présentées dans la section 3.1. Idéalement, il peut résoudre des problèmes multiobjectifs ;

**des simulations numériques** qui reposent sur des stratégies numériques prédictives fidèles, multiphysiques (thermique, aérodynamique...), voire même multi non linéaires pour la prise en compte simultanée de plusieurs interfaces non linéaires [70]. À partir de quantités d'intérêt obtenues en sortie des stratégies prédictives, la fonction objectif et les contraintes du problème d'optimisation sont judicieusement formulées en fonction du phénomène non linéaire à maîtriser.

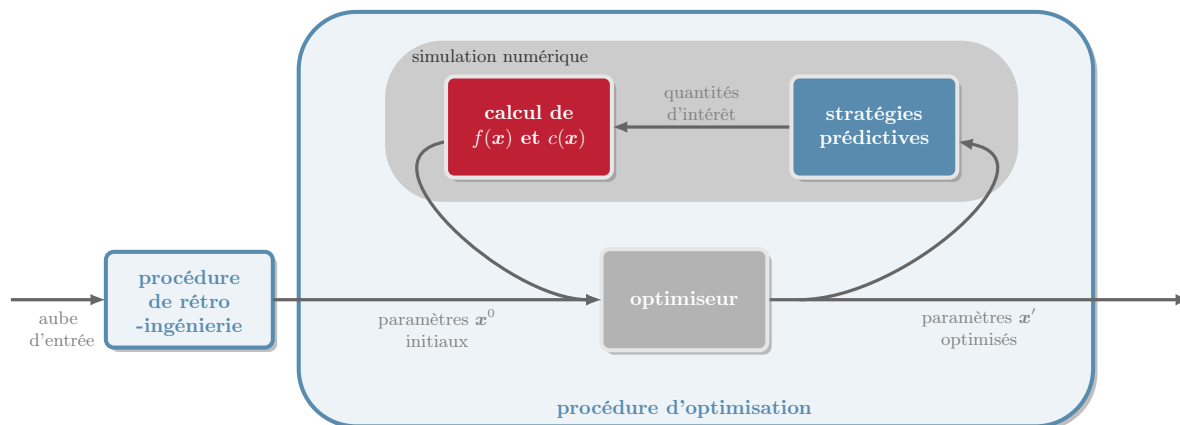


Figure 3.7 Processus de reconception d'aubes intégrant des stratégies numériques prédictives.

### 3.3.4.2 Défis et verrous scientifiques

Pour chacun des trois piliers du processus de reconception présenté sur la figure 3.7, des défis et des verrous scientifiques doivent encore être levés.

En ce qui concerne la **procédure de rétro-ingénierie**, il n'existe pas à la connaissance de l'auteure de procédure publiée reposant sur une paramétrisation dédiée aux phénomènes structuraux. Par ailleurs, des enjeux de confidentialité freinent souvent la publication de travaux dans ce domaine. Il y a donc un besoin important d'outils ouverts développés en dehors d'un contexte industriel et dédiés aux interactions structurelles.

Au niveau de la **procédure d'optimisation**, d'une part les stratégies prédictives ont un coût de calcul important, et d'autre part l'existence des dérivées de la fonction objectif et des contraintes n'est pas garantie, en raison de la non-régularité du système considéré. Même lorsque les dérivées existent, l'implémentation des stratégies prédictives au sein d'outils *ad hoc* dédiés rend difficile leur extraction. Par conséquent, les simulations numériques utilisées dans le processus de reconception peuvent être vues comme des boîtes noires. Outre ce contexte d'optimisation de boîtes noires où la non-disponibilité des dérivées est un défi en soi, le développement d'algorithmes d'optimisation spécifiques appuyés par une analyse de convergence représente un défi théorique d'envergure. Pour cette raison, l'algorithme **DiscoMads** a été développé dans le cadre de ce projet de recherche et présenté au chapitre 2. Cet algorithme représente une contribution originale visant à mieux outiller les concepteurs de systèmes mécaniques non réguliers.

Relativement aux **simulations numériques**, les défis majeurs sont relatifs à l'implémentation haute performance dans un environnement industriel. En effet, les stratégies numériques prédictives reposent sur des algorithmes complexes et parfois très sensibles du point de vue numérique. Ainsi, l'implémentation de certaines méthodes numériques, telles que la méthode de l'équilibrage harmonique, reste limitée à des codes de recherche pointus et n'est pas disponible dans les logiciels commerciaux. Ces aspects sont d'autant plus critiques que plusieurs questions de recherche actuelles s'articulent autour de la prise en compte de la variabilité de certains paramètres de conception dans un cadre d'étude stochastique requérant de multiples simulations. Cette variabilité est notamment due aux tolérances de fabrication [53], aux imperfections matériau [42], ou encore aux incertitudes sur les conditions opératoires, comme la vitesse de rotation. La compréhension des interactions non linéaires dans un contexte de roue aubagée désaccordée [136] représente également un enjeu de recherche récent nécessitant de nombreuses simulations.

En plus des défis évoqués, un verrou scientifique majeur concerne l'absence de critères de conception établis — condition nécessaire à la formulation de fonctions objectifs et contraintes — pour garantir la robustesse d'une aube à certains types d'interactions. Par exemple, dans le contexte des interactions aube/carter, il est possible de discriminer *a posteriori* plusieurs aubes [40] en se focalisant sur des quantités d'intérêt essentielles parmi lesquelles : les ampli-

tudes maximales de vibration sur une plage de vitesse donnée, les niveaux d'usure maximaux dans le revêtement abradable, ou encore les niveaux de contraintes dans l'aube. Cependant, bénéficier d'un processus itératif de reconception implique la formulation d'une fonction objectif et de contraintes d'optimisation pertinentes qui ne peuvent pas simplement être la concaténation de toutes ces quantités d'intérêt.

Pour résoudre ce problème, deux stratégies peuvent être considérées :

- (A) **la recherche de quantités d'intérêt pertinentes**, en envisageant de tirer profit de l'expérience acquise par l'analyse des résultats des stratégies numériques prédictives sur un grand nombre d'aubes. Il s'agit alors de déterminer un nombre limité de quantités d'intérêt permettant de caractériser le plus fidèlement possible la robustesse d'une aube aux interactions étudiées. Ces quantités d'intérêt peuvent alors être utilisées comme fonction objectif ou comme contraintes.
- (B) **la définition de fonctions objectif et contraintes substitués** pour permettre des gains importants en efficacité numérique de la procédure d'optimisation. Pour un type d'interaction donné, il s'agit de définir des quantités d'intérêt spécifiques issues de simulations substitués, c.-à-d. des simulations moins coûteuses que celles effectuées avec les stratégies prédictives. Ces quantités d'intérêt spécifiques sont directement utilisables comme fonctions objectif substitut et/ou contraintes substitut (voir définition 2.1.1).

### 3.4 Solution proposée

Dans le cadre de ce projet de recherche, un processus de reconception d'aubes robustes aux interactions de contact est proposé. Le cadre d'études est restreint aux interactions de contact aube/carter et les considérations aérodynamiques ne sont pas prises en compte. Les développements sont réalisés dans un contexte d'optimisation de boîtes noires. Le processus proposé est présenté dans la section 3.4.1. Afin de faciliter la lecture des chapitres suivants, des graphiques permettant l'analyse de quantités d'intérêt issues de la stratégie prédictive considérée sont présentés dans la section 3.4.2.

#### 3.4.1 Processus de reconception

Le processus de reconception proposé est présenté sur la figure 3.8. Il vise à modifier la géométrie d'une aube dans le but d'améliorer sa robustesse aux interactions de contact aube/carter. L'ensemble du processus satisfait à des exigences en matière d'automatisation, de coût de calcul et de robustesse.

À partir d'une aube d'entrée, une procédure de rétro-ingénierie permet d'identifier des para-

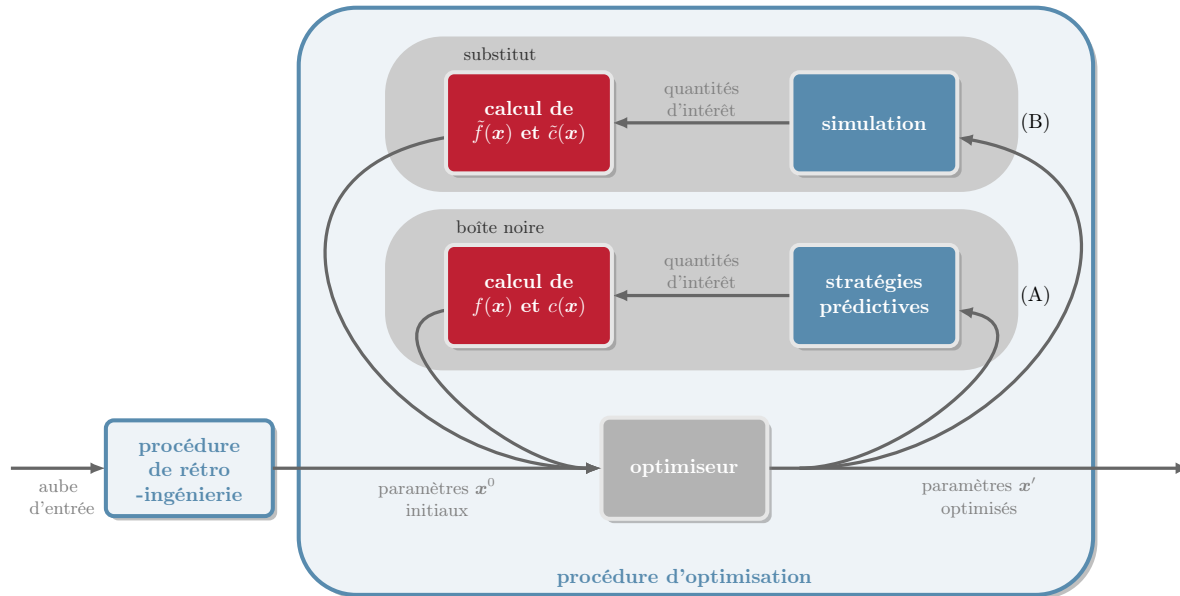


Figure 3.8 Processus de reconception proposé.

mètres représentant la géométrie de l’aube. Ces paramètres servent de point de départ pour une procédure d’optimisation itérative.

Concernant la procédure d’optimisation, deux problèmes d’optimisation peuvent être considérés : un problème principal et un problème substitut. Dans le cas du problème principal (A), les performances de l’aube sont quantifiées par une stratégie prédictive potentiellement coûteuse, qui constitue une boîte noire. Cette formulation peut ainsi être utilisée pour la recherche de quantités d’intérêt issues des stratégies prédictives. Dans le cas du problème substitut (B), les performances sont évaluées à partir d’une simulation substitut caractérisant spécifiquement la robustesse aux interactions de contact. Dans le cadre de ce projet, ces deux problèmes sont considérés exclusivement. L’optimiseur choisi est le logiciel NOMAD [112], qui donne accès à l’algorithme de recherche directe Mads [17]. Cet algorithme a déjà été utilisé avec succès pour la reconception d’aubes académiques [108]. À court terme, ce cadre permet d’envisager l’intégration de DiscoMads dans la procédure d’optimisation.

Concernant les simulations numériques, la stratégie prédictive s’appuie sur une stratégie de simulation déjà publiée [115], présentée dans la section 3.3.3.4. Les simulations substituts reposent quant à elles sur le calcul de la consommation de jeu d’une aube, une quantité dont les liens avec la robustesse au contact ont récemment été mis en évidence [39, 149].

### 3.4.2 Analyse de quantités d'intérêt issues de la stratégie prédictive

Plusieurs graphiques permettant d'analyser les quantités d'intérêt issues de la stratégie prédictive sont présentés. Ces graphiques sont tracés à partir des résultats de simulations effectuées sur une aube d'un rotor ouvert de la NASA : rotor 37<sup>4</sup> [151]. Les paramètres de simulation détaillés sont donnés en annexe F.1. Pour chaque vitesse de rotation  $\omega$  considérée, 200 tours sont simulés. La sortie de chaque simulation est un signal contenant les déplacements des nœuds frontière en sommet d'aube en fonction du temps.

#### 3.4.2.1 Graphiques d'intérêt pour une seule vitesse de rotation

Pour une simulation à vitesse constante  $\omega$ , les déplacements des nœuds frontière peuvent être analysés dans le domaine temporel, de manière directe, ou dans le domaine fréquentiel, par calcul d'un spectre. Le nœud en sommet d'aube au bord d'attaque est noté BA. Le déplacement radial du BA en fonction du temps est présenté sur la figure 3.9a avec le carter progressivement déformé, comportant ici deux lobes sur sa circonférence. Le régime transitoire est repérable par son aspect non stabilisé, de 0 à 0,07 s environ ; de grandes amplitudes de vibration sont atteintes durant cette phase. Le déplacement prédit sur les derniers tours de rotation, en régime permanent, est utilisé pour calculer le spectre présenté sur la figure 3.9b.

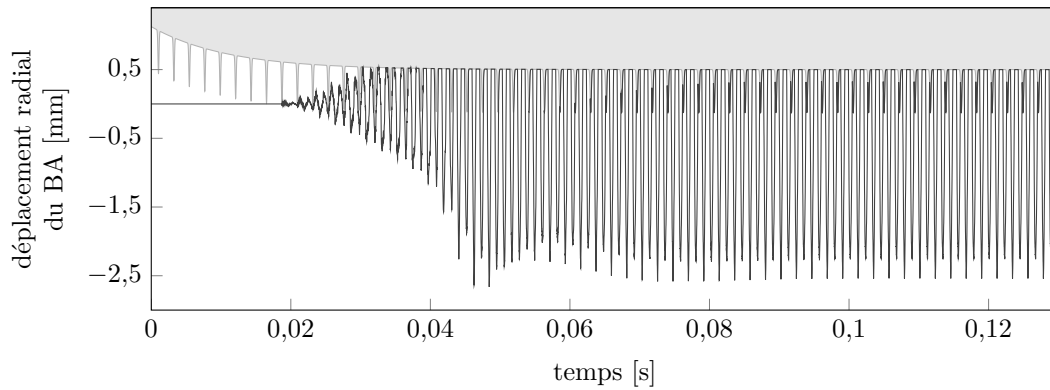
#### 3.4.2.2 Graphiques d'intérêt sur une plage de vitesses

L'analyse des résultats de plusieurs simulations sur une plage de vitesse  $\omega \in [\omega_{\min}; \omega_{\max}]$  est possible *via* une courbe de réponse en fréquence (abrégée CRF) représentant l'amplitude maximale atteinte en régime permanent en fonction de la vitesse  $\omega$ . La figure 3.10a présente la CRF obtenue par calcul de la norme infinie du déplacement radial  $\mathbf{d}_{r,BA}$  du BA en régime permanent sur le dernier tour de rotation. Un point (●) sur la courbe correspond au résultat d'une simulation. Ce type de graphique permet d'observer la réponse aux conditions simulées par rapport aux résonances linéaires prédites aux vitesses d'interaction linéaires. La vitesse d'interaction linéaire  $\omega_{1F}/4$  (---) est par exemple visible sur la figure, où  $\omega_{1F}$  est la pulsation propre du premier mode de flexion.

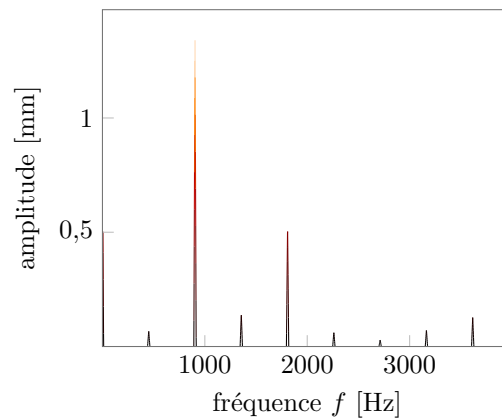
Afin de visualiser le contenu fréquentiel du signal en fonction de la vitesse d'excitation  $\omega$ , une carte d'interactions peut être tracée par juxtaposition des spectres calculés pour chaque valeur de  $\omega$  dans la plage. Une telle carte est présentée sur la figure 3.10b avec une échelle de couleur logarithmique : les amplitudes négligeables ( $< 10^{-5}$  mm) sont représentées en

---

4. modèle de l'aube librement accessible sur internet : [https://lava-wiki.meca.polymtl.ca/public/modeles/rotor\\_37/accueil](https://lava-wiki.meca.polymtl.ca/public/modeles/rotor_37/accueil)



(a) signal temporel (—) et carter (■)



(b) spectre

Figure 3.9 Exemples de graphiques d'intérêt pour une vitesse d'excitation  $\omega$ .

noir tandis que les amplitudes maximales sur la plage sont représentées en blanc. Plusieurs régimes moteurs  $rm_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  sont représentés (■) ainsi que les fréquences des modes propres visibles (■), correspondant ici au premier mode de flexion (1F) et au premier mode de torsion (1T). Les amplitudes de vibration principales sont réparties sur les régimes moteurs  $rm_4$  et  $rm_8$ . En particulier, le pic d'amplitude est atteint pour des fréquences proches de celle du premier mode propre et pour une vitesse de rotation d'environ  $1430 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'utilisation de DiscoMads sur un problème d'optimisation simplifié relatif aux vibrations d'aubes de moteurs d'avions illustre le fort potentiel d'amélioration des aubes à des interactions structurelles non linéaires. Suite à ce constat, une revue de littérature portant sur les interactions de contact aube/carter expose les verrous scientifiques associés au développement d'aubes robustes au contact. Elle met en évidence la nécessité de redéfinir

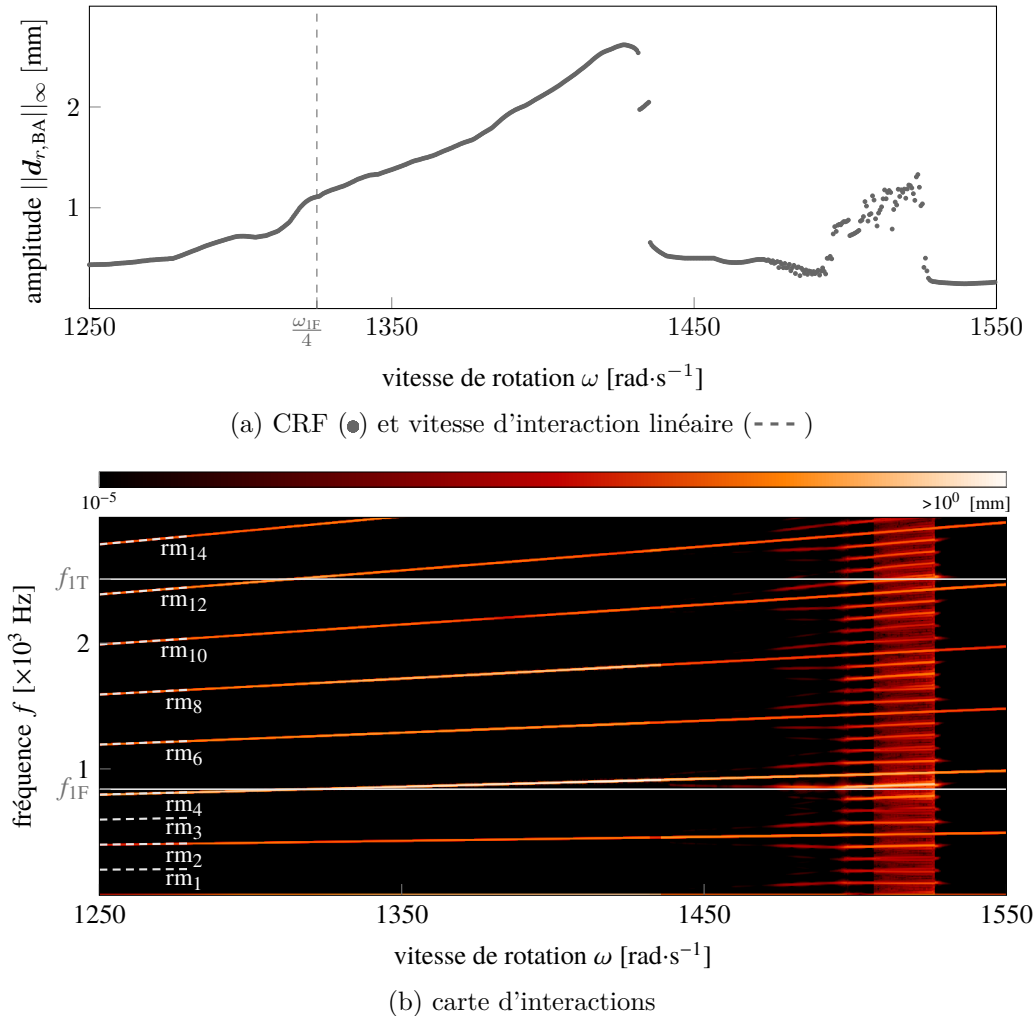


Figure 3.10 Exemples de graphiques d'intérêt sur une plage de vitesses d'excitation  $[\omega_{\min}; \omega_{\max}]$ .

les cycles de conception pour y inclure des stratégies numériques prédictives de phénomènes structuraux non linéaires dès les phases de pré-conception. En conséquence, un processus de reconception d'aubes est proposé pour résoudre un problème d'optimisation plus réaliste consistant à modifier la géométrie des aubes. Les contributions relatives à ce processus sont détaillées dans les chapitres suivants.



## CHAPITRE 4 OUTIL DE MODÉLISATION D'AUBES

L'obtention de paramètres représentant fidèlement une aube existante est primordiale pour envisager la reconception d'aubes réalistes et dégager à moyen terme des tendances de conception applicables dans un contexte industriel. Au sein du processus de reconception proposé sur la figure 3.8, la procédure de rétro-ingénierie joue donc un rôle crucial. De plus, dans la procédure d'optimisation, la génération de modèles CAO et de maillages éléments finis est requise avant chaque simulation numérique. Le processus de reconception proposé requiert ainsi deux phases de modélisation : une phase de rétro-ingénierie et une phase de génération d'aube. Ces deux phases reposent sur une paramétrisation des aubes qui constitue le fil conducteur du processus de reconception.

Le développement d'un outil de modélisation comportant les phases de rétro-ingénierie et de génération d'aube ainsi qu'une paramétrisation adaptée pose plusieurs défis. Le premier d'entre eux est la haute fidélité requise des modèles paramétrés obtenus par rétro-ingénierie puisque les simulations numériques au sein desquelles ils seront utilisés peuvent être numériquement très sensibles. De plus, la phase de génération doit être particulièrement robuste vis-à-vis des paramètres d'entrée pour éviter que les simulations échouent. À ces défis s'ajoutent des enjeux de confidentialité : les géométries d'aubes industrielles et les paramètres de conception associés sont en général hautement confidentiels. Dans ce contexte, les outils existants ont été développés par des industriels et ne peuvent pas être diffusés ni utilisés pour des activités de recherche académique.

L'objectif du chapitre est de présenter un outil de modélisation adapté au processus proposé de reconception d'aubes robustes aux interactions de contact. Cet outil inclut une paramétrisation d'aubes de compresseur adaptée à l'étude des phénomènes structuraux, une phase de rétro-ingénierie et une phase de génération de modèle CAO paramétré et de maillage éléments finis. L'outil est parfaitement compatible avec le processus de reconception envisagé. De plus, bien que ce processus soit lié à la robustesse aux interactions de contact, l'outil de modélisation développé a une portée plus large, pour la reconception d'aubes en général. La contribution du chapitre est résumée dans l'encart et les travaux réalisés ont conduit à un article de revue soumis<sup>1</sup>.

---

1. « Two-way blade modeling method for the structural redesign of compressor blades », S. Kojtych, C. Audet et A. Batailly

### Contribution

Un outil de modélisation d'aubes industrielles,  
focalisé sur des considérations structurelles.

Une revue de littérature des outils de modélisation dans un contexte de reconception est présentée dans la section 4.1. La méthodologie de modélisation sur laquelle repose l'outil proposé est présentée dans la section 4.2. La validation de l'outil couvre les sections 4.3 et 4.4 et sa polyvalence est illustrée dans la section 4.5. Un bilan des développements est finalement donné dans la section 4.6.

## 4.1 Revue de littérature : outils de modélisation dans un contexte de reconception

Dans la section 4.1.1, des éléments de contexte sont donnés sur les différentes étapes d'un processus de reconception d'aube. Les enjeux et prérequis associés à la paramétrisation utilisée dans le processus sont présentés dans la section 4.1.2. Des méthodes de rétro-ingénierie sont ensuite présentées dans la section 4.1.3 et constituent le point central de cette revue. La validation des outils de modélisation dans la littérature est abordée dans la section 4.1.4. À la suite de la présentation des éléments bibliographiques, les caractéristiques requises pour un outil de modélisation utilisé dans un processus de reconception sont présentées dans la section 4.1.5.

### 4.1.1 Contexte de reconception

La reconception d'une aube peut résulter de multiples facteurs tels que des changements de régulation, l'évolution du marché [179], des problèmes de performances [121] ou une réduction inhabituelle de la durée de vie de l'aube [88], voire un bris, dans le pire des cas. Quel que soit le contexte, un processus de reconception d'aube générique s'articule autour de trois étapes :

- ① **la rétro-ingénierie**, qui vise à obtenir un modèle paramétré de l'aube d'entrée, fournie par exemple sous la forme d'un nuage de points ou d'un modèle CAO ;
- ② **la mise à jour**, qui consiste à modifier les paramètres du modèle en vue d'améliorer ses performances. Elle peut être effectuée empiriquement à partir des résultats de précédentes études ou de l'expertise des concepteurs [40, 88, 179]. Elle peut aussi être effectuée *via* une procédure d'optimisation itérative faisant appel à des simulations successives, comme c'est le cas pour le processus de reconception proposé (figure 3.8). Des solutions non conventionnelles du domaine des variables peuvent ainsi être obte-

nues. Pour des optimisations centrées sur les aspects aérodynamiques, des approches adjointes nécessitant les dérivées de forme par rapport aux paramètres géométriques sont souvent employées [6], tout comme des algorithmes génétiques [144]. Récemment, des optimisations structurelles ont été effectuées avec une méthode d'optimisation de boîtes noires dédiée à des simulations coûteuses pour lesquelles les dérivées des quantités d'intérêt sont difficilement accessibles [108];

- ③ **l'analyse** de l'aube mise à jour, à partir de simulations numériques [40, 121] ou de tests expérimentaux en conditions opératoires [88, 179]. Cette étape est souvent le lieu d'analyse de phénomènes qui ne sont pas explicitement pris en compte lors de l'étape de mise à jour [40, 179]. Une vérification des performances peut également être requise pour valider la pertinence de modifications empiriques [88, 121], ou lorsque les modifications sont issues d'une mise à jour itérative impliquant des simulations substituts [108, 144]. Ce dernier point est en particulier pertinent pour le processus de reconception proposé.

Ces trois étapes sont intrinsèquement liées par la paramétrisation choisie pour décrire une aube.

#### 4.1.2 Paramétrisation

La paramétrisation désigne l'ensemble des paramètres et relations géométriques associées utilisés pour décrire la forme de l'aube. Des critères orientant le choix d'une paramétrisation sont présentés, suivis d'une brève synthèse des types de paramétrisations.

**Critères de choix.** Selon l'étape du processus de reconception, la paramétrisation joue un rôle différent. Les paramètres sont utilisés à la fois pour : **(1)** décrire l'aube d'entrée à l'étape de rétro-ingénierie, **(2)** modifier l'aube lors de l'étape de mise à jour et **(3)** garantir la conformité des aubes obtenues en matière d'ingénierie à l'étape d'analyse. La paramétrisation doit ainsi satisfaire des exigences relatives à chaque étape :

- rétro-ingénierie : la paramétrisation choisie doit être suffisamment polyvalente pour représenter précisément l'aube d'entrée;
- mise à jour : la paramétrisation doit permettre de générer des formes d'aubes variées à partir d'un faible nombre de paramètres [147]. En effet, dans le cas d'une procédure d'optimisation itérative, seuls quelques paramètres sont sélectionnés comme variables d'optimisation pour des raisons de coût de calcul. Les variables d'optimisation peuvent aussi être des quantités d'intérêt spécifiques, telles que des quantités aérodynamiques. Dans ce cas, la paramétrisation choisie doit permettre d'obtenir aisément des relations

de mappage entre ces quantités d'intérêt et les paramètres [117]. D'un point de vue des performances, la paramétrisation doit permettre la génération de modèles CAO et de maillages avec un faible coût numérique, en particulier dans le cas d'une procédure d'optimisation itérative. Enfin, dépendamment de l'optimiseur considéré, les dérivées de forme par rapport aux paramètres peuvent être requises [6], comme dans le cas de l'optimisation avec solveur adjoint [116, 187, 188];

- analyse : les paramètres doivent avoir un sens intuitif pour être aisément manipulables par les concepteurs et faciliter leur interprétation. De plus, des contraintes géométriques issues de considérations d'ingénierie doivent être facilement imposables aux paramètres. En particulier, les courbes et surfaces générées doivent satisfaire certaines conditions de régularité [6]. Ce point est notamment requis pour éviter des phénomènes de séparation de flux dus à des discontinuités de courbure [100].

Le degré des exigences imposées à chaque étape est hautement dépendant du contexte de la reconception; l'emphase peut par exemple être mise sur la recherche de représentativité à l'étape de rétro-ingénierie et/ou l'exploration de géométries variées lors de l'étape de mise à jour.

**Principes de paramétrisation.** Les paramétrisations d'aubes peuvent être divisées en deux grandes familles : les paramétrisations par déformation et les paramétrisations constructives. Dans le cas des paramétrisations par déformation [174, 188], les paramètres représentent des perturbations par rapport à un modèle CAO ou un maillage d'origine. Il est souvent difficile dans le cas de ces méthodes de prendre en compte des contraintes géométriques [6], ce qui peut conduire à des géométries non réalisables au sein de la procédure d'optimisation. Dans le cas des méthodes constructives [6, 108], les paramètres permettent la génération d'un modèle à partir de zéro. Ces méthodes sont bien adaptées à la prise en compte de contraintes géométriques et sont très utilisées dans le cadre de l'optimisation d'aubes [6, 108, 148]. Une paramétrisation constructive est donc privilégiée dans le cadre du processus de reconception proposé.

Dans le cas d'une paramétrisation constructive, une aube est généralement définie par un certain nombre de sections, résultant des intersections de l'aube avec des surfaces réparties sur sa hauteur. Des surfaces coniques sont couramment utilisées afin de suivre le trajet des lignes de courant [65]. À titre illustratif, la figure 4.1 présente une aube du rotor 37 [151] de la NASA, nommée par la suite aube rotor 37, définie ici par trois sections. Une paramétrisation complète définit l'empilement des sections, c'est-à-dire leurs positions les unes par rapport aux autres, ainsi que la forme de chaque section développée, appelée profil. Ce type de paramétrisation est directement issue des considérations aérodynamiques longtemps utilisées

pour la conception des aubes : la forme des profils joue en effet un rôle prépondérant dans la création du différentiel de pression. Les termes usuels désignant différentes parties d'un profil sont illustrés sur la figure 4.2 sur le profil en pied d'aube rotor 37 ;  $\omega$  indique le sens de rotation.

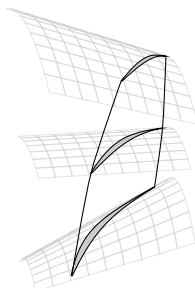


Figure 4.1 Aube rotor 37 décrite par trois sections en pied, à mi-hauteur et en sommet d'aube.

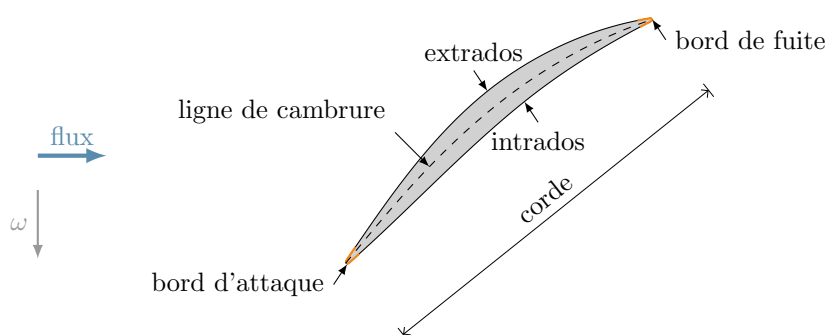


Figure 4.2 Terminologie relative à un profil d'aube de compresseur, illustrée sur le profil en pied d'aube rotor 37.

**Paramétrisations constructives.** Une grande variété de paramétrisations constructives d'aubes existe dans la littérature ; une vingtaine d'entre elles ont été récemment listées [6]. Concernant les profils, les paramétrisations les plus récentes reposent sur des courbes de type NURBS [144, 153, 168] ou B-splines [30, 94, 117, 147]. Ces courbes sont aisément accessibles dans les logiciels de CAO et permettent de satisfaire les exigences de régularité imposées. De plus, elles facilitent la mise à disposition des dérivées de formes [6], qui peuvent être requises dans la procédure d'optimisation. Pour paramétrer ces courbes, des paramètres purement mathématiques ou des paramètres physiques peuvent être utilisés. L'utilisation de paramètres mathématiques, tels que les points de contrôle des courbes [117] ou des distributions d'épaisseur [6], permet un contrôle très fin de la géométrie, mais peut conduire à des modèles à

grand nombre de paramètres. L'utilisation de paramètres physiques explicites, tels que des longueurs ou des angles dont l'influence est plus globale, conduit en général à des modèles comportant moins de paramètres, bien adaptés à une procédure d'optimisation [108]. Par conséquent et en raison de leur sens intuitif, des paramètres physiques sont privilégiés pour le processus de reconception proposé.

Concernant l'empilement des sections, l'inclinaison et la flèche sont deux paramètres couramment utilisés [43, 75, 149] pour décrire le positionnement d'une section selon deux directions orthogonales. Plusieurs définitions de la flèche et de l'inclinaison coexistent dans la littérature [149, Fig. 15], en fonction des directions choisies. Lorsque l'axe de rotation et l'axe tangentiel du repère de la turbomachine sont choisis comme directions, les termes de flèche axiale et d'inclinaison tangentielle sont utilisés. C'est la convention adoptée pour la paramétrisation proposée, dont les paramètres d'empilement sont détaillés dans la section 4.2.1.2. Une autre convention courante est d'utiliser la corde du profil pour définir la flèche, et une direction perpendiculaire à la corde pour définir l'inclinaison, alors qualifiée de diédrale.

L'influence prépondérante de la flèche et de l'inclinaison sur le rendement a été mise en évidence dans de récentes études [94, 120, 169, 170]. Ces paramètres permettent de plus de modifier la forme de l'aube avec un nombre réduit de quantités significatives. L'influence du vrillage, décrivant la rotation des profils les uns par rapport aux autres, a également été étudiée [157] d'un point de vue aérodynamique. Le développement de paramétrisations constructives est en effet presque exclusivement lié à l'optimisation des performances aérodynamiques. Une seule paramétrisation développée pour des optimisations structurelles sur des aubes académiques, modélisées par des sections planes, a été recensée dans la littérature [108].

### 4.1.3 Rétro-ingénierie

Le terme *rétro-ingénierie* (*reverse engineering* en anglais) est défini génériquement comme un processus visant à analyser un objet existant dans le but de le copier [83, p. 553]. Pour une aube, ce terme désigne généralement l'obtention d'un modèle CAO à partir d'un nuage de points représentant l'aube [117, 168]. Pour certains auteurs, la *rétro-ingénierie* englobe également la déduction des intentions du concepteur de l'aube [41, 129], c'est-à-dire l'identification de certains paramètres de conception clés. Dans cette section, le terme *rétro-ingénierie* englobe ces différents aspects et est défini comme l'obtention d'un modèle CAO paramétré à partir de données d'entrées décrivant la géométrie d'une aube.

La section 4.1.3.1 présente les différents contextes dans lesquels une *rétro-ingénierie* peut être requise. La section 4.1.3.2 détaille les entrées possibles d'une *rétro-ingénierie* et les modèles paramétrés obtenus en sortie. L'obtention de ces modèles paramétrés est réalisée *via* des

méthodes d'identification de paramètres, décrites dans la section 4.1.3.3.

#### 4.1.3.1 Contexte

La rétro-ingénierie est requise dans trois situations principales :

- a. il n'existe pas de modèle CAO de l'aube ;
- b. il existe un modèle CAO mais celui-ci ne correspond plus à l'aube, ou il y a une incertitude sur la fidélité du modèle ;
- c. il existe un modèle CAO fidèle mais ses paramètres sont inaccessibles ou ne sont pas adaptés à l'usage souhaité.

Ces situations peuvent se produire à différentes étapes du cycle de vie d'une aube. Lors de la fabrication, certaines opérations de réusinage peuvent être nécessaires pour enlever les bavures. Il est alors indispensable d'obtenir un modèle de l'aube comportant ces bavures, qui sont difficilement prévisibles [66] (situation **a.**). Lors de l'inspection et de la vérification de la qualité [55], la rétro-ingénierie permet de s'assurer que l'aube est bien dans les intervalles de tolérance exigés par le cahier des charges. Dans ce cas, il est non seulement nécessaire de modéliser la géométrie de l'aube, mais aussi d'extraire les quantités en lien avec le cahier des charges (situations **b.** et **c.**). Lors d'opérations de réparation, la rétro-ingénierie est indispensable pour modéliser l'aube en service, usée ou abîmée [41, 153] (situations **b.** voire **c.**). Enfin, lors de la reconception, il se peut qu'il n'existe même pas de modèle CAO de l'aube en service (situation **a.**), par exemple dans le cas de vieux équipements ou lorsque les équipements en service appartiennent à un autre fabricant [49]. Plus souvent, le constructeur possède un modèle paramétré de l'aube, dont les paramètres ne sont pas nécessairement pertinents pour la reconception envisagée [195] (situation **c.**). Ce modèle n'est en général pas accessible au public pour des raisons de confidentialité. Dans un contexte de recherche académique, seuls des modèles CAO d'aubes ouvertes sont alors disponibles.

#### 4.1.3.2 Entrées et sorties

Les possibles entrées d'une rétro-ingénierie mentionnées dans la littérature sont :

(E1) systématiquement, un nuage de points, représentant la surface externe de l'aube. Ce nuage est en général obtenu par des mesures expérimentales, typiquement avec un laser [106]. Il peut également être issu d'un maillage [168] ou de l'échantillonnage d'un modèle CAO. Plus rarement, dans le cas d'aubes de turbines creuses typiquement, des mesures tomographiques complémentaires permettent de représenter les cavités [41]. Le

nuage de points est généralement divisé en plusieurs sections, réparties sur la hauteur d'aube ;

- (E2) des courbes paramétrées décrivant approximativement l'allure de chaque section. Ces courbes, dites courbes modèles, sont requises par la plupart des méthodes d'identification de paramètres, bien que rarement mentionnées comme des entrées en tant que telles. Les paramètres de ces courbes peuvent être obtenus empiriquement [6, 117] à partir de l'expérience du concepteur, ou à partir d'un modèle CAO nominal [66, 107, 153] ;
- (E3) des résultats issus de simulations numériques, dans de rares cas. Très récemment, des méthodes incluant en entrée les résultats de simulations CFD (de l'anglais *Computational Fluid Dynamics*) en plus des nuages de points de l'aube ont été proposées [194].

En sortie de rétro-ingénierie, un modèle CAO est obtenu. Les courbes et surfaces constituant ce modèle sont nécessairement paramétrées, bien que les paramètres ne soient pas toujours explicites et accessibles pour l'utilisateur. C'est par exemple le cas pour les modèles obtenus à partir de méthodes de rétro-ingénierie implémentées dans des logiciels CAO. Trois types de modèles paramétrés, de complexité croissante, sont distingués :

- (M1) un modèle CAO dont les paramètres sont soit inaccessibles à l'utilisateur [41], soit purement mathématiques [144, 153, 168]. Ce type de modèle est courant lorsque la rétro-ingénierie vise uniquement à obtenir un modèle CAO fidèle de l'aube, sans exigences particulières relatives aux choix des paramètres ;
- (M2) un modèle CAO s'appuyant sur des paramètres mathématiques, mais auxquels s'ajoutent des quantités physiques identifiées *a posteriori*, telles que l'inclinaison de l'aube ou sa flèche. La connaissance de ces quantités vise souvent à retrouver les intentions de conception originelles. Ceci peut être fait pour calculer une CAO lissée, insensible aux erreurs de mesures sur les entrées [130], ou pour analyser des tendances de conception sur plusieurs aubes [97]. Toutefois, les quantités physiques identifiées ne permettent pas nécessairement une mise à jour dynamique du modèle CAO paramétré ;
- (M3) un modèle CAO pouvant aisément être mis à jour à partir de paramètres physiques. Ce type de modèle est particulièrement pertinent dans un contexte de reconception et peut inclure des paramètres d'ingénierie spécifiques à l'application considérée, tels que des paramètres aérodynamiques. Ces paramètres aérodynamiques peuvent par exemple être calculés à partir de paramètres géométriques *via* une règle de conception simplifiée qui facilite ainsi la mise à jour du modèle [117]. Plus récemment, dans le cadre d'optimisations structurelles, un modèle paramétré d'aube académique a été proposé, pour lequel les paramètres des profils sont obtenus par une méthode d'identification validée



avec un haut niveau de fidélité [108]. Le besoin de modèles paramétrés compatibles avec différentes étapes du processus de conception a par ailleurs été souligné pour la fabrication de rouets, impliquant des modèles CAO, CFD et de fabrication assistée par ordinateur [195]. À la connaissance de l’auteure, il n’existe pas de modèle paramétré complet d’aube industrielle dédié à la reconception d’aubes robustes aux interactions de contact.

### 4.1.3.3 Méthodes d’identification

L’identification des valeurs pertinentes de paramètres du modèle de sortie en fonction des données d’entrée constitue le cœur de la rétro-ingénierie. Cette identification se traduit en général par la résolution d’un problème d’optimisation, parfois nommé *blade matching problem* [6] en anglais. Ce problème est très souvent résolu à l’échelle des profils, pour identifier des courbes paramétrées (*curve fitting* en anglais) [9, 108, 194]. De récents travaux [6] proposent par ailleurs de résoudre le problème directement à l’échelle des surfaces (*surface fitting* en anglais).

Dans sa forme la plus simple, le problème d’identification est résolu sans contraintes, généralement lorsqu’un modèle de type (M1) est souhaité en sortie. Pour résoudre ce problème, de nombreuses méthodes ont été proposées ces trente dernières années [153] et sont disponibles dans la plupart des logiciels CAO commerciaux, sous la forme d’outils d’interpolation ou de lissage. Peu de détails sur l’implémentation de ces méthodes sont toutefois fournis pour des raisons de propriété industrielle, ce qui freine les développements associés dans un contexte de recherche académique. De récents efforts visent à mettre à disposition ces méthodes *via* des codes en libre accès [168].

Dans un contexte industriel, les surfaces constituant le modèle CAO doivent satisfaire un certain nombre de contraintes géométriques, notamment de régularité. Un problème d’identification contraint doit alors être résolu (*constrained fitting* en anglais) [6, 117, 118, 144]. Étant donné la variété de contextes de rétro-ingénierie d’aube, la littérature liée aux méthodes d’identification est très hétérogène. Bien que la classification proposée ne puisse couvrir tous les cas de figure, trois grands types de méthodes ont été identifiés :

- les méthodes de recalage (*registration* en anglais), qui requièrent des courbes modèles des profils en entrée [41] (E2) en plus d’un nuage de points (E1). Pour chaque profil, le recalage consiste à appliquer une transformation géométrique à la courbe modèle pour la faire coïncider au mieux à un profil cible, issu du nuage de points d’entrée. Le but des méthodes de recalage est de trouver une transformation rigide<sup>2</sup> ou affine qui minimise

---

2. Une transformation rigide est une transformation géométrique qui préserve la distance euclidienne et

les écarts entre la courbe modèle et le profil cible. Plusieurs critères [118] sont requis pour le bon fonctionnement d'une méthode de recalage, incluant un prétraitement du nuage de point d'entrée pour le séparer en différents profils (opération de *segmentation* en anglais), triés selon un ordre de parcours. Un échantillonnage uniforme des points est également requis, ce qui n'est pas toujours possible en pratique : pour certains processus de fabrication, l'état de surface au bord d'attaque et au bord de fuite ne permet par exemple pas d'acquérir des mesures à ces endroits [66] ;

- les méthodes de recalage non rigides. Ces méthodes impliquent généralement une étape de recalage permettant d'obtenir une courbe paramétrée proche du profil cible, suivie d'une étape de déformation de cette courbe pour l'ajuster finement au profil cible. Cette déformation est le plus souvent réalisée par déformation libre (*Free Form Deformation* en anglais) [66, 116, 153], une méthode qui consiste à déplacer les points de contrôle des courbes. Des contraintes peuvent être intégrées dans l'étape de déformation pour préserver les propriétés du profil cible [66]. Ces méthodes ne requièrent pas de tri du nuage de points d'entrée et ont l'avantage d'être insensibles aux bruits et erreurs de mesure. De plus, il n'est pas requis que les courbes modèles fournies en entrée soient proches des profils cibles. Ces méthodes ont été utilisées avec succès dans le cas de nuages de points incomplets [66] ;
- des méthodes sans recalage, incluant uniquement une déformation des courbes modèles [6, 108]. Le problème d'identification est résolu itérativement. À chaque itération, les paires de points les plus proches entre le profil cible et la courbe modèle sont d'abord repérées, puis une fonction objectif quantifiant les écarts au sein de chaque paire est calculée. Ces méthodes sont particulièrement flexibles et aisées à implémenter.

Enfin, plusieurs travaux de rétro-ingénierie évoquent des méthodes d'identification qui s'apparentent à un des trois types précédents, tout en utilisant certains paramètres de conception clés pour améliorer le modèle paramétré obtenu. Par exemple, une méthode permettant d'identifier la flèche et l'inclinaison de l'aube a été proposée [129] et s'appuie sur des principes de conception usuels relatifs à ces quantités pour corriger la position des sections et ainsi s'affranchir des erreurs de mesures [130]. Plus récemment, des résultats de simulation CFD ont été utilisés lors de la résolution du problème d'identification afin d'obtenir un modèle paramétré plus réaliste [194].

---

peut s'exprimer comme une combinaison de translations, rotations et/ou symétries.

#### 4.1.4 Validation

La validation d'un outil de modélisation peut inclure : (1) la validation de la fidélité des phases de génération et rétro-ingénierie et (2) la validation de la pertinence de ces phases au sein du processus de reconception.

##### Fidélité

La notion de fidélité est hautement dépendante du contexte de reconception [168]. Lorsqu'une copie digitale d'une aube existante est requise, de faibles écarts géométriques entre l'aube d'entrée et le modèle CAO obtenu par rétro-ingénierie sont recherchés, caractérisant une bonne fidélité géométrique. Lorsque la rétro-ingénierie d'une aube abîmée est considérée en revanche, la recherche d'une haute fidélité géométrique n'est pas souhaitable en raison des écarts entre l'aube et le modèle CAO nominal. Dans ce cas, de faibles écarts sur certains paramètres de conception clés sont recherchés. Il peut s'agir de paramètres liés à la loi d'empilement de l'aube [130] ou de paramètres d'ingénierie, comme les fréquences propres. Ce type de fidélité étant peu traité dans la littérature, le terme de fidélité d'ingénierie est choisi pour la désigner.

Quel que soit le type de fidélité considéré, la validation de la fidélité des aubes obtenues par rétro-ingénierie est assez peu documentée. Dans certains cas, lorsqu'un modèle approximatif est recherché, cette validation est même absente [144]. Plus généralement, une validation de la fidélité géométrique est proposée. Elle s'appuie sur des critères géométriques permettant de quantifier les similitudes entre les modèles CAO de l'aube d'entrée et de l'aube paramétrée obtenue par rétro-ingénierie, à l'échelle globale [6, 168, 195] ou à l'échelle des profils [66, 117, 153]. Ces critères géométriques sont généralement calculés par des logiciels commerciaux et leur expression analytique est rarement donnée. Enfin, de récents travaux [41] ont souligné l'importance de critères de validation allant au-delà des considérations géométriques, tels que des propriétés aérodynamiques, structurelles ou liées à la fabrication. Ces critères, permettant de valider la fidélité d'ingénierie, sont à l'heure actuelle très rarement utilisés [49].

##### Pertinence

Un outil de modélisation pertinent doit permettre de générer des formes améliorées lors de l'étape de mise à jour. Si la phase de rétro-ingénierie renvoie un modèle paramétré avec des paramètres physiques, une vérification au cas par cas de l'influence de ces paramètres sur les phénomènes d'intérêt peut être effectuée. Il peut s'agir par exemple de vérifier la capacité des paramètres à modifier le flux [9] ou la qualité d'un processus d'usinage [195]. Par ailleurs,

une grande robustesse de la phase de génération est requise, pour générer sans erreurs de multiples modèles au sein de la procédure d'optimisation. Très peu de travaux s'attachent cependant à démontrer cette robustesse sur des cas de reconceptions concrets [66, 195].

#### 4.1.5 Bilan

Étant donné le contexte de reconception et les enjeux mis en évidence en matière de paramétrisation, rétro-ingénierie et validation, un outil de modélisation adapté à un processus de reconception d'aube doit satisfaire plusieurs critères. Ces critères sont formellement définis ci-après pour la suite du document :

**fidélité** : l'aube d'entrée et l'aube paramétrée obtenue par rétro-ingénierie ont des comportements mécaniques similaires, ce qui requiert non seulement une similitude des modèles CAO mais aussi des propriétés dynamiques ;

**résolution** : un changement mineur de paramètres est reflété par un changement de géométrie sur le modèle CAO, et inversement ;

**robustesse** : le modèle CAO et le maillage éléments finis sont générés sans erreurs pour une large plage de paramètres ;

**interprétabilité** : les paramètres ont une signification géométrique ou d'ingénierie intuitive ;

**polyvalence** : la paramétrisation est conforme aux standards du domaine, tels que les contraintes de régularité des surfaces, et compatible avec la procédure d'optimisation ;

**efficacité numérique** : le temps d'exécution des phases de rétro-ingénierie et de génération est faible devant celui des simulations effectuées lors de l'étape de mise à jour.

## 4.2 Méthodologie de modélisation

La méthodologie de modélisation proposée, comprenant une paramétrisation et des phases de génération et rétro-ingénierie, est implémentée dans un outil numérique. La présentation de la méthodologie dans cette section s'appuie sur la structure de l'outil, constitué de trois modules :

- GEN : un module de génération de modèle CAO à partir des paramètres d'une aube ;
- MAI : un module de génération de maillage éléments finis à partir d'un modèle CAO ;
- RET : un module de rétro-ingénierie identifiant les paramètres d'une aube à partir d'un modèle CAO.

La position de ces modules au sein du processus de reconception proposé est schématisée sur la figure 4.3. L'outil proposé tient compte des exigences de robustesse, d'efficacité numérique

et d'automatisation relatives à ce processus. De plus, afin d'assurer la portabilité de l'outil dans des environnements académique et industriel, celui-ci est écrit en langage Python 3 et les modèles CAO et maillages éléments finis sont générés avec le logiciel ouvert Salome<sup>3</sup>.

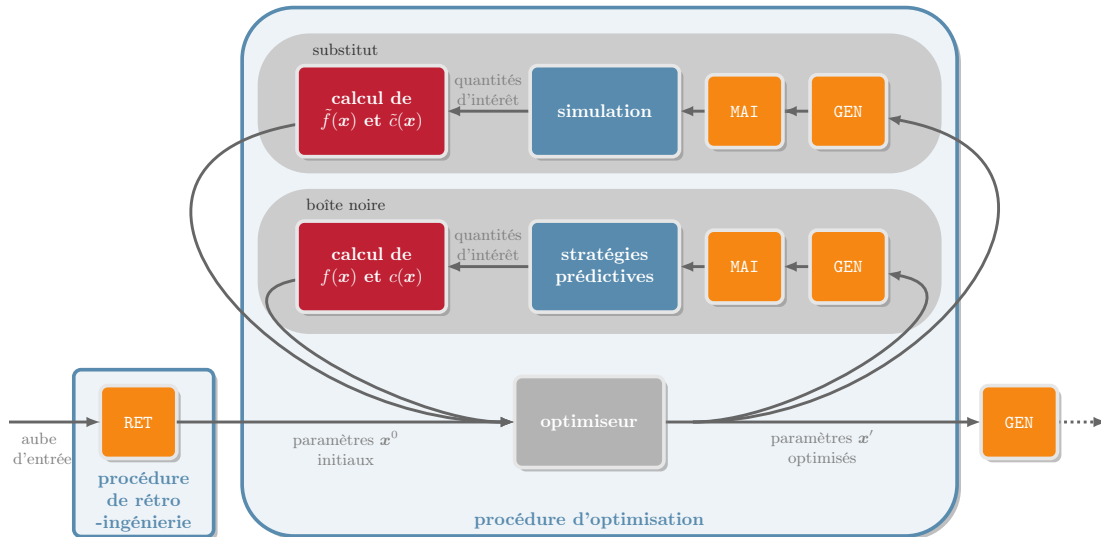


Figure 4.3 Modules de modélisation (■) au sein du processus de reconception proposé.

La paramétrisation proposée est présentée dans la section 4.2.1, la phase de génération dans la section 4.2.2 (modules GEN et MAI) et la phase de rétro-ingénierie dans la section 4.2.3 (module RET).

#### 4.2.1 Paramétrisation

La paramétrisation décrit les intersections de l'aube avec  $n_{\text{sec}}$  surfaces coniques. Ces intersections sont appelées par la suite sections coniques. Lorsque la surface conique est en fait un cylindre, le terme section cylindrique est préféré. Une aube est modélisée par  $n_{\text{sec}}$  sections réparties sur sa hauteur et numérotées par l'indice  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$  du pied au sommet d'aube. Une section développée est appelée profil. Chaque section est définie par des paramètres de section, répartis en deux types : les paramètres d'empilement et les paramètres de profil. Les paramètres d'empilement contrôlent la position de la section et la définition de la surface conique associée. Les paramètres de profil décrivent la forme du profil. Les paramètres des  $n_{\text{sec}}$  sections constituent les paramètres de l'aube.

Différents repères sont introduits dans la section 4.2.1.1 pour définir les paramètres de l'aube. Les paramètres d'empilement sont définis dans la section 4.2.1.2 et les paramètres de profil

3. <https://www.salome-platform.org/>

dans la section 4.2.1.3. L'ensemble des paramètres de section est résumé dans le tableau 4.1.

#### 4.2.1.1 Notations

Soit  $\mathbf{t}^i$  un point de référence de la section  $i$ , choisi de la même manière pour chaque section (par exemple, le centre de gravité du profil dans un repère donné). En trois dimensions, un repère cartésien est noté  $\mathcal{R}_\bullet = (\mathbf{o}_\bullet, \mathbf{e}_{x,\bullet}, \mathbf{e}_{y,\bullet}, \mathbf{e}_{z,\bullet})$ , où  $\mathbf{o}_\bullet$  est l'origine du repère,  $\mathbf{e}$  indique un vecteur unitaire, et les coordonnées d'un point  $\mathbf{m}$  dans ce repère sont notées  $\mathbf{m}|_{\mathcal{R}_\bullet} = (m_{x,\bullet}, m_{y,\bullet}, m_{z,\bullet})$ . Un repère cylindrique de même origine et d'axe longitudinal  $\mathbf{e}_{z,\bullet}$  est défini et noté par  $\mathcal{R}'_\bullet = (\mathbf{o}_\bullet, \mathbf{e}_{r,\bullet}, \mathbf{e}_{\theta,\bullet}, \mathbf{e}_{z,\bullet})$ . Les coordonnées de  $\mathbf{m}$  dans  $\mathcal{R}'_\bullet$  sont notées  $\mathbf{m}|_{\mathcal{R}'_\bullet} = (m_{r,\bullet}, m_{\theta,\bullet}, m_{z,\bullet})$ ; l'angle  $m_{\theta,\bullet}$  est défini positif dans le sens trigonométrique par rapport à  $\mathbf{e}_{x,\bullet}$  dans le plan  $(\mathbf{o}_\bullet, \mathbf{e}_{x,\bullet}, \mathbf{e}_{y,\bullet})$ . Les repères tridimensionnels, présentés sur la figure 4.4 pour  $n_{\text{sec}} = 3$ , sont les suivants :

**repère d'aube  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$**  défini par rapport à un point arbitraire  $\mathbf{t}$  de l'aube, tel que l'aube tourne dans le sens positif autour de l'axe  $(\mathbf{o}_a, \mathbf{e}_{z,a})$ , le flux circule dans la direction  $\mathbf{e}_{z,a}$ , et  $\mathbf{t}$  appartient à l'axe  $(\mathbf{o}_a, \mathbf{e}_{x,a})$ . Pour alléger les notations, ce repère est parfois noté  $\mathcal{R}_a$ . Sur la figure,  $\mathbf{t} = \mathbf{t}^1$  ;

**repères  $\mathcal{R}_{c^i}$  des surfaces porteuses** des sections  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$  définis tels que  $\mathbf{o}_{c^i}$  appartient à l'axe de rotation,  $\mathbf{e}_{z,c^i} = \pm \mathbf{e}_{z,a}$  et  $\mathbf{e}_{x,c^i} = \mathbf{e}_{x,a}$ . Pour une surface conique,  $\mathbf{o}_{c^i}$  est à l'origine du cône porteur et  $\mathbf{e}_{z,c^i}$  dans le sens d'ouverture du cône. La surface conique est dite positive si  $\mathbf{e}_{z,c^i} = \mathbf{e}_{z,a}$  (section 1 (■)), et négative si  $\mathbf{e}_{z,c^i} = -\mathbf{e}_{z,a}$  (section 3 (■)). Pour une surface cylindrique (section 2 (■)), et soit un point arbitraire  $\mathbf{k}^i$  de la surface,  $\mathbf{o}_{c^i}$  est choisi tel que  $k_{x,c^i}^i = 0$  et  $\mathbf{e}_{z,c^i} = \mathbf{e}_{z,a}$ . Sur la figure,  $\mathbf{k}^2 = \mathbf{t}^2$ .

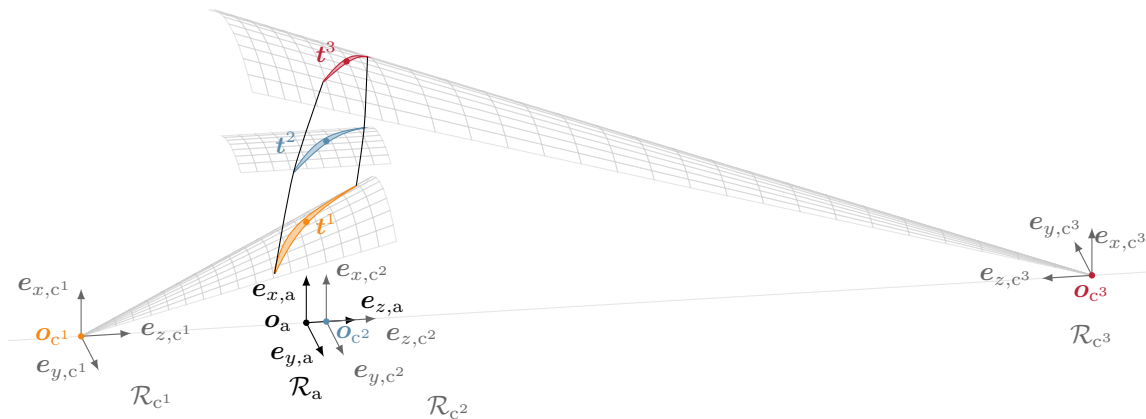


Figure 4.4 Repères de l'aube  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$  tel que  $\mathbf{t} = \mathbf{t}^1$  et repères des surfaces porteuses :  $\mathcal{R}_{c^1}$  (section conique positive (■)),  $\mathcal{R}_{c^2}$  (section cylindrique (■)) et  $\mathcal{R}_{c^3}$  (section conique négative (■)).

En deux dimensions, un repère cartésien est noté  $\mathcal{P}_\bullet = (\mathbf{o}_\bullet, \mathbf{e}_{u,\bullet}, \mathbf{e}_{v,\bullet})$  et le repère polaire associé  $\mathcal{P}'_\bullet = (\mathbf{o}_\bullet, \mathbf{e}_{r,\bullet}, \mathbf{e}_{\theta,\bullet})$ , tel que l'angle  $m_{\theta,\bullet}$  est défini positif dans le sens trigonométrique par rapport à  $\mathbf{e}_{u,\bullet}$ . Les repères bidimensionnels utilisés sont les suivants :

**repères  $\mathcal{P}_{d^i}$  des surfaces développées** des sections  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$  (figure 4.5). Pour une surface conique, l'obtention de la développée est telle que  $\mathbf{o}_{c^i}$  a pour image  $\mathbf{o}_{d^i}$  et un point de la section  $\mathbf{m}|_{\mathcal{R}_{c^i}}$  satisfaisant  $\mathbf{m}|_{y,c^i} = 0$  a pour image un point sur l'axe  $(\mathbf{o}_{d^i}, \mathbf{e}_{u,d^i})$ . Pour une surface cylindrique de rayon  $r^i$ , le point  $\mathbf{p}|_{\mathcal{R}_{c^i}} = (r^i, 0, 0)$ , a pour image  $\mathbf{o}_{d^i}$  et le point  $\mathbf{m}|_{\mathcal{R}_{c^i}}$  a pour image un point sur l'axe  $(\mathbf{o}_{d^i}, \mathbf{e}_{u,d^i})$ ;

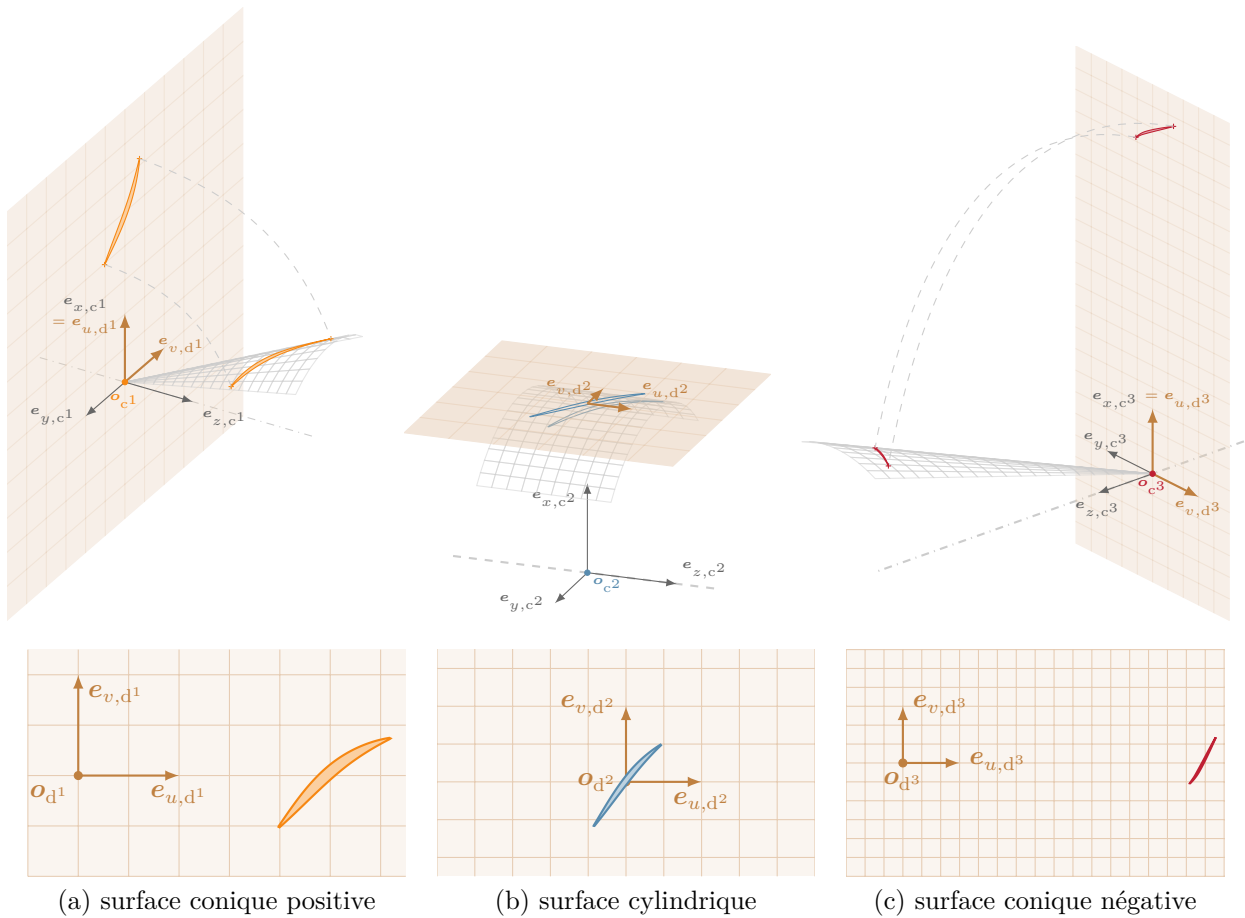


Figure 4.5 Repères  $\mathcal{R}_{c^i}$  des coniques et repères  $\mathcal{P}_{d^i}$  de leurs développées respectives pour les trois types de sections.

**repère des profils  $\mathcal{P}_p$**  (figure 4.6) commun à toutes les sections  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$  tel que pour chaque profil, le point  $\mathbf{a}^i|_{\mathcal{P}_p}$  au bord d'attaque est à l'origine du repère, le point  $\mathbf{b}^i|_{\mathcal{P}_p}$  au bord de fuite satisfait  $b_{v,p} = 0$  et l'extrados est côté  $\mathbf{e}_{v,p}$ . Les points  $\mathbf{a}^i|_{\mathcal{P}_p}$  et  $\mathbf{b}^i|_{\mathcal{P}_p}$  sont définis précisément dans la section 4.2.1.3.

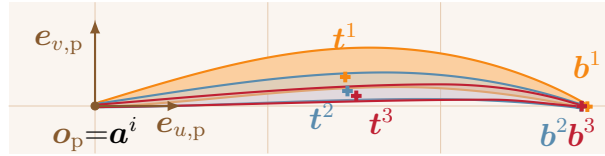
Figure 4.6 Repère des profils  $\mathcal{P}_p$ .

Tableau 4.1 Paramètres de section.

type	nom	symbole
empilement	rayon	$r^i$
	angle d'inclinaison	$\Delta\theta^i$
	flèche axiale	$\Delta z^i$
	conicité	$\gamma^i$
	angle de calage	$\lambda^i$
profil	abscisse du point d'aspiration	$s_{u,p}^i$
	ordonnée du point d'aspiration	$s_{v,p}^i$
	abscisse du point de pression	$p_{u,p}^i$
	corde	$c^i$
	épaisseur	$e^i$
	grand rayon de l'ellipse supérieure	$r_{BA^+}^i$
	grand rayon de l'ellipse inférieure	$r_{BA^-}^i$
	rayon du cercle	$r_{BF}^i$
	angle d'entrée	$\phi_{BA}^i$
	angle de cale supérieur au bord d'attaque	$\psi_{BA^+}^i$
	angle de cale inférieur au bord d'attaque	$\psi_{BA^-}^i$
	angle de sortie	$\phi_{BF}^i$
	angle de cale supérieur au bord de fuite	$\psi_{BF^+}^i$
	angle de cale inférieur au bord de fuite	$\psi_{BF^-}^i$

#### 4.2.1.2 Paramètres d'empilement

La position et l'orientation d'une section  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$  dans  $\mathcal{R}_a$  est entièrement déterminé par cinq paramètres d'empilement, résumés dans le tableau 4.1 et illustrés sur la figure 4.7.



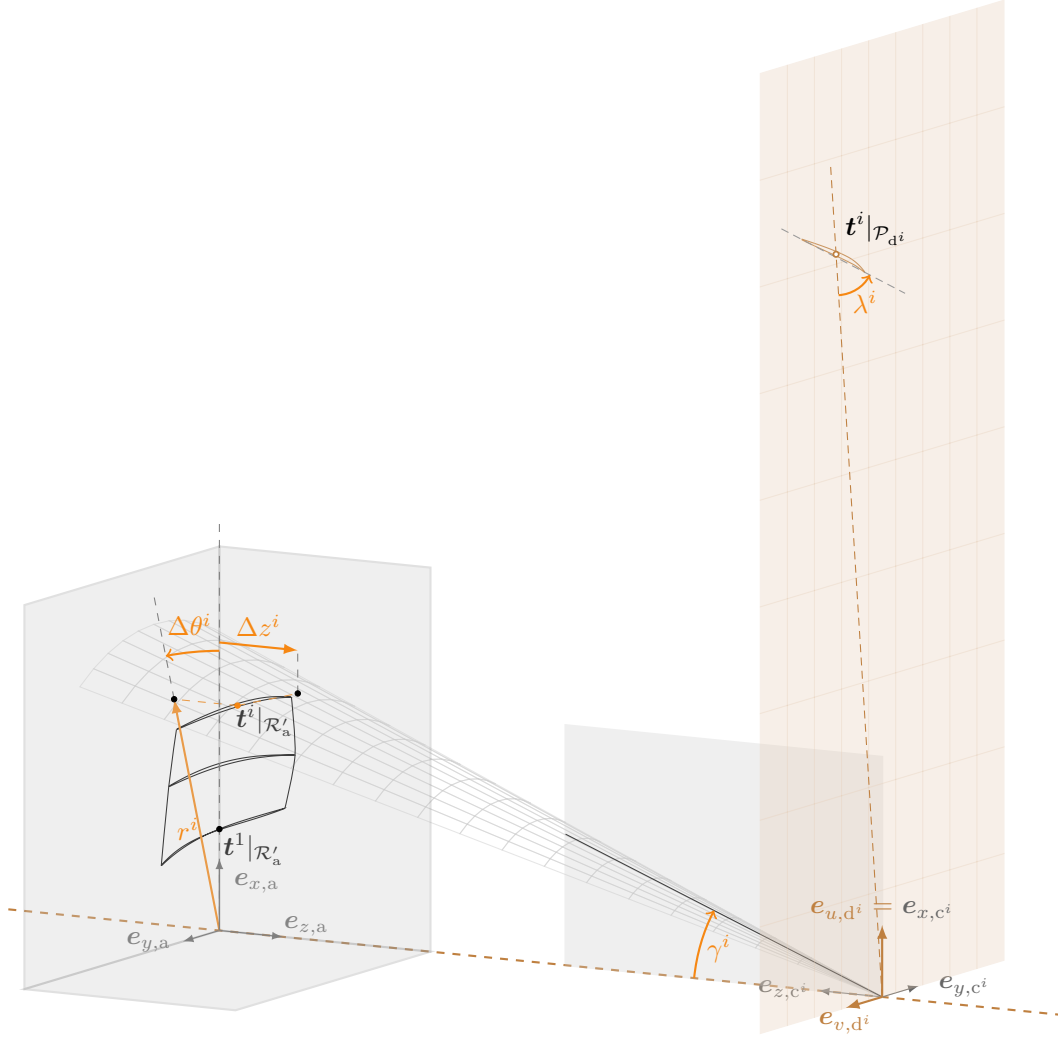


Figure 4.7 Paramètres d'empilement d'une section. Repère de l'aube  $\mathcal{R}'_a(t)$  tel que  $\mathbf{t} = \mathbf{t}^1$ .

Trois paramètres définissent la ligne d'empilement :

le **rayon**  $r^i$ , défini dans le repère cylindrique  $\mathcal{R}'_a$  par :

$$r^i = t^i_{r,a}; \quad (4.1)$$

l'**angle d'inclinaison**  $\Delta\theta^i$ , défini comme la rotation de la section autour du vecteur  $\mathbf{e}_{z,a}$  par rapport à la section en pied d'aube ( $t^1_{\theta,a} = 0$  sur la figure) :

$$\Delta\theta^i = t^i_{\theta,a} - t^1_{\theta,a}. \quad (4.2)$$

L'angle d'inclinaison est positif dans le sens de rotation de l'aube ;

la **flèche axiale**  $\Delta z^i$ , définie dans le repère  $\mathcal{R}_a$  comme la translation de la section dans la

direction  $\mathbf{e}_{z,a}$  par rapport au pied d'aube ( $t_{z,a}^1 = 0$  sur la figure) :

$$\Delta z^i = t_{z,a}^i - t_{z,a}^1. \quad (4.3)$$

La flèche axiale est positive dans la direction du flux.

Ces trois paramètres ne dépendent pas du choix du point  $\mathbf{t}$  déterminant le repère  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$  : par définition de  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$ , le rayon  $r^i$  est indépendant de  $\mathbf{t}$  et les quantités  $\Delta\theta^i$  et  $\Delta z^i$  sont des variations relatives. L'influence des paramètres  $\Delta\theta^i$  et  $\Delta z^i$  sur la géométrie de l'aube est illustrée sur la figure 4.8.

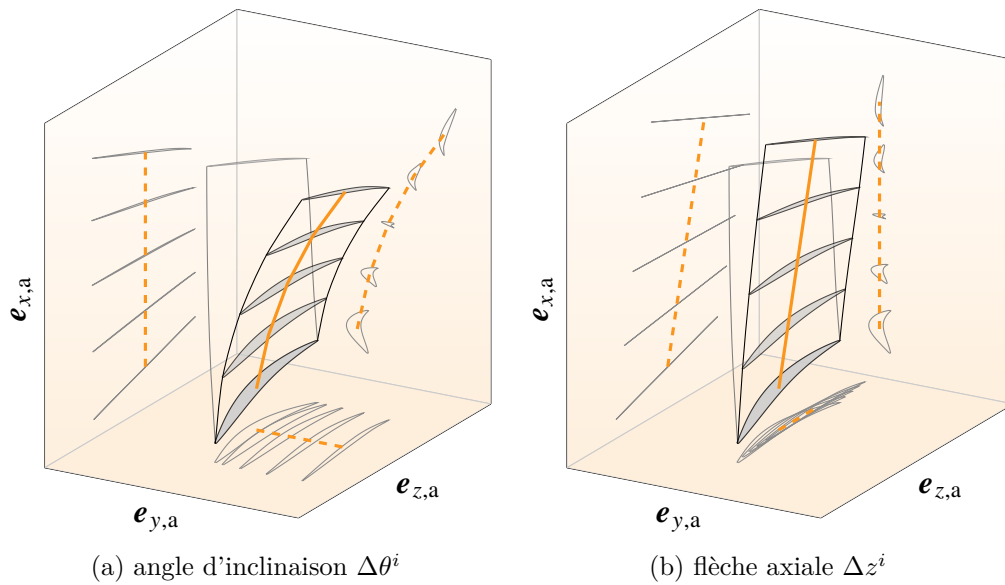


Figure 4.8 Influence de la flèche axiale et de l'angle d'inclinaison sur la forme de l'aube.

Les deux paramètres d'empilement restants définissent la surface porteuse et l'orientation de la section  $i$  sur celle-ci :

**la conicité**  $\gamma^i$ , définie comme l'angle entre l'axe  $\mathbf{e}_{z,a}$  et une droite génératrice de la surface porteuse de vecteur directeur  $\mathbf{g}^i$  restreinte au demi-plan  $\{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3 : m_{y,a} = 0, m_{x,a} \geq 0\}$  :

$$\gamma^i = \widehat{\mathbf{e}_{z,a}, \mathbf{g}^i} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[; \quad (4.4)$$

**l'angle de calage**  $\lambda^i$ , qui contrôle l'orientation de la corde du profil sur la surface porteuse par rapport à l'axe de rotation de la turbomachine. L'orientation de la corde est donnée

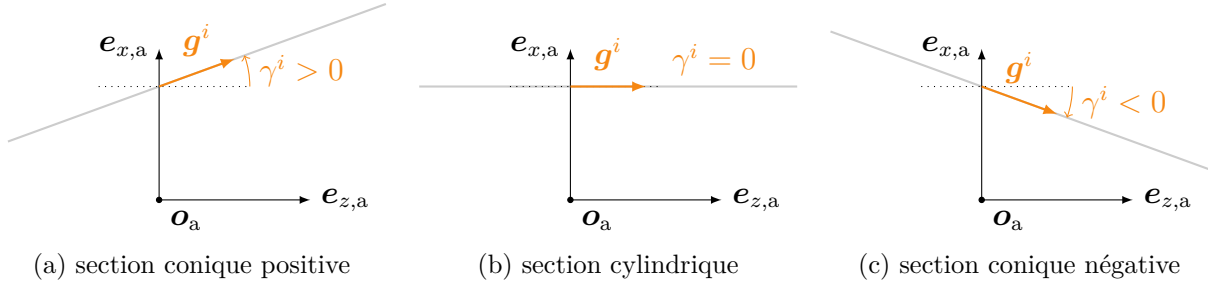


Figure 4.9 Conicité  $\gamma^i$  de la surface porteuse selon le type de section. Génératrice de la surface porteuse (—).

par le vecteur unitaire :

$$\mathbf{w}^i = \frac{\mathbf{b}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}} - \mathbf{a}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}}{\|\mathbf{b}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}} - \mathbf{a}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}\|}. \quad (4.5)$$

L'angle de calage  $\lambda^i \in [0, \frac{\pi}{2}[$  est finalement défini par :

$$\lambda^i = \begin{cases} \widehat{(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)} & \text{pour une section conique positive,} \\ \widehat{(-\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)} & \text{pour une section conique négative,} \\ \widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{w}^i)} & \text{pour une section cylindrique,} \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{v}^i = \mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}} / \|\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}\|$  est un vecteur directeur de la génératrice pour une surface conique. Les angles de calage sont illustrés sur la figure 4.10 selon le type de section. Par définition, l'angle  $\lambda^i$  est indépendant du point  $\mathbf{t}$  choisi pour définir le repère  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$ . Son influence sur la forme de l'aube est visible sur la figure 4.11. Le vrillage de l'aube désigne la variation d'angle de calage du pied au sommet d'aube.

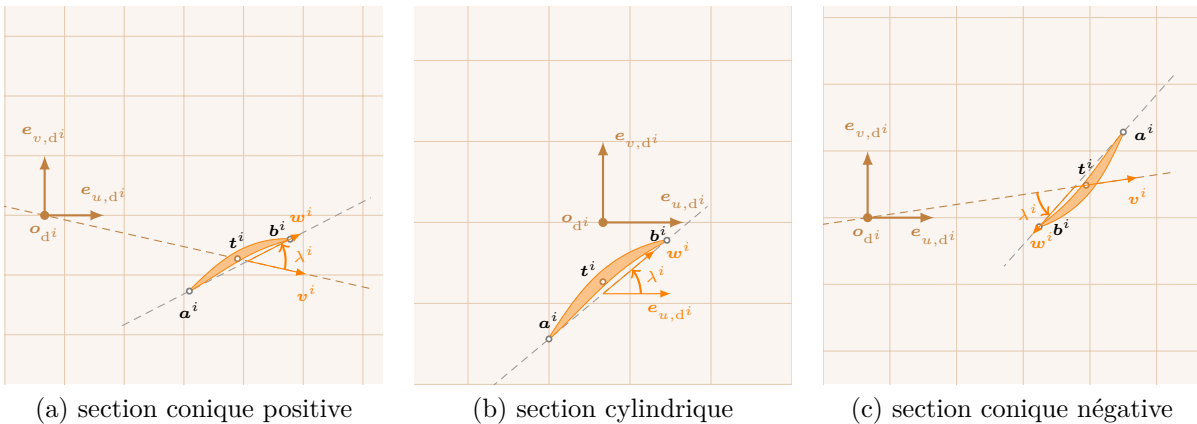


Figure 4.10 Angle de calage  $\lambda^i$  selon le type de section.

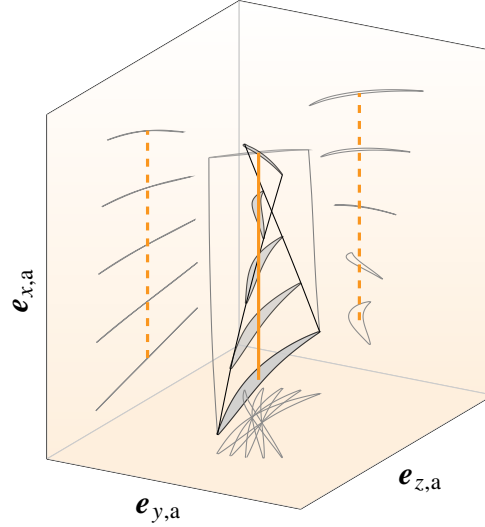


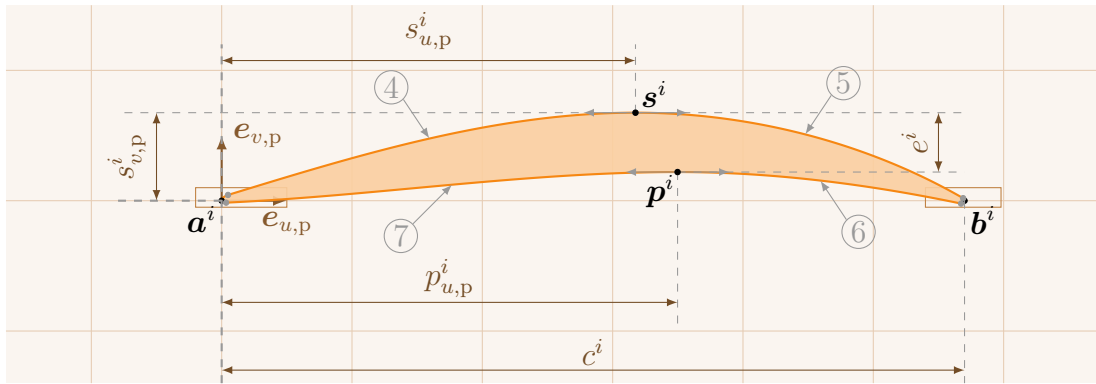
Figure 4.11 Influence de l'angle de calage  $\lambda^i$  sur le vrillage de l'aube.

#### 4.2.1.3 Paramètres de profil

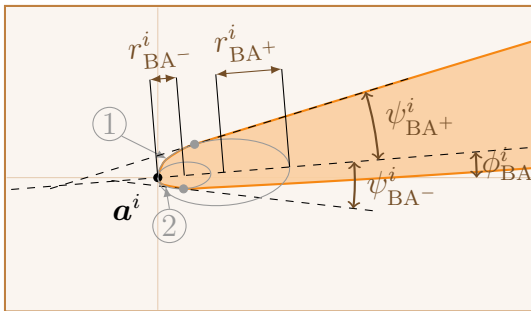
La modélisation du profil d'une section  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$ , inspirée d'une précédente publication [107, 108], est constituée de sept courbes représentées sur la figure 4.12. Au bord d'attaque, deux morceaux d'ellipses distincts ①, ② permettent de représenter des formes indépendantes sur l'intrados et l'extrados. Le bord de fuite, supposé de petite taille, est décrit par un unique arc de cercle ③. L'intrados et l'extrados sont chacun modélisés par deux splines cubiques (④, ⑤, ⑥, ⑦). Le point d'aspiration  $\mathbf{s}^i$ , respectivement de pression  $\mathbf{p}^i$ , est défini comme le point de rencontre des splines sur l'extrados, respectivement sur l'intrados. Le point de jonction des ellipses est noté  $\mathbf{a}^i$  et le point du cercle au bord de fuite le plus éloigné de  $\mathbf{a}^i$  est noté  $\mathbf{b}^i$ .

Afin de restreindre le nombre de paramètres utilisés pour tracer ces courbes dans  $\mathcal{P}_p$ , des hypothèses sur la forme du profil sont imposées : le profil est une courbe  $\mathcal{G}^1$ <sup>4</sup>, les tangentes aux points  $\mathbf{s}^i$  et  $\mathbf{p}^i$  sont horizontales et le petit rayon des ellipses vaut la moitié de leur grand rayon. Le positionnement du profil dans  $\mathcal{P}_p$  est imposé en fixant le point  $\mathbf{a}^i$  à l'origine. Afin d'améliorer la paramétrisation, une nouvelle hypothèse est considérée dans le cadre de ce travail : le centre du cercle au bord de fuite appartient à l'axe des abscisses. L'orientation du profil sur la surface porteuse est ainsi définie uniquement par l'angle de calage  $\lambda^i$  et découplé des paramètres de profil.

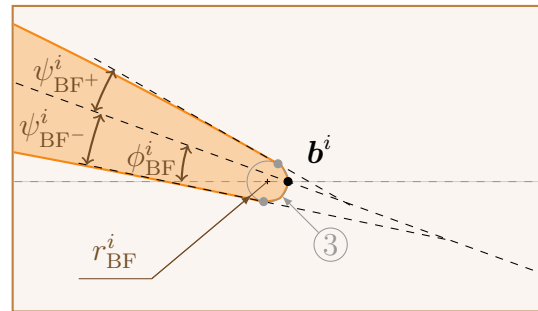
4. Cette notation est discutée en annexe C et traduit ici le fait que la direction de la tangente à la courbe est continue en tout point de la courbe.



(a) profil d'aube



(b) zoom au bord d'attaque



(c) zoom au bord de fuite

Figure 4.12 Représentation des paramètres de profil suivant la nomenclature du tableau 4.1.

La paramétrisation proposée pour les profils est basée sur 14 paramètres listés dans le tableau 4.1 et illustrés sur la figure 4.12; les angles sont non orientés et positifs tels que représentés. Les paramètres sont indépendants du point  $\mathbf{t}$  choisi pour définir le repère  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$ , le positionnement d'un profil dans  $\mathcal{P}_p$  ne dépendant pas de ce point.

#### Positionnement par rapport aux travaux précédents

Cette paramétrisation des profils diffère des précédents travaux [108] sur deux aspects : (1) la corde du profil est horizontale dans  $\mathcal{P}_p$ ; le paramètre de corde tangentielle est donc supprimé et (2) plutôt qu'un angle de cale (*wedge angle* en anglais) symétrique au bord de fuite, deux angles sont utilisés afin de découpler les formes des splines de l'intrados et de l'extrados. Il a en effet été observé dans le cadre de ce travail qu'un angle de cale symétrique pouvait conduire à des oscillations indésirables d'une des splines reliées au cercle au bord de fuite.

## 4.2.2 Génération d'aube (modules GEN et MAI)

L'objectif des modules GEN et MAI est de générer le modèle CAO d'une aube et son maillage à partir des paramètres de l'aube. En fonction des paramètres de profil, les profils sont construits et discrétisés (section 4.2.2.1). Les nuages de points produits sont positionnés les uns par rapport aux autres à l'aide des paramètres d'empilement (section 4.2.2.2). Enfin, la CAO et le maillage de l'aube sont générés avec Salome (sections 4.2.2.3 et 4.2.2.4). Ces étapes sont illustrées à partir des paramètres d'aube donnés en annexe D.1 décrivant trois sections de l'aube rotor 37. Ces paramètres ont été obtenus avec la phase de rétro-ingénierie décrite dans la section 4.2.3.

### 4.2.2.1 Construction des profils

Le profil de chaque section  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$  est dessiné dans le repère  $\mathcal{P}_p$  à partir des paramètres de profil. Le contour de chaque profil est discrétisé avec une longueur d'échantillonnage de  $c^i/1200$ , où  $c^i$  est la corde du profil. Cette longueur est suffisamment faible pour permettre une discrétisation fidèle du profil. Pour l'exemple présenté, chaque section est ainsi définie par un nuage d'environ 2500 points et représentée sur la figure 4.13. Enfin, les coordonnées  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_p}$  des points de référence dans  $\mathcal{P}_p$  sont calculées à partir des nuages de points. Le point  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_p}$  est choisi comme le barycentre du nuage de points de la section  $i$  dans  $\mathcal{P}_p$ .

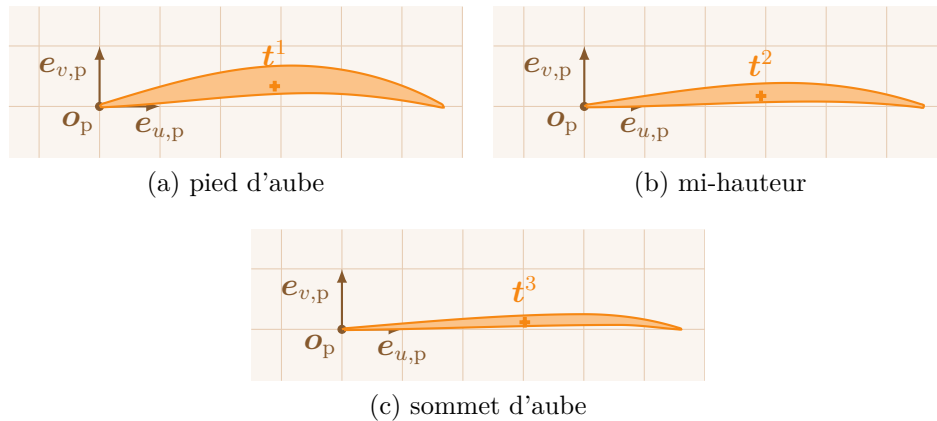


Figure 4.13 Tracé dans  $\mathcal{P}_p$  des profils de l'aube rotor 37 paramétrée à trois sections.

### 4.2.2.2 Empilement des sections

Les nuages de points de chaque section sont projetés du repère des profils  $\mathcal{P}_p$  vers le repère d'aube  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t}^1)$ . Trois changements de repères successifs, schématisés sur la figure 4.14, sont

effectués. Les équations associées sont données en annexe B. Ces équations requièrent des paramètres de passage (■) calculés à partir des paramètres d'empilement de chaque section.

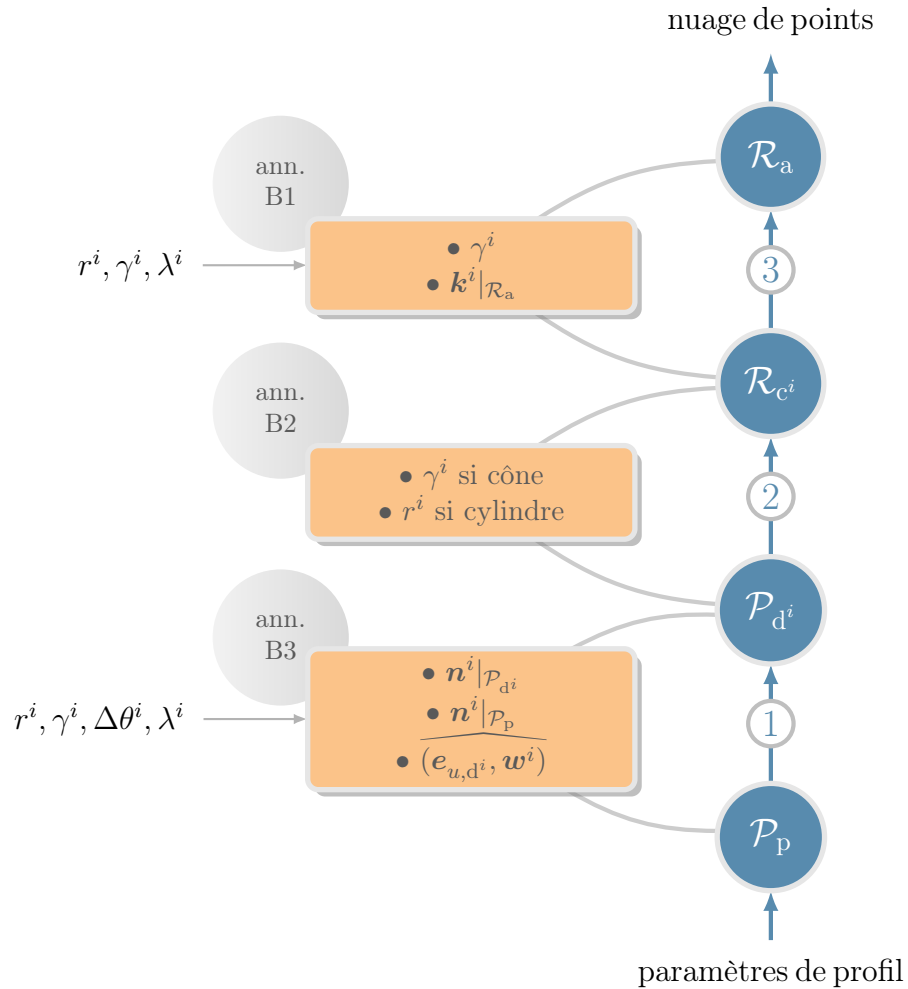


Figure 4.14 Étapes de l'empilement d'une section  $i$  dans le module GEN par changements de repères. Paramètres de passage (■).

#### Détermination des paramètres de passage

À l'étape ①, les coordonnées d'un point arbitraire  $\mathbf{n}^i$  de la section dans  $\mathcal{P}_p$  et  $\mathcal{P}_{d^i}$  sont requises, ainsi que l'orientation de la corde du profil  $\mathbf{w}^i$  (équation (4.5)). Le point  $\mathbf{n}^i$  est choisi tel que  $\mathbf{n}^i = \mathbf{t}^i$  : les coordonnées  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_p}$  sont connues et les coordonnées  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  peuvent être obtenues immédiatement à partir des paramètres d'empilement. Les

quantités requises dans le cas d'une section conique sont ainsi données par :

$$t_{u,d^i}^i = \frac{r^i}{\sin |\gamma^i|} \cos(-\operatorname{sgn}(\gamma^i) \Delta\theta^i \sin |\gamma^i|), \quad (4.7)$$

$$t_{v,d^i}^i = \frac{r^i}{\sin |\gamma^i|} \sin(-\operatorname{sgn}(\gamma^i) \Delta\theta^i \sin |\gamma^i|), \quad (4.8)$$

$$\widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{w}^i)} = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(\gamma^i) \Delta\theta^i \sin |\gamma^i| + \lambda^i & \text{pour une section conique positive,} \\ -\operatorname{sgn}(\gamma^i) \Delta\theta^i \sin |\gamma^i| + \lambda^i + \pi & \text{pour une conique négative,} \end{cases} \quad (4.9)$$

où  $\operatorname{sgn}(\bullet)$  désigne la fonction signe. Dans le cas d'une section cylindrique, les quantités requises sont :

$$\begin{cases} t_{u,d^i}^i = 0, \\ t_{v,d^i}^i = -r^i \Delta\theta^i, \\ \widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{w}^i)} = \lambda^i. \end{cases} \quad (4.10)$$

Les équations précédentes sont démontrées en annexe B.4.

À l'étape ②, la conicité  $\gamma^i$  est requise pour une sections conique et le rayon  $r^i$  pour une section cylindrique. Enfin, à l'étape ③ les coordonnées  $\mathbf{k}^i|_{\mathcal{R}'_a}$  d'un point de la surface porteuse sont requises. Or, le point  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{R}'_a} = (r^i, \Delta\theta^i, \Delta z^i)$  appartient nécessairement à la surface porteuse. Comme la surface porteuse est une surface de révolution autour de l'axe  $\mathbf{e}_{z,a}$ , le point  $\mathbf{k}^i$  est choisi plus simplement tel que :

$$\mathbf{k}^i|_{\mathcal{R}'_a} = (r^i, 0, \Delta z^i). \quad (4.11)$$

### 4.2.2.3 Génération du modèle CAO

Le modèle CAO est généré avec Salome dans le repère  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t}^1)$  à partir des nuages de points des différentes sections, selon une méthodologie inspirée d'un outil précédemment publié [148]. Pour chaque section, les points de l'extrados sont interpolés par une spline cubique, tout comme les points de l'intrados. Les deux splines sont ensuite découpées en leur milieu ; le contour de chaque section est ainsi décrit par quatre splines (de couleurs différentes sur la figure 4.15a). En fonction de leur position relative sur chaque section, les morceaux de splines sont répartis en quatre groupes.

Pour chaque groupe, une des faces latérales de l'aube est générée par une approximation surfacique de type spline. Le degré de la surface, variant de 2 à 5, est sélectionné auto-



matiquement par Salome pour respecter une tolérance prescrite. Quatre faces latérales sont ainsi générées, décrivant l'extrados et l'intrados de l'aube sur toute sa hauteur (figure 4.15b). L'utilisation de quatre faces facilite la génération du maillage par la suite.

Les faces latérales sont « cousues » afin d'obtenir une surface latérale unique. Cette opération nécessite de fournir une tolérance sous laquelle deux arêtes sont considérées comme coïncidentes. L'estimation d'une telle tolérance est délicate, car les quatre faces ont été générées par des approximations différentes. Pour assurer la robustesse de l'opération pour différentes géométries, une tolérance adaptative est introduite par rapport à la méthodologie d'origine [148]. Une tolérance initiale  $\Delta z/200$  est fixée, où  $\Delta z$  est l'encombrement de l'aube selon la direction  $\mathbf{e}_{z,a}$ . Si l'opération de couture échoue, la tolérance est doublée et une nouvelle tentative est effectuée, pour un maximum de quatre tentatives. La génération des faces en pied et sommet d'aube est réalisée par simple remplissage des cavités. L'ensemble des faces est groupé pour former une coque fermée, elle-même transformée en un volume. Le résultat final est présenté sur la figure 4.15c.

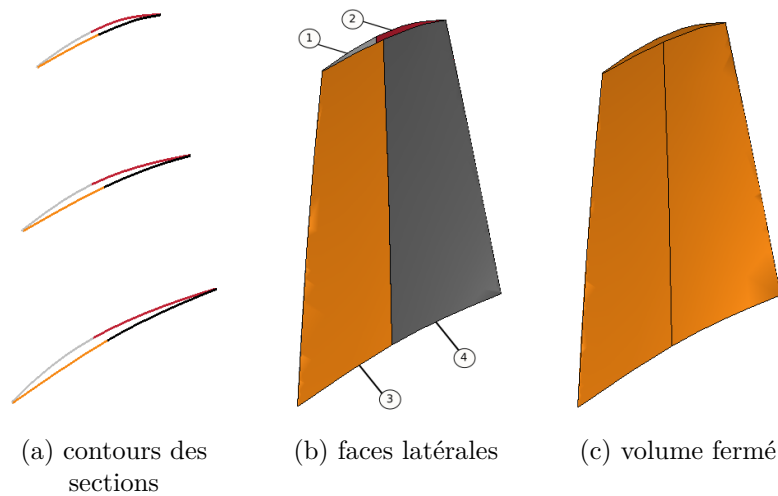


Figure 4.15 Étapes de construction de la CAO (module GEN).

#### Remarques sur la régularité de la CAO générée

Les paramétrisations récentes d'aubes destinées à des analyses CFD imposent une régularité  $\mathcal{G}^2$  de la surface latérale de l'aube (notion discutée en annexe C). Bien que la paramétrisation proposée soit avant tout dédiée à des études structurelles, une étude de la régularité de la CAO obtenue renseigne sur son utilisation éventuelle dans le cadre d'analyses aérodynamiques. Les paragraphes suivants montrent que la surface latérale de la CAO obtenue est de classe  $\mathcal{G}^2$ , mais que seule une régularité  $\mathcal{G}^1$  est

garantie pour la courbe paramétrée analytique décrivant un profil dans  $\mathcal{P}_p$  et notée  $\mathbf{m}(t) = (m_{u,p}(t), m_{v,p}(t))$  avec  $m_{u,p}(t), m_{v,p}(t) : T \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Cette limitation n'est pas problématique dans le contexte de l'outil développé, car elle ne restreint pas la régularité de la CAO finale.

**Profil  $\mathcal{G}^1$  dans  $\mathcal{P}_p$ .** Les sept courbes constituant un profil sont de classe  $\mathcal{C}^n$ , la régularité de  $\mathbf{m}(t)$  est donc conditionnée par la régularité aux points de jonction des courbes. Les tangentes sont conservées aux points de jonction impliquant des splines et au point  $\mathbf{a}^i$  car les ellipses partagent le même axe. La courbe  $\mathbf{m}(t)$  est donc  $\mathcal{G}^1$ . Cependant, elle n'est pas  $\mathcal{G}^2$  car la direction du vecteur des dérivées secondes  $\mathbf{m}^{(2)}(t) = (m_{u,p}^{(2)}(t), m_{v,p}^{(2)}(t))$  n'est pas conservée aux points  $\mathbf{s}^i$  et  $\mathbf{p}^i$ . Il est possible de conserver la direction de courbure en utilisant des splines de degré 5. Cette paramétrisation a été testée, mais n'a pas permis d'obtenir une aussi bonne représentation des profils cibles qu'avec la paramétrisation initiale. En effet, imposer la continuité de la courbure contraint fortement les formes que la paramétrisation peut générer. Par conséquent, le choix a été fait de garantir uniquement la continuité  $\mathcal{G}^1$ .

**Surface latérale  $\mathcal{G}^2$  de la CAO.** Les quatre faces qui composent la surface étant des surfaces splines, la régularité de la surface complète est imposée par la régularité des jonctions entre les faces. Cette régularité est directement liée à la régularité des courbes décrivant le contour de chaque section. Pour une section donnée, les deux splines utilisées sur l'intrados (respectivement l'extrados) sont issues d'une même spline, coupée en deux ; la régularité est donc conservée au point de jonction. Au bord d'attaque et au bord de fuite, il est également possible de montrer que la direction de courbure est conservée dans  $\mathcal{P}_p$  et la projection du contour de la section sur des coniques n'altère pas cette propriété. Par conséquent, si le profil dans  $\mathcal{P}_p$  est suffisamment discrétisé, alors les splines de l'intrados et de l'extrados interpolant le nuage de point correspondant dans  $\mathcal{R}_a$  sont de classe  $\mathcal{G}^2$ . Le contour de chaque profil dans Salome est donc de classe  $\mathcal{G}^2$  et la surface latérale de la CAO est  $\mathcal{G}^2$ .

#### 4.2.2.4 Génération du maillage éléments finis

Une discrétisation en  $n_h$  éléments des quatre arêtes parcourant la hauteur de l'aube est imposée. Pour des raisons de simplicité, la même discrétisation est imposée sur les huit arêtes décrivant le contour des faces en pied et en sommet d'aube. Les faces latérales sont maillées avec des quadrangles, directement déterminés par la discrétisation des arêtes adjacentes. La

face en pied d’aube est maillée avec des triangles dont l’aire est limitée par un critère relatif à la hauteur d’aube, afin d’assurer une discrétisation suffisante de la face. Le maillage de cette face est ensuite projeté sur la face en sommet d’aube. Étant donné les hypothèses de maillages précédentes, les éléments tridimensionnels sont des pentaèdres. Des éléments quadratiques sont choisis. Si des éléments de mauvaise qualité sont présents dans le maillage, une erreur est renvoyée par le module MAI. Ainsi, les simulations numériques subséquentes du processus de la figure 4.3 ne sont pas effectuées pour ce maillage.

Le maillage final généré pour  $n_h = 38$  comporte pour l’exemple traité 6 384 éléments au total et est visible sur la figure 4.16. D’après les études de convergences préliminaires présentées en annexe E, cette valeur de  $n_h$  est jugée suffisante pour assurer la convergence du maillage pour les analyses dynamiques réalisées par la suite (voir section 4.3.2.1).

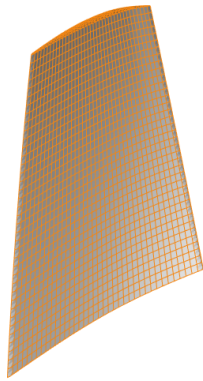


Figure 4.16 Maillage de l’aube rotor 37 paramétrée à trois sections (module MAI).

### 4.2.3 Retro-ingénierie d’aube (module RET)

L’objectif du module RET est d’identifier les paramètres décrivant une aube d’entrée fournie sous forme de modèle CAO et désignée comme CAO d’entrée par la suite. La CAO d’entrée est fournie en millimètres dans un repère  $\mathcal{R}_{\text{CAO}}$  tel que l’aube tourne autour de l’axe  $(\mathbf{o}_{\text{CAO}}, \mathbf{e}_{z,\text{CAO}})$  dans un sens connu avec un positionnement radial correct, le flux circulant dans la direction  $\mathbf{e}_{z,\text{CAO}}$ .

Pour positionner l’aube dans le repère  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$ , le point  $\mathbf{t}$  est choisi comme le point de l’aube ayant la plus petite coordonnée selon  $\mathbf{e}_{z,\text{CAO}}$ <sup>5</sup>. Si plusieurs points vérifient cette condition, celui de plus faible rayon est choisi. Les coordonnées de l’aube dans  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$  sont obtenues par translation et rotation par rapport à l’axe  $(\mathbf{o}_{\text{CAO}}, \mathbf{e}_{z,\text{CAO}})$ , de façon à ce que le point  $\mathbf{t}$

5. Le point  $\mathbf{t}$  diffère du point  $\mathbf{t}^1$  considéré dans le module GEN (section 4.2.2), qui n’est pas connu *a priori*.

appartienne à l'axe  $(\mathbf{o}_a, \mathbf{e}_{x,a})$ . Si l'aube tourne en sens indirect dans  $\mathcal{R}_{\text{CAO}}$ , une symétrie de l'aube par rapport au plan  $(\mathbf{o}_{\text{CAO}}, \mathbf{e}_{x,\text{CAO}}, \mathbf{e}_{z,\text{CAO}})$  est également effectuée.

À partir de l'aube positionnée dans  $\mathcal{R}_a$ , les étapes de la phase de rétro-ingénierie sont : **(1)** le calcul des intersections entre l'aube et les  $n_{\text{sec}}$  surfaces porteuses, **(2)** la détermination des paramètres d'empilement et **(3)** l'identification des paramètres de profil de chaque section par la résolution d'un problème d'optimisation. Ces étapes sont illustrées à partir de la CAO d'entrée rotor 37 et  $n_{\text{sec}} = 3$  sections sont considérées. Pour cette CAO, le point  $\mathbf{t}$  est situé au bord d'attaque en pied d'aube. L'aube positionnée dans  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$  est visible sur la figure 4.17.

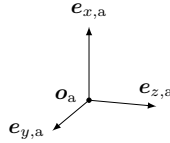
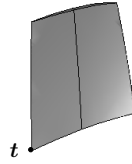


Figure 4.17 CAO d'entrée rotor 37 positionnée dans le repère  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$ .

#### 4.2.3.1 Intersection de l'aube avec les surfaces porteuses

Soit la surface porteuse de la section  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$  de conicité  $\gamma^i$  dont une génératrice est présentée sur la figure 4.18 dans le plan  $(\mathbf{o}_a, \mathbf{e}_{z,a}, \mathbf{e}_{r,a})$ . Les coordonnées d'un point  $\mathbf{m}$  de cette surface vérifient :

$$m_{r,a} = m_{z,a} \tan(\gamma^i) + l^i, \quad (4.12)$$

où  $l^i > 0$  est le rayon de la surface dans le plan  $(\mathbf{o}_a, \mathbf{e}_{r,a}, \mathbf{e}_{\theta,a})$ . La connaissance des quantités  $\gamma^i$  et  $l^i$  est suffisante pour construire la surface porteuse de la section  $i$ .

Une répartition linéaire des surfaces porteuses du pied au sommet d'aube est imposée et se

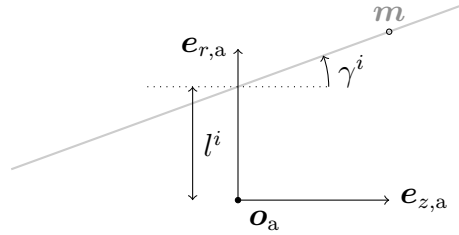


Figure 4.18 Génératrice (—) d'une surface porteuse dans le plan  $(\mathbf{o}_a, \mathbf{e}_{z,a}, \mathbf{e}_{r,a})$ .

traduit par les équations suivantes, pour tout  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$  :

$$\gamma^i = \gamma^1 + (\gamma^{n_{\text{sec}}} - \gamma^1) \frac{i-1}{n_{\text{sec}}-1}, \quad (4.13)$$

$$l^i = l^1 + (l^{n_{\text{sec}}} - l^1) \frac{i-1}{n_{\text{sec}}-1}. \quad (4.14)$$

Par conséquent, la connaissance des paramètres  $\gamma^1, l^1, \gamma^{n_{\text{sec}}}$  et  $l^{n_{\text{sec}}}$  des surfaces extrêmes est suffisante pour générer toutes les surfaces porteuses. Ces paramètres sont déterminés *via* une procédure semi-automatique : à partir d'un maillage non structuré généré automatiquement dans Salome, l'utilisateur sélectionne plusieurs nœuds sur les faces en pied et en sommet d'aube. Pour les deux faces, les paramètres de la surface porteuse passant au mieux par les points sélectionnés sont obtenus par régression linéaire à partir de l'équation (4.12). Les paramètres sont ajustés par l'utilisateur de façon à limiter la perte de matière en sommet et pied d'aube. Les paramètres  $\gamma^1, l^1, \gamma^{n_{\text{sec}}}, l^{n_{\text{sec}}}$  sont ainsi déterminés<sup>6</sup> et l'intersection de l'aube avec les  $n_{\text{sec}}$  surfaces porteuses est calculée (voir figure 4.19). Les contours des sections ainsi obtenues sont finement discrétisés et stockés sous la forme de  $n_{\text{sec}}$  nuages de points.

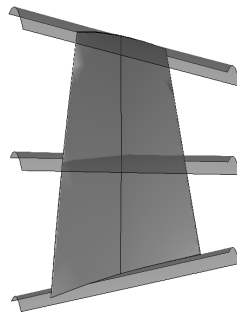


Figure 4.19 Intersections de la CAO d'entrée de l'aube rotor 37 avec  $n_{\text{sec}} = 3$  surfaces porteuses.

6. Ces paramètres sont stockés pour une CAO d'entrée donnée et sont valables quel que soit le nombre de sections choisi pour la rétro-ingénierie.

### 4.2.3.2 Détermination des paramètres d'empilement

Parmi les paramètres d'empilement listés dans le tableau 4.1, seul la conicité  $\gamma^i$  de chaque section  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$  est connue à ce stade par l'équation (4.13). La détermination des autres paramètres requiert les coordonnées du point  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{R}_a}$  de chaque section. Pour rester homogène avec la phase de génération d'aubes (figure 4.14) et limiter les erreurs numériques,  $\mathbf{t}^i$  doit être identifié dans le repère des profils  $\mathcal{P}_p$ .

Le nuage de points de chaque section est projeté du repère  $\mathcal{R}_a$  au repère  $\mathcal{P}_p$  par trois changements de repères successifs, correspondant aux étapes ① à ③ sur la figure 4.20. Le point  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_p}$  est ensuite calculé et projeté de  $\mathcal{P}_p$  à  $\mathcal{R}_a$  lors des étapes ④ à ⑥ sur la figure. Les coordonnées intermédiaires  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  sont utilisés pour calculer l'angle de calage  $\lambda^i$  à partir de l'équation (4.6). La connaissance des coordonnées  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{R}_a}$  de toutes les sections permet enfin de déduire les paramètres  $r^i$ ,  $\Delta\theta^i$  et  $\Delta z^i$  à partir des équations (4.1), (4.2) et (4.3). Les paramètres de passage requis pour les différents changements de repère sont détaillés dans l'encart.

#### Détermination des paramètres de passage

À l'étape ①, comme tous les points de la surface vérifient l'équation (4.12), le point  $\mathbf{k}^i|_{\mathcal{R}_a}$  est choisi tel que  $(k_{r,a}^i, k_{\theta,a}^i, k_{z,a}^i) = (l^i, 0, 0)$ . À l'étape ②, dans le cas d'une section cylindrique, le rayon  $r^i$  du cylindre est donné par le paramètre  $l^i$ . Enfin, à l'étape ③, le point  $\mathbf{n}^i$  est choisi tel que  $\mathbf{n}^i = \mathbf{a}^i$ . L'obtention des coordonnées  $\mathbf{a}^i|_{\mathcal{P}_p}$  est immédiate ( $\mathbf{a}^i$  est à l'origine du repère); seules les coordonnées  $\mathbf{a}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  restent à déterminer. Le point  $\mathbf{a}^i$  est choisi dans  $\mathcal{P}_{d^i}$  comme le point du profil le plus proche possible de la ligne moyenne du profil, côté bord d'attaque

(voir figure 4.21). La ligne moyenne est estimée par une approximation polynomiale de degré 5 du nuage de points de la section dans  $\mathcal{P}_{d^i}$ . Le point  $\mathbf{b}^i$  au bord de fuite est également requis pour calculer le vecteur  $\mathbf{w}^i$  (équation (4.5)) définissant l'orientation de la corde du profil dans  $\mathcal{P}_{d^i}$ . Il est choisi comme le point du profil le plus éloigné du point  $\mathbf{a}^i$ , en cohérence avec la paramétrisation des profils (figure 4.12).

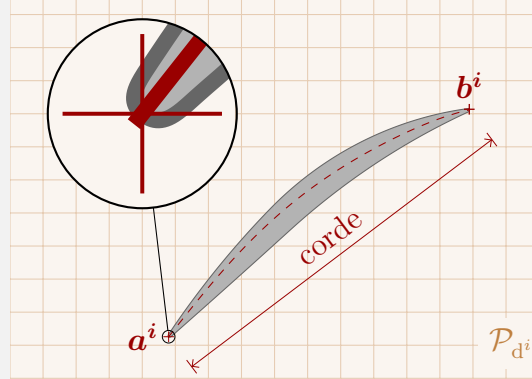


Figure 4.21 Identification des points  $\mathbf{a}^i$  au bord d'attaque et  $\mathbf{b}^i$  au bord de fuite dans le repère  $\mathcal{P}_{d^i}$ . Ligne moyenne (---).

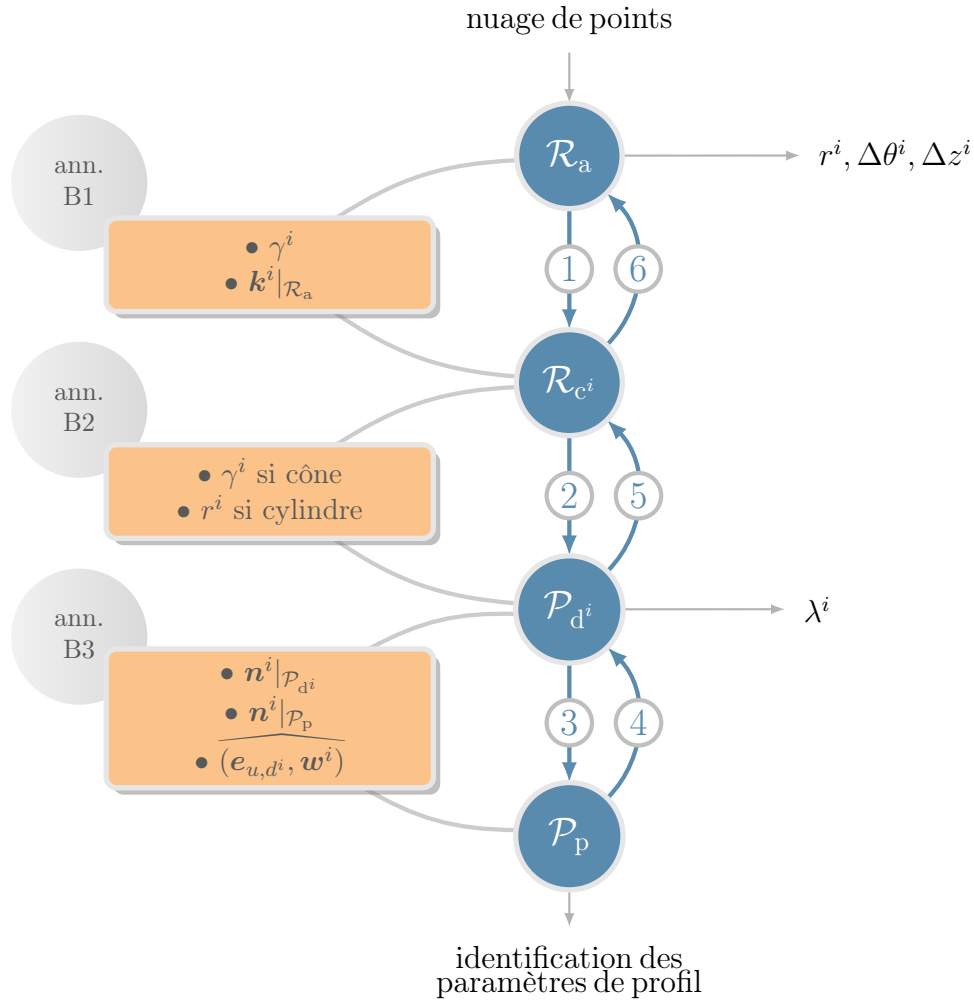


Figure 4.20 Étapes de détermination des paramètres d’empilement d’une section  $i$  dans le module RET par changements de repères. Paramètres de passage (■).

### 4.2.3.3 Identification des paramètres de profil

Soit le nuage de point d’une section  $i$  dans le repère  $\mathcal{P}_p$  et  $N^i$  sa discrétisation à environ 200 points, appelée profil cible. Le profil cible  $N^1$  de la section en pied d’aube rotor 37 (●) est présenté sur la figure 4.22. Les paramètres de profil (définis dans la section 4.2.1.3) décrivant ce profil cible sont obtenus en résolvant le problème d’optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & e(\mathbf{x}) \\ \text{sujet à : } & \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{14}$  est le vecteur de paramètres de profil,  $\mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{14}$  sont des bornes et  $e(\mathbf{x})$  est une fonction d’erreur entre le profil cible et le profil paramétré défini par  $\mathbf{x}$ . La fonction objectif,

inspirée de précédents travaux [107], est définie par :

$$e(\mathbf{x}) = 0,9\bar{d}(\mathbf{x}) + 0,1|\delta p(\mathbf{x})|, \quad (4.16)$$

où  $\bar{d}(\mathbf{x})$  est la distance moyenne entre les points du profil cible  $N^i$  et du profil paramétré et  $\delta p(\mathbf{x})$  leur différence relative de périmètre. Plus la valeur de la fonction objectif est faible, plus le profil paramétré approche fidèlement le profil cible.

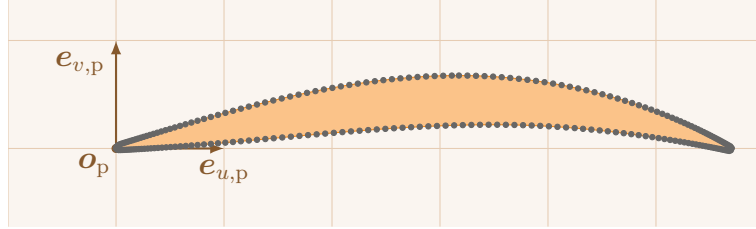


Figure 4.22 Profil cible (●) et profil paramétré (■) de la section en pied d'aube rotor 37.

Bien que la fonction objectif soit différentiable pour tout  $\mathbf{x}$  tel que  $\delta p(\mathbf{x}) \neq 0$ , l'expression du gradient n'est pas connue analytiquement sans effort supplémentaire en raison de la discrétisation des profils. Par conséquent, le problème (4.15) est traité comme un problème d'optimisation sans dérivées et résolu avec le logiciel NOMAD [112] reposant sur l'algorithme Mads [17]. Un vecteur de paramètres initiaux  $\mathbf{x}^0$  est requis.

**Détermination d'un profil initial et des bornes.** Les paramètres  $\mathbf{x}^0$  décrivant le profil initial sont calculés à partir des coordonnées des points du profil cible  $N^i$  (voir tableau 4.2 et figure 4.23). Pour améliorer la robustesse, toutes les valeurs sont fonction du profil cible, tout comme les bornes du problème d'optimisation, données dans le même tableau. Les valeurs optimales des coordonnées du point d'aspiration ( $s_{u,p}^i, s_{v,p}^i$ ) et de la corde axiale  $c^i$  sont calculées directement à partir du profil cible. Par conséquent, ces paramètres sont gardés constants lors de la résolution du problème (4.15), dont la dimension est réduite à 11. L'épaisseur  $e^i$  est initialisée avec l'épaisseur du profil à  $\pm 0,05c^i$  de l'abscisse du point d'aspiration et les rayons  $r_{BA^+}^i, r_{BA^-}^i$  des ellipses au bord d'attaque et  $r_{BF}^i$  du cercle au bord de fuite sont initialisés par des fractions de l'épaisseur. Les angles d'entrée  $\phi_{BA}^i$  et de sortie  $\phi_{BF}^i$  sont initialisés grâce à la ligne moyenne du profil, estimée par une approximation polynomiale de degré 5 des points de  $N^i$  (voir figure 4.23b). La fonction d'approximation, notée  $g_i : [0, b_{u,p}^i] \rightarrow \mathbb{R}$ , prend en entrée une abscisse et retourne l'ordonnée du point correspondant sur la ligne moyenne. Enfin, les angles de calage au bord d'attaque sont initialisés par l'angle entre l'axe des abscisses et la droite ( $\mathbf{o}_p, \mathbf{s}^i$ ), et les angles de calage au bord de fuite par l'angle entre l'axe des abscisses et



la droite  $(\mathbf{s}^i, \mathbf{b}^i)$ .

Tableau 4.2 Valeurs initiales des paramètres et bornes pour le problème d'identification de profil (4.15). Les valeurs sans indication d'unités sont dans l'unité du profil cible  $N^i$ .

paramètre	valeur dans $\mathbf{x}^0$	borne inf. $l$	borne sup. $u$
$s_{u,p}^i$	$m_{u,p} : \mathbf{m} \in \arg \max_{\mathbf{m} \in N^i} m_{v,p}$	—	—
$s_{v,p}^i$	$\max_{\mathbf{m} \in N^i} m_{v,p}$	—	—
$p_{u,p}^i$	$c^i/2$	0	$c^i$
$c^i$	$\max_{\mathbf{m} \in N^i} m_{u,p}$	—	—
$e^i$	$s_{v,p}^i - \min_{\mathbf{m} \in N^i} \{m_{v,p} :  m_{u,p} - s_{u,p}^i  < 0,05c^i\}$	$c^i/100$	$c^i/2$
$r_{BA^+}^i$	$e^i/5$	$e^i/50$	$e^i$
$r_{BA^-}^i$	$e^i/10$	$e^i/50$	$e^i$
$r_{BF}^i$	$e^i/10$	$e^i/100$	$e^i$
$\phi_{BA}^i$	$\arctan(g_i'(0))$	$0^\circ$	$90^\circ$
$\psi_{BA^+}^i$	$\arctan(s_{v,p}^i/s_{u,p}^i)$	$0^\circ$	$89^\circ$
$\psi_{BA^-}^i$	$\psi_{BA^+}^i$	$0^\circ$	$89^\circ$
$\phi_{BF}^i$	$\arctan(-g_i'(b_{u,p}^i))$	$0^\circ$	$90^\circ$
$\psi_{BF^+}^i$	$\arctan(s_{v,p}^i/(c^i - s_{u,p}^i))$	$0^\circ$	$89^\circ$
$\psi_{BF^-}^i$	$\psi_{BF^+}^i$	$0^\circ$	$89^\circ$

**Résolution du problème d'identification.** Le problème (4.15) est résolu avec les paramètres par défaut de NOMAD. Un budget de 1500 évaluations de la fonction  $e(\mathbf{x})$  est alloué. Le profil obtenu pour la section en pied d'aube rotor 37 est visible sur la figure 4.22 (■). Le graphique de convergence de l'algorithme est présenté sur la figure 4.24 et montre la diminution de la fonction objectif  $e$  en fonction du nombre d'évaluations. Une convergence asymptotique est observée. La convergence asymptotique de l'algorithme est vérifiée pour 17 profils de l'aube rotor 37 : 1500 évaluations sont considérées suffisantes pour permettre à l'algorithme de converger vers de faibles valeurs d'erreurs, discutées dans la section 4.3.1.2.

#### 4.2.4 Remarque

À partir d'un ensemble  $A$  de paramètres d'aube, l'exécution des modules GEN puis RET produit un ensemble de paramètres  $B$ . L'ensemble  $B$  peut différer légèrement de l'ensemble  $A$  en raison de trois éléments :

- l'intersection de l'aube avec les surfaces porteuses (section 4.2.3.2) induit un décalage des sections de l'ensemble  $B$  par rapport à l'ensemble  $A$ ;

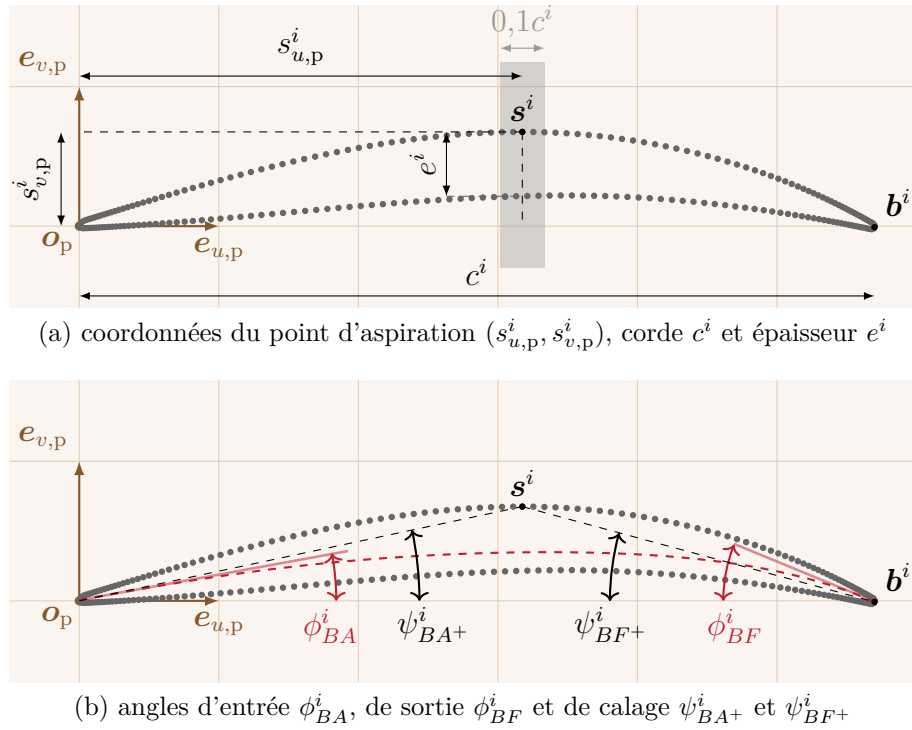


Figure 4.23 Détermination du profil initial à partir du profil cible  $N^i$  (●) et de la ligne moyenne (---).

- l'identification des paramètres de profil d'une section  $i$  dépend du point  $\mathbf{a}^i$  considéré au bord d'attaque (encart page 120). Si ce point est différent du point d'intersection des ellipses au bord d'attaque pour l'ensemble  $A$ , les paramètres de profil identifiés seront différents ;
- rien n'assure l'unicité des paramètres de profil identifiés pour une section donnée (le problème (4.15) peut avoir plusieurs solutions optimales).

D'un point de vue mathématique, l'application qui permet de passer des paramètres d'une aube à un modèle CAO n'est ainsi pas bijective. Ceci est courant pour les méthodes de rétro-ingénierie, qui visent avant tout à obtenir un modèle CAO paramétré haute-fidélité.

### 4.3 Validation de la fidélité sur les aubes rotor 37 et rotor 67

La validation de la fidélité est réalisée par comparaison d'une aube d'entrée avec l'aube paramétrée correspondante obtenue par application successive des modules RET et GEN. Des critères de comparaison géométriques (section 4.3.1) et des critères relatifs à la dynamique de l'aube (section 4.3.2) sont considérés. La validation est effectuée sur deux aubes ouvertes de la NASA : l'aube rotor 37 [151] issue d'un étage de compresseur transsonique, et une aube

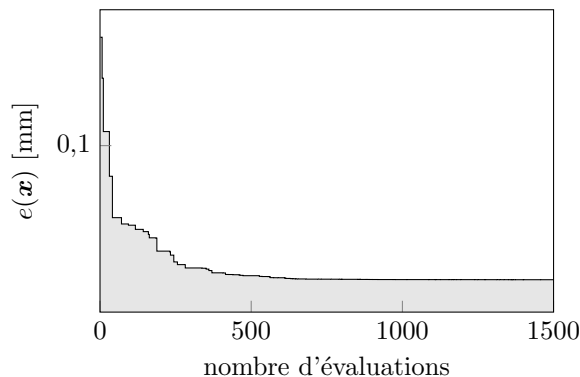


Figure 4.24 Courbe de convergence de **Mads** pour le problème (4.15) d'identification des paramètres de profil de la section en pied d'aube rotor 37.

issue du rotor 67 [181], un étage de soufflante. Les modèles CAO de ces aubes sont librement accessibles sur internet <sup>7</sup>.

Les critères de comparaison sont analysés en fonction du nombre de sections  $n_{\text{sec}}$  considéré dans **RET**. Ce paramètre est supposé avoir un fort impact sur la conception : un nombre de sections suffisant est essentiel pour représenter la courbure de l'aube. Les autres paramètres du module **RET**, tels que ceux relatifs à la discrétisation des nuages de points ou à la formulation du problème d'identification des profils, sont issus de précédents travaux ou déterminés empiriquement. Pour faciliter la comparaison des aubes paramétrées, les valeurs de  $n_{\text{sec}}$  sont choisies par dichotomie :  $n_{\text{sec}} \in \{2, 3, 5, 9, 17\}$ .

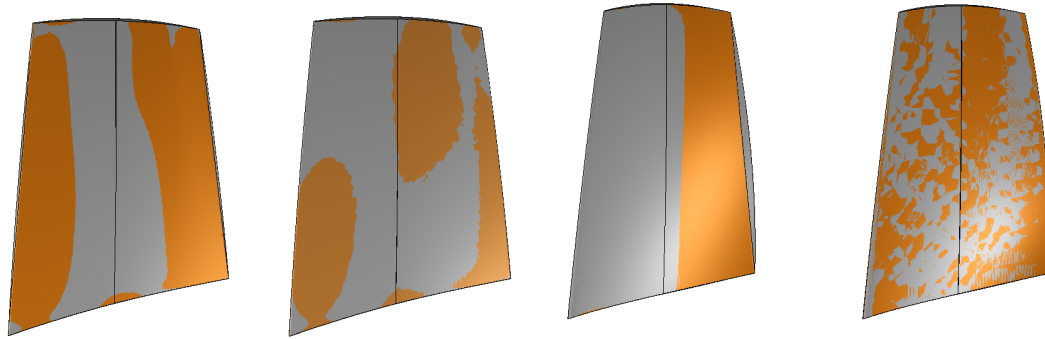
### 4.3.1 Critères géométriques

La figure 4.25 présente les modèles CAO des aubes paramétrées rotor 37 et rotor 67, abrégées CAO paramétrées, avec  $n_{\text{sec}} \in \{2, 3\}$ . Au moins trois sections semblent requises pour représenter précisément la courbure de l'aube, en particulier pour rotor 67. Les CAO paramétrées avec  $n_{\text{sec}} \geq 3$  sont visuellement indiscernables les unes des autres. Deux critères de comparaison géométriques sont considérés : un critère à l'échelle de l'aube basé sur le volume de la CAO (section 4.3.1.1) et un critère plus local, à l'échelle des profils (section 4.3.1.2).

#### 4.3.1.1 Volume de l'aube

Le volume de la CAO d'entrée, noté  $V^e$ , est scindé en deux composantes, présentées sur la figure 4.26 : le volume central  $V_c^e$  (■) entre les surfaces porteuses en pied et sommet, et le volume perdu  $V_{\text{per}}^e$  (□) au-delà de ces surfaces. La proportion de volume perdu par rapport

7. <https://lava-wiki.meca.polymtl.ca/public/modeles/accueil>



(a) rotor 37,  $n_{\text{sec}} = 2$  (b) rotor 37,  $n_{\text{sec}} = 3$  (c) rotor 67,  $n_{\text{sec}} = 2$  (d) rotor 67,  $n_{\text{sec}} = 3$

Figure 4.25 CAO d'entrée (■) et CAO paramétrées (■) pour les aubes rotor 37 et rotor 67.

au volume total est définie par :

$$\Delta V_{\text{per}}^e = -\frac{V_{\text{per}}^e}{V^e} \times 100 \quad [\%], \quad (4.17)$$

et la variation de volume sur la partie centrale entre une CAO paramétrée et la CAO d'entrée est donnée par :

$$\Delta V_c = \frac{V - V_c^e}{V_c^e} \times 100 \quad [\%], \quad (4.18)$$

où  $V$  est le volume de la CAO paramétrée.

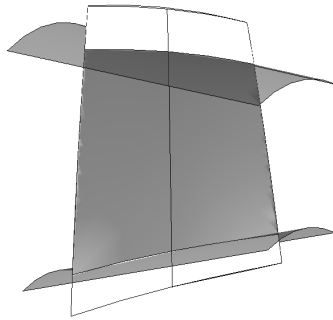


Figure 4.26 Partition du volume  $V^e$  de la CAO d'entrée : volume perdu  $V_{\text{per}}^e$  (□) (exagéré pour une meilleure visibilité) et volume central  $V_c^e$  (■).

Les variations de volume sont présentées dans le tableau 4.3. La proportion de volume perdu  $\Delta V_{\text{per}}^e$  est très faible pour l'aube rotor 37 et elle n'a pu être calculée pour l'aube rotor 67 car les surfaces coniques sont trop proches des faces en sommet et pied d'aube ; elle est donc jugée négligeable. La perte de matière en sommet et pied d'aube, inhérente à la méthodologie

proposée, est ainsi négligeable par rapport au volume de la CAO d'entrée.

Les variations de volume central  $V_c^e$  sont dépendantes du nombre de sections pour les deux aubes. Pour  $n_{\text{sec}} = 2$ , les variations négatives indiquent que le volume de la CAO paramétrée est plus faible que celui de la CAO d'entrée. En effet dans ce cas, la surface latérale de l'aube est générée par une interpolation linéaire qui ne permet pas de représenter la courbure de l'aube. L'ajout de sections (de 3 à 5) permet de mieux représenter la courbure : la variation de volume central pour  $n_{\text{sec}} = 5$  est seulement de  $-0,1\%$  pour l'aube rotor 67 et  $0,79\%$  pour l'aube rotor 37. Au-delà de 5 sections, la quantité  $\Delta V_c^e$  reste faible, mais fluctue en fonction de  $n_{\text{sec}}$ . Ceci est probablement lié à un cumul des erreurs locales sur les sections ajoutées, dont les profils ne sont pas parfaitement approximés.

Tableau 4.3 Variations du volume des CAO paramétrées des aubes rotor 37 et rotor 67.

aube	$\Delta V_{\text{per}}^e$ [%]	$\Delta V_c$ [%]				
		$n_{\text{sec}} = 2$	$n_{\text{sec}} = 3$	$n_{\text{sec}} = 5$	$n_{\text{sec}} = 9$	$n_{\text{sec}} = 17$
rotor 37	0,12	-0,5	1,04	0,79	0,96	0,81
rotor 67	négligeable	-10,04	-0,1	-0,1	-0,8	0,25

#### 4.3.1.2 Profils des sections

La similitude entre un profil paramétré défini par un vecteur de paramètres  $\boldsymbol{x}$  et un profil cible  $N^i$  est quantifiée par la fonction d'erreur  $e(\boldsymbol{x})$  (équation (4.16)). D'après de précédents travaux basés sur des sections planes [107, p. 35], un profil paramétré est considéré fidèle au profil cible si  $e(\boldsymbol{x}) \leq 0,05$  mm. Ce critère reste valide dans le cadre de ce travail, car les profils traités ont le même ordre de grandeur que dans les précédents travaux. L'utilisation de surfaces coniques induit nécessairement une déformation des sections lors du passage des repères  $\mathcal{R}_a$  à  $\mathcal{P}_p$ . Il s'agit donc de vérifier si la paramétrisation proposée dans cette thèse vérifie le critère de fidélité pour des profils issus de sections coniques.

Pour les aubes rotor 37 et rotor 67, les dix-sept profils paramétrés obtenus satisfont tous  $e(\boldsymbol{x}) \leq 0,05$  mm. En raison de ces valeurs, les profils paramétrés issus de sections coniques sont considérés bien représentés, ce qui témoigne de la fidélité de la procédure pour des profils de formes variées. Cette fidélité se traduit graphiquement par la bonne superposition des profils paramétrés aux profils cibles, illustrée pour six profils paramétrés sur la figure 4.27. Une valeur d'erreur  $e(\boldsymbol{x})$  faible n'exclut toutefois pas la présence de faibles écarts très localisés entre le profil cible  $N^i$  et le profil paramétré, discutés dans l'encart.

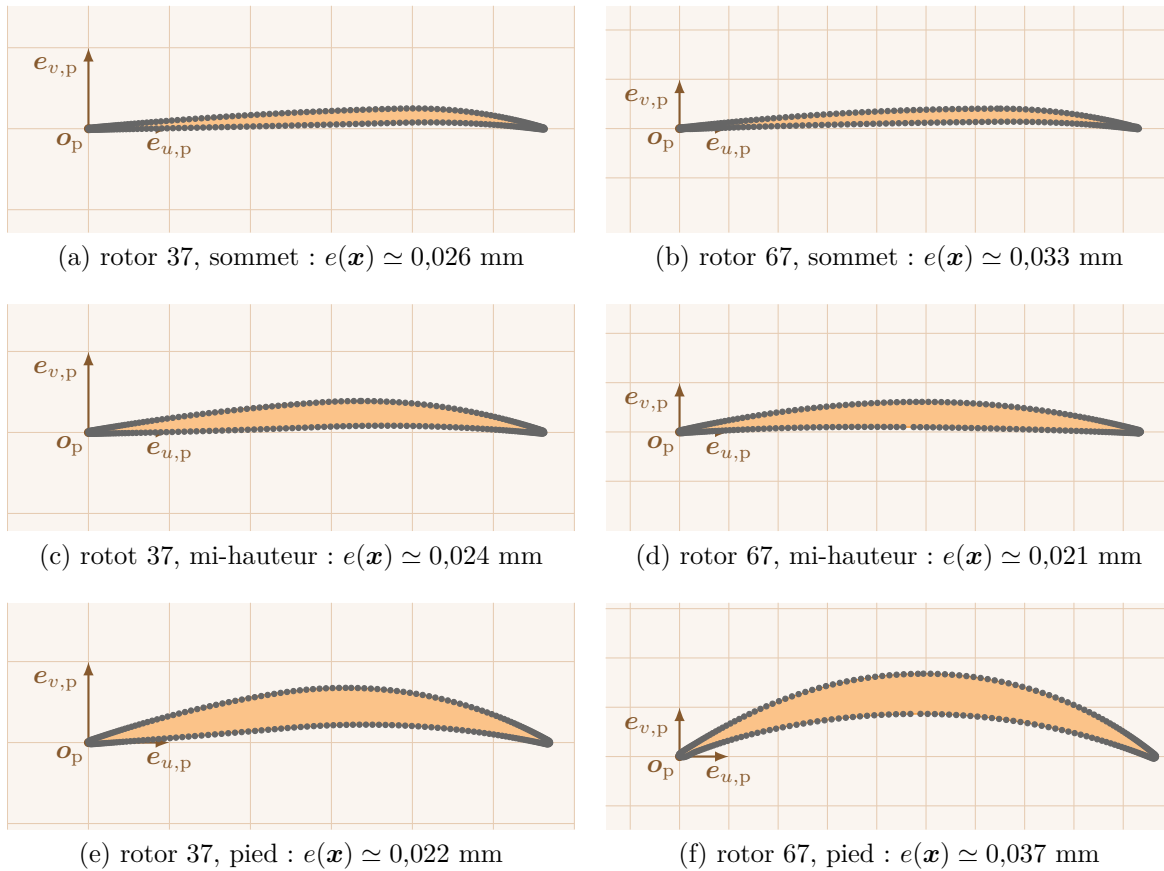


Figure 4.27 Profils cibles (●) et profils paramétrés (■) de trois sections des aubes rotor 37 et rotor 67.

#### Erreurs localisées sur les profils paramétrés

Des écarts très faibles sont visibles au bord d'attaque pour les aubes rotor 37 paramétrées (figure 4.28). L'algorithme d'optimisation utilisé pour l'identification des paramètres du profil (section 4.2.3.3) ayant bien convergé pour ce cas, ces écarts indiquent une limite de la paramétrisation à représenter la courbure du profil au bord d'attaque.

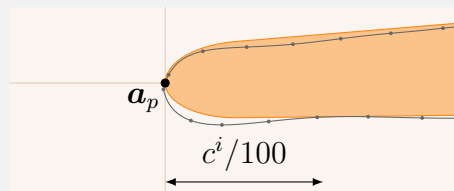


Figure 4.28 Écart au bord d'attaque entre le profil cible (●) et le profil paramétré (■) de la section en sommet d'aube rotor 37. Profil  $i$  avant discrétisation (—).

Ceci peut être expliqué par deux aspects. D'une part, le petit rayon des ellipses au bord

d'attaque est contraint à valoir la moitié du grand rayon (figure 4.12). Cette contrainte restreint fortement la variété de formes que la paramétrisation peut engendrer. D'autre part, le placement du profil cible dans le repère des profils  $\mathcal{P}_p$  joue un rôle crucial sur l'identification des paramètres. En effet le tracé d'un profil paramétré dans  $\mathcal{P}_p$  est tel que l'origine du repère est le point de jonction  $\mathbf{a}^i$  des ellipses au bord d'attaque. Le point  $\mathbf{a}^i$  est choisi dans  $\mathcal{P}_{d^i}$  (section 4.2.3.2) : un mauvais choix de point  $\mathbf{a}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  peut ainsi entraîner des difficultés d'identification. Afin d'éviter ce problème, une procédure de sélection manuelle du point  $\mathbf{a}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  est implémentée en plus de la procédure automatique décrite dans la section 4.2.3.2.

### 4.3.1.3 Conclusion partielle

Les CAO paramétrées des aubes rotor 37 et rotor 67 avec au moins trois sections sont visuellement indiscernables de la CAO d'entrée. À l'échelle globale, les critères basés sur le volume sont très satisfaisants. En particulier, la perte de matière en sommet et pied d'aube est considérée comme négligeable. À l'échelle des profils, la paramétrisation proposée est validée pour des profils issus de sections coniques ; les ordres de grandeur des erreurs observées sont très faibles. Les résultats obtenus attestent de la haute fidélité géométrique des aubes paramétrées obtenues.

## 4.3.2 Critères dynamiques

La réponse vibratoire d'une aube en contact avec le carter est intrinsèquement non linéaire et particulièrement riche. Cette richesse se traduit notamment par la possible coexistence de plusieurs solutions d'amplitudes très différentes à une vitesse de rotation donnée. Dans ce contexte, la faible variation d'un paramètre (forme de l'aube, jeux aube/carter, conditions limites...) peut avoir une influence significative sur l'amplitude de vibration prédite numériquement [108, 149]. Il est donc essentiel que l'aube paramétrée soit la plus fidèle possible à l'aube d'entrée en matière de comportement dynamique.

Trois critères de comparaison dynamiques sont considérés : (1) un critère portant sur les fréquences propres (section 4.3.2.1), (2) un critère basé sur la consommation de jeu (section 4.3.2.2) et (3) un critère portant sur la comparaison qualitative des réponses vibratoires prédites des aubes à des interactions de contact (section 4.3.2.3).

Le calcul de ces critères requiert des maillages éléments finis des aubes d'entrées et des aubes paramétrées. Les maillages des aubes paramétrées sont obtenus avec le module MAI. Une étude de convergence en nombre d'éléments, présentée en annexe E, est réalisée pour les

aubes paramétrées rotor 37 et rotor 67 à  $n_{\text{sec}} = 5$  sections. En raison de la similitude des CAO paramétrées avec différentes valeurs de  $n_{\text{sec}}$ , l'analyse de convergence est considérée valable pour tous les modèles traités dans cette section. Pour les deux rotors, le nombre d'éléments  $n_h$  sur la hauteur d'aube est fixé à 38, ce qui conduit à des maillages à 6 384 éléments pour les aubes rotor 37 et 6 232 éléments pour les aubes rotor 67. Comme les maillages éléments finis ont une grande influence sur les critères dynamiques, les aubes d'entrée sont maillées manuellement avec le module MAI. Ainsi, tous les maillages relatifs à un rotor possèdent le même nombre de nœuds et la même topologie.

#### 4.3.2.1 Fréquences propres

Une bonne représentation des fréquences propres est essentielle pour la prédiction des vitesses critiques d'interaction. L'erreur relative sur la  $p^e$  fréquence propre d'une aube paramétrée par rapport à l'aube d'entrée est définie par :

$$\Delta f_p = \frac{|f_p - f_p^e|}{f_p^e} \times 100 \quad [\%], \quad (4.19)$$

où  $f_p^e$  (respectivement  $f_p$ ) est la  $p^e$  fréquence propre de l'aube d'entrée (respectivement paramétrée). Les erreurs sur les fréquences propres sont calculées pour les dix premiers modes propres, l'influence des modes plus élevés est supposée négligeable sur la dynamique des aubes étudiées. Pour les aubes rotor 37 et rotor 67, le premier mode propre est un mode de flexion susceptible d'engendrer des interactions aubes/carter ; une erreur inférieure à 1% sur la première fréquence propre est donc ciblée.

La figure 4.29 présente les erreurs sur les fréquences propres des aubes paramétrées par rapport aux aubes d'entrée rotor 37 et rotor 67. Pour les aubes paramétrées avec  $n_{\text{sec}} \geq 3$ , un excellent accord est observé sur les fréquences propres. Les erreurs diminuent pour la plupart des fréquences lorsque  $n_{\text{sec}}$  est augmenté à cinq sections. Pour  $n_{\text{sec}} \in \{9, 17\}$ , les erreurs restent faibles, mais sont légèrement plus élevées que pour  $n_{\text{sec}} = 5$  pour les deux aubes. Ce comportement est probablement causé par l'accumulation d'erreurs sur les profils, expliqué dans la section 4.3.1.2. Les erreurs les plus faibles sont obtenues pour les aubes paramétrées à cinq sections : toutes les erreurs calculées sont inférieures à 2% pour rotor 37 et 1% pour rotor 67. En particulier, l'erreur sur la première fréquence propre est seulement de 0,6% pour rotor 37 et 0,08% pour rotor 67. Ces erreurs sont du même ordre de grandeur que celles observées lors d'études de convergence du maillage en modifiant légèrement le nombre d'éléments. La méthodologie de modélisation proposée permet d'assurer une excellente fidélité sur les fréquences propres des aubes paramétrées obtenues. De plus, les erreurs sur les fréquences



propres sont cohérentes avec les variations de volumes observées dans le tableau 4.3 : les erreurs les plus faibles sur les fréquences propres sont observées pour les variations de volume les plus faibles.

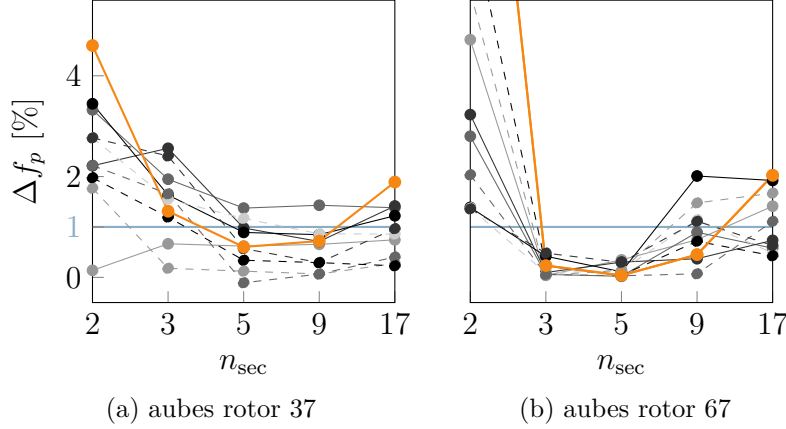


Figure 4.29 Erreurs sur les fréquences propres des aubes paramétrées par rapport à l'aube d'entrée :  $\Delta f_1$  (—●—),  $\Delta f_2$  (—●—),  $\Delta f_3$  (—●—),  $\Delta f_4$  (—●—),  $\Delta f_5$  (—●—),  $\Delta f_6$  (—●—),  $\Delta f_7$  (—●—),  $\Delta f_8$  (—●—),  $\Delta f_9$  (—●—),  $\Delta f_{10}$  (—●—).

#### 4.3.2.2 Consommation de jeu

La consommation de jeu représente la variation du jeu aube/carter lorsqu'une aube vibre selon un de ses modes propres [39]. Cette quantité a récemment été mise en évidence comme un indicateur de la robustesse au contact de l'aube [39, 108, 149]. La consommation de jeu est définie pour un mode fixé et pour un nœud en sommet d'aube. Dans cette section, le premier mode de flexion (1F), et le nœud au bord d'attaque en sommet d'aube (BA) sont considérés. La consommation de jeu correspondante est notée  $c_{BA,1F}$ . Le calcul de consommation de jeu est expliqué en détail dans la section 5.1.2.1.

Le critère considéré dans cette section est l'erreur relative  $\Delta c$  sur la consommation de jeu  $c_{BA,1F}$  d'une aube paramétrée par rapport à celle de l'aube d'entrée  $c_{BA,1F}^e$ , définie par :

$$\Delta c = \frac{c_{BA,1F} - c_{BA,1F}^e}{c_{BA,1F}^e} \times 100 \quad [\%]. \quad (4.20)$$

Les erreurs sur la consommation de jeu obtenues pour les aubes rotor 37 et rotor 67 sont présentées dans le tableau 4.4. L'accord entre l'aube d'entrée et les aubes paramétrées est excellent pour les modèles  $n_{sec} \geq 3$ . En particulier, les erreurs les plus faibles sont observées pour les modèles  $n_{sec} = 5$  pour les deux aubes. Par ailleurs, l'évolution des erreurs en fonction

de  $n_{\text{sec}}$  est cohérente avec les évolutions du volume observées dans le tableau 4.3.

Tableau 4.4 Erreurs sur la consommation de jeu au BA pour le premier mode de flexion des aubes paramétrées par rapport à l’aube d’entrée.

aube	$\Delta c$ [%]				
	$n_{\text{sec}} = 2$	$n_{\text{sec}} = 3$	$n_{\text{sec}} = 5$	$n_{\text{sec}} = 9$	$n_{\text{sec}} = 17$
rotor 37	6,23	0,24	-0,09	-0,14	0,27
rotor 67	-22,08	-1,03	-0,94	-0,94	-3,72

### 4.3.2.3 Réponse vibratoire à un scénario de contact

La stratégie numérique [115] présentée dans la section 3.3.3.4 est utilisée pour prédire la réponse vibratoire des aubes rotor 37 et rotor 67 à un scénario de contact sur une large plage de vitesses de rotation  $\omega$ . Les paramètres de simulation spécifiques à cette campagne sont listés en annexe F. Huit nœuds frontière uniformément répartis en sommet d’aube sont considérés pour la gestion du contact dans les modèles réduits utilisés pour les simulations. Ces nœuds sont les mêmes pour toutes les aubes relatives à un rotor. L’aube d’entrée est comparée avec les aubes paramétrées avec  $n_{\text{sec}} \in \{3, 5, 9\}$ .

**Rotor 37.** À partir du vecteur de déplacement radial  $\mathbf{d}_{r,BA}$  du BA sur les 40 derniers tours de rotation simulés, les cartes d’interactions de l’aube d’entrée et des aubes paramétrées sont calculées et présentées sur la figure 4.30. La même échelle de couleurs logarithmique est utilisée pour toutes les cartes. La comparaison de ces cartes permet de mettre en évidence la grande similarité du contenu fréquentiel de la réponse des aubes sur l’ensemble de la plage de vitesses, quelle que soit la valeur de  $n_{\text{sec}}$ . Les amplitudes maximales atteintes sont proches sur toutes les cartes. Le fait que les fréquences propres des aubes paramétrées soient légèrement supérieures à celles de l’aube d’entrée se traduit logiquement par un léger décalage des vitesses d’interaction et donc un glissement des zones de plus grandes amplitudes vers de plus grandes vitesses de rotation.

Afin de souligner l’accord observé sur la prédiction du pic d’amplitude, les courbes de réponse en fréquence des aubes sont superposées sur la figure 4.31. Ces CRF sont obtenues par calcul de la norme infinie du vecteur  $\mathbf{d}_{r,BA}$ . Il y a globalement un excellent accord entre les différentes CRF calculées. Le fait que les CRF des trois aubes paramétrées se superposent presque parfaitement démontre notamment la très grande robustesse de l’outil de modélisation par rapport à la variation du paramètre  $n_{\text{sec}}$ . Cela indique aussi que les légers écarts observés

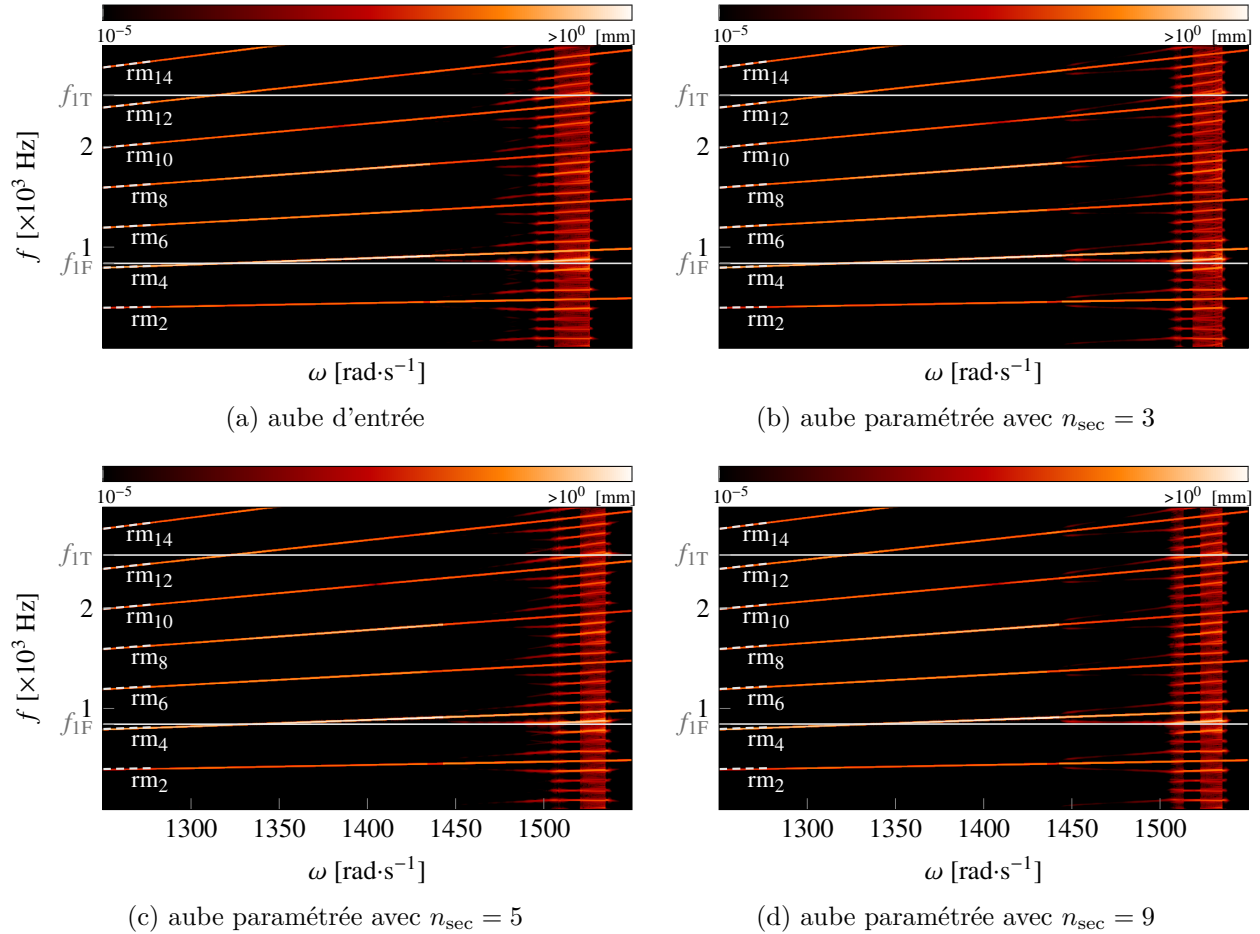


Figure 4.30 Cartes d'interactions des aubes rotor 37 d'entrée et paramétrées à 3, 5 et 9 sections.

entre l'aube d'entrée et les aubes paramétrées sont très vraisemblablement inhérents à la paramétrisation des sections et à ses limites (voir encart p.128).

Enfin, afin de confirmer les très faibles écarts entre la CRF de l'aube d'entrée et les CRF des aubes paramétrées, les réponses temporelles en régime permanent des aubes sont représentées sur la figure 4.32 pour deux vitesses de rotation :  $\omega = 1320 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $\omega = 1350 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Les signaux sont très similaires ; les différences observées pour une vitesse de rotation donnée sont majoritairement dues au glissement des interactions engendré par les légères modifications de fréquences propres des aubes paramétrées par rapport à l'aube d'entrée.

**Rotor 67.** Les cartes d'interactions relatives aux aubes rotor 67 d'entrée et paramétrées sont présentées sur la figure 4.33. Malgré un comportement dynamique riche, les cartes obtenues sont très similaires. Les fréquences propres des aubes paramétrées étant légèrement

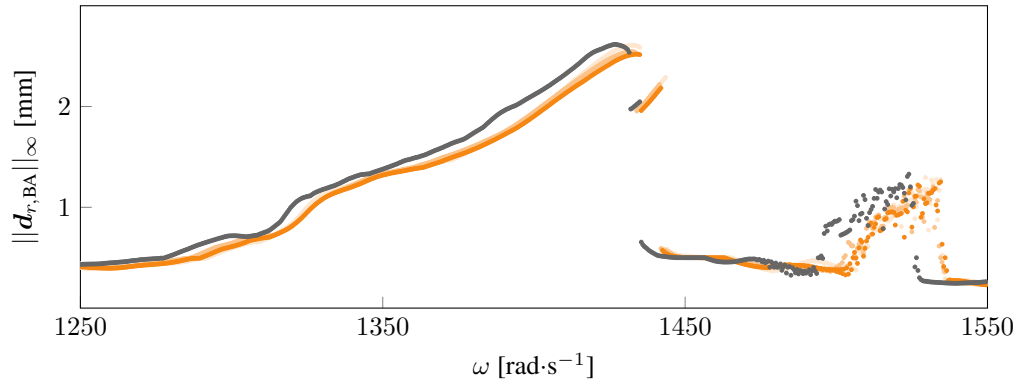


Figure 4.31 CRF des aubes rotor 37 d'entrée (●) et paramétrées à 3 (●), 5 (●) et 9 (●) sections.

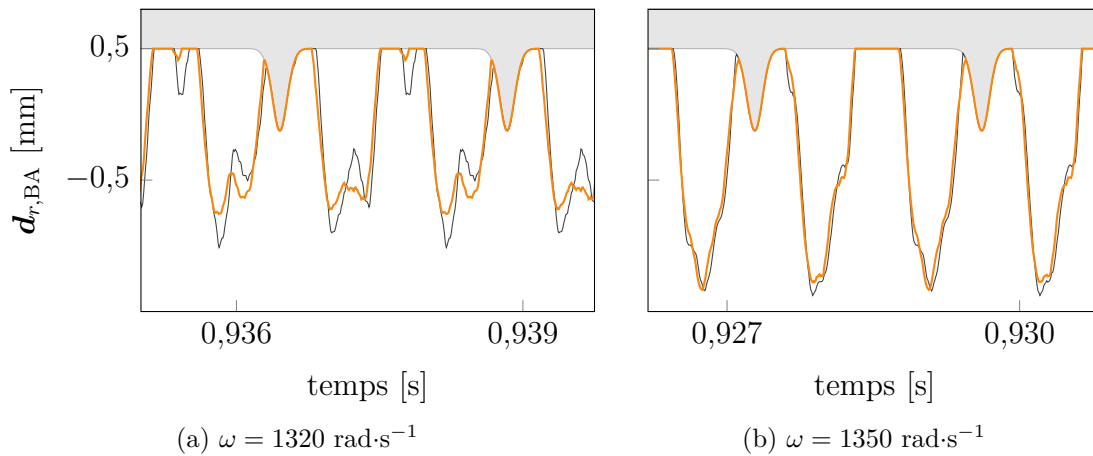


Figure 4.32 Déplacement radial du BA en régime permanent pour l'aube rotor 37 d'entrée (—) et paramétrée à 5 sections (—). Carter (□).

plus élevées que celles de l'aube d'entrée, un décalage des zones de forte amplitude vers des vitesses de rotation plus grandes est également visible.

Les CRF des différentes aubes sont présentées sur la figure 4.34. Sur les plages fréquentielles où les solutions prédites sont parfaitement périodiques, comme de 1200 à 1300  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , l'accord entre les différentes CRF est excellent. Le léger glissement des zones de fortes amplitudes vers des zones de plus grandes vitesses de rotation est à nouveau visible, notamment au voisinage de 1350  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Sur les autres plages fréquentielles, les nuages de points diffus révèlent la présence de solutions coexistantes d'amplitudes très différentes, par exemple autour de 1100  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . La localisation similaire de ces plages pour les deux CRF atteste de la fidélité des aubes paramétrées en matière de comportement dynamique.

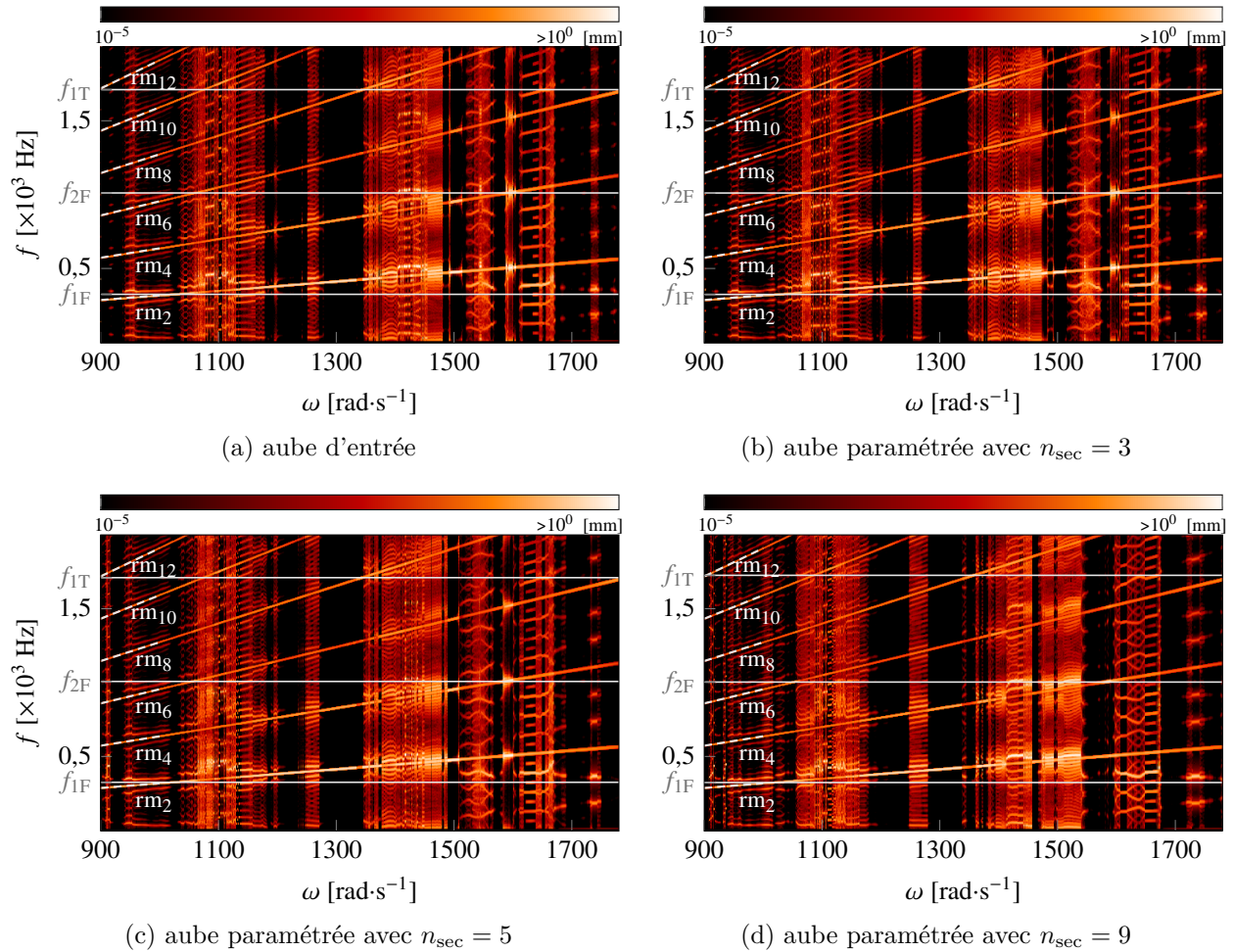


Figure 4.33 Cartes d'interactions des aubes rotor 67 d'entrée et paramétrées à 3, 5 et 9 sections.

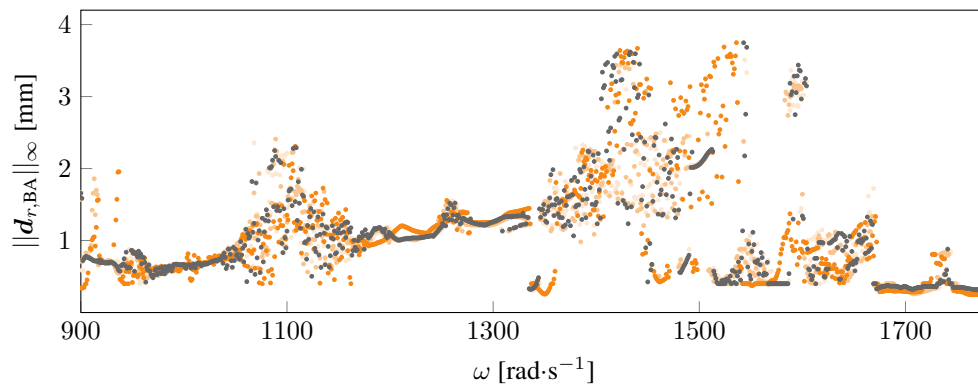


Figure 4.34 CRF des aubes rotor 67 d'entrée ( $\bullet$ ) et paramétrées à 3 ( $\circ$ ), 5 ( $\circ$ ) et 9 ( $\circ$ ) sections.

### 4.3.3 Bilan

Les CAO paramétrés avec  $n_{\text{sec}} \geq 3$  des aubes rotor 37 et rotor 67 sont visuellement indistinguables de la CAO d'entrée. Un très bon accord sur les critères géométriques est obtenu avec ces mêmes CAO paramétrées. Concernant les critères dynamiques, les aubes paramétrées avec  $n_{\text{sec}} \in \{3, 5, 9\}$  démontrent une excellente fidélité. Les erreurs sur les dix premières fréquences propres pour ces aubes sont inférieures à 2%, et les erreurs sur la consommation de jeu au BA pour le mode 1F sont inférieures à 1,03%, ce qui atteste de la fidélité de ces aubes dans un contexte de dynamique linéaire. De plus, la similitude des cartes d'interactions et des CRF démontre qualitativement la fidélité de ces aubes sur le plan de la dynamique non linéaire. La perte de matière en pied et sommet d'aube due à la rétro-ingénierie et les faibles erreurs de représentation locales du bord d'attaque observées dans la section 4.3.1.2 ont une influence négligeable sur le comportement dynamique des aubes paramétrées.

Tous critères confondus, les meilleurs résultats sont obtenus avec les aubes paramétrées à 5 sections qui semblent présenter un bon compromis entre représentation précise de la courbure et non-cumul des erreurs. Par ailleurs, la similitude des critères obtenus pour différents nombres de sections atteste de la robustesse de l'outil développé par rapport à  $n_{\text{sec}}$ .

## 4.4 Validation de la robustesse et de l'efficacité numérique

Étant donné leur utilisation avant chaque simulation au sein du processus de reconception proposé (figure 4.3), une grande robustesse des modules GEN et MAI est exigée vis-à-vis des paramètres d'entrée pour limiter au maximum le nombre de simulations échouées. Cette robustesse est démontrée dans la section 4.4.1. L'efficacité numérique des modules GEN et MAI est également requise pour limiter le coût de la procédure d'optimisation, et à moindre mesure celle du module RET. Un aperçu des temps de calcul est donné dans la section 4.4.2.

### 4.4.1 Robustesse

La robustesse du module GEN par rapport à  $n_{\text{sec}}$  a été démontrée dans la section 4.3 en générant des modèles allant jusqu'à  $n_{\text{sec}} = 17$  pour les aubes rotor 37 et rotor 67. De plus, la génération de modèles liés à l'aube rotor 67, plus vrillée que l'aube rotor 37, témoigne de la robustesse de l'outil par rapport aux paramètres de l'aube. Pour compléter cette analyse, la robustesse est ici validée par rapport aux variations des paramètres d'empilement sur la hauteur d'aube.

La figure 4.35 présente quatre aubes paramétrées à cinq sections. Les paramètres de profil

sont identiques pour toutes les sections et correspondent à la section à mi-hauteur de l'aube rotor 37 paramétrée à cinq sections. Les rayons  $r^i$  des cinq sections sont également ceux de l'aube rotor 37 paramétrée à cinq sections. Pour chacune des quatre aubes, un des paramètres d'empilement restants est varié linéairement du pied au sommet. Pour l'aube (a), la conicité  $\gamma^i$  varie de  $-\pi/2$  à  $\pi/2$ ; au-delà, la CAO est générée, mais certaines surfaces sont intersectées. Pour l'aube (b), l'angle d'inclinaison  $\Delta\theta^i$  varie de 0 à  $\frac{2}{3}\pi$  et pour l'aube (c), la flèche  $\Delta z^i$  varie de 0 à 5 fois la hauteur de l'aube. Enfin, une variation de l'angle de calage  $\lambda^i$  de 0 à  $\pi/2$  — bornes limites pour des aubes de compresseur — est illustrée avec l'aube (d). Ces plages de variations correspondent aux limites pour lesquelles le module GEN a été testé et ne sont en aucun cas admissibles dans un processus de reconception. Les CAO paramétrées ont été obtenues sans erreurs ni surcoût de calcul, ce qui témoigne d'une grande robustesse du module GEN.

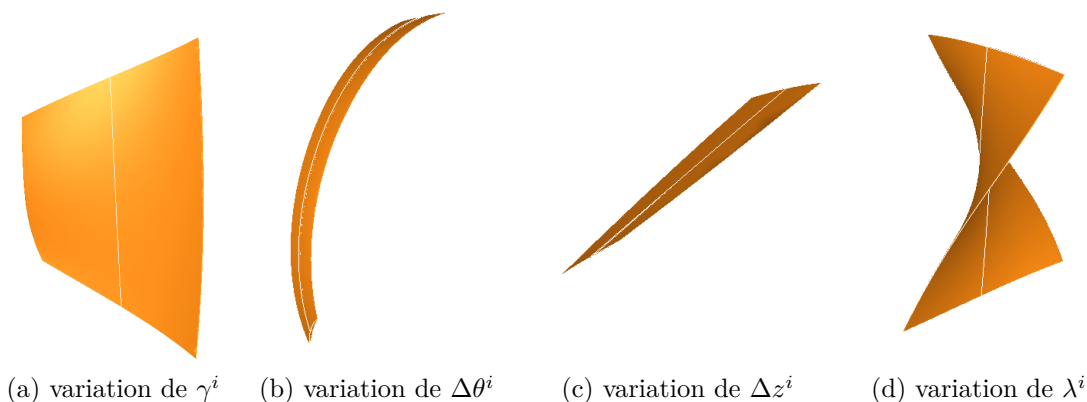


Figure 4.35 CAO paramétrées générées avec des variations linéaires extrêmes des paramètres d'empilement du pied au sommet d'aube.

#### 4.4.2 Temps de calcul

Le temps de calcul des différents modules est calculé<sup>8</sup> pour les modèles paramétrés à  $n_{\text{sec}} = \{2, 3, 5, 9, 17\}$  sections relatifs à l'aube rotor 37. La figure 4.36a indique le temps d'exécution des modules GEN et MAI en fonction du nombre de sections. La majorité du temps d'exécution est due au module GEN. L'opération la plus coûteuse est la génération du modèle CAO dans Salome, qui requiert plus de temps lorsque le nombre de sections augmente. Toutefois, la durée d'exécution du module GEN n'excède pas 13,5 secondes pour le modèle à 5 sections qui présente la meilleure fidélité. Au sein du processus de reconception proposé (figure 4.3), le temps de

8. sur une machine comportant 8 processeurs Intel Core i7-8700T CPU, 2.40GHz.

calcul de la consommation de jeu, utilisée comme simulation substitut, est d'environ 30 sec. Au regard de ce temps de calcul, la durée d'exécution du module GEN est jugée acceptable. La consommation de jeu étant une quantité relativement peu coûteuse à calculer, ce constat reste *a priori* valide pour de futures simulations prédictives.

La figure 4.36b présente la durée d'exécution du module RET à partir de l'aube d'entrée rotor 37. Près de 98% des durées indiquées sont dédiées à la résolution du problème d'identification des profils : environ 5 minutes sont nécessaires par profil pour un budget de 1500 évaluations de la fonction objectif. Ce coût est acceptable dans le cadre d'études considéré, car la rétro-ingénierie n'est effectuée qu'une fois par aube et son coût est faible devant celui de la procédure d'optimisation qui requiert plusieurs heures.

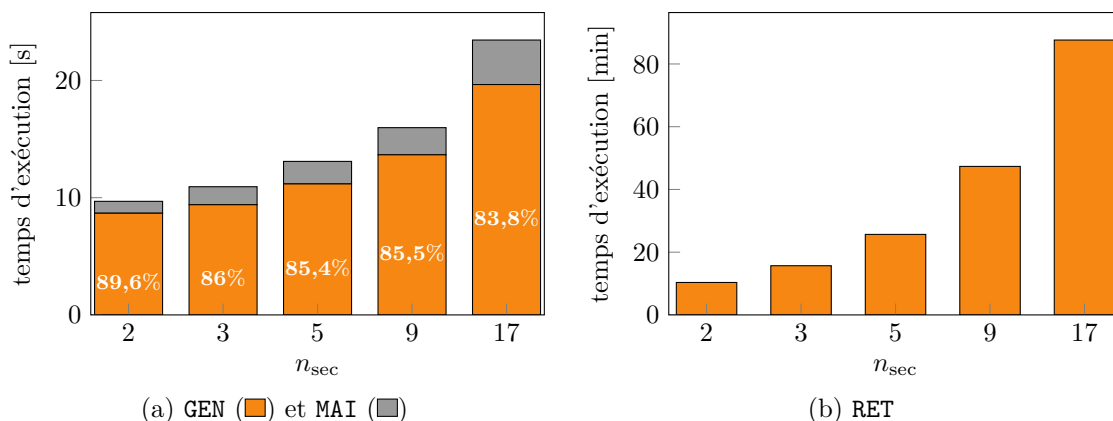


Figure 4.36 Durées d'exécution des modules GEN, MAI et RET pour les aubes rotor 37 paramétrées avec  $n_{sec} \in \{2, 3, 5, 9, 17\}$  sections.

#### 4.5 Complément sur la polyvalence

L'outil de modélisation développé repose sur une paramétrisation dédiée aux aubes de compresseur, relativement peu bombées. Toutefois, afin d'éprouver la polyvalence de l'outil, la rétro-ingénierie d'une aube de turbine est effectuée à titre de démonstration. Bien que la CAO d'entrée<sup>9</sup> soit creuse, seul un modèle CAO paramétré décrivant l'enveloppe extérieure de l'aube est recherché. Les modules RET et GEN sont successivement appliqués. Le but est d'estimer la fidélité de la CAO paramétrée obtenue. Seules des modifications mineures de la méthodologie de modélisation sont requises pour pouvoir l'appliquer sur des aubes de turbines.

9. librement accessible en ligne : <https://grabcad.com/library/turbine-blade--4>



### Adaptations de la méthodologie de modélisation pour des aubes de turbines

L'application du module RET sur une aube de turbine conduit à un positionnement des profils dans  $\mathcal{P}_p$  avec l'extrados orienté vers le bas. Pour permettre l'identification correcte des paramètres de profil, décrite dans la section 4.2.3.2, l'extrados doit être positionné vers le haut dans  $\mathcal{P}_p$ . Par conséquent, dans le module RET, une symétrie des profils par rapport à l'axe  $(\mathbf{o}_p, \mathbf{e}_{u,p})$  est réalisée au moment du passage des repères  $\mathcal{P}_{d^i}$  à  $\mathcal{P}_p$ . De plus, pour plus de précision, le point  $\mathbf{a}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  au bord d'attaque et le point  $\mathbf{b}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  au bord de fuite, requis pour ce passage, sont déterminés manuellement. La transformation inverse, de  $\mathcal{P}_p$  à  $\mathcal{P}_{d^i}$ , est modifiée en conséquence dans le module GEN.

La CAO d'entrée et la CAO paramétrée à cinq sections sont présentées sur la figure 4.37a. Visuellement, l'accord entre les modèles CAO est très bon. De plus, les profils paramétrés sont représentatifs des profils cible, comme en atteste le profil paramétré présenté sur la figure 4.37b obtenu pour la section en milieu d'aube. Ceci démontre la grande variété de formes pouvant être représentées par la paramétrisation proposée. La comparaison des aubes d'entrée et paramétrée est ici limitée à la comparaison des enveloppes extérieures des modèles CAO : les autres critères de validation ne sont pas applicables à des aubes creuses et les interactions de contact liées aux aubes de turbine dépassent le cadre du projet de recherche.

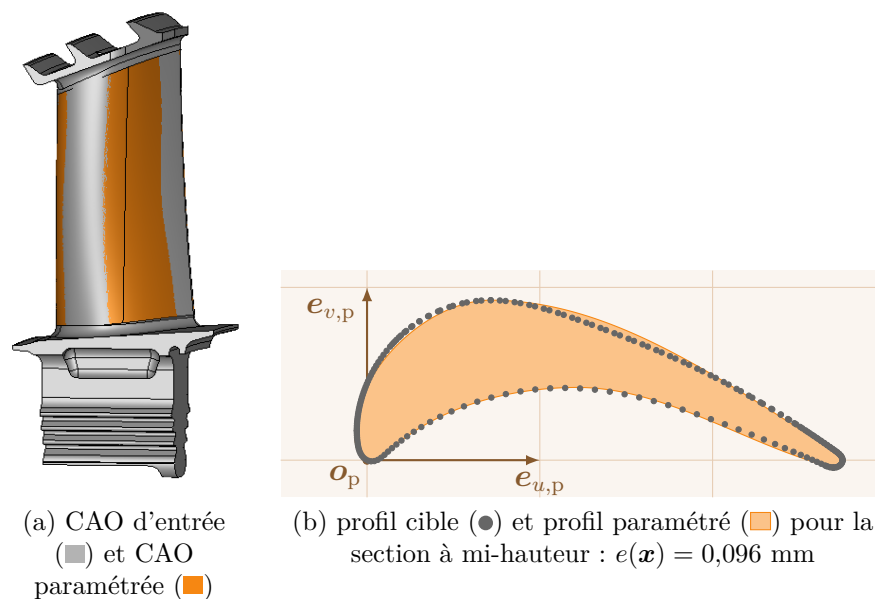


Figure 4.37 Rétro-ingénierie à 5 sections d'une aube de turbine.

## 4.6 Conclusion

L'outil de modélisation présenté dans ce chapitre, basé sur une paramétrisation dédiée aux aubes de compresseur, permet d'effectuer les phases de rétro-ingénierie et de génération d'aubes indispensables au processus de reconception proposé sur la figure 4.3. La phase de rétro-ingénierie constitue la contribution majeure de cet outil. Une validation complète de la fidélité des aubes paramétrées est effectuée, pour les aubes rotor 37 et rotor 67, dont les géométries sont très différentes. Une excellente fidélité est démontrée pour les deux aubes, tant en termes de géométrie que de comportement dynamique.

De plus, la génération avec succès d'une variété d'aubes aux paramètres différents témoigne du haut niveau de robustesse de l'outil. Les temps de calcul observés pour les différents modules sont également compatibles avec le processus de reconception. L'outil développé répond à toutes les exigences relatives au processus de reconception considéré. Son applicabilité est pleinement démontrée pour les reconceptions d'aubes industrielles effectuées dans le prochain chapitre.

## CHAPITRE 5 RECONCEPTION D'AUBES INDUSTRIELLES

En plus de la procédure de rétro-ingénierie, le processus de reconception proposé sur la figure 4.3 repose sur deux piliers : des simulations numériques permettant d'évaluer la robustesse au contact de l'aube et une procédure d'optimisation visant à l'améliorer. Deux problèmes d'optimisation peuvent être résolus : le problème principal, impliquant des stratégies numériques prédictives, ou le problème substitut, mettant en jeu une simulation moins coûteuse. Dans ce chapitre, le problème substitut est résolu en utilisant la consommation de jeu comme simulation substitut. Cette quantité, relative à un nœud et un mode propre, a été identifiée dans la littérature [39] comme une quantité pertinente pour discriminer des aubes en fonction de leur robustesse au contact.

L'objectif de ce chapitre est à la fois de **(1)** mettre en œuvre le processus de reconception proposé sur des aubes industrielles et **(2)** explorer plus avant la pertinence de la consommation de jeu comme simulation substitut pour différents types d'aubes. La reconception de trois géométries d'aubes ouvertes de la NASA est considérée : les aubes rotor 35 et rotor 37 [151], issues de différents étages d'un même compresseur transsonique, et l'aube de soufflante rotor 67 [181]. À la connaissance de l'auteure, l'aube rotor 67 a été très peu étudiée dans le contexte des interactions de contact aube/carter [59] et l'aube rotor 35 n'a jamais été étudiée dans ce contexte. Les contributions relatives au présent chapitre sont résumées dans l'encart. Les travaux réalisés ont conduit à un article recommandé pour publication dans le *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, issu d'un acte de conférence soumis pour la conférence ASME Turbo Expo 2022<sup>1</sup>.

### Contributions

- une preuve de concept pour la reconception d'aubes industrielles afin d'améliorer leur réponse dynamique à des interactions structurelles non linéaires ;
- des critères de conception relatifs aux interactions structurelles non linéaires.

La méthodologie de reconception, incluant une présentation détaillée du calcul de consommation de jeu, est présentée dans la section 5.1. Les sections 5.2, 5.3 et 5.4 sont respectivement consacrées à la reconception des aubes rotor 37, rotor 35 et rotor 67. Pour ces reconceptions, la consommation de jeu en un nœud pour un mode est minimisée. Des reconceptions avancées impliquant les consommations de jeu en plusieurs nœuds et pour plusieurs modes sont ensuite

1. « Methodology for the redesign of compressor blades undergoing nonlinear structural interactions : application to blade-tip/casing contacts », S. Kojtych, F. Nyssen, C. Audet et A. Batailly

présentées dans la section 5.5. Pour toutes les reconceptions, les valeurs de consommation de jeu sont analysées, ainsi que l'influence des modifications de consommation de jeu sur la réponse dynamique des aubes au contact. À partir de l'ensemble des reconceptions effectuées, de premières tendances sur la géométrie des aubes obtenues sont finalement présentées dans la section 5.6 et un bilan est donné dans la section 5.7.

## 5.1 Méthodologie

La modélisation de l'aube initiale, requise pour démarrer la procédure d'optimisation de la figure 4.3, est décrite dans la section 5.1.1. La simulation substitut, un calcul de consommation de jeu, est expliquée en détail dans la section 5.1.2 et la procédure d'optimisation est décrite dans la dernière section 5.1.3.

### 5.1.1 Modélisation de l'aube initiale

À partir du modèle CAO d'une aube d'entrée, la procédure de rétro-ingénierie est utilisée pour obtenir un modèle paramétré. L'aube associée à ces paramètres est notée par la suite aube initiale. D'après les résultats de validation du précédent chapitre (section 4.3), pour rotor 37 et rotor 67, le modèle à 5 sections est le plus fidèle. Par conséquent, ce modèle est choisi pour générer l'aube initiale. Le même choix est fait pour rotor 35 ; la haute fidélité du modèle obtenu est attestée en annexe G.

L'aube initiale est maillée avec le module MAI ; les nombres de nœuds et d'éléments du maillage éléments finis pour chaque rotor sont donnés dans le tableau 5.1. Concernant le choix du matériau, pour rotor 37 et rotor 35, les rapports de la NASA mentionnent l'utilisation d'un alliage à base de nickel 18-Ni 200-maraging [151]. Les propriétés mécaniques d'un tel alliage, issues de précédentes publications [60, 149], sont considérées. Pour rotor 67, le matériau du rotor n'est pas précisé dans le rapport technique d'origine [181]. En accord avec de précédentes publications [59], les propriétés d'un alliage à base de titane TA6V de grade 5, un matériau typiquement utilisé pour les soufflantes, sont considérées. Les caractéristiques données dans le tableau 5.1 sont utilisées pour toutes les aubes relatives au même rotor générées au sein de la procédure d'optimisation.

### 5.1.2 Simulation substitut : consommation de jeu

La simulation substitut est basée sur un calcul de consommation de jeu décrit dans la section 5.1.2.1. La pertinence de la consommation de jeu comme indicateur de la robustesse au

Tableau 5.1 Caractéristiques des maillages éléments finis pour les différents rotors.

aube	rotor 37	rotor 35	rotor 67
nombre de nœuds	20 784	20 975	20 393
nombre d'éléments	6 384	6 460	6 232
module de Young [GPa]	180	180	108
masse volumique [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ]	8 000	8 000	4 400
coefficient de Poisson [-]	0,34	0,34	0,30

contact est discutée dans la section 5.1.2.2 et des spécificités d'implémentation sont présentées dans la section 5.1.2.3.

### 5.1.2.1 Définition

La consommation de jeu [39] quantifie la variation du jeu aube/carter en un nœud en sommet d'aube lorsque l'aube vibre selon un de ses modes propres. Elle est ainsi définie pour un nœud  $\mathbf{v}$  et un mode  $p$  et notée  $c_{\mathbf{v},p}$ . Une consommation de jeu positive indique que le jeu a été consommé, c'est-à-dire réduit, alors qu'une consommation de jeu négative indique une augmentation du jeu.

Un calcul de consommation de jeu, linéaire ou non, peut être effectué à partir du maillage éléments finis à  $n_{\text{ddl}}$  degrés de liberté d'une aube dans le repère  $\mathcal{R}_a$ . Une représentation schématique de certaines quantités calculées est donnée sur la figure 5.1. Les étapes de calcul sont les suivantes :

- ① obtention par analyse modale du mode  $\phi^p$  sous la forme d'un vecteur contenant les déplacements des  $n_{\text{ddl}}$  degrés de liberté ;
- ② normalisation du mode de façon à ce que le déplacement du BA selon l'axe  $(\mathbf{o}_a, \mathbf{e}_{y,a})$  soit égal à une valeur  $t$  fixée. Le mode normalisé est noté  $\bar{\phi}^p$  ;
- ③ calcul de champs de déplacement modulé :
  - (a) non linéaire,
    - a. calcul statique pour obtenir le champ des efforts  $\mathbf{f}^p$  correspondant aux déplacements modaux :

$$\mathbf{f}^p = \mathbf{K}\bar{\phi}^p, \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur de l'aube,

- b. modulation des efforts pour un ensemble fini de paramètres  $\delta \in D_\delta \subset [-1; 1]$

pour simuler différentes amplitudes de déformation :

$$\mathbf{f}^{p,\delta} = \delta \mathbf{f}^p, \quad (5.2)$$

c. calcul pour tout  $\delta \in D_\delta$  du champ de déplacement modulé  $\mathbf{q}^{p,\delta}$  de taille  $n_{\text{ddl}}$  par une analyse statique non linéaire :

$$\mathbf{q}^{p,\delta} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}^{p,\delta}; \quad (5.3)$$

(b) linéaire : obtention directe des champs de déplacement modulés  $\mathbf{q}^{p,\delta}$  pour un ensemble fini de paramètres  $\delta \in D_\delta \subset [-1; 1]$  à partir du mode normalisé :

$$\mathbf{q}^{p,\delta} = \delta \bar{\boldsymbol{\phi}}^p; \quad (5.4)$$

④ calcul du rayon  $v_{r,a}^{p,\delta}$  du nœud  $\mathbf{v}^{p,\delta}$  sur la déformée modulée :

$$v_{r,a}^{p,\delta} = \sqrt{(v_{x,a}^{p,\delta})^2 + (v_{y,a}^{p,\delta})^2}; \quad (5.5)$$

où les coordonnées cartésiennes  $v_{x,a}^{p,\delta}$  et  $v_{y,a}^{p,\delta}$  sont déduites du champ de déplacement  $\mathbf{q}^{p,\delta}$  ;

⑤ calcul de la consommation de jeu pour chaque valeur de  $\delta \in D_\delta$  :

$$c_{v,p,\delta} = v_{r,a}^{p,\delta} - v_{r,a}^{p,0}, \quad (5.6)$$

où  $v_{r,a}^{p,0}$  correspond au rayon du nœud  $\mathbf{v}$  de l'aube au repos ;

⑥ calcul de la consommation de jeu maximale sur les valeurs de  $\delta$  :

$$c_{v,p} = \max_{\delta \in D_\delta} c_{v,p,\delta}. \quad (5.7)$$

À l'étape ⑤, il est possible de tracer une courbe de consommation de jeu présentant la quantité  $c_{v,p,\delta}$  en fonction de  $\delta$ . À titre d'exemple, la courbe de consommation de jeu au BA pour le mode 1F est tracée sur la figure 5.2 pour l'aube rotor 37 initiale. Les calculs ont été réalisés pour  $\delta = 1$  et  $\delta = -1$  et la consommation de jeu est nulle en  $\delta = 0$  par définition. Une courbe entièrement située sous l'axe des abscisses indique que lorsque l'aube vibre selon le mode  $p$ , elle s'écarte du carter. Cette configuration est recherchée du point de vue des interactions de contact. Par conséquent, la valeur de consommation de jeu maximale  $c_{v,p}$  (équation (5.7)) présente un grand intérêt dans la procédure d'optimisation.

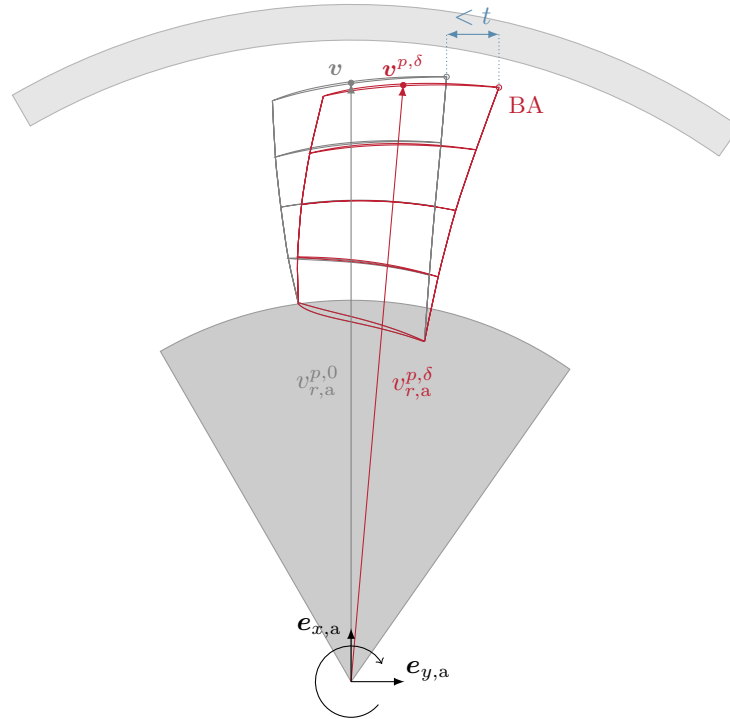


Figure 5.1 Rayons dans  $\mathcal{R}_a$  du nœud  $v$  sur l'aube au repos (—) et du nœud correspondant  $v^{p,\delta}$  sur la déformée du mode  $p$  modulée par  $\delta$  (—). Carter (□) et disque (■).

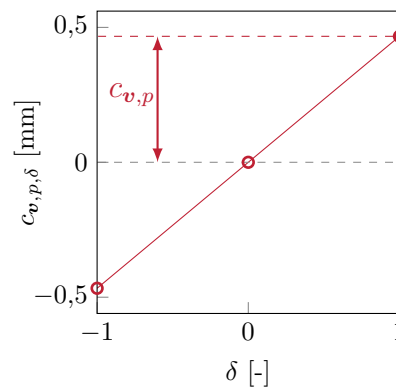


Figure 5.2 Courbe de consommation de jeu  $c_{BA,1F,\delta}$  pour  $\delta \in \{-1, 0, 1\}$  pour l'aube initiale rotor 37 dans le cas d'un carter conique et d'un calcul linéaire.

### 5.1.2.2 Pertinence

La consommation de jeu a été identifiée comme une quantité d'intérêt dans le cadre de la reconception d'aubes de compresseur haute pression [40] et utilisée pour proposer deux nouvelles géométries d'aubes. Pour des raisons de confidentialité, il est seulement précisé que cette quantité est significativement diminuée sur les deux aubes proposées, dont la robustesse aux

interactions de contact est meilleure que l'aube initiale. Des résultats complémentaires à ce travail [39], focalisés sur la consommation de jeu, mettent en évidence la pertinence de cette quantité pour discriminer des aubes robustes ou non aux interactions de contact. En effet, des consommations de jeu plus faibles sur un ou plusieurs modes semblent correspondre à des amplitudes de réponse plus faibles lorsque l'aube est soumise à des interactions de contact. À la suite de ces travaux, une procédure d'optimisation d'aubes académiques consistant à minimiser la consommation de jeu<sup>2</sup> a permis d'obtenir des aubes plus robustes aux interactions de contact [108]. Plusieurs variations géométriques de l'aube rotor 37 ont par ailleurs été comparées numériquement en matière de robustesse au contact ; un des critères de comparaison utilisés est la consommation de jeu<sup>2</sup>, au même titre que le niveau de contraintes dans l'aube [149]. Il est montré que les aubes présentant les plus fortes diminutions de consommation de jeu par rapport à l'aube initiale présentent les amplitudes de réponse les plus faibles en ce qui concerne le déplacement radial et tangentiel.

D'après les travaux évoqués, la consommation de jeu apparaît comme une quantité liée à la robustesse au contact des aubes. Par ailleurs, elle est relativement peu coûteuse à calculer, car elle ne nécessite, dans le cas d'un calcul linéaire, qu'une analyse modale de l'aube. Pour ces raisons, dans le contexte de la reconception d'aubes, la consommation de jeu semble être une alternative pertinente à des simulations prédictives des interactions de contact, potentiellement coûteuses.

Lors d'optimisations visant à minimiser la consommation de jeu au BA sur le premier mode de flexion [108], des réductions significatives de cette quantité sont observées sur les aubes optimisées et la réponse à une interaction de flexion ciblée est réduite. Toutefois, des amplitudes plus élevées relatives à une interaction de torsion apparaissent pour certaines aubes optimisées et sont probablement liées à la dégradation des consommations de jeu sur le premier mode de torsion. Concernant la comparaison de variations géométriques de l'aube rotor 37 [149], les améliorations de consommation de jeu les plus fortes sont observées pour le premier mode de torsion sur les aubes modifiées, bien que des améliorations de la réponse à une interaction de flexion soient obtenues. Ces deux travaux soulignent qu'une amélioration de la robustesse au contact de l'aube peut nécessiter la prise en compte de la consommation de jeu sur plusieurs modes.

### 5.1.2.3 Implémentation

À l'étape ③ du calcul de consommation de jeu, un calcul linéaire ou non linéaire peut être effectué. Le calcul non linéaire, plus précis, est également le plus coûteux. Pour une faible

---

2. Plus précisément, le jeu dynamique, valant  $-c_{v,p,\delta}$ , est maximisé dans cette publication.



valeur de  $t$  (utilisée pour la normalisation du mode à l'étape ②), les courbes de consommation de jeu linéaires ou non linéaires se superposent d'après de précédents travaux [39, 108]. Pour des valeurs de  $t$  plus importantes, il a été observé que les courbes de consommations de jeu linéaires surestiment généralement la consommation de jeu, mais suivent la même tendance que les courbes non linéaires. La consommation de jeu étant utilisée uniquement comme simulation substitut dans le processus de reconception proposé, une haute précision n'est donc pas requise. Par conséquent, dans cette thèse, seuls des calculs de consommation de jeu linéaires sont effectués pour des raisons de simplicité et de temps de calcul. Une valeur de  $t$  adéquate, inférieure à 5% de la hauteur d'aube, est fixée pour chaque modèle d'aube afin d'assurer la validité des calculs. L'analyse modale requise à l'étape ① est effectuée avec le logiciel libre Code Aster<sup>3</sup> et les autres étapes de calcul sont implémentées en langage Python 3.

Dans le cas d'un carter parfaitement cylindrique, la consommation du jeu pour chaque valeur  $\delta$  est correctement calculée avec l'équation (5.6). En pratique toutefois, les carters sont usuellement coniques. L'équation (5.6) est alors corrigée pour inclure le déplacement axial du nœud  $\mathbf{v}$ . Cette correction est explicitée dans l'encart gris ci-dessous. Dans cette thèse, un carter conique est considéré et l'équation (5.8) est systématiquement utilisée. Dans ce cas, les valeurs  $c_{\mathbf{v},p,-1}$  et  $c_{\mathbf{v},p,1}$  en valeurs absolues peuvent être différentes, comme c'est le cas sur la figure 5.2. Pour un calcul linéaire, la consommation de jeu maximale (équation (5.7)) est généralement atteinte en  $\delta = 1$  ou  $\delta = -1$  dans le cas d'un carter conique. Par conséquent, afin de limiter les temps de calcul, seules deux valeurs de  $\delta$  sont considérées :  $D_\delta = \{-1, 1\}$ .

#### Prise en compte de la conicité du carter

Un schéma représentant une configuration avec un carter conique est présenté sur la figure 5.3. La pente du carter dans le plan  $(\mathbf{o}_a, \mathbf{e}_{r,a}, \mathbf{e}_{z,a})$  peut être estimée en calculant une droite  $(D)$  passant au mieux par le sommet d'aube. Un point  $\mathbf{m}$  de  $(D)$  satisfait l'équation  $m_{r,a} = \alpha m_{z,a} + \beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes. Une approximation de la consommation de jeu est alors donnée par l'équation suivante :

$$c_{\mathbf{v},p,\delta} = v_{r,a}^{p,\delta} - (v_{r,a}^{p,0} + \Delta_r), \quad (5.8)$$

où  $\Delta_r = \alpha(v_{z,a}^{p,\delta} - v_{z,a}^{p,0})$ .

3. <https://www.code-aster.org/>

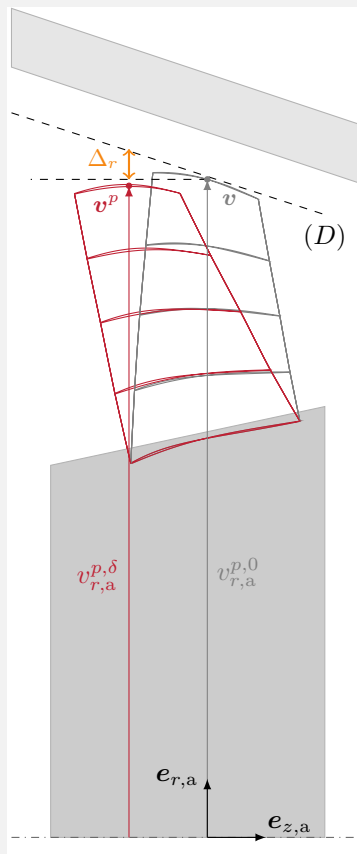


Figure 5.3 Calcul de la quantité  $c_{v,p,\delta}$  dans le cas d'un carter conique.

### 5.1.3 Procédure d'optimisation

La procédure d'optimisation est utilisée pour résoudre le problème substitut (figure 4.3). Le choix de variables d'optimisation est discuté dans la section 5.1.3.1. La formulation exacte du problème substitut est donnée dans la section 5.1.3.2 et sa résolution est expliquée dans la section 5.1.3.3.

#### 5.1.3.1 Choix de variables d'optimisation

Les variables d'optimisation sont des paramètres de l'aube (définis dans le tableau 4.1) pouvant être modifiés lors de la procédure d'optimisation. Le processus de reconception proposé permet *a priori* d'utiliser n'importe quel paramètre de l'aube comme variable d'optimisation. Toutefois, pour limiter le coût numérique de la procédure, un nombre réduit de variables est considéré. Afin de préserver au maximum les propriétés aérodynamiques, les profils de l'aube initiale sont conservés : les paramètres de profil sont donc fixés. Par ailleurs, les paramètres

d'empilement, qui agissent sur la forme tridimensionnelle de l'aube, ont une influence significative sur la réponse aux interactions de contact aube/carter [108, 149]. En particulier, l'influence de la flèche axiale et de l'angle d'inclinaison a été soulignée [149]. Ces paramètres sont donc choisis comme variables d'optimisation.

Plus précisément, la flèche axiale et l'angle d'inclinaison des sections en milieu et en sommet d'aube sont autorisés à varier : le vecteur  $\mathbf{x}$  est ainsi défini tel que  $\mathbf{x} = \{\Delta z^3, \Delta\theta^3, \Delta z^5, \Delta\theta^5\}$ . Les quantités  $\Delta z^2, \Delta\theta^2, \Delta z^4, \Delta\theta^4$  sont calculées par une interpolation quadratique de la flèche axiale et de l'angle d'inclinaison aux sections 1 (paramètres nuls par définition), 3 et 5. À partir d'un vecteur de variables  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ , l'ensemble des paramètres de l'aube  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{95}$  (19 paramètres de section  $\times$  5 sections) peut être obtenu par une fonction de mappage  $m : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{95}$  tel que  $\mathbf{y} = m(\mathbf{x})$ .

#### Détails sur l'interpolation

L'interpolation est utilisée pour éviter, au cours de la procédure d'optimisation, la génération de géométries irréalistes pour lesquelles les paramètres d'empilement oscillent sur la hauteur d'aube. La prise en compte de cette interpolation pour l'aube initiale n'engendre qu'une différence très faible de la consommation de jeu, jugée acceptable : 0,06% pour les aubes rotor 37 et rotor 35 et 1,17% pour l'aube rotor 67. Par ailleurs, pour chaque rotor, les CRF de l'aube initiale avec et sans interpolation sont très similaires sur la plage de vitesses considérée pour chaque reconception (voir annexe H.1).

### 5.1.3.2 Formulation du problème substitut

Une formulation générique du problème d'optimisation substitut de dimension  $n = 4$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \tilde{f}(\mathbf{x}) \\ \text{sujet à} \quad & \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

où  $\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur de contraintes et  $\mathbf{l}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$  sont des vecteurs de bornes définissant le domaine des variables. Le calcul de  $\tilde{f}(\mathbf{x})$  requiert un calcul de consommation de jeu relatif à l'aube de paramètres  $\mathbf{y} = m(\mathbf{x})$ . La fonction objectif exacte est précisée par la suite pour chaque instance du problème (5.9). Des contraintes peuvent être prises en compte *via* le vecteur  $\tilde{\mathbf{c}}$ , par exemple pour garantir une certaine ressemblance des profils sur toute la hauteur d'aube, dans le cas où des paramètres de profils sont utilisés comme variables d'optimisation [107]. Pour toutes les instances traitées, seules des contraintes de bornes sont

considérées ( $m = 0$ ) afin d'explorer au maximum le domaine des variables.

### 5.1.3.3 Résolution

Le gradient de la consommation de jeu par rapport aux variables d'optimisation n'est pas connu analytiquement et ne peut être facilement estimé. De plus, la durée d'une simulation substitut complète (incluant la génération du modèle CAO, du maillage et le calcul de consommation de jeu) est d'environ 30 s<sup>4</sup>. La consommation de jeu étant une quantité relativement peu coûteuse à calculer, les temps de calcul attendus pour des simulations substituts plus sophistiquées sont plus élevés. Par conséquent, le problème substitut (5.9) est considéré comme un problème d'optimisation de boîtes noires.

Le problème (5.9) est résolu avec l'algorithme d'optimisation de boîtes noires **Mads** [17], spécifiquement conçu pour la résolution de problèmes de boîtes noires soumis à des contraintes d'inégalité et impliquant des simulations coûteuses. Il peut de plus gérer les évaluations échouées qui surviennent par exemple en cas d'erreur sur la génération du modèle CAO ou du maillage. L'implémentation de **Mads** dans le logiciel **NOMAD** v.3.9.1 est utilisée avec les paramètres par défaut. Un budget de 400 évaluations de la fonction objectif est autorisé par instance du problème (5.9). Pour toutes les instances résolues, la convergence asymptotique est observée avec ce budget. La consommation de jeu étant une quantité continue par rapport aux variables d'optimisation considérées, l'algorithme **DiscoMads** (chapitre 2) n'est pas utilisé pour les instances traitées. Son intégration dans la procédure d'optimisation est discutée en conclusion de cette thèse.

## 5.2 Aube rotor 37

Le rotor 37 est le troisième étage d'un compresseur axial transsonique conçu par la NASA en 1978 [151]. Dans de précédents travaux [60] relatifs à une aube de ce rotor, de fortes amplitudes de vibration ont été observées pour des vitesses de rotation proches de la vitesse d'interaction linéaire du premier mode de flexion avec le quatrième régime moteur. La reconception effectuée dans cette section vise à diminuer les amplitudes de vibration relatives à cette interaction. Pour ce faire, l'aube initiale est optimisée par rapport à sa consommation de jeu au BA, à partir des observations faites dans la littérature.

La dynamique de l'aube initiale est analysée dans la section 5.2.1. Deux instances du problème d'optimisation (5.9) sont formulées et résolues dans la section 5.2.2. Enfin, la réponse vibratoire des aubes optimisées à des interactions de contact est analysée dans la section 5.3.3.

---

4. sur une machine comportant 8 processeurs Intel Core i7-8700T CPU, 2.40GHz.

### 5.2.1 Analyse dynamique de l'aube initiale

Les deux premiers modes propres sont, dans cet ordre, le premier mode de flexion (1F) et le premier mode de torsion (1T). Des simulations basées sur la stratégie d'intégration temporelle [115] présentée dans la section 3.3.3.4 sont réalisées sur une large plage de vitesses  $\omega \in [1250; 1550]$  rad·s<sup>-1</sup> bordant l'interaction d'intérêt. Une simulation est réalisée tous les 0,5 rad·s<sup>-1</sup>. Pour chaque simulation, en partant de conditions initiales nulles, 200 tours sont simulés à vitesse constante  $\omega$  en vue d'atteindre un régime permanent. Les simulations sont effectuées sur un modèle réduit de type Craig-Bampton [63] comportant  $\eta = 10$  degrés de liberté modaux et  $n_f = 8$  nœuds frontière, uniformément répartis sur le sommet d'aube. Les effets centrifuges ne sont pas pris en compte dans le cadre de la preuve de concept réalisée dans cette thèse. Leur prise en compte ultérieure ne soulève toutefois pas d'enjeux de simulation particuliers. Concernant le scénario de contact, un carter rigide nu est considéré. Cylindrique en début de simulation, le carter est progressivement ovalisé en deux lobes de contact privilégiés. Les paramètres issus d'une précédente publication [60] sont utilisés. En particulier, le jeu aube/carter au repos est de  $5 \times 10^{-4}$  m. L'ensemble des paramètres de simulation est résumé en annexe F.1.

Sur la plage de vitesses d'intérêt, les déplacements les plus importants surviennent au BA. De plus, étant donné le scénario de contact choisi, les contacts sont initiés en ce nœud. Par conséquent, les résultats issus de simulations de contact présentés ci-après s'appuient sur les déplacements prédits au BA.

#### Courbe de réponse en fréquence

À partir du vecteur  $\mathbf{d}_{BA}$  du déplacement au BA sur chaque instant du dernier tour de rotation, une CRF est calculée et présentée sur la figure 5.4. Le déplacement du BA renseigne sur le niveau de contraintes dans l'aube.

La vitesse d'interaction linéaire (----) est prédite à  $\frac{\omega_{1F}}{4}$ . En raison des contacts répétés l'aube subit un raidissement, dit raidissement au contact, qui induit une augmentation des fréquences propres et donc un décalage des vitesses d'interaction. Par conséquent, le pic de résonance non linéaire est observé pour une vitesse de rotation (.....) plus élevée que la vitesse d'interaction linéaire. Une autre interaction est visible sur la plage de vitesses considérée, vers 1530 rad·s<sup>-1</sup>. Les amplitudes de vibration associées sont toutefois bien moins importantes, justifiant *a posteriori* l'étude spécifique de l'interaction du mode 1F avec le quatrième régime moteur.

Les amplitudes de vibration prédites sur la plage sont très importantes et attestent de la

sévérité du scénario de contact considéré pour l’aube rotor 37. Sur certaines plages de vitesses, les amplitudes de vibration sont telles que l’hypothèse de petites déformations inhérente à l’utilisation de modèles éléments finis linéaires n’est plus respectée. Ainsi, les solutions à plus hautes amplitudes de vibration – localisées sur des plages de vitesses très étroites – n’ont pas de sens physique puisqu’elles induisent un endommagement de l’aube (plastification, fissuration ou rupture) qui n’est pas pris en compte dans son modèle numérique. Physiques ou non, ces solutions représentent donc un risque réel pour l’intégrité structurelle de l’aube. Dans le contexte de l’étude menée, l’analyse est focalisée sur une comparaison relative des niveaux de vibration des aubes initiales et optimisées pour dégager des tendances globales sur le comportement vibratoire d’une aube en contact. La possible présence de solutions non physiques n’est donc pas considérée comme problématique.

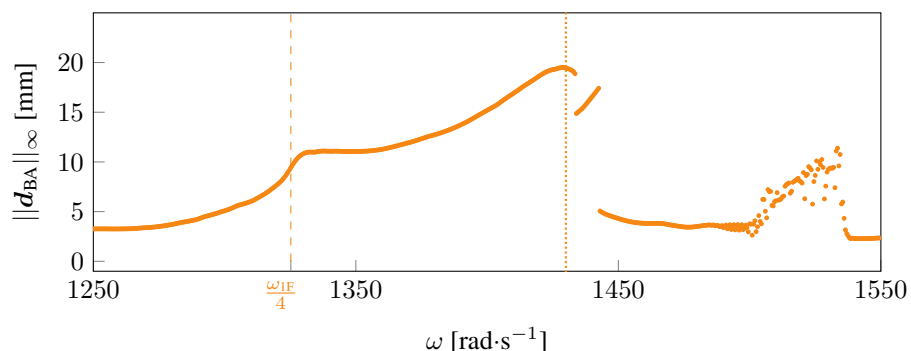


Figure 5.4 CRF de l’aube initiale rotor 37 (●). Vitesse d’interaction linéaire (---) et vitesse de la résonance non linéaire prédite (.....).

## Contributions modales

Pour chaque vitesse  $\omega$ , les contributions modales [79] sont calculées à chaque instant sur le dernier tour de rotation simulé. Pour chaque mode, la norme infinie des contributions sur tous ces instants est ensuite calculée. Cette quantité est finalement normalisée sur l’ensemble des modes : la valeur 1 correspond au mode ayant la contribution relative la plus importante pour la vitesse  $\omega$ . La juxtaposition des contributions relatives normalisées calculées pour plusieurs valeurs de  $\omega$  sur la plage permet de tracer la carte présentée sur la figure 5.5.

Pour chaque vitesse de rotation  $\omega$ , les contributions modales relatives des dix premiers modes propres  $p$  sont colorées du blanc au noir. Les zones sombres permettent ainsi d’identifier les modes contribuant le plus à la dynamique sur la plage considérée. Sur toute la plage, la contribution du mode 1F à la réponse est dominante. La seule autre contribution non négligeable est liée au mode 1T, sur des plages de vitesses restreintes, comme autour de

$$\omega = 1325 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

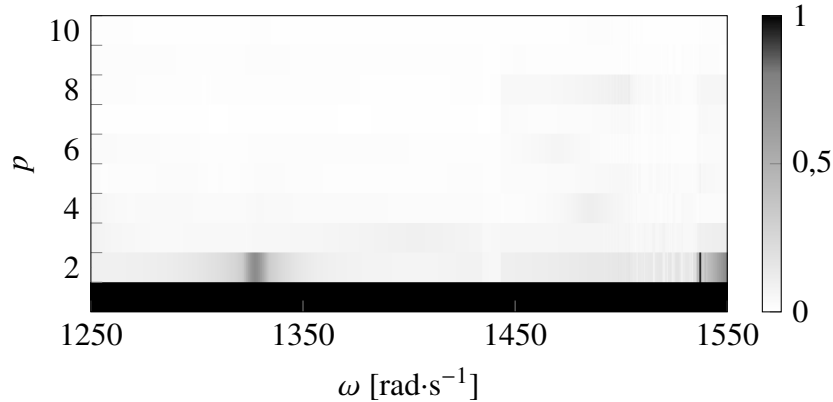


Figure 5.5 Contributions modales relatives normalisées de l’aube initiale rotor 37.

### 5.2.2 Optimisation

Deux instances du problème d’optimisation (5.9) sont considérées et listées dans le tableau 5.2. Pour l’instance 37-BA-1F, la fonction objectif est la consommation de jeu au BA pour le mode 1F, comme c’est le cas pour de précédents travaux [108]. Pour l’instance 37-BA-1T, la fonction objectif est la consommation de jeu au BA pour le mode 1T. D’après la figure 5.5, il s’agit en effet du seul autre mode ayant une contribution non négligeable à la dynamique de l’aube initiale sur la plage considérée. Pour tous les calculs de consommation de jeu, les modes sont normalisées par un déplacement tangentiel au BA de  $t = 2$  mm (voir étape ⑤ du calcul de consommation de jeu).

Pour les deux instances, seules de faibles variations de géométries sont autorisées compte tenu des bornes choisies. Par conséquent, l’ordre des modes de l’aube initiale (1F puis 1T) est supposé conservé pour toutes les aubes générées lors des optimisations. Cet ordre est vérifié pour les aubes optimisées obtenues, nommées aube 37-BA-1F et aube 37-BA-1T. Les modèles CAO de ces aubes sont présentés sur la figure 5.6.

Tableau 5.2 Instances d’optimisation pour rotor 37.

instance	fonction objectif $\tilde{f}$	bornes	
		$\Delta z^3, \Delta z^5$	$\Delta \theta^3, \Delta \theta^5$
37-BA-1F	$c_{BA,1F}$	$[-2 \text{ mm}; 2 \text{ mm}]$	$[-1, 5^\circ; 1, 5^\circ]$
37-BA-1T	$c_{BA,1T}$	$[-2 \text{ mm}; 2 \text{ mm}]$	$[-1, 5^\circ; 1, 5^\circ]$

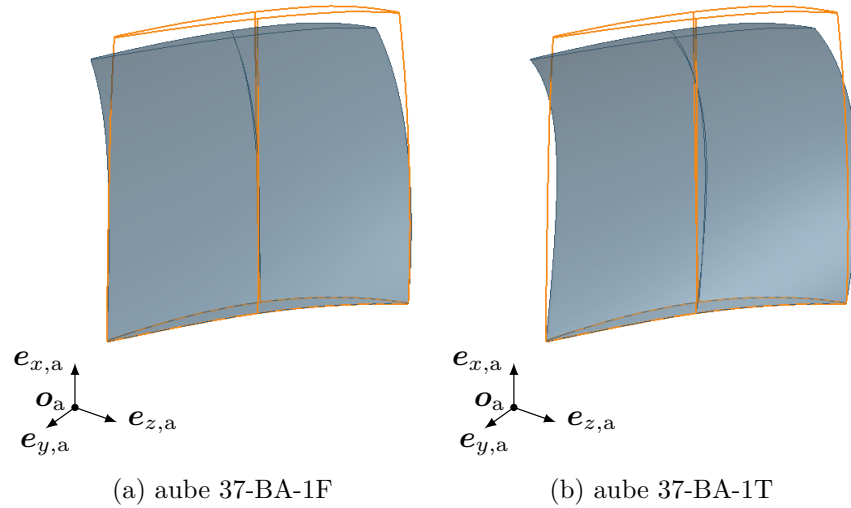


Figure 5.6 Modèles CAO des aubes rotor 37 optimisées (■) et initiale (□).

### Variations de consommation de jeu

La variation relative  $\Delta c_{v,p}$  de consommation de jeu au nœud  $v$  pour le mode  $p$  d'une aube optimisée par rapport à l'aube initiale est définie par :

$$\Delta c_{v,p} = \frac{c'_{v,p} - c_{v,p}}{c_{v,p}} \times 100 \quad [\%], \quad (5.10)$$

où  $c_{v,p}$  est la consommation de jeu associée à l'aube initiale et  $c'_{v,p}$  celle de l'aube optimisée. Pour les deux instances, des améliorations significatives de la fonction objectif sont obtenues avec le budget d'évaluation alloué : pour l'aube 37-BA-1F,  $\Delta_{c_{BA,1F}} = -98\%$  et pour l'aube 37-BA-1T,  $\Delta_{c_{BA,1T}} = -91\%$ .

Pour l'aube initiale et les aubes optimisées, les huit nœuds frontière uniformément distribués sur le sommet d'aube sont numérotés de 1 à 8 du BA au BF. Les variations relatives de consommation de jeu en chacun de ces nœuds  $v$  pour les deux premiers modes propres sont calculées et présentées dans le tableau 5.3. Les valeurs de -100% à 100% sont colorées du bleu au rouge et les valeurs excédant 100% sont colorées en rouge également. Toutefois, il a été observé que certaines valeurs très importantes étaient causées par des consommations de jeu proches de zéro pour l'aube initiale. Par conséquent, les cellules correspondantes sont représentées sur fond blanc. Les cellules bleues indiquent des améliorations importantes de la consommation de jeu et les valeurs relatives aux deux fonctions objectif considérées sont indiquées par des cercles blancs.



Tableau 5.3 Variations de consommation de jeu pour les aubes rotor 37 optimisées.

aube	nœud $\mathbf{v}$	$\Delta c_{\mathbf{v},1F}$ [%]	$\Delta c_{\mathbf{v},1T}$ [%]
37-BA-1F	1	-98	-55
	2	-84	-45
	3	-85	-17
	4	-78	2203
	5	-66	-79
	6	-74	-77
	7	-61	-59
	8	-68	-66
37-BA-1T	1	-48	-91
	2	-66	-75
	3	-72	-43
	4	-86	2850
	5	-95	-81
	6	-94	-87
	7	-86	-85
	8	-96	-92

Bien que les fonctions objectif soient des consommations de jeu localisées impliquant un seul nœud et mode, les consommations de jeu sont significativement améliorées pour l'ensemble des nœuds frontière. Par exemple, pour l'aube 37-BA-1F, optimiser la quantité  $c_{BA,1F}$  conduit à des améliorations importantes de la quantité  $c_{\mathbf{v},1F}$  pour tous les nœuds frontière  $\mathbf{v}$ , et de la quantité  $c_{\mathbf{v},1T}$  pour la plupart des nœuds. Pour l'aube 37-BA-1T, un constat similaire est fait : optimiser la quantité  $c_{BA,1T}$  conduit à des améliorations sur tous les nœuds frontière pour les deux premiers modes.

### Valeurs de consommation de jeu

Afin de comparer les ordres de grandeur des consommations de jeu entre les différents modes, les quantités  $c_{\mathbf{v},1F}$  et  $c_{\mathbf{v},1T}$  sont présentées sur la figure 5.7 en fonction du nœud  $\mathbf{v}$  pour les aubes optimisées et pour l'aube initiale. Les consommations de jeu utilisées comme fonction objectif sont encadrées pour les aubes optimisées. Les ordres de grandeur des consommations de jeu sont similaires pour les deux modes.

### Bilan

La courbe de réponse en fréquence et la carte de contributions modales de l'aube initiale mettent en avant le fait que sa dynamique est dominée par son premier mode de flexion sur la plage de vitesses d'intérêt. De plus, l'optimisation de la consommation de jeu au BA

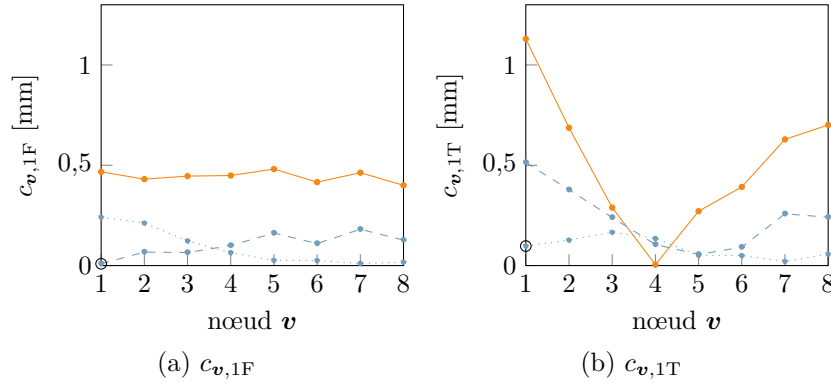


Figure 5.7 Consommations de jeu aux nœuds frontière pour les deux premiers modes pour l’aube initiale (—) et les aubes optimisées 37-BA-1F (----) et 37-BA-1T (.....).

conduit à des améliorations globales des consommations de jeu sur tout le sommet d’aube pour les deux premiers modes propres. Dans ce contexte, une fonction objectif très localisée, limitée à une des quantités  $c_{BA,1F}$  ou  $c_{BA,1T}$ , semble bien adaptée pour la reconception de l’aube rotor 37. Ce constat est en accord avec de précédentes observations [39, 108].

### 5.2.3 Analyse dynamique des aubes optimisées

Des simulations de contact sont réalisées pour les aubes optimisées avec la même stratégie numérique que pour l’aube initiale (section 5.2.1). À l’exception des aubes, tous les paramètres de simulation demeurent identiques. L’analyse dynamique des aubes optimisées se limite aux résultats obtenus par la stratégie numérique d’intégration temporelle considérée.

Les CRF des aubes optimisées sont superposées à celle de l’aube initiale sur la figure 5.8. Pour permettre l’observation des interactions, une plage de vitesses étendue  $\omega \in [1150; 1550]$  rad·s<sup>-1</sup> est considérée. La vitesse d’interaction linéaire pour les aubes optimisées (----), à  $\frac{\omega'_{1F}}{4}$ , diffère de celle de l’aube initiale (-----) car les fréquences propres des aubes sont différentes. Un décalage de la fréquence de résonance non linéaire est observé en conséquence. La résonance non linéaire prédite pour l’aube initiale (.....) est décalée pour les aubes optimisées (.....).

L’amplitude de vibration relative au pic, d’environ 20 mm pour l’aube initiale, est réduite de manière très significative à environ 5 mm pour l’aube 37-BA-1F et 9 mm pour l’aube 37-BA-1T. Sur toute la plage, une diminution significative des amplitudes de vibration est observée. Bien qu’une analyse plus approfondie soit requise pour pleinement comprendre le phénomène, les autres interactions prédites pour l’aube initiale — comme l’augmentation des amplitudes pour  $\omega \geq 1500$  rad·s<sup>-1</sup> — semblent disparaître pour les aubes optimisées.

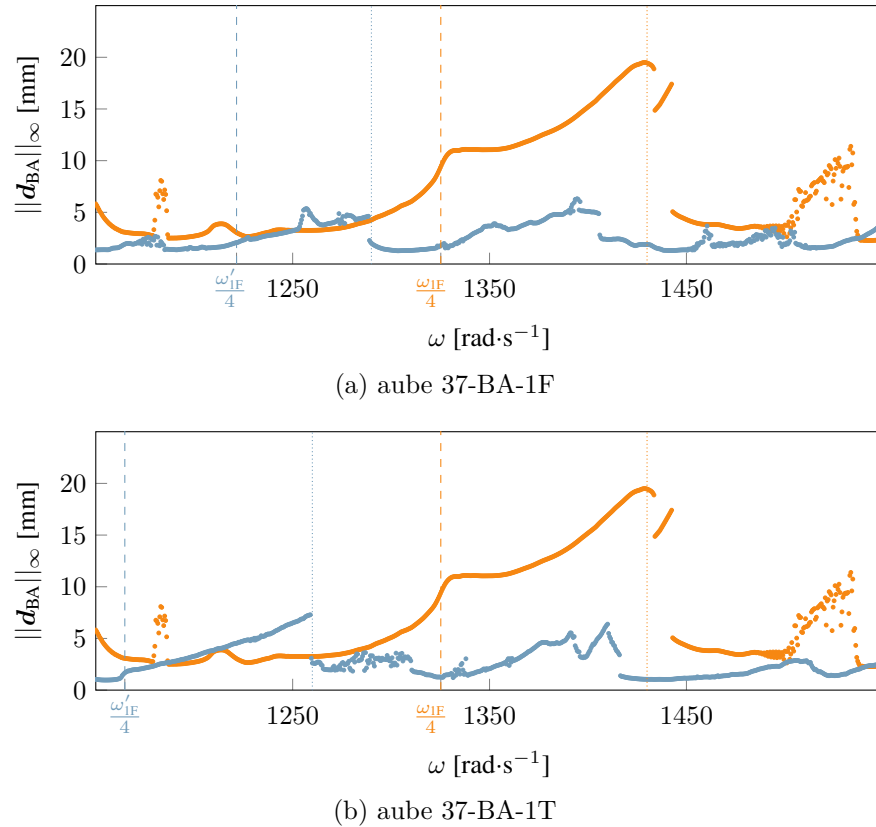


Figure 5.8 CRF des aubes rotor 37 initiale (●) et optimisées (●). Vitesses d'interaction linéaires (---) (---) et vitesses des résonances non linéaires prédites (.....) (—).

## 5.2.4 Conclusion partielle

Le processus de reconception proposé permet d'améliorer significativement la réponse vibratoire de l'aube rotor 37 à des interactions de contact. De plus, les résultats obtenus sont en accord avec de précédentes publications [39] et confirment que la consommation de jeu peut être une quantité d'optimisation pertinente pour la reconception d'aubes robustes aux interactions de contact.

## 5.3 Aube rotor 35

Le rotor 35 de la NASA [151] correspond au premier étage du même compresseur transsonique que rotor 37. Les aubes de ces deux rotors ont des géométries très proches et possèdent en outre le même allongement (rapport de la hauteur d'aube sur la corde moyenne des profils). Par conséquent, la reconception de l'aube rotor 35 effectuée vise à diminuer les amplitudes relatives à la même interaction que pour rotor 37, soit l'interaction entre le mode 1F et le quatrième régime moteur.

La dynamique de l'aube initiale est analysée dans la section 5.3.1 et trois instances du problème d'optimisation (5.9) sont considérées dans la section 5.3.2. Les amplitudes vibratoires de réponse à des interactions de contact des aubes optimisées sont analysées dans la section 5.3.3.

### 5.3.1 Analyse dynamique de l'aube initiale

Les trois premiers modes propres sont, dans cet ordre, le premier mode de flexion (1F), le premier mode de torsion (1T) et le deuxième mode de flexion (2F). L'interaction d'intérêt abrégée 1F/rm<sub>4</sub> est prédite linéairement à  $\frac{\omega_{1F}}{4} \simeq 1252 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Des simulations prédictives de contact sont conduites sur la plage de vitesses  $\omega \in [1150; 1550] \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  englobant l'interaction d'intérêt. La même stratégie numérique et les mêmes paramètres de simulation que pour rotor 37 (voir annexe F.1) sont utilisés.

#### CRF

La CRF est tracée à partir du déplacement  $d_{BA}$  du BA sur le dernier tour de rotation et présentée sur la figure 5.9. En raison du phénomène de raidissement au contact, le pic de résonance non linéaire relatif à l'interaction 1F/rm<sub>4</sub> est décalé vers de plus grandes vitesses (.....) par rapport à la vitesse d'interaction linéaire  $\frac{\omega_{1F}}{4}$ .

Un pic d'amplitude du même ordre de grandeur est également observé autour de  $1500 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . D'après le diagramme de Campbell, une interaction entre le mode 1T et le dixième régime moteur, abrégée 1T/rm<sub>10</sub>, est prédite à  $\frac{\omega_{1T}}{10} \simeq 1483 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . L'analyse du contenu fréquentiel de la réponse permet effectivement d'associer le pic d'amplitude à l'interaction 1T/rm<sub>10</sub>. Les interactions 1F/rm<sub>4</sub> et 1T/rm<sub>10</sub> sont prédites avec des amplitudes de vibration importantes. Bien que ces amplitudes ne soient pas cohérentes avec l'hypothèse de petites déformations du modèle éléments finis, elles attestent de la sévérité des contacts et soulignent la nécessité de reconcevoir l'aube rotor 35.

#### Contributions modales

La carte de contributions modales de l'aube initiale est tracée sur la figure 5.10. Sur la plage de vitesses d'intérêt, la contribution du mode 1F à la réponse vibratoire est dominante, sauf entre  $\omega = 1460 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $\omega = 1495 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  environ, où la contribution du mode 1T est prédominante. Cette contribution confirme l'implication du mode 1T à la dynamique sur cette plage. Par ailleurs, une contribution non négligeable du mode 2F est observée autour de  $\omega = 1190 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

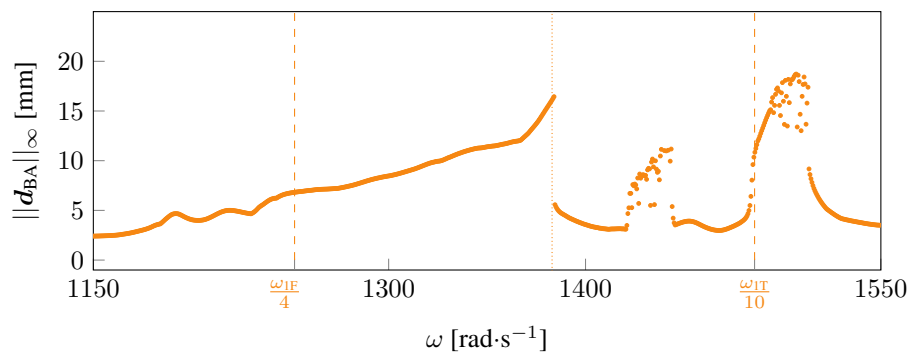


Figure 5.9 CRF de l'aube initiale rotor 35 (●). Vitesses d'interaction linéaires (---) et vitesse de la résonance non linéaire prédite pour l'interaction  $1F/rm_4$  (.....).

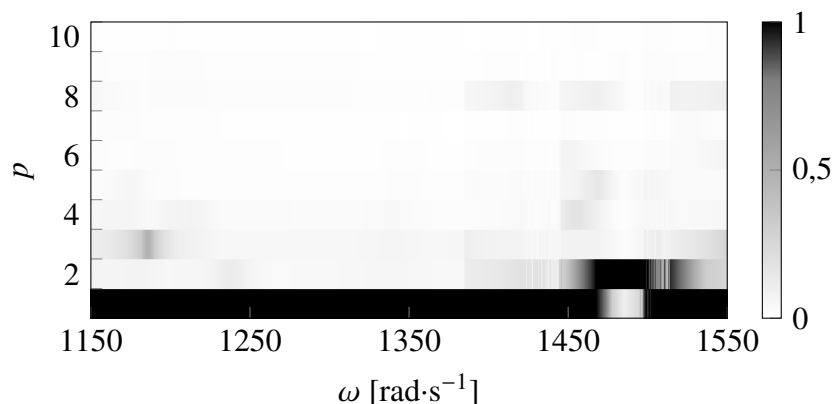


Figure 5.10 Contributions modales relatives normalisées de l'aube initiale rotor 35.

### 5.3.2 Optimisation

D'après l'analyse de l'aube initiale, les trois premiers modes propres sont jugés influents sur la dynamique de l'aube sur la plage de vitesses d'intérêt. La consommation de jeu au BA pour chacun de ces modes est utilisée comme fonction objectif du problème d'optimisation (5.9). Trois instances du problème sont ainsi formulées et résumées dans le tableau 5.4. Tous les calculs de consommation de jeu sont réalisés à partir des modes normalisés par un déplacement tangentiel au BA de  $t = 2$  mm. Les bornes d'optimisation choisies sont les mêmes que pour l'aube rotor 37 en raison de la ressemblance entre les deux rotors. Les aubes optimisées sont nommées d'après chaque instance et les modèles CAO correspondants sont visibles sur la figure 5.11. L'ordre des modes (1F, 1T puis 2F) est vérifié pour ces aubes et supposé inchangé pour tous les modèles générés lors des optimisations.

Tableau 5.4 Instances d'optimisation pour rotor 35.

instance	fonction objectif $\tilde{f}$	bornes	
		$\Delta z^3, \Delta z^5$	$\Delta \theta^3, \Delta \theta^5$
35-BA-1F	$c_{BA,1F}$	$[-2 \text{ mm}; 2 \text{ mm}]$	$[-1, 5^\circ; 1, 5^\circ]$
35-BA-1T	$c_{BA,1T}$	$[-2 \text{ mm}; 2 \text{ mm}]$	$[-1, 5^\circ; 1, 5^\circ]$
35-BA-2F	$c_{BA,2F}$	$[-2 \text{ mm}; 2 \text{ mm}]$	$[-1, 5^\circ; 1, 5^\circ]$

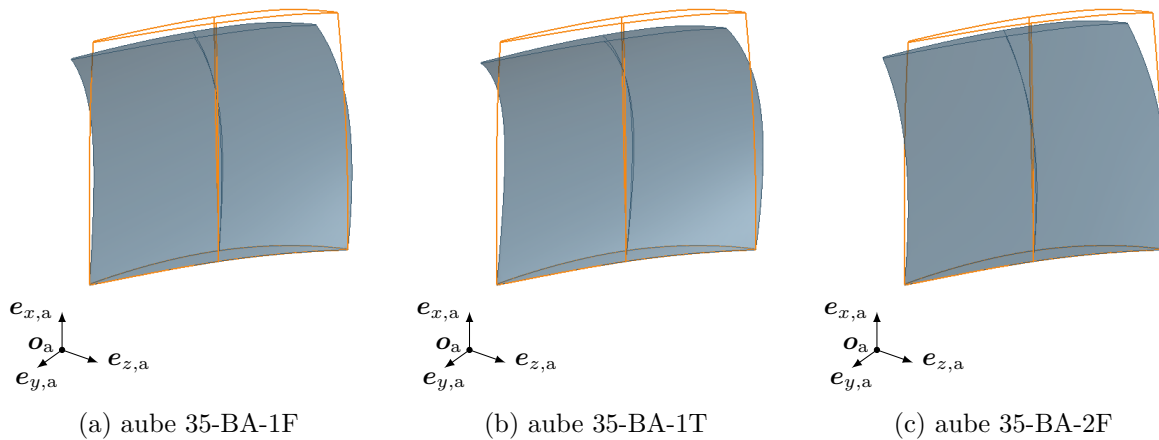


Figure 5.11 Modèles CAO des aubes rotor 35 optimisées (■) et initiale (□).

### Variations de consommation de jeu

Les variations relatives de consommation de jeu des aubes optimisées par rapport à l'aube initiale (équation (5.10)) sont calculées pour les huit nœuds frontière sur le sommet d'aube, pour les trois premiers modes propres. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.5. Pour les variations de fonctions objectif, cerclées en blanc, une diminution significative est visible pour les trois instances et témoigne du bon fonctionnement de la procédure d'optimisation. Les consommations de jeu sont diminuées pour les trois premiers modes propres pour presque tous les nœuds, bien que les fonctions objectif utilisées soient très localisées. Toutefois, des augmentations localisées de consommation de jeu sont également visibles. Pour l'aube 35-BA-1F par exemple, des dégradations sont visibles sur les modes 1T et 2F qui ne sont pas ciblés par la fonction objectif. Pour l'aube 35-BA-1T, une dégradation est même visible au nœud 4 sur le mode 1T ciblé par la fonction objectif. Enfin, les cellules rosées, dominantes pour l'aube 35-BA-2F, montrent que les diminutions observées pour cette aube sont globalement moins importantes que pour les autres instances. Tous nœuds et modes confondus, les diminutions les plus fortes semblent obtenues pour l'aube 35-BA-1F.

Tableau 5.5 Variations de consommation de jeu pour les aubes rotor 35 optimisées.

aube	nœud $v$	$\Delta c_{v,1F}$ [%]	$\Delta c_{v,1T}$ [%]	$\Delta c_{v,2F}$ [%]
35-BA-1F	1	-98	-53	105
	2	-90	-40	51
	3	-79	-4	-5
	4	-68	76	-53
	5	-71	-91	-35
	6	-66	-74	-55
	7	-60	-62	-81
	8	-65	-65	-59
35-BA-1T	1	-55	-84	190
	2	-69	-70	114
	3	-86	-31	38
	4	-94	106	-21
	5	-98	-67	-2
	6	-90	-95	-25
	7	-81	-80	-54
	8	-86	-83	-26
35-BA-2F	1	-27	-15	-99
	2	-28	-10	-79
	3	-28	6	-54
	4	-26	-30	-31
	5	-28	-64	-34
	6	-28	-49	-20
	7	-27	-45	-7
	8	-30	-46	-2

### Valeurs de consommation de jeu

Les valeurs de consommations de jeu en tous les nœuds frontière pour les trois premiers modes sont présentées sur la figure 5.12 pour l'aube initiale et les aubes optimisées. Les valeurs de fonctions objectif sont encerclées pour les aubes optimisées.

Les graphiques permettent de constater que les valeurs positives  $\Delta c_{4,1T}$  calculées dans le tableau 5.5 pour les aubes 35-BA-1F et 35-BA-1T (respectivement de 76% et 106%) ont un impact mineur, car la valeur  $c_{4,1T}$  est très faible pour l'aube initiale. En revanche, les valeurs positives de  $\Delta c_{BA,2F}$  calculées pour les aubes 35-BA-1F et 35-BA-1T (respectivement de 105% et 190%) sont liées à des augmentations de la quantité  $c_{BA,2F}$  importantes en valeur absolue, visibles sur la figure 5.12c. Pour de faibles valeurs de consommation de jeu, le caractère relatif de la quantité  $\Delta c_{v,p}$  implique d'analyser avec prudence les résultats du tableau 5.5, car une faible augmentation de consommation de jeu peut se traduire par une forte augmentation relative. Il est donc pertinent de considérer à la fois le tableau 5.5 et la figure 5.12 lors de

l'analyse de la dynamique des aubes optimisées.

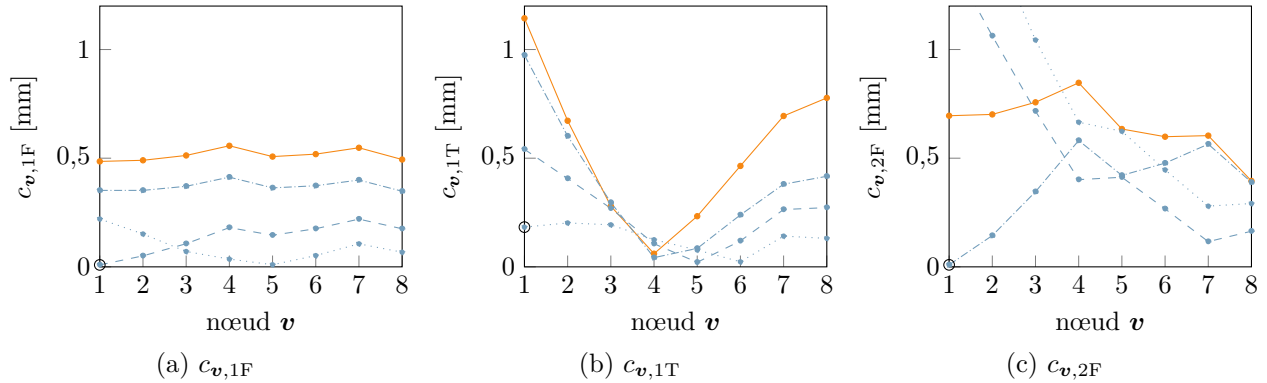


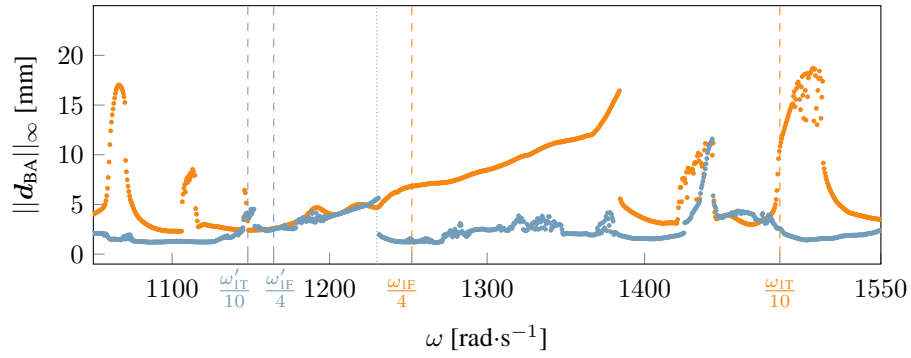
Figure 5.12 Consommations de jeu aux nœuds frontière pour les trois premiers modes pour l'aube initiale (—) et les aubes optimisées 35-BA-1F (---), 35-BA-1T (.....) et 35-BA-2F (-.-.-).

### 5.3.3 Analyse dynamique des aubes optimisées

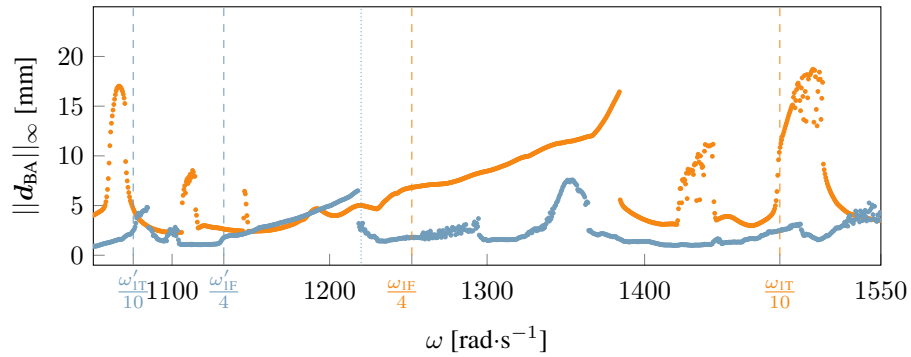
La même simulation de contact que pour l'aube initiale est effectuée pour les trois aubes optimisées. Étant donné les variations de fréquences propres des aubes optimisées, la plage de vitesses est étendue à  $\omega \in [1050; 1550]$  afin de visualiser correctement les amplitudes relatives à l'interaction  $1T/rm_{10}$ . Les CRF obtenues sont présentées sur la figure 5.13, superposées à celle de l'aube initiale. Globalement, sur toute la plage de vitesses d'intérêt, les amplitudes de vibration des aubes optimisées sont significativement réduites par rapport à l'aube initiale. Toutefois, la diminution des amplitudes est moins marquée pour l'aube 35-BA-2F. Ceci est cohérent avec le fait que les consommations de jeu sur le premier et deuxième mode propre sont plus élevées pour l'aube 35-BA-2F que pour les aubes 35-BA-1F et 35-BA-1T d'après la figure 5.12.

En raison d'une diminution des fréquences propres des aubes optimisées par rapport à l'aube initiale, l'interaction linéaire  $1F/rm_4$  est décalée vers de plus faibles vitesses et prédite à  $\frac{\omega'_{1F}}{4}$ . Les amplitudes du pic de résonance non linéaire prédit (.....) sont significativement réduites par rapport à l'aube initiale. De plus, l'augmentation brutale de la pente de la CRF associée au pic de résonance non linéaire sur l'aube initiale, vers  $1380 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , n'est pas visible pour les aubes optimisées. Enfin, l'interaction  $1T/rm_{10}$ , prédite linéairement à  $\frac{\omega'_{1T}}{10}$  pour les aubes optimisées, a presque entièrement disparu pour les aubes 35-BA-1F et 35-BA-1T. Pour cette interaction en particulier, des amplitudes équivalentes sont prédites pour les deux aubes, bien que seule la consommation de jeu sur le mode 1F ait été minimisée pour l'aube 35-BA-1F.

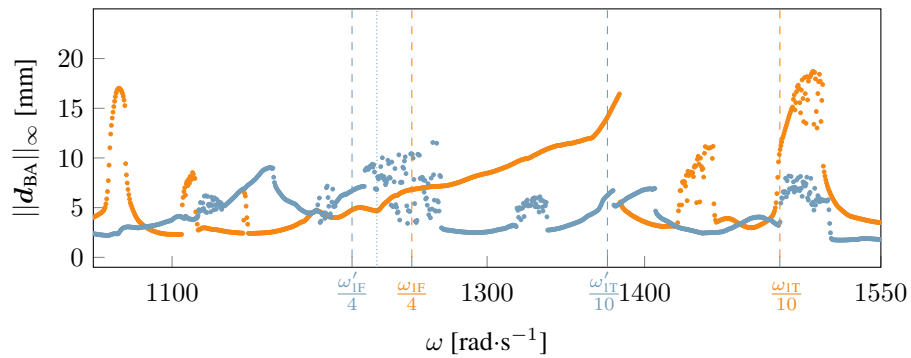




(a) aube 35-BA-1F



(b) aube 35-BA-1T



(c) aube 35-BA-2F

Figure 5.13 CRF des aubes rotor 35 initiale (●) et optimisées (●). Vitesses d'interaction linéaires (---) (---) et vitesse de la résonance non linéaire prédite (.....) pour l'interaction  $1F/rm_4$ .

### 5.3.4 Conclusion partielle

La reconception de l'aube rotor 35 permet d'obtenir des aubes dont les amplitudes de réponses à des interactions de contact sont significativement réduites. La pertinence de la consommation de jeu au BA sur un seul mode comme quantité d'optimisation est de nouveau soulignée. Les résultats numériques obtenus montrent de plus que les amplitudes de

réponse sont réduites pour des interactions impliquant d'autres modes.

## 5.4 Aube rotor 67

Grâce à la polyvalence du processus de reconception proposé, la pertinence de la consommation de jeu comme quantité d'optimisation peut être investiguée pour d'autres types d'aubes, comme les aubes de soufflante. Contrairement aux aubes de compresseurs haute pression [40] ou aux aubes de compresseur transsoniques telles que rotor 37, les aubes de soufflante sont significativement plus flexibles et possèdent alors des fréquences propres plus basses. Par conséquent, leur réponse dynamique à des interactions de contact peut être particulièrement complexe.

L'aube étudiée dans cette section est issue du rotor 67 de la NASA conçu en 1979. Ce rotor constitue le premier étage à 22 aubes d'une soufflante à deux étages [181]. Utilisé dans les années 90 comme cas de validation standard pour des méthodes de dynamique des fluides, il a été récemment étudié dans le cadre des interactions de contact aube/carter [59].

La vitesse nominale de l'aube rotor 67 est  $\omega = 1680 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Parmi les vitesses d'intérêt sous cette vitesse nominale, la vitesse correspondant à l'intersection entre le mode 1F et le second régime moteur a récemment été mise en évidence comme vitesse critique dans le contexte des interactions de contact aube/carter [59]. De ce fait, une large plage de vitesses de rotation  $\omega \in [900; 1780] \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  est considérée, incluant à la fois la vitesse critique  $\omega_{1F}/2$  et la vitesse nominale.

### 5.4.1 Analyse dynamique de l'aube initiale

Les trois premiers modes propres de l'aube sont, dans cet ordre, les modes 1F, 2F et 1T. Les interactions de contact aube/carter sont simulées avec la stratégie numérique utilisée dans la section 5.3.1, à raison d'une simulation tous les  $1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  sur la plage de vitesses d'intérêt. Les simulations sont effectuées sur un modèle réduit comportant  $\eta = 10$  degrés de liberté modaux et  $n_f = 8$  nœuds frontière uniformément répartis en sommet d'aube. Le même scénario de contact que pour les aubes rotor 37 et 35 est utilisé, à l'exception du jeu aube/carter au repos, fixé à  $4 \times 10^{-4} \text{ m}$  d'après le rapport technique de la NASA [181]. Les paramètres de simulation sont résumés en annexe F.2. Sur toute la plage de vitesses d'intérêt, les amplitudes les plus élevées sont observées au BA ; les résultats relatifs à ce nœud sont donc considérés dans cette section.

## CRF

La CRF de l'aube initiale est présentée sur la figure 5.14 ; des motifs vibratoires très sophistiqués sont visibles. En particulier, les plages de vitesses où des nuages de points sont visibles — par exemple pour  $\omega \in [1400; 1500]$  rad·s<sup>-1</sup> — peuvent indiquer que les solutions calculées ne sont pas périodiques ou possèdent une période qui ne correspond pas à une révolution de l'aube [59]. Par ailleurs, il n'est pas possible de distinguer clairement une résonance non linéaire liée spécifiquement au mode 1F.

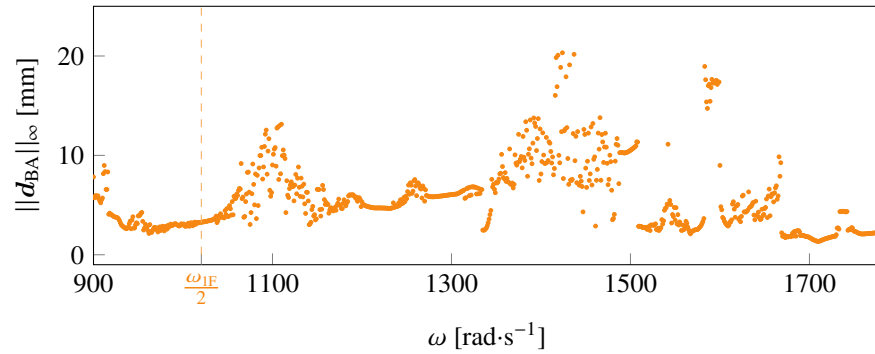


Figure 5.14 CRF de l'aube initiale pour rotor 67 (●). Vitesse d'interaction linéaire (-----).

## Contributions modales

Les contributions modales relatives normalisées sont calculées sur le dernier tour de rotation et présentées sur la figure 5.15. Plusieurs modes propres, allant jusqu'au septième mode, contribuent de façon non négligeable à la dynamique de l'aube. Ceci souligne la complexité de la réponse dynamique de l'aube rotor 67. Bien que le premier mode (1F) soit majoritairement dominant, il existe des plages de vitesses sur lesquelles sa contribution disparaît au profit d'autres modes. Ce phénomène est visible pour le deuxième mode (2F) pour  $\omega \simeq 1580$  rad·s<sup>-1</sup> et pour le troisième mode (1T) pour  $\omega \simeq 900$  rad·s<sup>-1</sup> et  $\omega \simeq 1350$  rad·s<sup>-1</sup>. Sur toute la plage de vitesses d'intérêt, la dynamique de l'aube est majoritairement dominée par les trois premiers modes propres.

Les observations faites sur la CRF et la carte de contributions modales soulignent la dynamique vibratoire à la fois riche et complexe de l'aube rotor 67. Sa reconception en vue d'améliorer sa robustesse aux interactions de contact aube/carter représente ainsi un défi d'envergure.

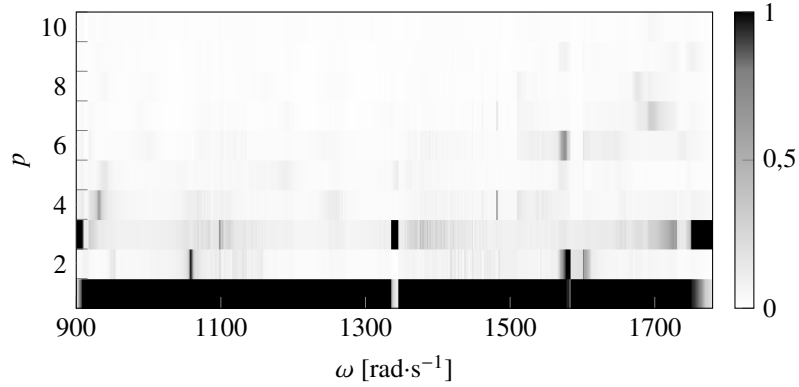


Figure 5.15 Contributions modales relatives normalisées de l'aube initiale rotor 67.

### 5.4.2 Optimisation

Trois instances du problème d'optimisation (5.9) sont formulées et présentées dans le tableau 5.6. Les consommations de jeu au BA pour les trois premiers modes, les plus influents, sont respectivement considérées comme fonctions objectif. Lors d'un calcul de consommation de jeu, un déplacement tangentiel  $t$  de 4 mm au BA est utilisé pour normaliser les déformées modales (étape ② du calcul de consommation de jeu).

L'aube rotor 67 étant environ deux fois plus longue que les aubes rotor 35 et rotor 37, les bornes d'optimisation relatives à la flèche axiale sont augmentées par rapport aux reconceptions précédentes. L'ordre des trois premiers modes (1F, 2F puis 1T) est supposé inchangé pour tous les modèles générés pendant les optimisations. Les aubes optimisées sont nommées 67-BA-1F, 67-BA-2F et 67-BA-1T ; les modèles CAO sont présentés sur la figure 5.16.

Tableau 5.6 Instances d'optimisation pour rotor 67.

instance	fonction objectif $\tilde{f}$	bornes	
		$\Delta z^3, \Delta z^5$	$\Delta \theta^3, \Delta \theta^5$
67-BA-1F	$c_{BA,1F}$	[-3 mm; 3 mm]	[-1, 5°; 1, 5°]
67-BA-2F	$c_{BA,2F}$	[-3 mm; 3 mm]	[-1, 5°; 1, 5°]
67-BA-1T	$c_{BA,1T}$	[-3 mm; 3 mm]	[-1, 5°; 1, 5°]

### Variations de consommation de jeu

Les variations relatives de consommation de jeu aux nœuds frontière pour les trois premiers modes propres sont données dans le tableau 5.7. Pour chaque instance, la quantité optimisée est améliorée significativement :  $\Delta c_{BA,1F} = -73\%$  pour l'aube 67-BA-1F,  $\Delta c_{BA,2F} = -98\%$

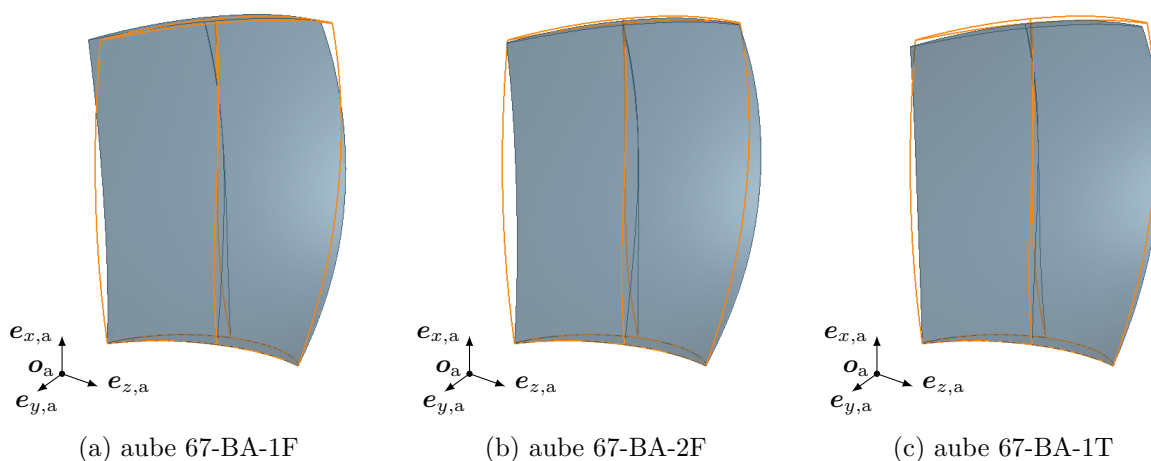


Figure 5.16 Modèles CAO des aubes rotor 67 optimisées (■) et initiale (□).

pour l'aube 67-BA-2F et  $\Delta_{C_{BA,1T}} = -38\%$  pour l'aube 67-BA-1T. Cependant, les nombreuses cellules roses dans le tableau indiquent que les optimisations de consommation de jeu en un seul nœud et pour un seul mode amènent des résultats mitigés. Dans le meilleur cas, pour l'aube 67-BA-2F par exemple, la consommation de jeu est significativement améliorée en tous les nœuds frontière, mais seulement pour le mode ciblé par la fonction objectif : 2F. Quant à l'aube 67-BA-1F, l'optimisation de la consommation de jeu au BA conduit seulement à une diminution mineure de la consommation de jeu au BF pour le mode 1F de  $-19\%$ . Pour l'aube 67-BA-1T, l'optimisation de la consommation de jeu au BA pour le mode 1T entraîne même une dégradation des consommations de jeu en milieu de corde. De manière générale, pour rotor 67, optimiser la consommation de jeu pour un seul mode conduit seulement à des améliorations très localisées, voire à des détériorations en certains nœuds pour le même mode ou pour d'autres modes.

### Valeurs de consommation de jeu

Les consommations de jeu pour les trois premiers modes et pour tous les nœuds frontière sont présentées sur la figure 5.17 pour l'aube initiale et les aubes optimisées. La valeur de la fonction objectif est encadrée pour chaque aube optimisée.

La consommation de jeu au BA pour le mode 1F est très faible par rapport aux aubes rotor 37 et rotor 35. Les valeurs de consommation de jeu pour le mode 1F (figure 5.17a) de l'aube initiale et des aubes optimisées 67-BA-1F et 67-BA-2F sont par ailleurs très proches et l'allure des courbes est semblable. Les graphiques révèlent également que les valeurs de consommation de jeu pour le mode 2F sont très élevées pour l'aube initiale (figure 5.17b).

Tableau 5.7 Variations de consommation de jeu pour les aubes rotor 67 optimisées.

aube	nœud $v$	$\Delta c_{v,1F}$ [%]	$\Delta c_{v,2F}$ [%]	$\Delta c_{v,1T}$ [%]
67-BA-1F	1	-73	-52	3
	2	-36	-45	10
	3	-40	-55	70
	4	-26	-46	-15
	5	-26	-53	-11
	6	-21	-49	-10
	7	-18	-47	-10
	8	-19	-58	-10
67-BA-2F	1	45	-98	-20
	2	-87	-77	-12
	3	-84	-94	49
	4	-57	-76	-68
	5	-55	-87	-60
	6	-40	-77	-48
	7	-33	-73	-45
	8	-34	-91	-53
67-BA-1T	1	233	-3	-38
	2	-2	-56	-11
	3	3	-29	136
	4	-76	-68	-46
	5	-84	-52	-74
	6	-75	-73	-83
	7	-60	-84	-71
	8	-61	-54	-85

Par conséquent, les diminutions relatives  $\Delta c_{v,2F}$  observées dans le tableau 5.7 correspondent à des diminutions significatives de consommation de jeu. De la même façon, comme la valeur  $c_{3,1T}$  est relativement faible pour l'aube initiale (figure 5.17c), les valeurs positives  $\Delta c_{3,1T}$  calculées pour les aubes optimisées ne correspondent en fait qu'à de faibles augmentations de la consommation de jeu en valeur absolue.

### 5.4.3 Analyse dynamique des aubes optimisées

Des simulations de contact sont effectuées sur les aubes optimisées avec les mêmes paramètres de simulation que pour l'aube initiale. Les CRF calculées à partir du déplacement du BA sur le dernier tour de rotation sont présentées sur la figure 5.18. Pour toutes les aubes optimisées, la variation de la première fréquence propre est faible par rapport à celle de l'aube initiale. Par conséquent, la résonance linéaire prédite à  $\frac{\omega'_{1F}}{2}$  (----) pour les aubes optimisées est proche de celle de l'aube initiale à  $\frac{\omega_{1F}}{2} \simeq 1020 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  (-.-.-).

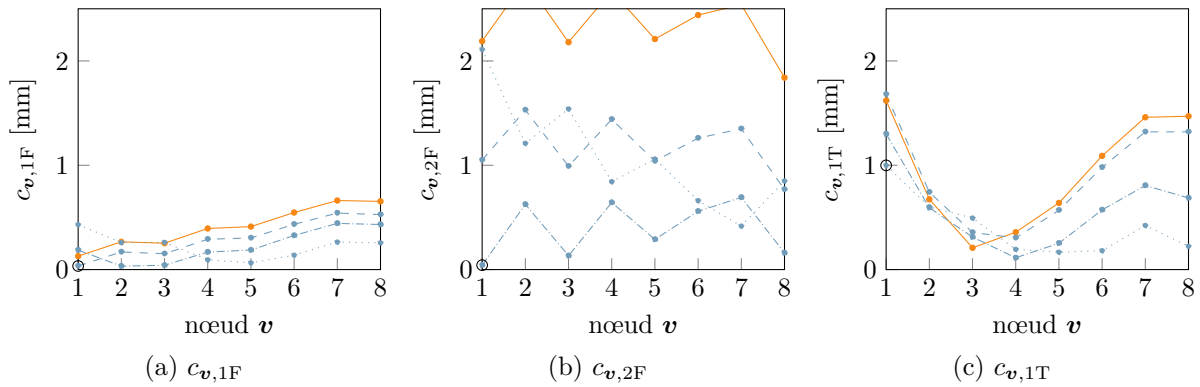
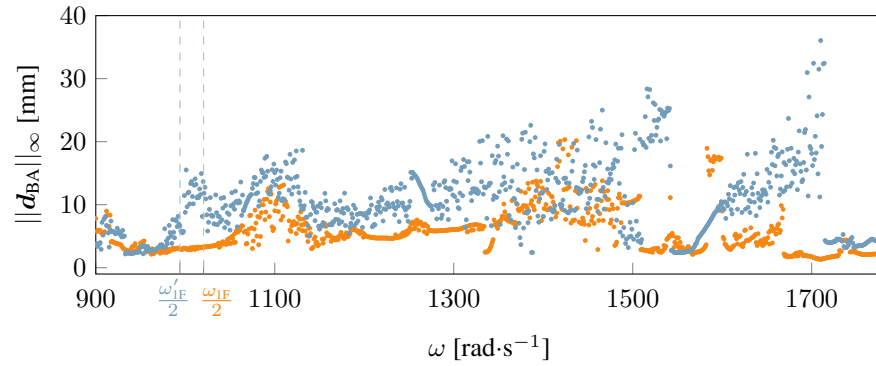


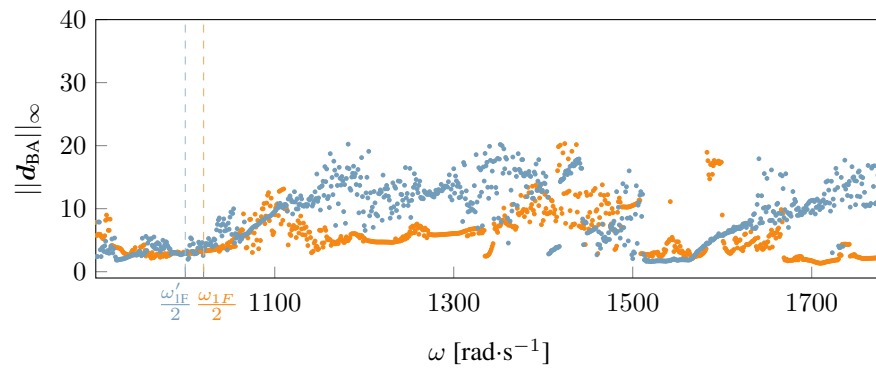
Figure 5.17 Consommations de jeu aux nœuds frontière pour les trois premiers modes pour l’aube initiale (—) et les aubes optimisées 67-BA-1F (----), 67-BA-2F (-.-.-) et 67-BA-1T (.....).

Pour les aubes 67-BA-1F et 67-BA-2F, une augmentation des amplitudes de vibration par rapport à l’aube initiale est visible pour presque toutes les vitesses de la plage d’intérêt. Bien que les consommations de jeu pour le mode 1F de ces deux aubes soient très proches de celles de l’aube initiale, les CRF obtenues, très différentes, témoignent de la grande sensibilité des phénomènes vibratoires liés aux interactions de contact. Le fait que les aubes optimisées présentent des amplitudes de vibration plus importantes peut être expliqué par les améliorations minimales de consommation de jeu par rapport à l’aube initiale qui présentait déjà de faibles consommations de jeu sur le mode 1F.

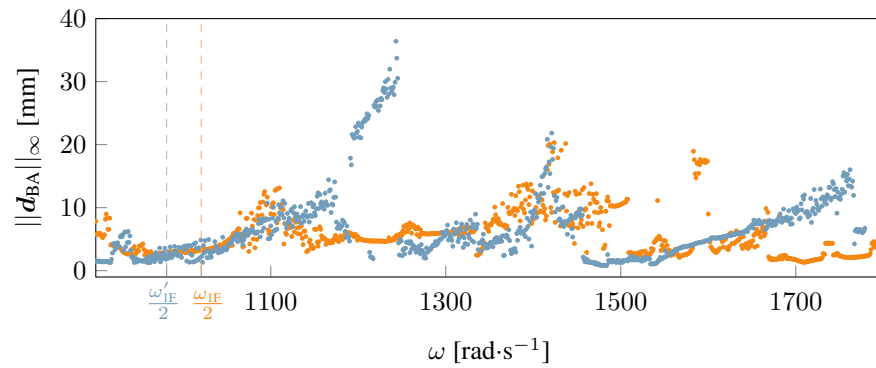
Pour l’aube 67-BA-1T, l’amplitude maximale atteinte sur la plage, pour  $\omega \simeq 1240 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , est beaucoup plus élevée que pour les aubes 67-BA-1F et 67-BA-2F. L’analyse du contenu fréquentiel des déplacements révèle que ce pic est associé à l’interaction 1F/ $\text{rm}_2$ . L’augmentation des amplitudes pourrait s’expliquer par la détérioration significative de la consommation de jeu au BA pour le mode 1F pour cette aube (voir figure 5.17a). Sur le reste de la plage, les amplitudes pour l’aube 67-BA-1T sont comparables à celles de l’aube initiale.



(a) aube 67-BA-1F



(b) aube 67-BA-2F



(c) blade 67-BA-1T

Figure 5.18 CRF des aubes rotor 67 optimisées (●) et initiale (●). Vitesses d'interaction linéaires (---) (---).

#### 5.4.4 Conclusion partielle

Pour l'aube rotor 67, la minimisation de la consommation de jeu en un mode et un nœud ne permet pas de réduire les amplitudes du pic de résonance associé à l'interaction d'intérêt. Deux hypothèses peuvent expliquer ce phénomène :



- contrairement aux aubes rotor 37 et 35, la consommation de jeu de l’aube rotor 67 initiale au BA sur le mode 1F est déjà très faible<sup>5</sup>. Toute tentative de minimiser cette quantité ne permet d’obtenir que de faibles améliorations sans gains significatifs en matière de robustesse au contact. Au sens de la consommation de jeu, les résultats obtenus indiquent que l’aube initiale est proche d’une configuration optimale ;
- les optimisations relatives à rotor 67 conduisent à des diminutions très localisées de la consommation de jeu, concentrées sur un mode et un nœud, tandis que des diminutions plus globales sont observées dans le cas de rotor 37 et rotor 35. Or, la dynamique de l’aube initiale rotor 67 sur la plage de vitesses d’intérêt implique un plus grand nombre de modes que pour les aubes rotor 37 et rotor 35. Il est ainsi possible que des modes dont la consommation a été dégradée jouent un rôle significatif dans la dynamique de l’aube.

Les résultats de reconception liés à rotor 67 soulignent le fait que la pertinence d’une consommation de jeu très localisée comme quantité d’optimisation substitut est hautement dépendante de la géométrie et de la dynamique de l’aube initiale.

## 5.5 Reconceptions avancées

La minimisation de la consommation de jeu en un nœud et pour un seul mode a permis de réduire significativement les amplitudes de réponse des aubes rotor 37 et rotor 35. Dans cette section, il est proposé d’enrichir la définition de la fonction objectif en incluant les consommations de jeu soit en plusieurs nœuds, soit pour plusieurs modes. Il est arbitrairement choisi de reconcevoir l’aube rotor 37 en considérant plusieurs nœuds (section 5.5.1) et l’aube rotor 35 en considérant plusieurs modes (section 5.5.2).

### 5.5.1 Prise en compte de plusieurs nœuds : application à rotor 37

Dans un premier temps, il est envisagé de modifier le nœud où est optimisée la valeur de la consommation de jeu. Le BF, qui, comme le BA, a l’avantage de pouvoir être identifié de manière univoque sur toutes les aubes générées pendant l’optimisation, est considéré. Deux instances du problème d’optimisation (5.9) relatives à la consommation de jeu au BF pour les modes 1F et 1T sont formulées dans le tableau 5.8. Dans un second temps, la fonction objectif est enrichie de façon à minimiser le maximum de la consommation de jeu au BA et au BF simultanément, ce qui aboutit à la formulation de deux instances supplémentaires du problème d’optimisation (5.9).

---

5. Une comparaison rigoureuse des consommations de jeu est effectuée en considérant un même déplace-

Tableau 5.8 Instances d'optimisation supplémentaires pour rotor 37.

instance	fonction objectif $\tilde{f}$	bornes	
		$\Delta z^3, \Delta z^5$	$\Delta\theta^3, \Delta\theta^5$
37-BF-1F	$c_{BF,1F}$	$[-2 \text{ mm}; 2 \text{ mm}]$	$[-1, 5^\circ; 1, 5^\circ]$
37-BF-1T	$c_{BF,1T}$	$[-2 \text{ mm}; 2 \text{ mm}]$	$[-1, 5^\circ; 1, 5^\circ]$
37-max(BA,BF)-1F	$\max(c_{BA,1F}, c_{BF,1F})$	$[-2 \text{ mm}; 2 \text{ mm}]$	$[-1, 5^\circ; 1, 5^\circ]$
37-max(BA,BF)-1T	$\max(c_{BA,1T}, c_{BF,1T})$	$[-2 \text{ mm}; 2 \text{ mm}]$	$[-1, 5^\circ; 1, 5^\circ]$

### Minimisation de consommation de jeu au BF

Il est remarqué que les aubes optimisées 37-BF-1F et 37-BF-1T obtenues sont parfaitement identiques à l'aube 37-BA-1T décrite dans la section 5.2.2. L'optimisation conduite est toutefois bien différente pour chaque instance, comme l'attestent les graphiques de convergence présentés sur la figure 5.19. La convergence étant rapidement atteinte, seules les 80 premières évaluations sont représentées. Par ailleurs, il est vérifié que les valeurs de variables proposées par l'algorithme d'optimisation à chaque évaluation sont effectivement distinctes pour les différentes instances. Ceci confirme que le déroulement de l'algorithme est différent, bien que les solutions obtenues soient identiques.

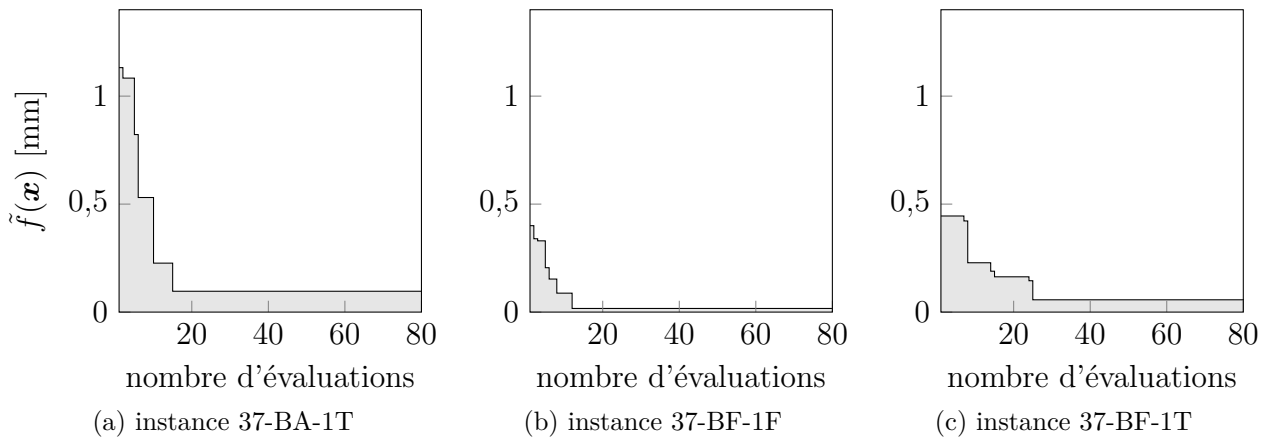


Figure 5.19 Courbes de convergence pour les instances 37-BA-1T, 37-BF-1F et 37-BF-1T.

D'un point de vue mathématique, l'obtention de solutions identiques indique que la solution trouvée est probablement un minimum local commun aux différentes fonctions objectif considérées. Autrement dit, pour rotor 37, une aube satisfaisante au regard de sa consommation de jeu au BA pour le mode 1T est également une aube satisfaisante au regard de ment tangentiel  $t$  pour la normalisation des modes.

sa consommation de jeu au BF pour les modes 1F et 1T. Ce comportement peut être dû aux bornes d'optimisation relativement serrées, ce qui restreint probablement le nombre de minima locaux — c'est-à-dire de solutions satisfaisantes — présents dans le domaine des variables.

L'obtention de solutions identiques est également cohérente avec les observations de la section 5.2.3 : pour rotor 37, la minimisation d'une consommation de jeu très localisée pour le mode 1F ou 1T conduit à des améliorations sur tous les nœuds pour les deux premiers modes. Bien qu'il ne soit pas possible de tirer de conclusion générale étant donné le faible nombre de tests réalisés, la minimisation de consommation de jeu au BA ou au BF pour un mode semble donner des résultats équivalents pour l'aube rotor 37.

### Minimisation de consommation de jeu maximale entre BA et BF

Pour l'instance 37-max(BA,BF)-1F, une analyse fine du déroulement de l'optimisation révèle que sur 400 évaluations, la consommation de jeu maximale entre le BA et le BF est atteinte au BA pour 129 évaluations et au BF pour 271 évaluations. L'aube obtenue diffère des aubes 37-BA-1F et 37-BF-1F. Pour l'instance 37-max(BA,BF)-1T, la fonction objectif vaut  $c_{BA,1T}$  pour 392 évaluations et  $c_{BF,1T}$  pour 8 évaluations. Dans ce contexte, il n'est pas surprenant que l'algorithme converge vers la même solution que pour l'instance 37-BA-1T : l'aube 37-max(BA,BF)-1T est identique à l'aube 37-BA-1T.

Les variations de consommations de jeu pour les instances relatives au mode 1F sont rassemblées dans le tableau 5.9 à des fins de comparaison. Les consommations de jeu sont significativement diminuées pour l'aube 37-max(BA,BF)-1F par rapport à l'aube initiale. Les diminutions observées aux différents nœuds pour les deux modes suivent globalement les mêmes tendances que pour les aubes 37-BA-1F et 37-BF-1F.

Afin de mieux visualiser ces tendances, les consommations de jeu  $c_{v,1F}$  et  $c_{v,1T}$  sont tracées en fonction du nœud frontière  $v$  sur la figure 5.20 pour les trois instances et pour l'aube initiale. La valeur de la fonction objectif atteinte pour chaque instance est encerclée (elle est égale au BA et au BF pour l'aube 37-max(BA,BF)-1F). La fonction objectif de l'aube 37-max(BA,BF)-1F est supérieure à celles des aubes 37-BA-1F et 37-BF-1F. Ce résultat est prévisible mathématiquement, considérant que toutes ces instances ont bien convergé, en raison de l'utilisation du maximum dans la fonction objectif pour l'instance 37-max(BA,BF)-1F.

En revanche, il est intéressant de constater que pour les deux modes considérés et pour chaque nœud  $v$ , la consommation de jeu de l'aube 37-max(BA,BF)-1F est plus faible que la pire

Tableau 5.9 Variations de consommation de jeu pour les aubes rotor 37 optimisées.

aube	nœud $v$	$\Delta c_{v,1F}$ [%]	$\Delta c_{v,1T}$ [%]
37-BA-1F	1	-98	-55
	2	-84	-45
	3	-85	-17
	4	-78	2203
	5	-66	-79
	6	-74	-77
	7	-61	-59
	8	-68	-66
37-BF-1F	1	-48	-91
	2	-51	-82
	3	-72	-42
	4	-86	2857
	5	-95	-81
	6	-94	-87
	7	-98	-97
	8	-96	-92
37-max(BA,BF)-1F	1	-82	-76
	2	-83	-69
	3	-98	-44
	4	-90	1828
	5	-77	-95
	6	-85	-90
	7	-82	-84
	8	-79	-81

consommation parmi celles des aubes 37-BA-1F et 37-BF-1F. Pour certaines consommations de jeu, comme  $c_{3,1F}$ , la valeur relative à l'aube 37-max(BA,BF)-1F est même plus faible que celle des autres aubes. La prise en compte de la consommation de jeu au BA et au BF dans la fonction objectif permet de s'affranchir du caractère local de l'optimisation en un seul nœud. L'aube 37-max(BA,BF)-1F présente une consommation de jeu plus uniforme sur le sommet d'aube, du fait de la continuité de la matière en sommet d'aube.

La CRF de l'aube 37-max(BA,BF)-1F est présentée sur la figure 5.21. Les amplitudes relatives à l'interaction d'intérêt  $1F/rm_4$  sont fortement diminuées par rapport à l'aube initiale. Les résultats obtenus pour cette aube sont de plus aussi bons que ceux obtenus pour les aubes 37-BA-1F et 37-BF-1T (égale à l'aube 37-BA-1T) d'après les CRF de la figure 5.8.

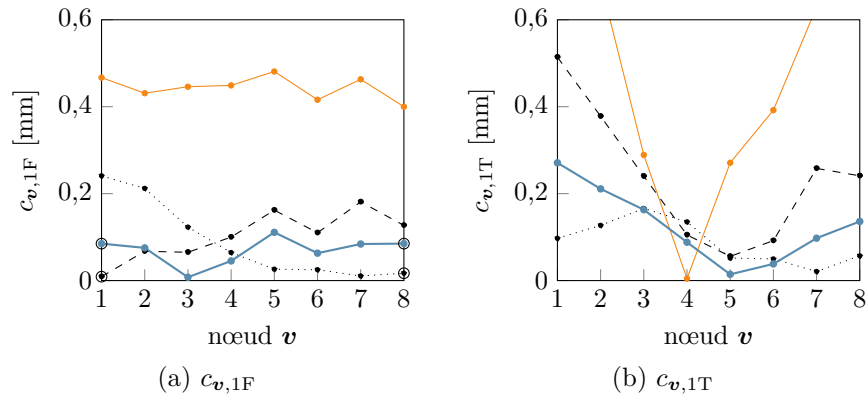


Figure 5.20 Consommations de jeu aux nœuds frontière pour les deux premiers modes pour les aubes 37-BA-1F (----), 37-BF-1F (.....), 37-max(BA,BF)-1F (—) et initiale (—).

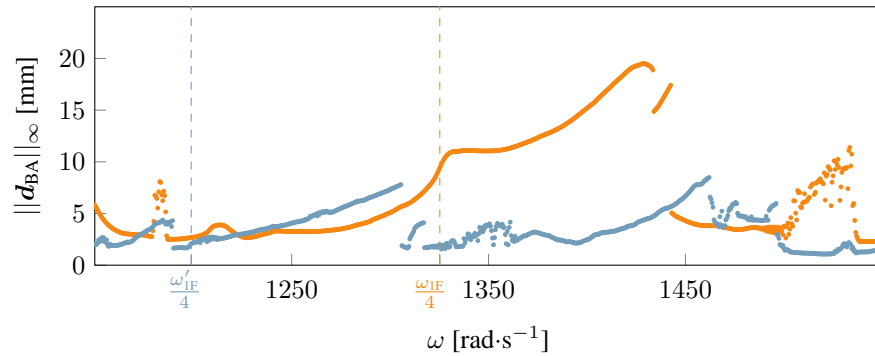


Figure 5.21 CRF des aubes rotor 37 optimisée 37-max(BA,BF)-1F (●) et initiale (●).

### 5.5.2 Prise en compte de plusieurs modes : application à rotor 35

Il est proposé dans cette section d'inclure les consommations de jeu relatives à plusieurs modes dans la fonction objectif. Deux instances supplémentaires du problème d'optimisation (5.9) sont présentées dans le tableau 5.10, afin de tenir compte de la consommation de jeu au BA respectivement pour les deux et trois premiers modes propres.

Pour l'instance 35-BA-max(1F,1T), entre les deux premiers modes propres, la consommation de jeu au BA est maximale pour le mode 1F pour 3 évaluations et pour le mode 1T pour 397 évaluations. La fonction objectif correspond donc à la quantité  $c_{BA,1T}$  pour la plupart des évaluations. Les valeurs des variables d'optimisation de l'aube 35-BA-max(1F,1T) sont identiques à celle de l'aube 35-BA-1T, à l'exception de la variable  $\Delta\theta^3$ . Pour l'instance 35-BA-max(1F,1T,2F), la fonction objectif correspond à  $c_{BA,1T}$  pour 288 évaluations et à  $c_{BA,2F}$  pour 101 évaluations (11 évaluations ont échoué). L'aube 35-BA-max(1F,1T,2T) est distincte des aubes obtenues avec les instances précédentes. La convergence de l'algorithme d'optimisa-

Tableau 5.10 Instances d'optimisation supplémentaires pour rotor 35.

instance	fonction objectif $\tilde{f}$	bornes	
		$\Delta z^3, \Delta z^5$	$\Delta \theta^3, \Delta \theta^5$
35-BA-max(1F,1T)	$\max(c_{BA,1F}, c_{BA,1T})$	[-2 mm; 2 mm]	[-1, 5°; 1, 5°]
35-BA-max(1F,1T,2F)	$\max(c_{BA,1F}, c_{BA,1T}, c_{BA,2F})$	[-2 mm; 2 mm]	[-1, 5°; 1, 5°]

tion semble atteinte en environ 250 évaluations pour l'aube 35-BA-max(1F,1T,2F), alors que moins de 100 évaluations semblent nécessaires pour toutes les autres instances relatives à rotor 35. En effet, l'alternance de quantités  $c_{BA,1T}$  et  $c_{BA,2F}$  dans la fonction objectif s'apparente à résoudre un problème d'optimisation biobjectif, *a priori* plus difficile à résoudre.

### Variations de consommation de jeu

Les variations de consommation de jeu pour les deux instances supplémentaires sont données dans le tableau 5.11. Pour l'aube 35-BA-max(1F,1T), l'allure du tableau est très similaire à celle du tableau 5.5 obtenu pour l'aube 35-BA-1F. Pour l'aube 35-BA-max(1F,1T,2F), la consommation de jeu relative au mode 2F est diminuée pour tous les nœuds sauf au BA, où elle reste stable.

Tableau 5.11 Variations de consommation de jeu des aubes rotor 35 optimisées.

aube	nœud $v$	$\Delta c_{v,1F}$ [%]	$\Delta c_{v,1T}$ [%]	$\Delta c_{v,2F}$ [%]
35-BA-max(1F,1T)	1	-59	-82	182
	2	-73	-69	108
	3	-89	-32	34
	4	-91	94	-24
	5	-96	-71	-5
	6	-88	-93	-28
	7	-79	-79	-56
	8	-85	-82	-29
35-BA-max(1F,1T,2F)	1	-71	-39	1
	2	-67	-32	-32
	3	-60	-13	-69
	4	-52	-32	-97
	5	-56	-76	-90
	6	-52	-59	-94
	7	-48	-53	-75
	8	-51	-57	-89

## Valeurs de consommation de jeu

Les consommations de jeu en chaque nœud frontière  $v$  pour les trois premiers modes sont présentées sur la figure 5.22. À des fins de lisibilité, les consommations relatives à l'aube 35-BA-max(1F,1T) sont omises ; celles-ci se superposent presque exactement à celles de l'aube 35-BA-1T.

Pour le mode 2F (figure 5.22c), la consommation de jeu au BA de l'aube 35-BA-max(1F,1T,2F) est équivalente à celle de l'aube initiale, mais plus élevée que celle de l'aube 35-BA-2F, pour laquelle la fonction objectif inclut uniquement le mode 2F. Bien que la fonction objectif cible uniquement la consommation de jeu au BA, de faibles valeurs  $c_{v,2F}$  sont obtenues pour les nœuds 3 à 8 et les consommations de jeu pour le mode 2F pour tous les nœuds  $v$  sont significativement réduites par rapport aux aubes 35-BA-1F et 35-BA-1T. Pour les modes 1F et 1T (figures 5.22a et 5.22b), les consommations de jeu de l'aube 35-BA-max(1F,1T,2F) sont plus élevées que celles de l'aube optimisée spécifiquement par rapport au mode 1F ou 1T. Toutefois, pour chaque nœud et mode considéré, la consommation de jeu pour l'aube 35-BA-max(1F,1T,2F) est plus faible que celle de la plus mauvaise des aubes 35-BA-1F, 35-BA-1T et 35-BA-2F. Ce résultat est notable étant donné que seule la consommation de jeu au BA est prise en compte dans la fonction objectif. La prise en compte de plusieurs modes par un maximum dans la fonction objectif tend à uniformiser les valeurs de consommation de jeu sur ces modes pour le nœud considéré.

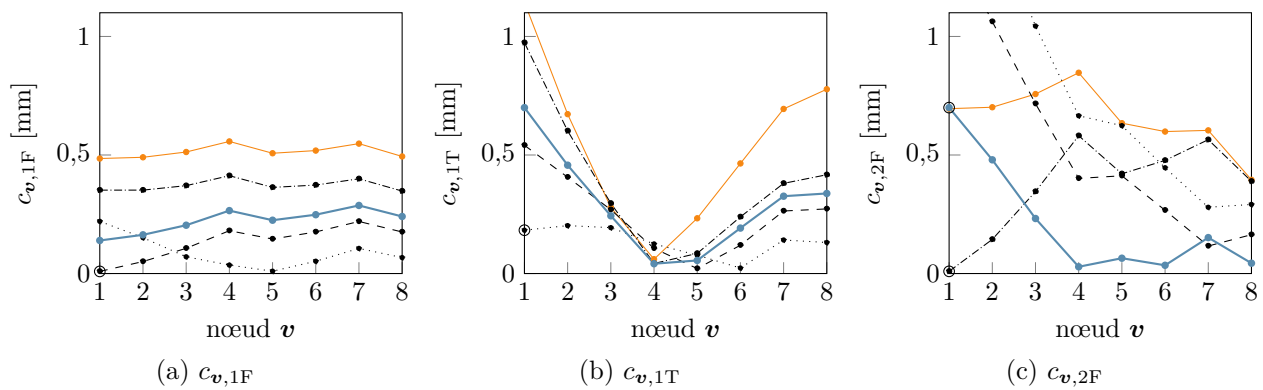


Figure 5.22 Consommations de jeu aux nœuds frontière pour les trois premiers modes pour les aubes 35-BA-1F (----), 35-BA-1T (.....), 35-BA-2F (----), 35-BA-max(1F,1T,2F) (—) et initiale (—).

## Analyse dynamique des aubes optimisées

Les CRF des aubes 35-BA-max(1F,1T) et 35-BA-max(1F,1T,2F) sont superposées à celle de l'aube initiale sur la figure 5.23. La CRF de l'aube 35-BA-1F, qui présente les plus faibles amplitudes parmi les aubes optimisées obtenues, est également présentée en arrière-plan. Les amplitudes de réponse des aubes optimisées sont globalement plus faibles que celles de l'aube initiale sur la plage de vitesses considérée. En particulier, les amplitudes relatives à l'interaction d'intérêt  $1F/rm_4$  sont significativement réduites et les amplitudes relatives à l'interaction  $1T/rm_{10}$  semblent également réduites.

Concernant l'interaction  $1T/rm_{10}$ , une pente importante est observée sur la CRF de l'aube 35-BA-max(1F,1T,2F), comme pour l'aube initiale, alors que la pente pour l'aube 35-BA-max(1F,1T) semble plus faible. Cette observation est cohérente avec les valeurs de consommation de jeu sur le mode 1T pour l'aube 35-BA-max(1F,1T), significativement plus faibles que celles de l'aube 35-BA-max(1F,1T,2F), en particulier au BA. Enfin, par rapport aux aubes optimisées selon un seul mode (voir CRF figure 5.13), les instances 35-BA-max(1F,1T) et 35-BA-max(1F,1T,2F) présentent des amplitudes de réponse similaires.

## Conclusion partielle

Concernant la prise en compte de plusieurs nœuds dans la fonction objectif, la minimisation de consommation de jeu au BA ou au BF pour le mode 1F pour rotor 37 a permis d'obtenir des aubes dont les amplitudes de réponse sont similaires. Pour ces aubes, les diminutions de consommations de jeu sont plus importantes au nœud considéré dans la fonction objectif. La minimisation du maximum de consommation de jeu au BA et au BF pour le mode 1F a au contraire conduit à une uniformisation de la consommation de jeu en sommet de l'aube optimisée. Les amplitudes de réponse de cette aube sont également réduites par rapport à l'aube initiale. Alors que le scénario de contact utilisé pour les simulations favorise l'initiation du contact au BA, il semble pertinent dans un contexte industriel d'inclure le BA et le BF dans le calcul de la fonction objectif pour assurer la diminution des consommations de jeu sur tout le sommet d'aube.

Lorsque la fonction objectif est le maximum de consommation sur plusieurs modes, les résultats obtenus sur rotor 35 montrent que les consommations de jeu sont réduites sur le mode 2F, ayant la consommation de jeu la plus élevée. Or, ce mode ne semble pas influencer la dynamique de l'aube sur la plage de vitesses d'intérêt. Ainsi, considérer un maximum peut réduire la consommation de jeu sur un mode sans impact notable sur la CRF. De plus, les diminutions de consommations de jeu pour les autres modes sont généralement plus faibles



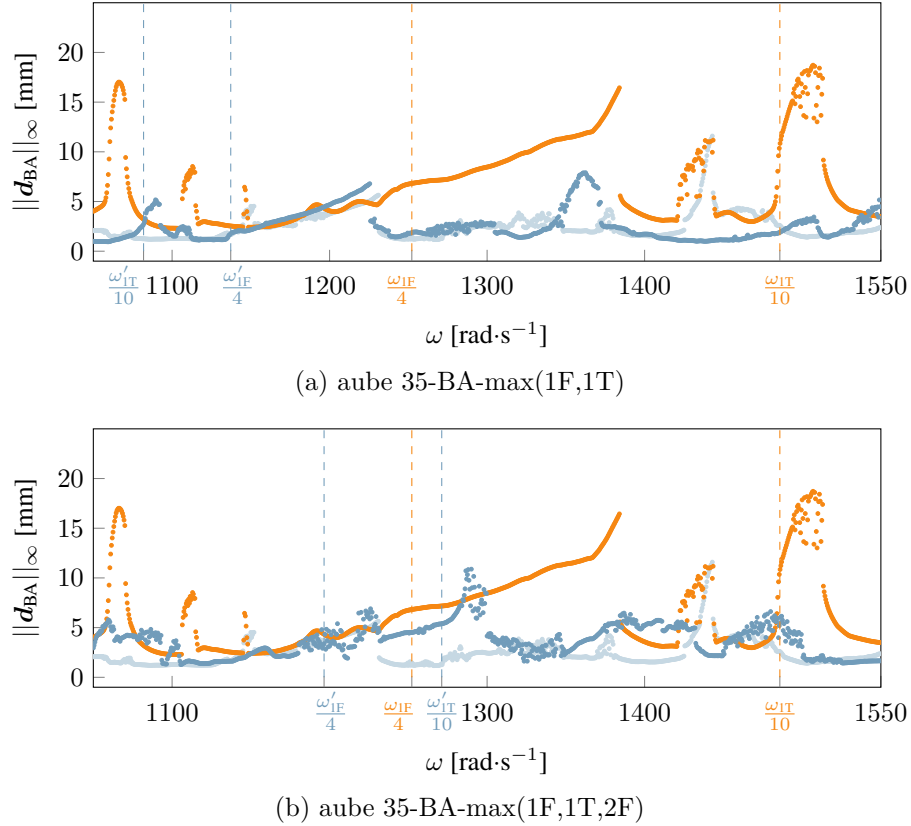


Figure 5.23 CRF des aubes rotor 35 optimisées supplémentaires (●), de l’aube 35-BA-1F (●) et de l’aube initiale (●).

que celles obtenues pour des aubes optimisées par rapport à un seul mode. Il se peut que les diminutions de consommation de jeu sur les modes contribuant à la dynamique ne soient alors pas suffisantes pour impliquer une réduction des amplitudes de vibration. Enfin, par rapport à une optimisation sur un seul mode, la prise en compte de plusieurs modes peut impliquer un coût numérique supplémentaire, lorsque la fonction objectif cible un mode différent à chaque évaluation. Par conséquent, au-delà d’un certain nombre de modes  $n_p$  pris en compte dans la fonction objectif, il est plus avantageux de réaliser  $n_p$  optimisations sur un seul mode. Ainsi, il ne semble pas pertinent de considérer plusieurs modes dans la fonction objectif, contrairement aux propositions faites dans la littérature [108, 149].

## 5.6 Analyse des tendances géométriques

Il est proposé dans cette section d’analyser les formes des aubes optimisées afin de mettre en évidence d’éventuelles tendances géométriques pour les reconceptions considérées. La terminologie employée pour décrire la forme d’une aube est présentée dans la section 5.6.1 et

les aubes initiales sont analysées dans la section 5.6.2. Les aubes optimisées sont ensuite analysées dans la section 5.6.3 et les tendances géométriques dégagées sont résumées dans la section 5.6.4.

### 5.6.1 Terminologie

Des termes spécifiques sont utilisés pour désigner la forme d'une aube, selon l'évolution de la flèche et de l'inclinaison sur la hauteur d'aube [75, 149]. Ces termes dépendent des directions utilisées pour définir la flèche et l'inclinaison de l'aube. Dans le cadre de la paramétrisation proposée, une flèche axiale  $\Delta z^i$  selon l'axe de la turbomachine  $e_{z,a}$  et un angle d'inclinaison tangentiel  $\Delta\theta^i$  selon  $e_{\theta,a}$  sont considérés pour chaque section  $i$ . Considérant l'évolution de ces paramètres selon le rayon  $r^i$ , quelques formes courantes sont présentées sur la figure 5.24. La direction d'écoulement du flux, de l'amont vers l'aval, est rappelée sur les graphiques ainsi que le sens de rotation de l'aube. Lorsque la flèche axiale est orientée vers l'aval ( $\Delta z^i > 0$ ), c'est-à-dire vers l'arrière de l'aube, sur toute la hauteur d'aube (figure 5.24a), elle est alors qualifiée de flèche arrière globale (*full backward sweep* en anglais). À l'inverse, une flèche axiale orientée vers l'amont ( $\Delta z^i < 0$ ) sur toute la hauteur d'aube est dénommée flèche avant globale (*full forward sweep* en anglais). Plus généralement, la flèche change de direction sur la hauteur d'aube (figure 5.24b). Le terme de flèche arrière réfère à une aube avec une flèche vers l'amont sur sa partie inférieure et vers l'aval sur sa partie supérieure. Une terminologie similaire est utilisée pour décrire l'évolution de l'inclinaison sur la hauteur d'aube. Lorsque l'inclinaison tangentielle est dans le sens de rotation de la turbomachine ( $\Delta\theta^i > 0$ ) sur toute la hauteur d'aube, le terme d'inclinaison avant globale est par exemple employé (figure 5.24c).

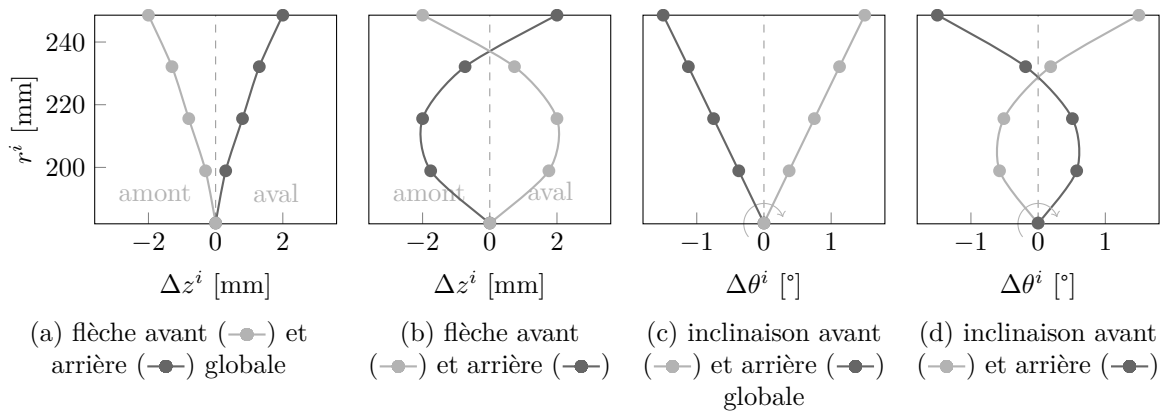
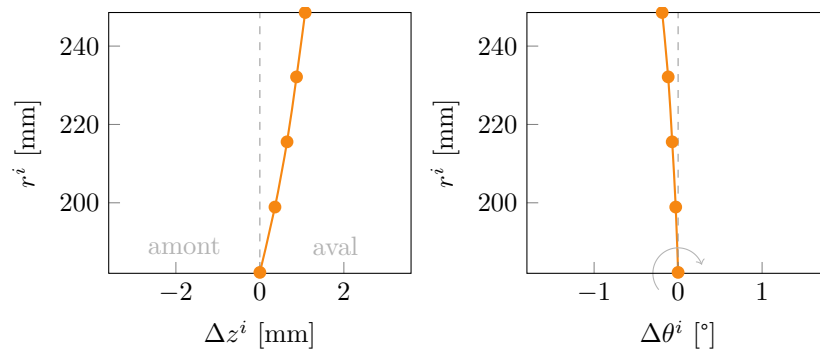


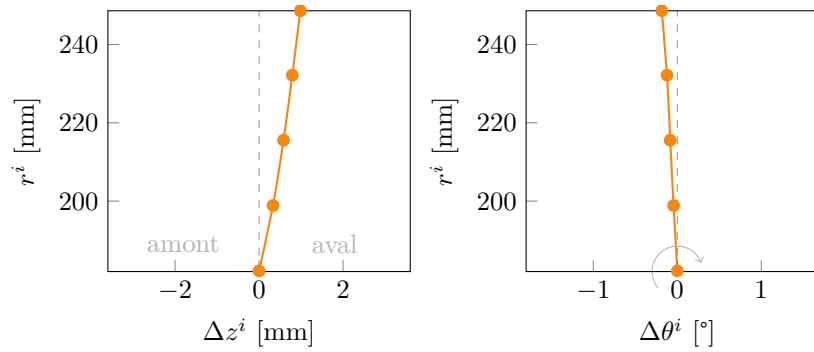
Figure 5.24 Terminologie associée aux formes d'aubes.

### 5.6.2 Aubes initiales

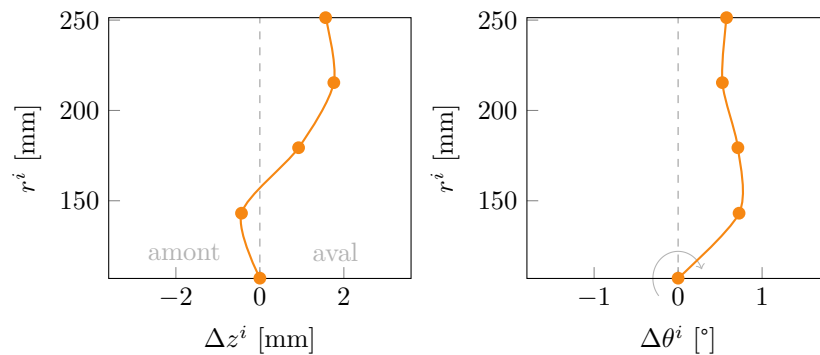
Pour les aubes initiales rotor 37, rotor 35 et rotor 67, les valeurs de flèche axiale et d'angle d'inclinaison des 5 sections sont représentées sur la figure 5.25 en fonction du rayon  $r^i$ . Les valeurs observées sont très proches pour les aubes rotor 37 et rotor 35, les géométries des deux aubes étant très similaires. Ces deux aubes présentent une flèche arrière globale et une légère inclinaison arrière globale. L'évolution de la flèche et de l'inclinaison sur la hauteur d'aube est très différente pour rotor 67 : la flèche axiale s'apparente à une flèche arrière et l'inclinaison est globalement vers l'avant. Une telle évolution ne peut pas être obtenue pour les aubes optimisées en raison de l'interpolation sur les sections, qui contraint la flèche et l'angle d'inclinaison des sections 2 et 4 (voir section 5.1.3.1).



(a) rotor 37



(b) rotor 35



(c) rotor 67

Figure 5.25 Flèche axiale  $\Delta z^i$  et angle d'inclinaison  $\Delta \theta^i$  pour les aubes initiales rotor 37, rotor 35 et rotor 67.

### 5.6.3 Aubes optimisées

#### Aube rotor 37

Pour l'ensemble des instances relatives à rotor 37 (tableaux 5.2 et 5.8), trois aubes optimisées distinctes ont été obtenues. Une instance supplémentaire nommée 37-BA-max(1F,1T) visant à optimiser la consommation de jeu maximale au BA sur les modes 1F et et 1T, permet

d'obtenir une quatrième aube dont la CRF est très similaire à celles présentées dans la section 5.2.3. La flèche et l'inclinaison des quatre aubes optimisées sont présentées sur la figure 5.26 avec des teintes de bleu distinctes. Les valeurs relatives à l'aube initiale (—●—) sont présentées en arrière-plan.

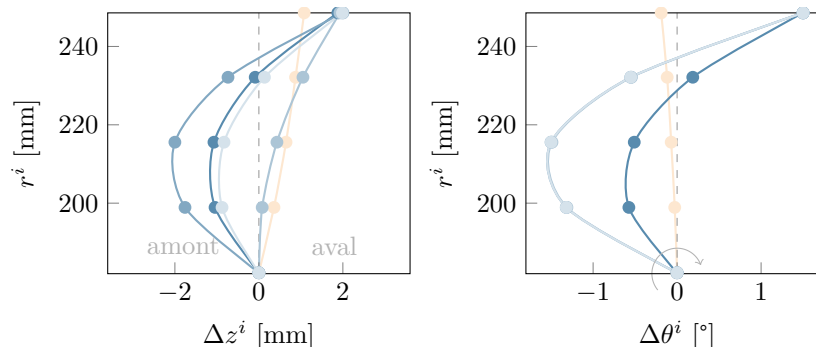


Figure 5.26 Flèche axiale  $\Delta z^i$  et angle d'inclinaison  $\Delta \theta^i$  pour les aubes optimisées 37-BA-1F (—●—), 37-BA-1T (—●—), 37-BF-1F (—●—), 37-BA-max(1F,1T) (—●—) et initiale (—●—) rotor 37.

Les aubes 37-BA-1F, 37-BA-1T et 37-BA-max(1F,1T) possèdent une forte flèche arrière qui n'est plus globale comme sur l'aube initiale. Ceci est cohérent avec de précédentes observations montrant que des aubes à forte flèche arrière présentent des consommations de jeu plus faibles [108]. Par ailleurs, les aubes rotor 37 optimisées présentent toutes des améliorations significatives de la robustesse au contact, ce qui va dans le sens de précédents travaux montrant la robustesse au contact d'aubes avec une forte flèche arrière [149]. Il est remarquable que la procédure d'optimisation proposée permette de retrouver des géométries d'intérêt étudiées dans la littérature.

Concernant l'angle d'inclinaison, toutes les aubes présentent une inclinaison avant (les valeurs obtenues pour certaines aubes sont identiques). Ceci est également cohérent avec les légères diminutions des déplacements radiaux observées pour des aubes inclinées vers l'avant par rapport à une géométrie initiale [149].

### Aube rotor 35

Les cinq instances relatives à l'aube rotor 35 (tableaux 5.4 et 5.10) ont permis d'obtenir cinq aubes distinctes, dont la flèche axiale et l'angle d'inclinaison sont présentés sur la figure 5.27. Comme pour rotor 37, plusieurs des aubes optimisées possèdent une forte flèche arrière. Toutefois, l'aube 35-BA-2F (—●—) présente une tendance opposée avec une flèche avant. Il est intéressant de remarquer que les consommations de jeu de cette aube (figure 5.12) sont moins bonnes que celles des autres aubes rotor 35 optimisées. Les amplitudes de réponse de l'aube

35-BA-2F (figure 5.13) sont également légèrement plus élevées que celles des autres aubes. Concernant l'angle d'inclinaison, toutes les aubes présentent une forte inclinaison avant.

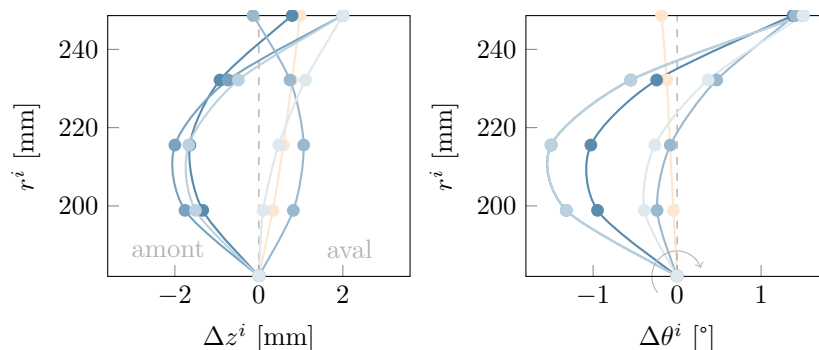


Figure 5.27 Flèche axiale  $\Delta z^i$  et angle d'inclinaison  $\Delta \theta^i$  pour les aubes optimisées 35-BA-1F (—●—), 35-BA-1T (—●—), 35-BA-2F (—●—), 35-BA-max(1F,1T) (—●—), 35-BA-max(1F,1T,2F) (—●—) et initiale (—●—) rotor 35.

### Aube rotor 67

Par résolution des instances relatives à l'aube rotor 67 (tableau 5.6), trois aubes optimisées distinctes ont été obtenues. La flèche axiale et l'angle d'inclinaison de ces trois aubes sont présentés sur la figure 5.28. Une forte inclinaison avant est visible pour toutes les aubes optimisées. L'aube 67-BA-1T (—●—) présente une flèche arrière marquée. Pour cette aube, une forte détérioration de consommation de jeu au BA sur le mode 1F a été observée (tableau 5.7), ainsi qu'une forte augmentation des amplitudes liées à l'interaction 1F/rm<sub>4</sub> par rapport à l'aube initiale (figure 5.18c). Ainsi, contrairement aux observations faites dans la littérature sur des aubes de compresseur [39, 108, 149] et aux résultats pour les aubes optimisées rotor 37 et rotor 35, une forte flèche arrière ne semble pas améliorer la robustesse au contact par rapport à l'aube initiale rotor 67. Les deux autres aubes (—●—) (—●—) présentent respectivement une flèche avant globale et une flèche arrière globale. Bien que les formes obtenues aient permis d'améliorer les valeurs des consommations de jeu, aucune des formes n'a permis de diminuer les amplitudes de réponses relatives à l'interaction 1F/rm<sub>2</sub>.

#### 5.6.4 Conclusion partielle

La plupart des aubes optimisées obtenues par minimisation de la consommation de jeu possèdent une inclinaison avant globale et une flèche arrière. Ces formes sont cohérentes avec les observations faites dans la littérature sur l'aube rotor 37 [149]. Ces formes correspondent de plus à des aubes plus robustes aux interactions de contact, dans le cas des aubes rotor 37 et

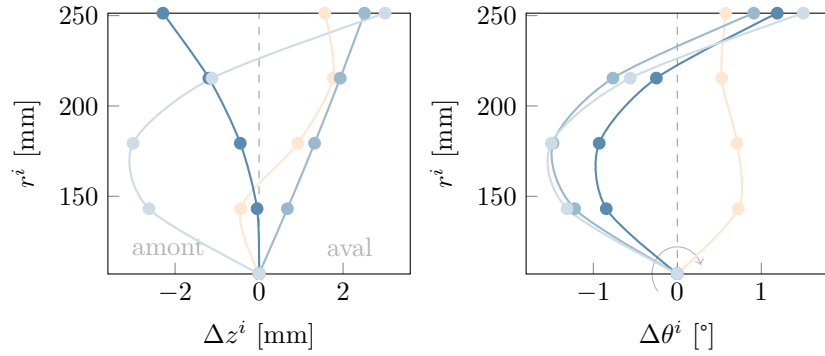


Figure 5.28 Flèche axiale  $\Delta z^i$  et angle d'inclinaison  $\Delta \theta^i$  pour les aubes optimisées 67-BA-1F (—●—), 67-BA-2F (—●—), 67-BA-1T (—●—) et initiale (—●—) rotor 67.

rotor 35, ce qui également cohérent avec la littérature [149]. Pour l'aube rotor 67 toutefois, aucune des formes obtenues n'a permis d'améliorer la robustesse aux interactions de contact.

Les tendances géométriques identifiées doivent être considérées avec précaution en raison du faible nombre de reconceptions réalisées. Par ailleurs, l'interpolation quadratique de la flèche axiale et de l'angle d'inclinaison sur la hauteur d'aube restreint fortement les formes possibles et conduit naturellement à des évolutions paraboliques sur la hauteur d'aube. Enfin, les valeurs des variables de plusieurs aubes optimisées correspondent aux bornes du problème d'optimisation. Il pourrait être intéressant d'élargir le domaine des variables en relaxant la contrainte d'interpolation et en élargissant les bornes.

## 5.7 Conclusion

**Bilan.** Le processus de reconception proposé est utilisé pour améliorer la robustesse au contact de trois aubes industrielles, en minimisant la consommation de jeu en un nœud et un mode. D'excellents résultats sont obtenus pour les aubes rotor 37 et rotor 35 : pour une interaction de contact ciblée, l'amplitude de réponse des aubes est significativement réduite. Des diminutions globales de consommation de jeu, sur l'ensemble des nœuds et modes d'intérêt, sont observées sur les aubes optimisées. En revanche, la reconception de l'aube rotor 67 n'a pas permis de réduire les amplitudes de réponse par rapport à l'aube initiale. D'une part, les consommations de jeu de l'aube initiale sont déjà très faibles sur le mode 1F d'intérêt. D'autre part, seules des diminutions de consommation de jeu localisées sont observées pour les aubes optimisées. Or, en raison de la flexibilité de l'aube, plusieurs modes participent à la dynamique de l'aube sur la plage de vitesses d'intérêt. Les résultats obtenus permettent une prise de recul sur la pertinence de la consommation de jeu comme

substitut de la robustesse au contact d'une aube, dépendamment de la géométrie de l'aube et de la richesse de la dynamique sur la plage de vitesses d'intérêt. Des reconceptions avancées effectuées sur les aubes rotor 37 et rotor 35 montrent l'intérêt de prendre en compte la consommation de jeu en plusieurs nœuds, tandis que la prise en compte de plusieurs modes semble moins pertinente. L'ensemble des reconceptions effectuées a par ailleurs permis de dégager certaines tendances géométriques : les aubes de compresseur avec une flèche arrière semblent en particulier présenter une meilleure robustesse au contact.

**Perspectives.** Le processus de reconception proposé, très flexible, présente un fort potentiel d'applicabilité. Une utilisation immédiate consisterait à vérifier les tendances géométriques obtenues sur un plus grand nombre de cas, notamment en élargissant le domaine des variables. Compte tenu de la pertinence de la consommation de jeu comme substitut, il serait intéressant d'observer l'influence des paramètres de l'aube sur cette quantité en réalisant une étude paramétrique. Une telle étude peut être réalisée avec le processus proposé, en modifiant les paramètres de l'optimiseur pour effectuer brutalement un grand nombre d'évaluations.

De plus, le processus est pleinement compatible avec la prise en compte de contraintes issues de considérations industrielles, visant par exemple à limiter la variation des fréquences propres. Dans ce cas, l'ajout d'un outil de suivi de modes propres, un incrément mineur, permettrait de s'assurer de l'ordonnement des modes pour les aubes générées lors de l'optimisation. Enfin, la polyvalence du processus permet d'envisager l'exploration d'autres critères substitut relatifs à la robustesse au contact.



## CHAPITRE 6 CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

### 6.1 Synthèse des travaux

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse ont conduit à trois publications, mentionnées dans la section 1.6. Quatre contributions principales relatives à l'optimisation de systèmes non réguliers sont issues de ce projet doctoral, en mathématiques appliquées (contribution ①) et en génie mécanique (contributions ②, ③ et ④).

#### Contribution en mathématiques appliquées

La contribution en mathématiques appliquées est :

① **un algorithme d'optimisation de boîtes noires** permettant de trouver des solutions éloignées des zones de discontinuités faibles de la fonction objectif et des contraintes, dont la position dans le domaine des variables n'est pas connue *a priori*.

Les zones de discontinuités faibles peuvent notamment trahir la présence de résonances non linéaires à éviter à tout prix lors de la conception. L'algorithme proposé, nommé **DiscoMads**, est basé sur l'algorithme de recherche directe **Mads** [17]. À mesure que l'algorithme se déploie, une série d'approximations intérieures des zones de discontinuités est construite grâce à deux mécanismes clés : un mécanisme de révélation de discontinuité et un mécanisme d'exclusion des zones révélées.

Les résultats de convergence de **Mads** sont préservés et des conditions d'optimalité supplémentaires plus fortes sont obtenues en tirant profit des mécanismes algorithmiques de **DiscoMads**. Le comportement de l'algorithme est validé sur des problèmes analytiques et ses performances sont illustrées sur trois applications liées à la conception de systèmes non linéaires. Pour tous les problèmes numériques, **DiscoMads** permet d'obtenir une solution éloignée des zones de discontinuités. La flexibilité offerte par les paramètres de l'algorithme permet notamment de trouver des solutions loin des zones de contraintes cachées dans le cas du problème **STYRENE** [15], un cas test en optimisation de boîtes noires.

#### Contributions en génie mécanique

Un problème optimisation simplifié de vibrations d'aubes de moteurs d'avion faisant intervenir deux paramètres de fonctionnement sans modifier la géométrie des aubes en cours

d'optimisation est considéré. L'algorithme **DiscoMads** est appliqué avec succès sur ce problème : les aubes optimisées présentent des gains significatifs en matière de robustesse aux interactions de contact aube/carter. Ceci démontre, d'une part, l'applicabilité de **DiscoMads** sur des problèmes industriels, et souligne, d'autre part, le potentiel d'amélioration des aubes en matière de robustesse au contact.

Un processus de reconception visant à améliorer la robustesse d'aubes de moteurs d'avion aux interactions de contact aube/carter est proposé. Ce processus repose sur trois piliers : une procédure de rétro-ingénierie permettant de modéliser des aubes industrielles, une procédure d'optimisation et des simulations numériques. Lors de l'optimisation, un substitut peu coûteux, la consommation de jeu, est utilisé pour estimer la robustesse des aubes au contact.

Les contributions en génie mécanique liées au processus proposé sont :

② **un outil de modélisation** reposant sur une paramétrisation dédiée aux aubes de compresseurs qui permet la rétro-ingénierie d'aubes industrielles et la génération des modèles CAO et de maillages éléments finis.

Une validation complète de l'outil est effectuée sur les aubes NASA rotor 37 [151] et rotor 67 [181] et souligne la haute fidélité des modèles paramétrés obtenus, aussi bien sur le plan de la géométrie que sur celui du comportement dynamique. L'outil est pleinement compatible avec le processus de reconception proposé d'un point de vue des performances et de l'efficacité numérique et son applicabilité est démontrée sur les reconceptions d'aubes effectuées ;

③ **une preuve de concept pour la reconception d'aubes industrielles** afin d'améliorer leur réponse dynamique à des interactions structurelles non linéaires.

La reconception des aubes rotor 37, rotor 35 et rotor 67 est effectuée en utilisant la consommation de jeu des aubes en un nœud et un mode comme substitut de la robustesse au contact. D'excellents résultats sont obtenus pour les aubes rotor 35 [151] et rotor 37 : la réponse au contact des aubes optimisées est significativement réduite par rapport aux aubes initiales. En revanche pour l'aube rotor 67, la reconception ne permet pas d'améliorer la robustesse au contact de l'aube. Ceci est probablement dû au fait que la consommation de jeu de l'aube initiale est déjà très faible, et à l'intrication de plusieurs modes dans la dynamique de l'aube sur la plage de vitesses d'intérêt ;

④ **des critères de conception** relatifs aux interactions structurelles non linéaires.

Ces critères sont fournis par :

- a. un nouvel éclairage sur la pertinence de la consommation de jeu comme quantité substitut, en fonction du type d'aube et de la richesse du comportement dynamique. La pertinence de la consommation de jeu en un nœud et pour un mode est soulignée dans le cas d'aubes de compresseurs. De plus, des reconceptions avancées visant à optimiser la consommation de jeu en plusieurs nœuds et sur plusieurs modes mettent en évidence l'intérêt de considérer la consommation de jeu maximale sur plusieurs nœuds lors de l'optimisation.
- b. des tendances géométriques mises en évidence à partir des reconceptions effectuées : les aubes de compresseur avec une forte flèche arrière et une inclinaison avant semblent présenter une meilleure robustesse aux interactions de contact.

## Outils et modèles libres

Pour tous les développements réalisés dans cette thèse, une attention particulière a été portée à l'utilisation d'outils numériques libres. L'algorithme **DiscoMads** a été développé dans le logiciel libre **NOMAD v.3** [112]. Le processus de reconception est implémenté en langage Python 3. L'outil de modélisation fait appel à la plateforme libre de pré- et post-traitement **Salome**<sup>1</sup> et les calculs de consommation de jeu sont effectués avec le code ouvert **Code Aster**<sup>2</sup>.

Des modèles ouverts ont également été privilégiés. La boîte noire **STYRENE** utilisée pour les tests numériques avec **DiscoMads** est librement accessible<sup>3</sup> et une nouvelle boîte noire relative à un problème de flambement à deux dimensions a été rendue disponible<sup>4</sup>. De plus, les modèles d'aubes en entrée du processus de reconception sont des modèles ouverts de la NASA, librement accessibles en ligne<sup>5</sup>.

## 6.2 Perspectives

### Algorithme d'optimisation

La flexibilité des paramètres algorithmiques permet d'envisager l'utilisation de **DiscoMads** dans différents contextes, pour trouver des solutions loin des zones de discontinuités, de fort accroissement ou de contraintes cachées. D'un point de vue mathématique, l'algorithme est une preuve de concept pour le traitement de certaines contraintes infinies en optimisation de

---

1. <https://www.salome-platform.org/>

2. <https://www.code-aster.org/>

3. <https://github.com/bbopt/styrene>

4. [https://gitlab.lava.polymtl.ca/depots\\_publics/codes/blackbox\\_buckling](https://gitlab.lava.polymtl.ca/depots_publics/codes/blackbox_buckling)

5. <https://lava-wiki.meca.polymtl.ca/public/modeles/accueil>

boîtes noires. Il pourrait être généralisé à d'autres zones à éviter ou à d'autres méthodes de recherche directe.

D'un point de vue d'ingénierie, **DiscoMads** renforce les possibilités d'utiliser des méthodes de boîtes noires pour la conception de systèmes subissant de fortes variations des quantités d'intérêt ou des discontinuités. Pour certains systèmes non réguliers, les discontinuités révèlent en effet des zones critiques d'un point de vue de la conception, telles que des zones de résonance ou des bifurcations, par exemple dans le domaine de l'analyse de crash. **DiscoMads** permet alors non seulement de s'éloigner de ces zones critiques, mais aussi de retourner des informations sur la position des discontinuités dans le domaine des variables. Il serait intéressant d'exploiter ces informations, par exemple en fournissant une approximation analytique de la position des discontinuités, afin d'offrir une meilleure compréhension de la dynamique sous-jacente du système.

Enfin, concernant spécifiquement les interactions de contact aube/carter, l'utilisation de **DiscoMads** au sein du processus de reconception envisagé, pourrait permettre de trouver des configurations pertinentes prenant en compte les discontinuités des quantités d'intérêt.

### **Processus de reconception d'aubes robustes aux interactions de contact**

Le processus de reconception d'aubes proposé représente une preuve de concept pour la reconception d'aubes robustes aux interactions de contact. Sa modularité permet d'envisager plusieurs axes de développement. Concernant l'outil de modélisation, la modification de la paramétrisation pour prendre en compte des contraintes supplémentaires sur la régularité du profil est envisagée. Quant à la procédure d'optimisation, l'objectif à moyen terme est de pouvoir utiliser **DiscoMads** ou **Mads** indifféremment, afin d'effectuer des reconceptions impliquant des quantités d'intérêt discontinues. L'intégration de **DiscoMads** dans l'optimiseur est immédiate en termes d'implémentation, mais suscite des questions de modélisation. Des tests préliminaires seraient notamment requis pour déterminer les paramètres de détection et d'éloignement aux discontinuités, ainsi que la normalisation des variables pour assurer la pertinence de la détection.

Dans cette thèse, deux stratégies ont été mentionnées pour déterminer des critères de conception pour garantir la robustesse au contact des aubes : A) la recherche de quantités d'intérêt pertinentes et B) la définition de substituts. Alors que la seconde stratégie a été explorée par la résolution d'un problème substitut, un axe de développement majeur serait de prendre en compte la stratégie A), c'est-à-dire de faire appel à une boîte noire incluant des stratégies numériques prédictives. Cette stratégie requiert en particulier l'intégration d'une réduction de modèle dans la boîte noire et d'une procédure de suivi des formes modales. Parmi les

quantités d'intérêt disponible en sortie de simulation, la contrainte maximale dans l'aube à un instant donné pourrait par exemple être considérée. À terme, l'utilisation conjointe de la boîte noire reposant sur des stratégies prédictives et du substitut est visée. L'algorithme **Mads** permet de tirer pleinement profit de la disponibilité d'un substitut peu coûteux pour guider l'optimisation.

Enfin, la flexibilité du processus proposé permet également d'envisager l'utilisation d'autres stratégies numériques prédictives que la stratégie d'intégration temporelle utilisée dans cette thèse. Des stratégies basées sur un paradigme fréquentiel, tel que la méthode de l'équilibrage harmonique, pourraient par exemple être utilisées comme substituts afin de fournir rapidement un aperçu qualitatif de la réponse au contact des aubes.

## RÉFÉRENCES

- [1] M. A. ABRAMSON, C. AUDET, J. W. CHRISSIS et J. G. WALSTON, « Mesh adaptive direct search algorithms for mixed variable optimization », *Optimization Letters*, vol. 3, n° 1, p. 35, juin 2008, ISSN : 1862-4480, DOI : 10.1007/s11590-008-0089-2.
- [2] M. A. ABRAMSON, C. AUDET, J. J. E. DENNIS et S. L. DIGABEL, « OrthoMADS : a deterministic MADS instance with orthogonal directions », *SIAM Journal on Optimization*, vol. 20, n° 2, p. 948-966, juil. 2009, DOI : 10.1137/080716980.
- [3] L. ADJENGUE, C. AUDET et I. BEN YAHIA, « A variance-based method to rank input variables of the Mesh Adaptive Direct Search algorithm », *Optimization Letters*, vol. 8, n° 5, p. 1599-1610, juin 2014, ISSN : 1862-4480, DOI : 10.1007/s11590-013-0688-4.
- [4] Q. AGRAPART *et al.*, « Modélisation thermomécanique du contact aube-abradable dans les turboréacteurs. », communication présentée à *23ème Congrès Français de Mécanique*, Lille, France, 2017, adresse : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03465446>.
- [5] Q. AGRAPART *et al.*, « Multi-physics numerical simulation of an experimentally predicted rubbing event in aircraft engines », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 460, p. 114869, nov. 2019, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1016/j.jsv.2019.114869.
- [6] R. AGROMAYOR *et al.*, « A unified geometry parametrization method for turbomachinery blades », *Computer-Aided Design*, vol. 133, p. 102987, avr. 2021, ISSN : 0010-4485, DOI : 10.1016/j.cad.2020.102987.
- [7] R. AHLFELD, F. MONTOMOLI, M. CARNEVALE et S. SALVADORI, « Autonomous uncertainty quantification for discontinuous models using multivariate Padé approximations », *Journal of Turbomachinery*, vol. 140, n° 4, avr. 2018, ISSN : 0889-504X, DOI : 10.1115/1.4038826.
- [8] S. ALARIE *et al.*, « Two decades of blackbox optimization applications », *EURO Journal on Computational Optimization*, vol. 9, p. 100011, 2021, DOI : 10.1016/j.ejco.2021.100011.
- [9] R. ALEXEEV, V. TISHCHENKO, V. GRIBIN et I. GAVRILOV, « Turbine blade profile design method based on bezier curves », 1, vol. 891, Moscou, Russie, 2017, Comsol, GazEcos, Interenergo, Interenergo, DOI : 10.1088/1742-6596/891/1/012254.

- [10] P. ALMEIDA *et al.*, « Numerical analysis of bladed disk-casing contact with friction and wear », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 138, n° 12, juil. 2016, ISSN : 0742-4795, DOI : 10.1115/1.4033065.
- [11] ALUMNI CENTRALE LYON. (2018). Aéronautique : inauguration de l'EQUIPEX PHARE à centrale lyon, adresse : <https://www.centraliens-lyon.net/technica/article/aeronautique-inauguration-de-l-equipex-phare-a-centrale-lyon/99>.
- [12] J. M. ANDERSON, « Modelling step discontinuous functions using bayesian emulation », mémoire de maîtrise, School of Engineering, Computer et Mathematical Sciences, Auckland University of Technology, Auckland, Nouvelle-Zélande, 2017, adresse : <http://hdl.handle.net/10292/10543>.
- [13] R. ARCHIBALD, A. GELB, R. SAXENA et D. XIU, « Discontinuity detection in multivariate space for stochastic simulations », *Journal of Computational Physics*, vol. 228, n° 7, p. 2676-2689, avr. 2009, ISSN : 0021-9991, DOI : 10.1016/j.jcp.2009.01.001.
- [14] J. ARMAND *et al.*, « A modelling approach for the nonlinear dynamics of assembled structures undergoing fretting wear », *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 475, n° 2223, p. 20180731, mar. 2019, DOI : 10.1098/rspa.2018.0731.
- [15] C. AUDET, V. BÉCHARD et S. LE DIGABEL, « Nonsmooth optimization through mesh adaptive direct search and variable neighborhood search », *Journal of Global Optimization*, vol. 41, n° 2, p. 299-318, 2008, DOI : 10.1007/s10898-007-9234-1.
- [16] C. AUDET et J. E. DENNIS Jr., « Analysis of generalized pattern searches », *SIAM Journal on Optimization*, vol. 13, n° 3, p. 889-903, 2003, DOI : 10.1137/S1052623400378742.
- [17] —, « Mesh adaptive direct search algorithms for constrained optimization », *SIAM Journal on Optimization*, vol. 17, n° 1, p. 188-217, 2006, DOI : 10.1137/040603371.
- [18] —, « A progressive barrier for derivative-free nonlinear programming », *SIAM Journal on Optimization*, vol. 20, n° 1, p. 445-472, 2009, DOI : 10.1137/070692662.
- [19] C. AUDET, J. E. DENNIS Jr. et S. LE DIGABEL, « Trade-off studies in blackbox optimization », *Optimization Methods and Software*, vol. 27, n° 4-5, p. 613-624, 2012, DOI : 10.1080/10556788.2011.571687.
- [20] C. AUDET et W. HARE, *Derivative-Free and Blackbox Optimization*, sér. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Cham, Suisse : Springer International Publishing, 2017, DOI : 10.1007/978-3-319-68913-5.

- [21] C. AUDET, A. IHADDADENE, S. LE DIGABEL et C. TRIBES, « Robust optimization of noisy blackbox problems using the mesh adaptive direct search algorithm », *Optimization Letters*, vol. 12, n° 4, p. 675-689, 2018, DOI : 10.1007/s11590-017-1226-6.
- [22] C. AUDET et S. LE DIGABEL, « The mesh adaptive direct search algorithm for periodic variables », *Pacific Journal of Optimization*, vol. 8, n° 1, p. 103-119, avr. 2012, adresse : [https://www.researchgate.net/publication/228982418\\_The\\_mesh\\_adaptive\\_direct\\_search\\_algorithm\\_for\\_periodic\\_variables](https://www.researchgate.net/publication/228982418_The_mesh_adaptive_direct_search_algorithm_for_periodic_variables).
- [23] C. AUDET, J. DENNIS, JR. et S. LE DIGABEL, « Globalization strategies for mesh adaptive direct search », *Computational Optimization and Applications*, vol. 46, n° 2, p. 193-215, juin 2010, ISSN : 1573-2894, DOI : 10.1007/s10589-009-9266-1.
- [24] C. AUDET, K. J. DZAHINI, M. KOKKOLARAS et S. LE DIGABEL, « Stochastic mesh adaptive direct search for blackbox optimization using probabilistic estimates », *Computational Optimization and Applications*, vol. 79, n° 1, p. 1-34, mai 2021, ISSN : 1573-2894, DOI : 10.1007/s10589-020-00249-0.
- [25] C. AUDET, J. J. E. DENNIS et S. L. DIGABEL, « Parallel space decomposition of the mesh adaptive direct search algorithm », *SIAM Journal on Optimization*, vol. 19, n° 3, p. 1150-1170, oct. 2008, DOI : 10.1137/070707518.
- [26] C. AUDET, S. LE DIGABEL et M. PEYREGA, « Linear equalities in blackbox optimization », *Computational Optimization and Applications*, vol. 61, n° 1, p. 1-23, mai 2015, ISSN : 1573-2894, DOI : 10.1007/s10589-014-9708-2.
- [27] C. AUDET, S. LE DIGABEL et C. TRIBES, « Dynamic scaling in the mesh adaptive direct search algorithm for blackbox optimization », *Optimization and Engineering*, vol. 17, n° 2, p. 333-358, juin 2016, ISSN : 1573-2924, DOI : 10.1007/s11081-015-9283-0.
- [28] C. AUDET, G. SAVARD et W. ZGHAL, « Multiobjective Optimization Through a Series of Single-Objective Formulations », *SIAM Journal on Optimization*, vol. 19, n° 1, p. 188-210, 2008, DOI : 10.1137/060677513.
- [29] —, « A mesh adaptive direct search algorithm for multiobjective optimization », *European Journal of Operational Research*, vol. 204, n° 3, p. 545-556, août 2010, ISSN : 0377-2217, DOI : 10.1016/j.ejor.2009.11.010.
- [30] M. AULICH et U. SILLER, « High-dimensional constrained multiobjective optimization of a fan stage », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2011 : Turbine Technical Conference and Exposition*, American Society of Mechanical Engineers, vol. 7 :



- Turbomachinery, Parts A, B, and C. Vancouver, BC, Canada, 2011, p. 1185-1196, DOI : 10.1115/GT2011-45618.
- [31] AUSTRALIAN TRANSPORT SAFETY BUREAU, « In-flight engine failure, sydney, 03 february 2007, boeing company 747-438, vh-ojm », Rapport Technique, 2008, adresse : [https://www.atsb.gov.au/publications/investigation\\_reports/2007/aair/aair200700356/](https://www.atsb.gov.au/publications/investigation_reports/2007/aair/aair200700356/).
- [32] N. N. BALAJI, W. CHEN et M. R. W. BRAKE, « Traction-based multi-scale nonlinear dynamic modeling of bolted joints : Formulation, application, and trends in micro-scale interface evolution », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 139, p. 106 615, mai 2020, ISSN : 0888-3270, DOI : 10.1016/j.ymsp.2020.106615.
- [33] A. BATAILLY, Q. AGRAPART, A. MILLECAMPS et J.-F. BRUNEL, « Experimental and numerical simulation of a rotor/stator interaction event localized on a single blade within an industrial high-pressure compressor », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 375, p. 308-331, 2016, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1016/j.jsv.2016.03.016.
- [34] A. BATAILLY, M. LEGRAND, P. CARTRAUD et C. PIERRE, « Assessment of reduced models for the detection of modal interaction through rotor stator contacts », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n° 26, p. 5546-5562, déc. 2010, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1016/j.jsv.2010.07.018.
- [35] A. BATAILLY, M. LEGRAND, A. MILLECAMPS et F. GARCIN, « Numerical-experimental comparison in the simulation of rotor/stator interaction through blade-tip/abradable coating contact », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 134, n° 8, p. 082 504, juin 2012, DOI : 10.1115/1.4006446.
- [36] ———, « High-pressure compressor blade dynamics under aerodynamic and blade-tip unilateral contact forcings », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2014 : Turbine Technical Conference and Exposition*, vol. 7B : Structures and Dynamics, Düsseldorf, Allemagne : American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, sept. 2014, DOI : 10.1115/GT2014-25675.
- [37] A. BATAILLY, M. LEGRAND et C. PIERRE, « Full three-dimensional rotor/stator interaction simulations in aircraft engines with time-dependent angular speed », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 139, n° 3, oct. 2016, ISSN : 0742-4795, DOI : 10.1115/1.4034503.
- [38] A. BATAILLY, M. MEINGAST et M. LEGRAND, « Unilateral contact induced blade/casing vibratory interactions in impellers : Analysis for rigid casings », *Journal of Sound and*

- Vibration*, vol. 337, p. 244-262, fév. 2015, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1016/j.jsv.2014.10.010.
- [39] A. BATAILLY et A. MILLECAMPS, « Minimising clearance consumption : a key factor for the design of blades robust to rotor/stator interactions? », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2016 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, vol. 7A : Structures and Dynamics, Séoul, Corée du Sud, juin 2016, DOI : 10.1115/GT2016-56721.
- [40] A. BATAILLY *et al.*, « Redesign of a high-pressure compressor blade accounting for nonlinear structural interactions », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 137, n° 2, 2015, DOI : 10.1115/1.4028263.
- [41] F. BAUER, M. SCHRAPP et J. SZIJARTO, « Accuracy analysis of a piece-to-piece reverse engineering workflow for a turbine foil based on multi-modal computed tomography and additive manufacturing », *Precision Engineering*, vol. 60, p. 63-75, 2019, ISSN : 01416359, DOI : 10.1016/j.precisioneng.2019.07.008.
- [42] B. BEIROW, T. GIERSCH, A. KÜHHORN et J. NIPKAU, « Optimization-aided forced response analysis of a mistuned compressor blisk », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 137, n° 1, août 2014, ISSN : 0742-4795, DOI : 10.1115/1.4028095.
- [43] E. BENINI et R. BIOLLO, « Aerodynamics of swept and leaned transonic compressor-rotors », *Applied Energy*, vol. 84, n° 10, p. 1012-1027, oct. 2007, ISSN : 0306-2619, DOI : 10.1016/j.apenergy.2007.03.003.
- [44] Y. BERTHIER *et al.*, « The role and effects of the third body in the wheel-rail interaction », *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 27, n° 5, p. 423-436, 2004, ISSN : 1460-2695, DOI : 10.1111/j.1460-2695.2004.00764.x.
- [45] B. BERTHOUL *et al.*, « Phenomenological modeling of abradable wear in turbomachines », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 98, p. 770-785, 2018, DOI : 10.1016/j.ymsp.2017.05.020.
- [46] A. BHOSEKAR et M. IERAPETRITOU, « A discontinuous derivative-free optimization framework for multi-enterprise supply chain », *Optimization Letters*, juin 2019, ISSN : 1862-4480, DOI : 10.1007/s11590-019-01446-5.
- [47] J. BIGEON, S. LE DIGABEL et L. SALOMON, « DMulti-MADS : mesh adaptive direct multisearch for bound-constrained blackbox multiobjective optimization », *Computational Optimization and Applications*, vol. 79, n° 2, p. 301-338, juin 2021, DOI : 10.1007/s10589-021-00272-9.

- [48] E. G. BIRGIN, N. KREJIĆ et J. M. MARTÍNEZ, « On the minimization of possibly discontinuous functions by means of pointwise approximations », *Optimization Letters*, vol. 11, n° 8, p. 1623-1637, déc. 2017, ISSN : 1862-4480, DOI : 10.1007/s11590-016-1068-7.
- [49] R. BONDYRA, K. DOMINICZAK et J. MATUSZAK, « Reverse engineering methodology as a way of steam turbine blades designing for loviisa nuclear power », vol. 137, Varsovie, Pologne, 2019, DOI : 10.1051/e3sconf/201913701002.
- [50] M. O. BOREL, A. R. NICOLL, H. W. SCHLAÏPFER et R. K. SCHMID, « The wear mechanisms occurring in abradable seals of gas turbines », *Surface and Coatings Technology*, vol. 39-40, p. 117-126, déc. 1989, ISSN : 0257-8972, DOI : 10.1016/0257-8972(89)90046-7.
- [51] C. BOURSIER NIUTTA, E. J. WEHRLE, F. DUDDECK et G. BELINGARDI, « Surrogate modeling in design optimization of structures with discontinuous responses », *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 57, n° 5, p. 1857-1869, mai 2018, ISSN : 1615-1488, DOI : 10.1007/s00158-018-1958-7.
- [52] A. R. BRINK *et al.*, « Contact stress and linearized modal predictions of as-built preloaded assembly », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 142, n° 5, mai 2020, ISSN : 1048-9002, DOI : 10.1115/1.4046957.
- [53] E. CAPIEZ-LERNOUT *et al.*, « Blade manufacturing tolerances definition for a mistuned industrial bladed disk », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2004 : Power for Land, Sea, and Air*, vol. 6 : Turbo Expo 2004, Vienne, Autriche, 2004, p. 307-316, DOI : 10.1115/GT2004-53356.
- [54] N. J. CARPENTER, R. L. TAYLOR et M. G. KATONA, « Lagrange constraints for transient finite element surface contact », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, n° 1, p. 103-128, 1991, DOI : 10.1002/nme.1620320107.
- [55] L. CHEN *et al.*, « Parameter extraction of featured section in turbine blade inspection », communication présentée à *2010 IEEE International Conference on Automation and Logistics*, août 2010, p. 501-505, DOI : 10.1109/ICAL.2010.5585336.
- [56] M. A. A. CHIKH *et al.*, « Efficiency of bio- and socio-inspired optimization algorithms for axial turbomachinery design », *Applied Soft Computing*, vol. 64, p. 282-306, mar. 2018, ISSN : 1568-4946, DOI : 10.1016/j.asoc.2017.11.048.
- [57] B. CHOI, « Pattern optimization of intentional blade mistuning for the reduction of the forced response using genetic algorithm », *KSME International Journal*, vol. 17, n° 7, p. 966-977, juil. 2003, DOI : 10.1007/BF02982981.

- [58] F. H. CLARKE, *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New-York, NY, États-Unis : John Wiley & Sons, 1983, Réédité en 1990 par SIAM Publications, Philadelphie, États-Unis comme Vol. 5 dans la série Classics in Applied Mathematics.
- [59] Y. COLAÏTIS, « Stratégie numérique pour l'analyse qualitative des interactions aube/carter », thèse de doctorat, Dép. de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC, Canada, juil. 2021, adresse : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03318777>.
- [60] Y. COLAÏTIS et A. BATAILLY, « Development of a harmonic balance method-based numerical strategy for blade-tip/casing interactions : application to NASA rotor 37 », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 143, n° 11, oct. 2021, 111025, ISSN : 0742-4795, DOI : 10.1115/1.4051967.
- [61] A. R. CONN et S. LE DIGABEL, « Use of quadratic models with mesh-adaptive direct search for constrained black box optimization », *Optimization Methods and Software*, vol. 28, n° 1, p. 139-158, 2013, DOI : 10.1080/10556788.2011.623162.
- [62] A. R. CONN, K. SCHEINBERG et L. N. VICENTE, *Introduction to Derivative-Free Optimization*, sér. MOS-SIAM Series on Optimization. Philadelphie, PA, États-Unis : SIAM, 2009, ISBN : 978-0-898716-68-9, DOI : 10.1137/1.9780898718768.
- [63] R. R. CRAIG et M. C. C. BAMPTON, « Coupling of substructures for dynamic analyses », *AIAA Journal*, vol. 6, n° 7, p. 1313-1319, 1968, DOI : 10.2514/3.4741.
- [64] M. A. CRISFIELD, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, 2<sup>e</sup> éd. John Wiley & Sons, 2012, vol. 1, p. 4-5, ISBN : 9780470666449, DOI : 10.1002/9781118375938.
- [65] J. E. CROUSE, D. C. JANETZKE et R. E. SCHWIRIAN, « A computer program for composing compressor blading from simulated circular-arc elements on conical surfaces », NASA Lewis Research Center, Cleveland, OH, États-Unis, Rapport Technique NASA-TN-D-5437, sept. 1969, adresse : <https://ntrs.nasa.gov/citations/19690027504>.
- [66] K. CUI, W. WANG, R. JIANG et D. ZHAO, « Model reconstruction in adaptive machining for near-net-shape rolling compressor blades », *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, vol. 31, n° 2, p. 138-151, fév. 2018, ISSN : 0951-192X, DOI : 10.1080/0951192X.2017.1407454.
- [67] M. CUNY, S. PHILIPPON, P. CHEVRIER et F. GARCIN, « Experimental measurement of dynamic forces generated during short-duration contacts : application to blade-casing interactions in aircraft engines », *Experimental Mechanics*, vol. 54, n° 2, p. 101-114, fév. 2014, ISSN : 1741-2765, DOI : 10.1007/s11340-013-9780-z.

- [68] S. DE MARCHI *et al.*, « Shape-driven interpolation with discontinuous kernels : error analysis, edge extraction, and applications in magnetic particle Imaging », *SIAM Journal on Scientific Computing*, B472-B491, jan. 2020, ISSN : 1064-8275, DOI : 10.1137/19M1248777.
- [69] E. DELHEZ, F. NYSSSEN, J. -C. GOLINVAL et A. BATAILLY, « Reduced order modeling of blades with geometric nonlinearities and contact interactions », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 500, p. 116 037, mai 2021, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1016/j.jsv.2021.116037.
- [70] E. DELHEZ, F. NYSSSEN, J.-C. GOLINVAL et A. BATAILLY, « Assessment of geometric nonlinearities influence on NASA rotor 37 response to blade tip/casing rubbing events », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 143, n° 11, oct. 2021, ISSN : 0742-4795, DOI : 10.1115/1.4051968.
- [71] J. DENNIS, JR. et R. SCHNABEL, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1983, Réédité en 1996 par SIAM, Philadelphie, États-Unis, Vol. 16 dans la série Classics in Applied Mathematics., DOI : 10.1137/1.9781611971200.
- [72] T. DEROSE et B. BARSKY, « Geometric continuity, shape parameters, and geometric constructions for Catmull-Rom splines », *ACM Transactions on Graphics*, vol. 7, p. 1-41, jan. 1988, DOI : 10.1145/42188.42265.
- [73] T. DREHER, M. R. W. BRAKE, B. SEEGER et M. KRACK, « In situ, real-time measurements of contact pressure internal to jointed interfaces during dynamic excitation of an assembled structure », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 160, p. 107 859, nov. 2021, ISSN : 0888-3270, DOI : 10.1016/j.ymsp.2021.107859.
- [74] S. DUMONT, F. LEBON, M. L. RAFFA et R. RIZZONI, « Towards nonlinear imperfect interface models including micro-cracks and smooth roughness », *Annals of Solid and Structural Mechanics*, vol. 9, n° 1, p. 13-27, déc. 2017, ISSN : 1867-6944, DOI : 10.1007/s12356-017-0047-8.
- [75] E. ERLER, H. D. VO et H. YU, « Desensitization of axial compressor performance and stability to tip clearance size », *Journal of Turbomachinery*, vol. 138, n° 3, déc. 2015, ISSN : 0889-504X, DOI : 10.1115/1.4031865.
- [76] E. FERHATOGLU et S. ZUCCA, « On the non-uniqueness of friction forces and the systematic computation of dynamic response boundaries for turbine bladed disks with contacts », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 160, p. 107 917, nov. 2021, ISSN : 0888-3270, DOI : 10.1016/j.ymsp.2021.107917.

- [77] E. FERMI et N. METROPOLIS, « Numerical solution of a minimum problem », Los Alamos Scientific Laboratory, University of California, Los Alamos, CA, États-Unis, Rapport Technique LA-1492, 1952, adresse : <https://permalink.lanl.gov/object/tr?what=info:lanl-repo/lareport/LA-01492>.
- [78] R. FLETCHER et S. LEYFFER, « Nonlinear programming without a penalty function », *Applications of Management Science : in Productivity, Finance, and Operations*, vol. 91, p. 239-269, 2002, DOI : 10.1007/s101070100244.
- [79] M. GÉRADIN et D. RIXEN, *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, 1993, vol. 2, ISBN : 2-225-85173-5.
- [80] F. GLOVER, « Tabu search for nonlinear and parametric optimization (with links to generic algorithms) », *Discrete Applied Mathematics*, vol. 49, p. 231-255, 1994, DOI : 10.1016/0166-218X(94)90211-9.
- [81] A. GORODETSKY et Y. MARZOUK, « Efficient localization of discontinuities in complex computational simulations », *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 36, n° 6, A2584-A2610, 2014, DOI : 10.1137/140953137.
- [82] R. B. GRAMACY et S. LE DIGABEL, « The mesh adaptive direct search algorithm with treed gaussian process surrogates », *Pacific Journal of Optimization*, vol. 11, n° 3, p. 419-447, 2015, adresse : <http://www.yokohamapublishers.jp/online2/oppjo/vol11/p419.html>.
- [83] B. GUNSTON, *The Cambridge Aerospace Dictionary*. New York, États-Unis : Cambridge University Press, 2009, ISBN : 9780511632839, adresse : <http://ebookcentral.proquest.com/lib/polymtl-ebooks/detail.action?docID=461139>.
- [84] M. GUSKOV et F. THOUVEREZ, « Harmonic balance-based approach for quasi-periodic motions and stability analysis », *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 134, n° 3, avr. 2012, ISSN : 1048-9002, DOI : 10.1115/1.4005823.
- [85] Y. V. HALDER, B. SANDERSE et B. KOREN, « An adaptive minimum spanning tree multielement method for uncertainty quantification of smooth and discontinuous responses », *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 41, n° 6, A3624-A3648, avr. 2019, ISSN : 0889-504X, DOI : 10.1137/18M1219643.
- [86] W. HARE, J. NUTINI et S. TEFAMARIAM, « A survey of non-gradient optimization methods in structural engineering », *Advances in Engineering Software*, vol. 59, p. 19-28, mai 2013, DOI : 10.1016/j.advengsoft.2013.03.001.

- [87] J. HOLLAND, *Adaptation in Natural and Artificial Systems : Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. Université du Michigan, MI, États-Unis : Press Ann Arbor, 1975.
- [88] C. J. HULME, S. W. FIEBIGER et J. SZWEDOWICZ, « Axial compressor blade failure, design modification, and its validation », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2015 : Turbine Technical Conference and Exposition*, vol. 7A : Structures and Dynamics, Montréal, QC, Canada, juin 2015, DOI : 10.1115/GT2015-43312.
- [89] G. JACQUET-RICHARDET *et al.*, « Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 40, n° 2, p. 401-420, nov. 2013, ISSN : 0888-3270, DOI : 10.1016/j.ymsp.2013.05.010.
- [90] J. JAHN, *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*. Berlin, Allemagne : Springer, 2007, adresse : <http://www.springer.com/mathematics/book/978-3-540-49378-5>.
- [91] S. JAIN et P. TISO, « Model order reduction for temperature-dependent nonlinear mechanical systems : A multiple scales approach », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 465, p. 115 022, jan. 2020, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1016/j.jsv.2019.115022.
- [92] J. D. JAKEMAN, R. ARCHIBALD et D. XIU, « Characterization of discontinuities in high-dimensional stochastic problems on adaptive sparse grids », *Journal of Computational Physics*, vol. 230, n° 10, p. 3977-3997, mai 2011, ISSN : 0021-9991, DOI : 10.1016/j.jcp.2011.02.022.
- [93] N. JAMIA *et al.*, « An equivalent model of a nonlinear bolted flange joint », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 153, p. 107 507, mai 2021, ISSN : 0888-3270, DOI : 10.1016/j.ymsp.2020.107507.
- [94] M. M. JOLY, T. VERSTRAETE et G. PANIAGUA, « Multidisciplinary design optimization of a compact highly loaded fan », *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 49, n° 3, p. 471-483, mar. 2014, ISSN : 1615-1488, DOI : 10.1007/s00158-013-0987-5.
- [95] S. JONES et M. LEGRAND, « Forced vibrations of a turbine blade undergoing regularized unilateral contact conditions through the wavelet balance method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 101, n° 5, p. 351-374, 2015, ISSN : 1097-0207, DOI : 10.1002/nme.4807.

- [96] J.-H. JUNG et V. R. DURANTE, « An iterative adaptive multiquadric radial basis function method for the detection of local jump discontinuities », *Applied Numerical Mathematics*, vol. 59, n° 7, p. 1449-1466, juil. 2009, ISSN : 0168-9274, DOI : 10.1016/j.apnum.2008.09.002.
- [97] Y.-K. JUNG *et al.*, « Reverse engineering and database of off-the-shelf propellers for middle-size multirotors », *Unmanned Systems*, vol. 9, n° 4, p. 321-332, 2021, ISSN : 23013850, DOI : 10.1142/S2301385021500163.
- [98] Z. KANG, Y. LUO et A. LI, « On non-probabilistic reliability-based design optimization of structures with uncertain-but-bounded parameters », *Structural Safety*, vol. 33, n° 3, p. 196-205, mai 2011, ISSN : 0167-4730, DOI : 10.1016/j.strusafe.2011.03.002.
- [99] G. KERSCHEN, M. PEETERS, J.-C. GOLINVAL et A. F. VAKAKIS, « Nonlinear normal modes, part I : a useful framework for the structural dynamicist », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, n° 1, p. 170-194, jan. 2009, DOI : 10.1016/j.ymsp.2008.04.002.
- [100] T. KORAKIANITIS et P. PAPAGIANNIDIS, « Surface-curvature-distribution effects on turbine-cascade performance », *Journal of Turbomachinery*, vol. 115, n° 2, p. 334-341, avr. 1993, ISSN : 0889-504X, DOI : 10.1115/1.2929239.
- [101] M. KRACK, « Nonlinear modal analysis of nonconservative systems : extension of the periodic motion concept », *Computers & Structures*, vol. 154, p. 59-71, juil. 2015, ISSN : 0045-7949, DOI : 10.1016/j.compstruc.2015.03.008.
- [102] M. KRACK, L. PANNING-VON SCHEIDT et J. WALLASCHEK, « A high-order harmonic balance method for systems with distinct states », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, n° 21, p. 5476-5488, oct. 2013, DOI : 10.1016/j.jsv.2013.04.048.
- [103] M. KRACK, L. SALLES et F. THOUVEREZ, « Vibration prediction of bladed disks coupled by friction joints », *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 24, n° 3, p. 589-636, juil. 2017, ISSN : 1886-1784, DOI : 10.1007/s11831-016-9183-2.
- [104] M. KRACK *et al.*, « Multiharmonic analysis and design of shroud friction joints of bladed disks subject to microslip », communication présentée à *ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, IL, États-Unis, 2012, p. 1083-1092, DOI : 10.1115/DETC2012-70184.



- [105] D. KRATTIGER *et al.*, « Interface reduction for Hurty/Craig-Bampton substructured models : Review and improvements », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 114, p. 579-603, jan. 2019, ISSN : 0888-3270, DOI : 10.1016/j.ymsp.2018.05.031.
- [106] X. LAI *et al.*, « 3D model reconstruction and its feature parameters extraction of a turbine blade », *Xinan Jiaotong Daxue Xuebao/Journal of Southwest Jiaotong University*, vol. 48, n° 5, p. 915-920, 2013, ISSN : 02582724, DOI : 10.3969/j.issn.0258-2724.2013.05.021.
- [107] J. LAINÉ, « Optimisation d'aubes de turbomachines : minimisation de la réponse vibratoire à la suite de contacts avec le carter », mém. de maîtrise, Dép. de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC, Canada, 2017, adresse : <https://publications.polymtl.ca/2897/>.
- [108] J. LAINÉ, E. PIOLLET, F. NYSSSEN et A. BATAILLY, « Blackbox optimization for aircraft engine bladed components featuring contact interfaces », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2019, DOI : 10.1115/1.4042808.
- [109] N. LANGENBRUNNER *et al.*, « Dynamic response of a metal and a CMC turbine blade during a controlled rub event using a segmented shroud », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 137, n° 6, juin 2015, ISSN : 0742-4795, DOI : 10.1115/1.4028685.
- [110] D. LAXALDE et M. LEGRAND, « Nonlinear modal analysis of mechanical systems with frictionless contact interfaces », *Computational Mechanics*, vol. 47, n° 4, p. 469-478, avr. 2011, ISSN : 1432-0924, DOI : 10.1007/s00466-010-0556-3.
- [111] S. LE DIGABEL et S. M. WILD, « A taxonomy of constraints in simulation-based optimization », Les cahiers du GERAD, GERAD, Montréal, QC, Canada, Rapport Technique G-2015-57, 2015, adresse : <https://www.gerad.ca/en/papers/G-2015-57>.
- [112] S. LE DIGABEL, « Algorithm 909 : nomad : nonlinear optimization with the mads algorithm », *Association for Computing Machinery*, vol. 37, n° 4, fév. 2011, ISSN : 0098-3500, DOI : 10.1145/1916461.1916468.
- [113] M. LEGRAND, « Modèles de prédiction de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion », thèse de doctorat, École Centrale de Nantes ; Université de Nantes, Nantes, France, mar. 2005, adresse : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011631>.

- [114] M. LEGRAND, A. BATAILLY et C. PIERRE, « Numerical investigation of abradable coating removal in aircraft engines through plastic constitutive law », *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 7, n° 1, p. 011010, jan. 2012, DOI : 10.1115/1.4004951.
- [115] M. LEGRAND *et al.*, « Full three-dimensional investigation of structural contact interactions in turbomachines », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, n° 11, p. 2578-2601, mai 2012, DOI : 10.1016/j.jsv.2012.01.017.
- [116] Y. LI, D. YANG et Z. FENG, « Inverse problem in aerodynamic shape design of turbomachinery blades », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2006 : Power for Land, Sea, and Air*, vol. 6 : Turbomachinery, Parts A and B, Barcelone, Espagne, 2006, p. 1535-1543, DOI : 10.1115/GT2006-91135.
- [117] Y. LI, X. HUANG, C. GONG et K. WANG, « An engineering rules based parameterization approach for turbine blade reverse engineering », communication présentée à *Geometric Modeling and Processing, 2004. Proceedings*, avr. 2004, p. 311-318, DOI : 10.1109/GMAP.2004.1290052.
- [118] Y. LI et J. NI, « Constraints based nonrigid registration for 2D blade profile reconstruction in reverse engineering », *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, vol. 9, n° 3, août 2009, ISSN : 1530-9827, DOI : 10.1115/1.3184602.
- [119] Z. LI et X. ZHENG, « Review of design optimization methods for turbomachinery aerodynamics », *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 93, p. 1-23, août 2017, ISSN : 0376-0421, DOI : 10.1016/j.paerosci.2017.05.003.
- [120] O. LOTFI *et al.*, « Shape optimisation of axial fan blades using genetic algorithms and a 3D Navier-Stokes solver », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2006 : Power for Land, Sea, and Air*, ASME, vol. 6 : Turbomachinery, Parts A and B, Barcelone, Espagne, 2006, p. 1373-1383, DOI : 10.1115/GT2006-90659.
- [121] Y. LU, B. LAD et M. VAHDATI, « Transonic fan blade redesign approach to attenuate nonsynchronous vibration », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 143, n° 7, 2021, ISSN : 07424795, DOI : 10.1115/1.4050023.
- [122] O. M. LYTVYN, I. PERSHYNA, O. NECHUIVITER et O. O. LYTVYN, « Restoration of Discontinuous Functions by Interpolation Data Using Rectangular Elements », communication présentée à *2019 9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)*, juin 2019, p. 40-43, DOI : 10.1109/ACITT.2019.8779904.

- [123] H. MA *et al.*, « A review on dynamic characteristics of blade-casing rubbing », *Non-linear Dynamics*, vol. 84, n° 2, p. 437-472, avr. 2016, DOI : 10.1007/s11071-015-2535-x.
- [124] R. MANDARD *et al.*, « Interacting force estimation during blade/seal rubs », *Tribology International*, vol. 82, p. 504-513, 2015, ISSN : 0301-679X, DOI : /10.1016/j.triboint.2014.01.026.
- [125] E. MARTELLI et E. AMALDI, « Pgs-com : a hybrid method for constrained non-smooth black-box optimization problems : brief review, novel algorithm and comparative evaluation », *Computers & Chemical Engineering*, vol. 63, p. 108-139, 2014, DOI : 10.1016/j.compchemeng.2013.12.014.
- [126] M. MENICKELLY et S. M. WILD, « Derivative-free robust optimization by outer approximations », *Applications of Management Science : in Productivity, Finance, and Operations*, vol. 179, n° 1, p. 157-193, jan. 2020, ISSN : 1436-4646, DOI : 10.1007/s10107-018-1326-9.
- [127] A. MILLECAMPS *et al.*, « Influence of thermal effects during blade-casing contact experiments », communication présentée à *ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, vol. 1 : 22nd Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Parts A and B. San Diego, CA, États-Unis, août 2009, DOI : 10.1115/DETC2009-86842.
- [128] S. MISSOUM, P. RAMU et R. T. HAFTKA, « A convex hull approach for the reliability-based design optimization of nonlinear transient dynamic problems », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, n° 29, p. 2895-2906, 2007, ISSN : 0045-7825, DOI : 10.1016/j.cma.2006.12.008.
- [129] K. MOHAGHEGH, M. H. SADEGHI et A. ABDULLAH, « Reverse engineering of turbine blades based on design intent », *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 32, n° 9, p. 1009-1020, avr. 2007, ISSN : 1433-3015, DOI : 10.1007/s00170-006-0406-9.
- [130] K. MOHAGHEGH, M. H. SADEGHI, A. ABDULLAH et R. BOUTORABI, « Improvement of reverse-engineered turbine blades using construction geometry », *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 49, n° 5, p. 675-687, juil. 2010, ISSN : 1433-3015, DOI : 10.1007/s00170-009-2409-9.

- [131] M. MOUSTAPHA et B. SUDRET, « Surrogate-assisted reliability-based design optimization : a survey and a unified modular framework », *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 60, n° 5, p. 2157-2176, nov. 2019, ISSN : 1615-1488, DOI : 10.1007/s00158-019-02290-y.
- [132] A. MUSZYNSKA, *Rotordynamics*. Boca Raton, FL, États-Unis : CRC press, 2005, chap. 5, DOI : 10.1201/9781420027792.
- [133] NATIONAL TRANSPORTATION SAFETY BOARD, « Aircraft Accident Report : National Airlines, incorporated, DC-10-10, N60NA, near Albuquerque, New Mexico, November 3, 1973 », National Technical Information Service, Washington, États-Unis, Rapport Technique, 1975, adresse : <https://ntrl.ntis.gov/NTRL/dashboard/searchResults/titleDetail/PB239889.xhtml>.
- [134] J. NELDER et R. MEAD, « A simplex method for function minimization », *The Computer Journal*, vol. 7, n° 4, p. 308-313, 1965, DOI : 10.1093/comjnl/7.4.308.
- [135] S. NITSCHKE *et al.*, « An advanced experimental method and test rig concept for investigating the dynamic blade-tip/casing interactions under engine-like mechanical conditions », *Wear*, vol. 422-423, p. 161-166, mar. 2019, ISSN : 0043-1648, DOI : 10.1016/j.wear.2018.12.072.
- [136] F. NYSSSEN et A. BATAILLY, « Investigation on the robustness of rotor/stator contact interactions with respect to small mistuning », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 143, n° 12, oct. 2021, ISSN : 0742-4795, DOI : 10.1115/1.4051957.
- [137] F. NYSSSEN, N. TABLEAU, D. LAVAZEC et A. BATAILLY, « Experimental and numerical characterization of a ceramic matrix composite shroud segment under impact loading », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 467, p. 115 040, fév. 2020, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1016/j.jsv.2019.115040.
- [138] L. PACYNA *et al.*, « Implementation of a rig test for rotor/stator interaction of low-pressure compressor blades and comparison of experimental results with numerical model », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2020 : Power for Land, Sea, and Air*, vol. 11 : Structures and Dynamics : Structural Mechanics, Vibration, and Damping ; Supercritical CO2, conférence virtuelle, sept. 2020, DOI : 10.1115/GT2020-14266.
- [139] C. PADOVA, J. BARTON, M. DUNN et S. MANWARING, « Experimental results from controlled blade tip-shroud rubs at engine speed », *Journal of Turbomachinery*, vol. 129, n° 4, p. 713-723, 2007, DOI : 10.1115/1.2720869.

- [140] C. PADOVA *et al.*, « Development of an experimental capability to produce controlled blade tip-shroud rubs at engine speed », *Journal of Turbomachinery*, vol. 127, n° 4, p. 726-735, mar. 2004, ISSN : 0889-504X, DOI : 10.1115/1.1934429.
- [141] C. PADOVA *et al.*, « Controlled fan blade tip-shroud rubs at engine conditions », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2011 : Turbine Technical Conference and Exposition*, vol. 6 : Structures and Dynamics, Parts A and B. Vancouver, BC, Canada, 2011, p. 951-961, DOI : 10.1115/GT2011-45223.
- [142] L. PELETAN, S. BAGUET, M. TORKHANI et G. JACQUET-RICHARDET, « Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor-stator dynamics », *Nonlinear Dynamics*, vol. 78, n° 4, p. 2501-2515, déc. 2014, ISSN : 1573-269X, DOI : 10.1007/s11071-014-1606-8.
- [143] L. PELETAN, S. BAGUET, G. JACQUET-RICHARDET et M. TORKHANI, « Use and Limitations of the Harmonic Balance Method for Rub-impact Phenomena in Rotor-stator Dynamics », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2012 : Turbine Technical Conference and Exposition*, American Society of Mechanical Engineers, vol. 7 : Structures and Dynamics, Parts A and B, Copenhagen, Danemark, 2012, p. 647-655, DOI : 10.1115/GT2012-69450.
- [144] G. PERSICO, P. RODRIGUEZ-FERNANDEZ et A. ROMEI, « High-fidelity shape optimization of non-conventional turbomachinery by surrogate evolutionary strategies », *Journal of Turbomachinery*, vol. 141, n° 8, 2019, ISSN : 0889504X, DOI : 10.1115/1.4043252.
- [145] E. P. PETROV, « Multiharmonic analysis of nonlinear whole engine dynamics with bladed disc-casing rubbing contacts », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2012 : Turbine Technical Conference and Exposition*, vol. 7 : Structures and Dynamics, Parts A and B. Copenhagen, Danemark : American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, juil. 2012, p. 1181-1191, DOI : 10.1115/GT2012-68474.
- [146] P. PETTERSSON, A. DOOSTAN et J. NORDSTRÖM, « Level set methods for stochastic discontinuity detection in nonlinear problems », *Journal of Computational Physics*, vol. 392, p. 511-531, sept. 2019, ISSN : 0021-9991, DOI : 10.1016/j.jcp.2019.04.053.
- [147] S. PIERRET, R. FILOMENO COELHO et H. KATO, « Multidisciplinary and multiple operating points shape optimization of three-dimensional compressor blades », *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 33, n° 1, p. 61-70, jan. 2007, ISSN : 1615-1488, DOI : 10.1007/s00158-006-0033-y.

- [148] E. PIOLLET et A. BATAILLY. (2019). A program to compute compressor blade geometries from multiple-circular-arc parameters with sweep and lean(v1.0)[source code], adresse : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02127993>.
- [149] E. PIOLLET, « Blade/casing rubbing interactions in aircraft engines : numerical benchmark and design guidelines based on NASA rotor 37 », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 460, p. 114878, 2019, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1016/j.jsv.2019.114878.
- [150] U. RATHMANN, S. OLMES et A. SIMEON, « Sealing technology : rub test rig for abrasive/abradable systems », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2007 : Power for Land, Sea, and Air*, vol. 5 : Turbo Expo 2007, Montréal, QC, Canada : American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, mar. 2009, p. 223-228, DOI : 10.1115/GT2007-27724.
- [151] L. REID et R. D. MOORE, « Design and overall performance of four highly loaded, high speed inlet stages for an advanced high-pressure-ratio core compressor », NASA Lewis Research Center, Cleveland, OH, États-Unis, Rapport Technique NASA-TP-1337, 1978, adresse : <https://ntrs.nasa.gov/citations/19780025165>.
- [152] L. ROMANI, M. ROSSINI et D. SCHENONE, « Edge detection methods based on RBF interpolation », *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 349, p. 532-547, mar. 2019, ISSN : 0377-0427, DOI : 10.1016/j.cam.2018.08.006.
- [153] Y. RONG, J. XU et Y. SUN, « A surface reconstruction strategy based on deformable template for repairing damaged turbine blades », *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 228, n° 12, p. 2358-2370, oct. 2014, ISSN : 0954-4100, DOI : 10.1177/0954410013517091.
- [154] S. ROQUES *et al.*, « Modeling of a rotor speed transient response with radial rubbing », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, n° 5, p. 527-546, mar. 2010, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1016/j.jsv.2009.09.016.
- [155] R. M. ROSENBERG, « The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems », *Journal of applied Mechanics*, vol. 29, n° 1, p. 7-14, 1962, adresse : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01344457>.
- [156] N. SALVAT, A. BATAILLY et M. LEGRAND, « Two-dimensional modeling of unilateral contact-induced shaft precessional motions in bladed-disk/casing systems », *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 78, p. 90-104, jan. 2016, ISSN : 0020-7462, DOI : 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.10.001.

- [157] A. SAMAD *et al.*, « Shape optimization of turbomachinery blade using multiple surrogate models », communication présentée à *ASME 2006 2nd Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting Collocated With the 14th International Conference on Nuclear Engineering.*, vol. 1 : Symposia, Parts A and B, Miami, FL, États-Unis, juil. 2006, p. 827-836, DOI : 10.1115/FEDSM2006-98368.
- [158] K. SARGSYAN, C. SAFTA, B. DEBUSSCHERE et H. NAJM, « Uncertainty quantification given discontinuous model response and a limited number of model runs », *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 34, n° 1, B44-B64, jan. 2012, ISSN : 1064-8275, DOI : 10.1137/100817899.
- [159] P. SCHMIECHEN, « Travelling-wave speed coincidence », thèse de doctorat, Dep. of Mechanical Engineering, University of London, Londres, Royaume-Uni, 1997, adresse : <https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/dynamics/40375703.PDF>.
- [160] R. SEYDEL, *Practical Bifurcation and Stability Analysis*, 3<sup>e</sup> éd. New-York, NY, États-Unis : Springer, 2010, vol. 5, DOI : 10.1007/978-1-4419-1740-9.
- [161] E. SHAHABI et H. AHMADIAN, « Nonlinear lap joint interface modeling and updating strategies for assembled structures », *Journal of Theoretical and Applied Vibration and Acoustics*, vol. 5, n° 2, p. 131-152, juil. 2019, ISSN : 2423-4761, DOI : 10.22064/tava.2020.127915.1168.
- [162] S. W. SHAW et C. PIERRE, « Normal modes for non-linear vibratory systems », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 164, n° 1, p. 85-124, juin 1993, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1006/jsvi.1993.1198.
- [163] L. T. SHIEMBOB, « Continued development of abradable gas path seals », NASA Lewis Research Center, Cleveland, OH, États-Unis, Rapport Technique NASA-CR-134879, jan. 1975, adresse : <https://ntrs.nasa.gov/citations/19760004187>.
- [164] F. SIEVERDING, B. RIBI, M. CASEY et M. MEYER, « Design of industrial axial compressor blade sections for optimal range and performance », *Journal of Turbomachinery*, vol. 126, n° 2, p. 323-331, juin 2004, ISSN : 0889-504X, DOI : 10.1115/1.1737782.
- [165] J.-J. SINOÛ, S. BESSET et D. LENOIR, « Some unexpected thermal effects on squeal events observed on the experimental bench FIVE@ECL », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 160, p. 107 867, nov. 2021, ISSN : 0888-3270, DOI : 10.1016/j.ymssp.2021.107867.

- [166] J.-J. SINOUE et S. BESSET, « Simulation of transient nonlinear friction-induced vibrations using complex interface modes : application to the prediction of squeal events », *Shock and Vibration*, vol. 2017, p. 6107251, jan. 2017, ISSN : 1070-9622, DOI : 10.1155/2017/6107251.
- [167] S. SKIBA, L. FAURE, S. PHILIPPON et J. PAPASIDERO, « Experimental investigation of the mechanical behavior of an alsi-pe abrasable coating at high strain rates for a large range of temperatures », *Journal of Dynamic Behavior of Materials*, vol. 6, n° 2, p. 213-223, juin 2020, ISSN : 2199-7454, DOI : 10.1007/s40870-020-00242-y.
- [168] S. SLYADNEV et V. TURLAPOV, « To the development of open source software for the reconstruction of cad models », *Programming and Computer Software*, vol. 45, n° 4, p. 202-212, juil. 2019, ISSN : 0361-7688, DOI : 10.1134/S036176881904008X.
- [169] P. SONG et J. SUN, « Blade shape optimization for transonic axial flow fan », *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 29, n° 3, p. 931-938, mar. 2015, ISSN : 1976-3824, DOI : 10.1007/s12206-015-0207-x.
- [170] P. SONG, J. SUN et K. WANG, « Blade shape optimization of transonic axial flow fan in terms of sectional profiles and stacking line », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2014 : Turbine Technical Conference and Exposition*, American Society of Mechanical Engineers, vol. 2B : Turbomachinery, Düsseldorf, Allemagne, juin 2014, DOI : 10.1115/GT2014-25816.
- [171] A. STERNCHUSS, E. BALMES, P. SAS et M. de MUNCK, « On the reduction of quasi-cyclic disk models with variable rotation speeds, international conference on noise and vibration engineering ; 2006 isma », communication présentée à *International conference on noise and vibration engineering ; 2006 ISMA*, Louvain, Belgique, 2006, p. 3925-3940, ISBN : 9073802830, adresse : <https://www.tib.eu/de/suchen/id/BLCP%3ACN067023911>.
- [172] S. TAGHIZADEH et R. S. DWYER-JOYCE, « Linear and Nonlinear Normal Interface Stiffness in Dry Rough Surface Contact Measured Using Longitudinal Ultrasonic Waves », *Applied Sciences*, vol. 11, n° 12, p. 5720, jan. 2021, ISSN : 2076-3417, DOI : 10.3390/app11125720.
- [173] A. L. TAMPOS, J. E. C. LOPE et J. S. HESTHAVEN, « Accurate reconstruction of discontinuous functions using the singular pade-chebyshev method », *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, vol. 42, n° 4, p. 242-249, 2012, adresse : <http://infoscience.epfl.ch/record/190483>.



- [174] X. TANG, J. LUO et F. LIU, « Adjoint aerodynamic optimization of a transonic fan rotor blade with a localized two-level mesh deformation method », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2017 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, American Society of Mechanical Engineers, vol. 2B : Turbomachinery, Charlotte, NC, États-Unis, 2017, DOI : 10.1115/GT2017-63509.
- [175] T. THENINT, E. BALMÈS et M. CORUS, « Stabilization effect of shock non-linearity on the dynamics of a steam generator tube », communication présentée à *Proceedings of COMPDYN 2011*, Corfou, Grèce, mai 2011, paper 262, adresse : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00607080>.
- [176] A. THORIN, P. DELEZOIDE et M. LEGRAND, « Non-smooth modal analysis of piecewise-linear impact oscillators », *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, vol. 16, n° 3, p. 1710-1747, 2017, DOI : 10.1137/16M1081506.
- [177] A. THORIN *et al.*, « Nonsmooth thermoelastic simulations of blade-casing contact interactions », *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 141, n° 2, sept. 2018, ISSN : 0742-4795, DOI : 10.1115/1.4040857.
- [178] V. TORCZON, « On the convergence of pattern search algorithms », *SIAM Journal on Optimization*, vol. 7, n° 1, p. 1-25, 1997, DOI : 10.1137/S1052623493250780.
- [179] A. TORKAMAN *et al.*, « Gas turbine cycle upgrade and validation for heavy duty industrial machines », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2017 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, vol. 3 : Coal, Biomass and Alternative Fuels ; Cycle Innovations ; Electric Power ; Industrial and Cogeneration Applications ; Organic Rankine Cycle Power Systems, Charlotte, NC, États-Unis : American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, août 2017, DOI : 10.1115/GT2017-64173.
- [180] K. E. TURNER, M. DUNN et C. PADOVA, « Airfoil deflection characteristics during rub events », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2010 : Power for Land, Sea, and Air*, vol. 6 : Structures and Dynamics, Parts A and B, Glasgow, Royaume-Uni, juin 2010, p. 779-789, DOI : 10.1115/GT2010-22166.
- [181] D. C. URASEK, W. S. CUNNAN et W. STEVANS, « Performance of two-stage fan with larger dampers on first-stage rotor », NASA Lewis Research Center, Cleveland, OH, États-Unis, Rapport Technique NASA-TP-1399, mai 1979, adresse : <https://ntrs.nasa.gov/citations/19790015796>.
- [182] A. VAKAKIS, « Non-linear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory : an overview », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 11, n° 1, p. 3-22, jan. 1997, ISSN : 0888-3270, DOI : 10.1006/mssp.1996.9999.

- [183] L. N. VICENTE et A. L. CUSTÓDIO, « Analysis of direct searches for discontinuous functions », *Applications of Management Science : in Productivity, Finance, and Operations*, vol. 133, n° 1, p. 299-325, juin 2012, ISSN : 1436-4646, DOI : 10.1007/s10107-010-0429-8.
- [184] K. VLACHAS *et al.*, « A local basis approximation approach for nonlinear parametric model order reduction », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 502, p. 116 055, juin 2021, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1016/j.jsv.2021.116055.
- [185] G. VON GROLL et D. J. EWINS, « The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 241, n° 2, p. 223-233, mar. 2001, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1006/jsvi.2000.3298.
- [186] D. J. WAGG, K. WORDEN, R. J. BARTHORPE et P. GARDNER, « Digital Twins : State-of-the-Art and Future Directions for Modeling and Simulation in Engineering Dynamics Applications », *ASME J. Risk Uncertainty Part B*, vol. 6, n° 3, mai 2020, ISSN : 2332-9017, DOI : 10.1115/1.4046739.
- [187] D. WANG et L. HE, « Adjoint aerodynamic design optimization for blades in multistage turbomachines—part I : Methodology and verification », *Journal of Turbomachinery*, vol. 132, n° 2, p. 021 011, 2010, DOI : 10.1115/1.3072498.
- [188] D. WANG, L. HE, Y. LI et R. WELLS, « Adjoint aerodynamic design optimization for blades in multistage turbomachines—part II : Validation and application », *Journal of Turbomachinery*, vol. 132, n° 2, p. 021 012, 2010, DOI : 10.1115/1.3103928.
- [189] R. J. WILLIAMS, « Simulation of blade casing interaction phenomena in gas turbines resulting from heavy tip rubs using an implicit time marching method », communication présentée à *ASME Turbo Expo 2011 : Turbine Technical Conference and Exposition*, American Society of Mechanical Engineers, vol. 6 : Structures and Dynamics, Parts A and B, Vancouver, BC, Canada., 2011, p. 1007-1016, DOI : 10.1115/GT2011-45495.
- [190] P. WRIGGERS et T. A. LAURSEN, *Computational Contact Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006, DOI : 10.1007/978-3-540-32609-0.
- [191] B. XU, « Dynamic non-probabilistic reliability-based topology optimization of truss with uncertain-but-bounded parameters », *Journal of Vibration and Control*, vol. 21, n° 12, p. 2484-2496, sept. 2015, ISSN : 1077-5463, DOI : 10.1177/1077546313514761.

- [192] G. ZHANG, C. WEBSTER, M. GUNZBURGER et J. BURKARDT, « A hyperspherical adaptive sparse-grid method for high-dimensional discontinuity detection », *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 53, n° 3, p. 1508-1536, jan. 2015, ISSN : 0036-1429, DOI : 10.1137/140971531.
- [193] J. ZHANG *et al.*, « Design for interface stiffness of mechanical products using integrated simulation and optimization under uncertainty », *ASME J. Risk Uncertainty Part B.*, vol. 6, n° 2, mar. 2020, ISSN : 2332-9017, DOI : 10.1115/1.4045556.
- [194] Y. ZHANG et Z.-T. CHEN, « Constraints and CFD simulation-based parametric reconstruction for 2D blade profile in reverse engineering », *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 230, n° 12, p. 2137-2146, 2016, ISSN : 09544100, DOI : 10.1177/0954410015621087.
- [195] Y. ZHOU *et al.*, « Parametric modeling method for integrated design and manufacturing of radial compressor impeller », *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 112, n° 3-4, p. 1007-1021, 2021, ISSN : 02683768, DOI : 10.1007/s00170-020-06331-5.

**ANNEXE A    RÉSULTATS NUMÉRIQUES SUPPLÉMENTAIRES  
RELATIFS À DISCOMADS**

**A.1 Problèmes analytiques**

Dix problèmes analytiques sont formulés, de la forme :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujet à} \quad & d(\mathbf{x}) \leq 0, \end{aligned} \tag{A.1}$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  et le domaine réalisable est défini par rapport à une unique contrainte  $c$  :  $\Omega = \{\mathbf{x} \in X, c(\mathbf{x}) \leq 0\}$  avec  $X = [-10; 10] \times [-10; 10]$ . Pour chaque problème, la fonction objectif  $f$  est choisie dans le tableau A.1 et la contrainte  $c$  dans le tableau A.2 pour les problèmes contraints. Les fonctions objectif et les contraintes sont représentées graphiquement sur les figures A.1 et A.2. Pour tous les problèmes, la fonction objectif et la contrainte  $c$  sont révélatrices pour DiscoMads et les paramètres utilisés sont  $r_d = 0,25$ ,  $\tau = 0,3$  et  $r_e = 0,25$ . Le point de départ est  $\mathbf{x}^0 = (-5, -5) \in \Omega$ .

Tableau A.1 Fonctions objectif analytiques et solution  $\mathbf{x}^*$  du problème de minimisation de  $f$  sur  $X = [-10; 10] \times [-10; 10]$ .

id.	description	expression	$\mathbf{x}^*$	$f(\mathbf{x}^*)$
$f_1$	parabole	$f_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 1,5)^2 + (x_2 - 0,47)^2 + 73,3$	$(1,5, 0,47)$	73,3
$f_2$	discontinuité rectiligne	$f_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} -0,025x_2 + 3 & \text{si } x_2 <  x_1 , \\ 0,04x_2 & \text{sinon} \end{cases}$	$(0, 0)$	0
$f_3$	discontinuité courbe	$f_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} -0,025x_2 + 3 & \text{si } \ \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}_f\  > 12, \\ 0,04x_2 & \text{sinon,} \end{cases}$ avec $\boldsymbol{\omega}_f = (0, 10)$	$(0, -2)$	-0,08

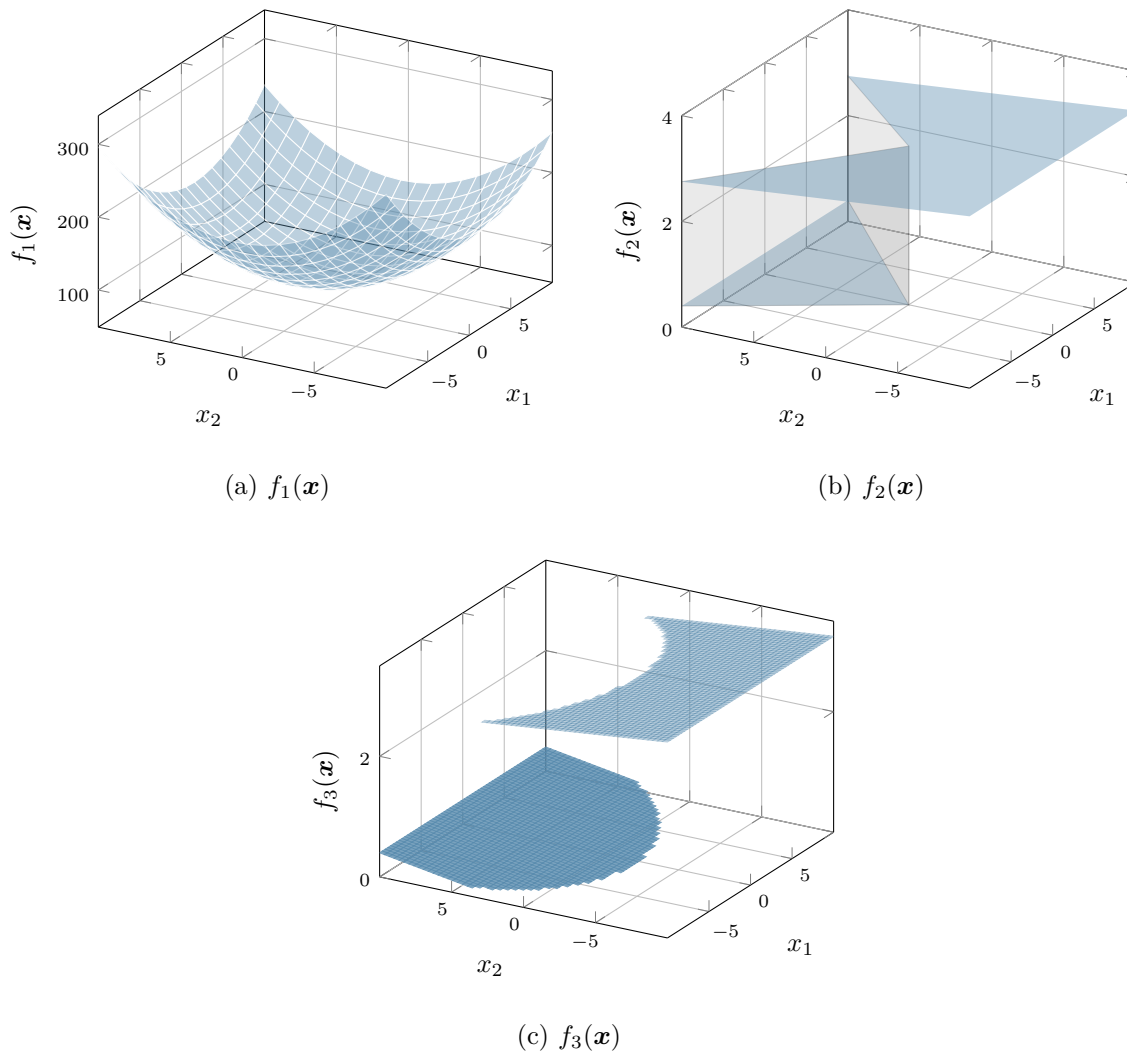


Figure A.1 Représentation graphique des fonctions objectifs analytiques sur le domaine  $X = [-10; 10] \times [-10; 10]$ .

Tableau A.2 Fonctions analytiques modélisant des contraintes.

id.	description	expression
$c_1$	plan	$c_1(\mathbf{x}) = 0,2x_1$
$c_2$	marche	$c_2(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2 & \text{si } x_1 > 0, \\ -0,1 & \text{sinon} \end{cases}$
$c_3$	discontinuité courbe	$c_3(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2 & \text{si } \ \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}_c\  > r_c, \\ -0,1 & \text{sinon,} \end{cases}$ avec $\boldsymbol{\omega}_c = (14, 3)$ et $r_c = 13$

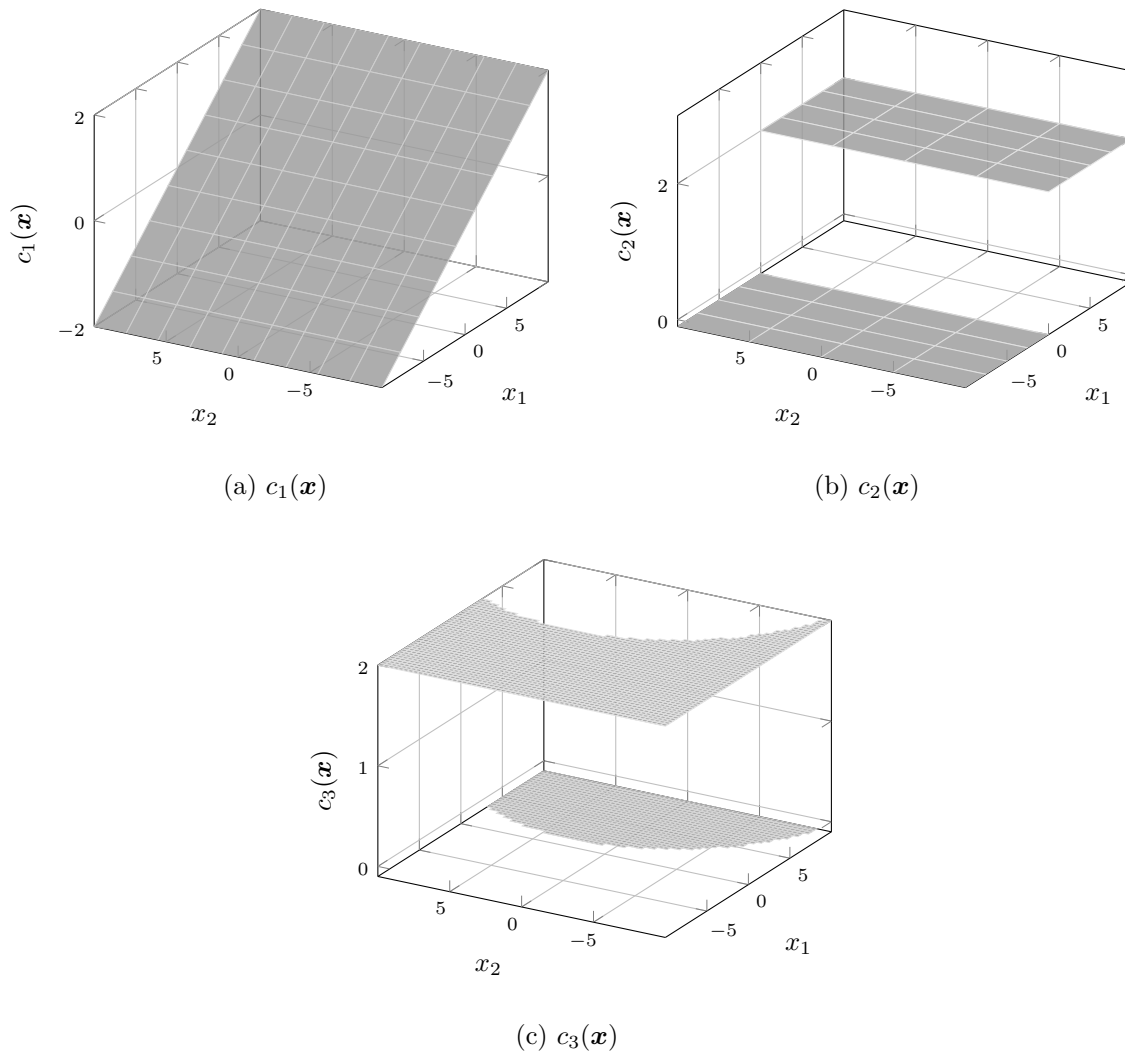


Figure A.2 Représentation graphique des fonctions analytiques modélisant des contraintes sur le domaine  $[-10; 10] \times [-10; 10]$ .

### A.1.1 Solutions renvoyées par DiscoMads pour 100 graines aléatoires distinctes

Pour chaque problème analytique, DiscoMads est lancé 100 fois avec 100 graines aléatoires différentes avec les paramètres décrits dans la section 2.5.2. Les résultats sont présentés sur les figures A.3, A.4 et A.5 relatives aux trois fonctions objectives  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ .

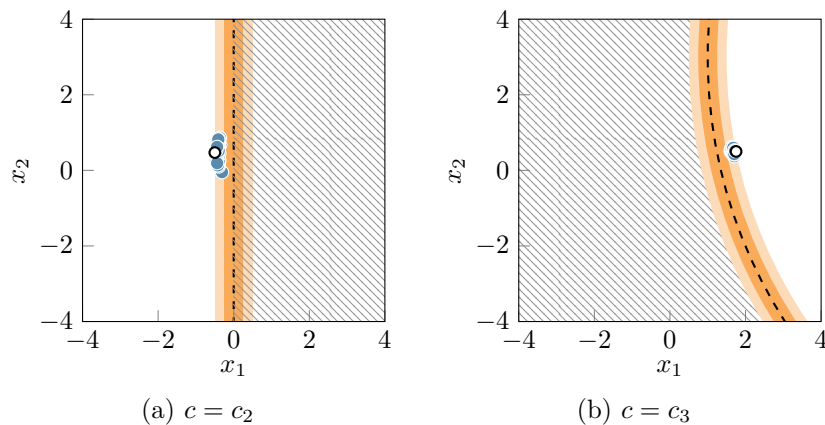


Figure A.3 Solutions renvoyées par DiscoMads (●) pour 100 graines aléatoires différentes et solution optimale (○) pour les problèmes avec  $f = f_1$  et une contrainte  $c(\mathbf{x}) \leq 0$ .

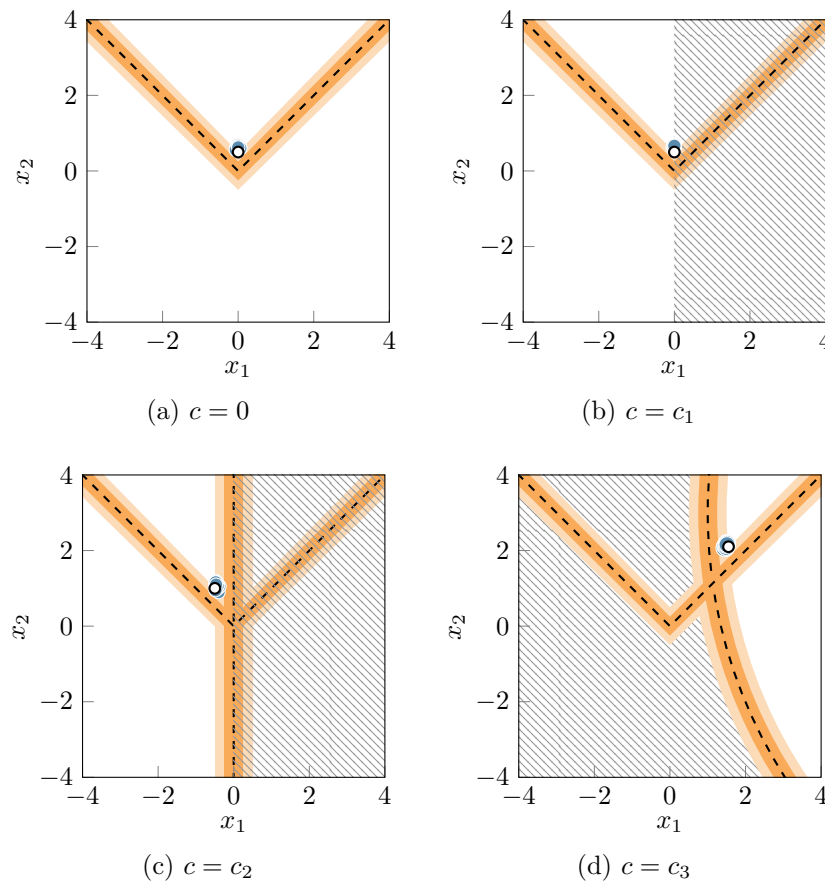


Figure A.4 Solutions renvoyées par DiscoMads (●) pour 100 graines aléatoires différentes et solution optimale (○) pour les problèmes avec  $f = f_2$ , sans et avec contrainte  $c(\mathbf{x}) \leq 0$ .

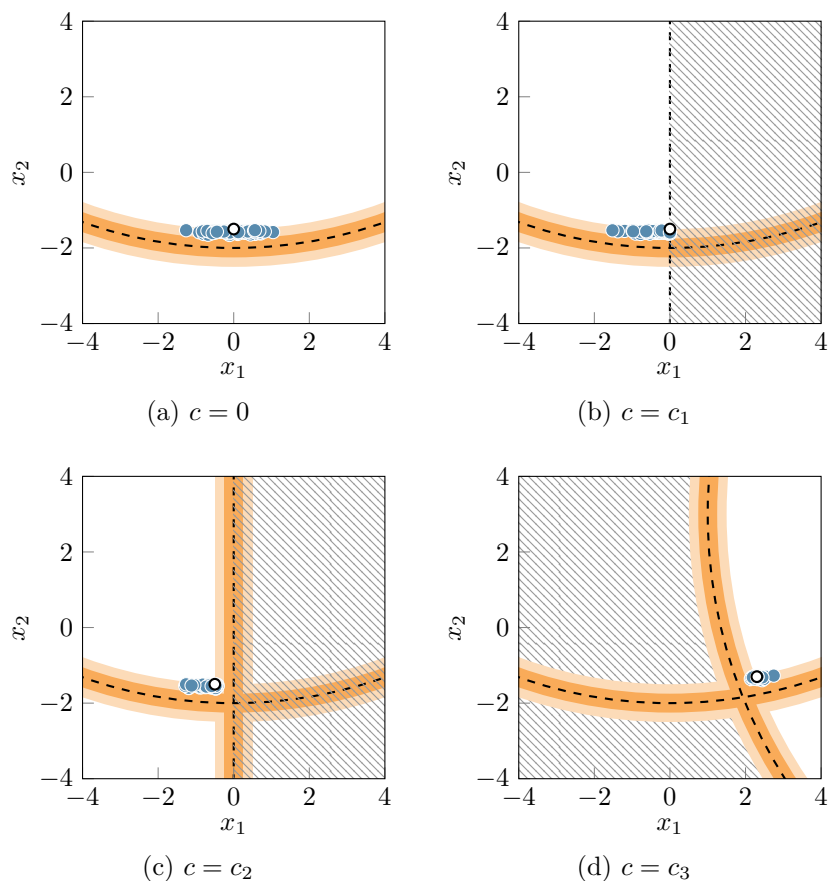


Figure A.5 Solutions renvoyées par DiscoMads ( $\bullet$ ) pour 100 graines aléatoires différentes et solution optimale ( $\circ$ ) pour les problèmes avec  $f = f_3$ , sans et avec contrainte  $c(\mathbf{x}) \leq 0$ .

### A.1.2 Influence de $r_e$ sur la distance à la discontinuité de la solution

Pour chaque problème analytique, DiscoMads est lancé pour 100 rayons d'exclusions  $r_e$  distincts variant de 0,001 à 0,5. Les autres paramètres sont ceux de la section 2.5.2. Les résultats sont présentés sur les figures A.6, A.7 et A.8.



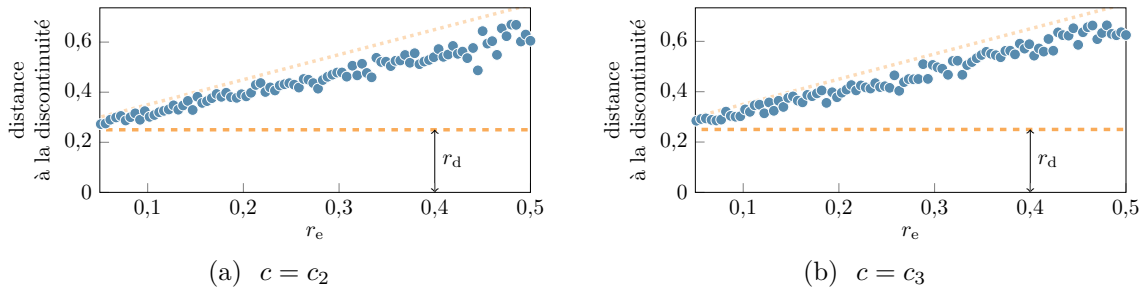


Figure A.6 Distance à la discontinuité la plus proche des solutions obtenues ( $\bullet$ ) pour les problèmes avec  $f = f_1$  avec une contrainte  $c(\mathbf{x}) \leq 0$  en fonction du rayon d'exclusion  $r_e$ . Distances aux frontières de  $D$  (---) et de la marge  $M$  (.....).

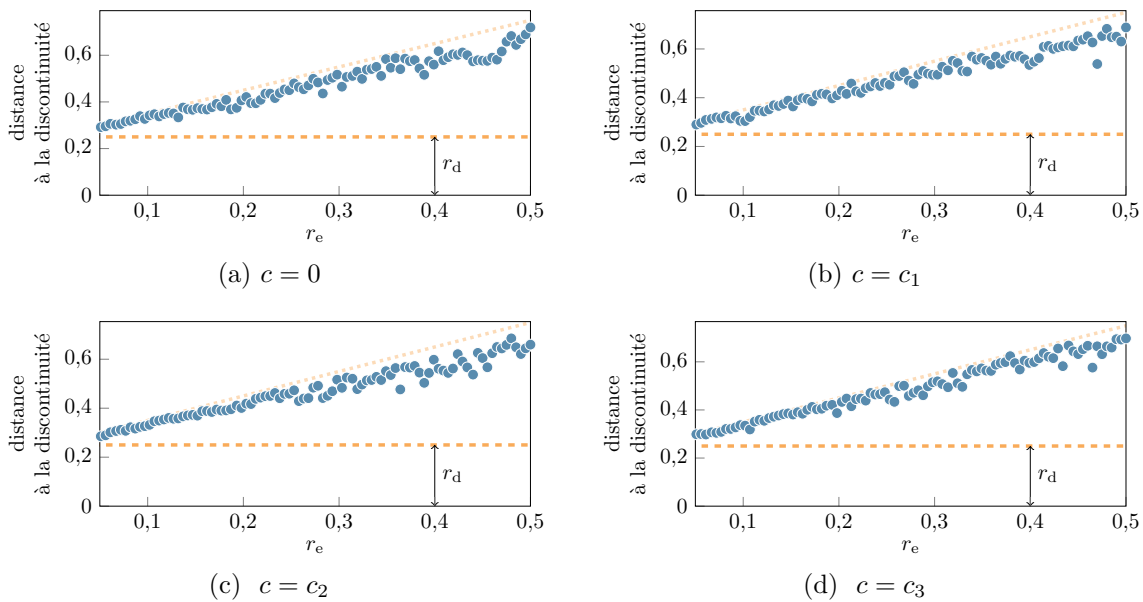


Figure A.7 Distance à la discontinuité la plus proche des solutions obtenues ( $\bullet$ ) pour les problèmes avec  $f = f_2$  sans et avec une contrainte  $c(\mathbf{x}) \leq 0$  en fonction du rayon d'exclusion  $r_e$ . Distances aux frontières de  $D$  (---) et de la marge  $M$  (.....).

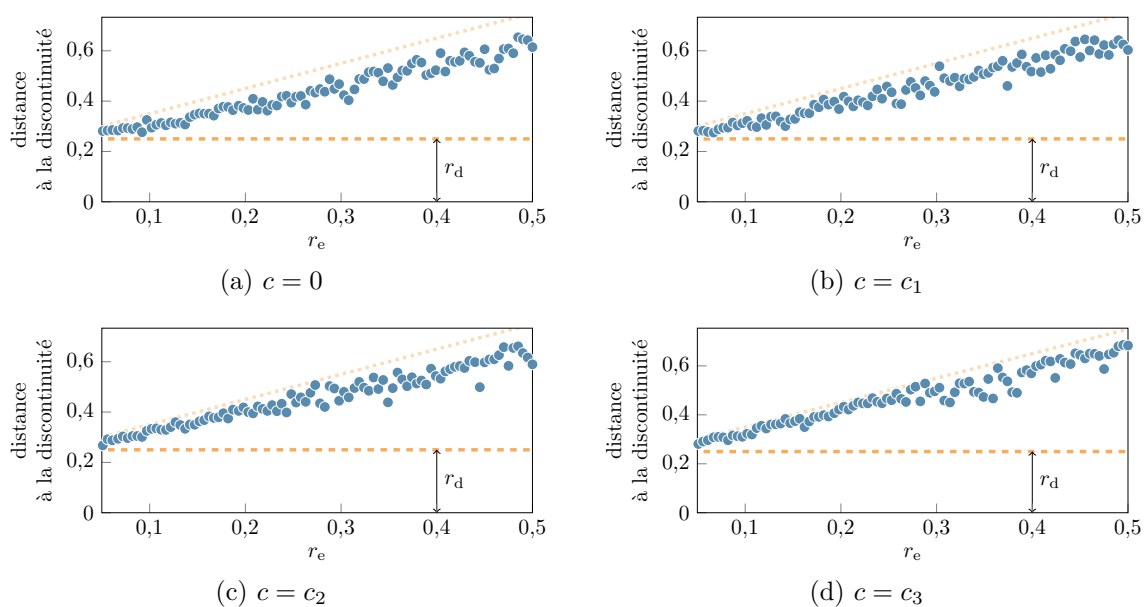


Figure A.8 Distance à la discontinuité la plus proche des solutions obtenues ( $\bullet$ ) pour les problèmes avec  $f = f_3$  sans et avec une contrainte  $c(\mathbf{x}) \leq 0$  en fonction du rayon d'exclusion  $r_e$ . Distances aux frontières de  $D$  (---) et de la marge  $M$  (.....).

## A.2 Problème de flambement

Les résultats obtenus pour 100 exécutions de DiscoMads avec 100 graines aléatoires distinctes pour le problème de flambement à partir du point  $\Omega$ -réalisable  $\mathbf{x}_B^0 = (0, 100)$  sont présentés sur la figure A.9.

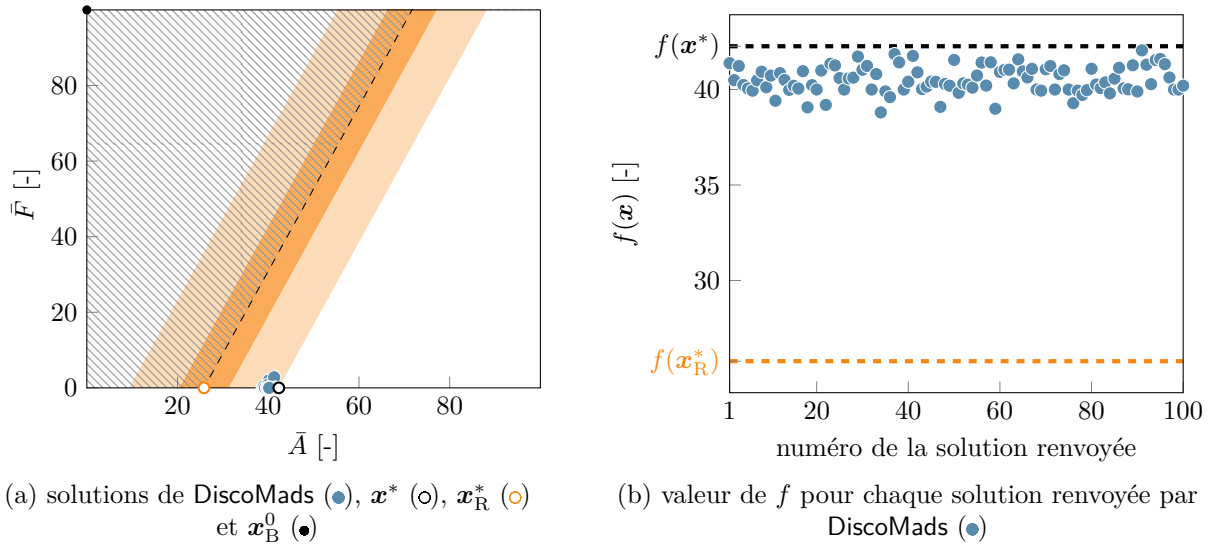


Figure A.9 Caractéristiques des solutions renvoyées par DiscoMads pour 100 exécutions sur le problème (2.55) à partir du point de départ non  $\Omega$ -réalisable  $\mathbf{x}_B^0 = (0, 100)$ .

## ANNEXE B CHANGEMENTS DE REPÈRES RELATIFS À L'OUTIL DE MODÉLISATION ET DÉMONSTRATIONS SUPPLÉMENTAIRES

Plusieurs repères sont définis dans la section 4.2.1.1 pour l'outil de modélisation d'aube. Pour rappel, les repères tridimensionnels utilisés sont :

- $\mathcal{R}_a$  le repère de l'aube ;
- $\mathcal{R}_{c^i}$  les repères des surfaces porteuses de chaque section  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$  ;

et les repères plans sont :

- $\mathcal{P}_{d^i}$  les repères des développées des surfaces porteuses de chaque section  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$  ;
- $\mathcal{P}_p$  le repère des profils, commun à toutes les sections.

Les équations de changements de repères sont décrites pour une section arbitraire  $i \in \{1, \dots, n_{\text{sec}}\}$ . Tous les angles sont supposés en radians dans les équations.

### B.1 Passage entre le repère d'aube $\mathcal{R}_a$ et le repère $\mathcal{R}_{c^i}$ d'une surface porteuse

Le positionnement relatif des repères  $\mathcal{R}_{c^i}$  et  $\mathcal{R}_a$  dépend du type de section, comme illustré sur la figure 4.4. Les équations de passage sont détaillées en coordonnées cylindriques (repères  $\mathcal{R}'_a$  et  $\mathcal{R}'_{c^i}$ ) pour une écriture plus compacte. La transformation géométrique requiert un paramètre de passage : un point  $\mathbf{k}^i$  de la surface porteuse  $i$  dont les coordonnées dans  $\mathcal{R}'_a$  sont notées  $\mathbf{k}^i|_{\mathcal{R}'_a} = (k_{r,a}, k_{\theta,a}, k_{z,a})$ .

#### B.1.1 Section conique

Le point  $\mathbf{k}^i$  est supposé différent du point  $\mathbf{o}_{d^i}$  à l'origine du cône sur lequel repose la surface porteuse. Les équations de passage en coordonnées cylindriques d'un point  $\mathbf{m}$  quelconque sont données par :

$$\begin{cases} m_{r,c^i} &= m_{r,a} \\ m_{\theta,c^i} &= \text{sgn}(\gamma^i) m_{\theta,a} \\ m_{z,c^i} &= \text{sgn}(\gamma^i) (m_{z,a} - o_{c^i z,a}) \end{cases} \iff \begin{cases} m_{r,a} &= m_{r,c^i} \\ m_{\theta,a} &= \text{sgn}(\gamma^i) m_{\theta,c^i} \\ m_{z,a} &= \text{sgn}(\gamma^i) m_{z,c^i} + o_{c^i z,a}, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où la coordonnée  $o_{c^i z,a}$  de l'origine du cône est donnée par :

$$o_{c^i z,b} = \frac{-k_{r,a}^i}{\tan(\gamma^i)} + k_{z,a}^i, \quad \forall \gamma^i \neq 0. \quad (\text{B.2})$$

*Démonstration.* La relation (B.2) est d'abord démontrée. La figure B.1 présente dans le demi-plan  $\{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3 : m_{\theta,a} = 0, m_{r,a} > 0\}$  une génératrice de la surface porteuse pour une section conique positive et conique négative. D'après la figure B.1, on a :

$$l = |k_{z,a}^i - o_{c^i z,a}| = \frac{k_{r,a}^i}{\tan(|\gamma^i|)}. \quad (\text{B.3})$$

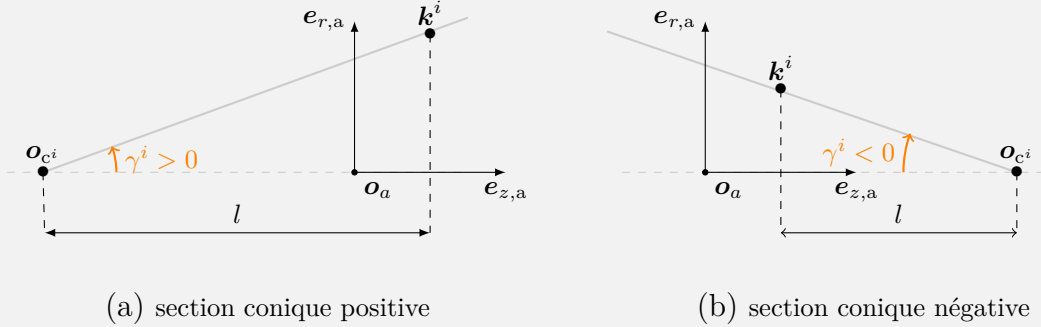


Figure B.1 Génératrices (—) des surfaces porteuses coniques dans le demi-plan  $\{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3 : m_{\theta,a} = 0, m_{r,a} > 0\}$ .

Dans le cas d'une section conique positive,  $\gamma^i > 0$  et  $k_{z,a}^i - o_{c^i z,a} > 0$ . Par conséquent, de (B.3), on a :

$$o_{c^i z,a} = \frac{-k_{r,a}^i}{\tan(\gamma^i)} + k_{z,a}^i \quad \forall \gamma^i > 0. \quad (\text{B.4})$$

Dans le cas d'une section conique négative,  $\gamma^i < 0$  et  $k_{z,a}^i - o_{c^i z,a} < 0$ . On a donc :

$$o_{c^i z,a} = \frac{-k_{r,a}^i}{\tan(\gamma^i)} + k_{z,a}^i \quad \forall \gamma^i < 0. \quad (\text{B.5})$$

La relation (B.2) est démontrée pour tout  $\gamma^i \neq 0$ .

Pour une section  $i$  conique positive, le repère  $\mathcal{R}_{c^i}$  est une translation du repère  $\mathcal{R}_a$  selon l'axe  $e_{z,a}$  (voir figure 4.4). Les équations de passage en coordonnées cylindriques pour  $\gamma^i > 0$  sont donc :

$$\begin{cases} m_{r,c^i} &= m_{r,a} \\ m_{\theta,c^i} &= m_{\theta,a} \\ m_{z,c^i} &= m_{z,a} - o_{c^i z,a}. \end{cases} \quad \text{pour } \gamma^i > 0 \quad (\text{B.6})$$

Pour une section conique négative, le repère  $\mathcal{R}_{c^i}$  est une translation du repère  $\mathcal{R}_a(\mathbf{t})$  selon l'axe  $\mathbf{e}_{z,a}$  suivi d'une rotation de  $\pi$  radians autour de l'axe  $\mathbf{e}_{x,c^i}$ . Les équations de passage en coordonnées cylindriques pour  $\gamma^i < 0$  sont donc :

$$\begin{cases} m_{r,c^i} &= m_{r,a} \\ m_{\theta,c^i} &= -m_{\theta,a} \\ m_{z,c^i} &= -m_{z,a} + o_{c^i z,a}. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Les équations (B.1) sont obtenues par agrégation des équations (B.6) et (B.7).  $\square$

### B.1.2 Section cylindrique

Pour un point  $\mathbf{m}$  quelconque, les équations de changement de repère sont :

$$\begin{cases} m_{r,c^i} &= m_{r,a} \\ m_{\theta,c^i} &= m_{\theta,a} \\ m_{z,c^i} &= m_{z,a} - k_{z,a}^i \end{cases} \iff \begin{cases} m_{r,a} &= m_{r,c^i} \\ m_{\theta,a} &= m_{\theta,c^i} \\ m_{z,a} &= m_{z,c^i} + k_{z,a}^i. \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

*Démonstration.* Pour une section  $i$  cylindrique, le repère  $\mathcal{R}_{c^i}$  est obtenu par translation du repère  $\mathcal{R}_a$  selon l'axe  $\mathbf{e}_{z,a}$  (voir figure 4.4). L'origine  $\mathbf{o}_{c^i}$  du repère  $\mathcal{R}_{c^i}$  est choisie arbitrairement telle que  $k_{z,c^i}^i = 0$ . Il en découle directement les équations (B.8).  $\square$

## B.2 Passage entre un point de la surface porteuse dans le repère $\mathcal{R}_{c^i}$ et son image sur la surface développée dans le repère $\mathcal{P}_d^i$

La transformation décrivant le développement de la surface porteuse de  $\mathcal{R}_{c^i}$  à  $\mathcal{P}_d^i$  et le positionnement relatif de ces deux repères dépend du type de section (voir figure 4.5). La transformation n'est valide que pour les points appartenant à la surface ; des domaines de définition sont donc introduits selon le type de surface.

Les paramètres de passage requis sont la conicité de la surface  $\gamma^i$  dans le cas d'une section conique et le rayon du cylindre  $r^i$  dans le cas d'une section cylindrique.

### B.2.1 Section conique

Soit  $\alpha = |\gamma^i|$  le demi-angle au sommet de la surface porteuse conique de la section  $i$ . La surface porteuse dans  $\mathcal{R}'_{c^i}$ , visible sur la figure B.2, est définie par l'ensemble de points :

$$D_{\mathcal{R}'_{c^i}} = \{\mathbf{m}|_{\mathcal{R}'_{c^i}} : m_{z,c^i} \geq 0, m_{\theta,c^i} \in [-\pi; \pi[, m_{r,c^i} = m_{z,c^i} \tan \alpha\}. \quad (\text{B.9})$$

Le cône est développé dans le plan  $(\mathbf{o}_{c^i}, \mathbf{e}_{x,c^i}, \mathbf{e}_{y,c^i})$  et le repère  $\mathcal{P}'_{d^i}$  est utilisé pour repérer un point sur la surface développée. Le développement du cône est tel qu'un point de la surface conique dans  $\mathcal{R}'_{c^i}$  contenu dans le demi-plan  $\{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3 : m_{y,c^i} = 0, m_{z,c^i} \geq 0\}$  a pour image un point sur l'axe  $(\mathbf{o}_{d^i}, \mathbf{e}_{u,d^i})$  dans  $\mathcal{P}'_{d^i}$ . L'ensemble des points de la développée est défini dans le repère  $\mathcal{P}'_{d^i}$  par :

$$D_{\mathcal{P}'_{d^i}} = \{\mathbf{m}|_{\mathcal{P}'_{d^i}} : m_{r,d^i} \geq 0, m_{\theta,d^i} \in [-\pi \sin \alpha; \pi \sin \alpha[\}. \quad (\text{B.10})$$

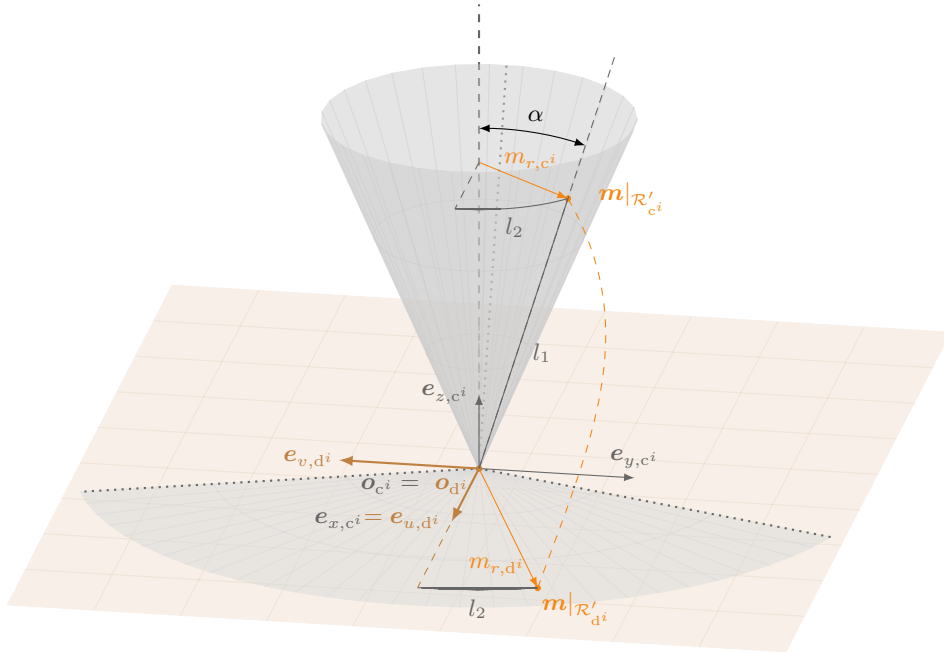


Figure B.2 Surface conique dans le repère  $\mathcal{R}'_{c^i}$  et sa développée dans  $\mathcal{P}'_{d^i}$ , point  $\mathbf{m}|_{\mathcal{R}'_{c^i}}$  sur la surface conique et son image  $\mathbf{m}|_{\mathcal{P}'_{d^i}}$  sur la développée.

Soit  $\mathbf{m}|_{\mathcal{R}'_{c^i}} \in D_{\mathcal{R}'_{c^i}}$  un point de la surface conique et  $\mathbf{m}|_{\mathcal{P}'_{d^i}} \in D_{\mathcal{P}'_{d^i}}$  son image sur la surface

développée. La transformation  $f : D_{\mathcal{R}'_c} \rightarrow D_{\mathcal{P}'_d}$  est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} m_{r,d^i} &= \frac{m_{r,c^i}}{\sin(\alpha)} \\ m_{\theta,d^i} &= -m_{\theta,c^i} \sin(\alpha), \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

et la transformation inverse  $f^{-1} : D_{\mathcal{P}'_d} \rightarrow D_{\mathcal{R}'_c}$  par les équations :

$$\begin{cases} m_{r,c^i} &= m_{r,d^i} \sin(\alpha) \\ m_{\theta,c^i} &= -\frac{m_{\theta,d^i}}{\sin(\alpha)} \\ m_{z,c^i} &= m_{r,d^i} \cos(\alpha). \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

*Démonstration.* Comme illustré sur la figure B.2, le développement du cône conserve la distance du point  $\mathbf{m}$  à l'origine. Par conséquent :

$$\frac{m_{r,c^i}}{\sin(\alpha)} = l_1 = m_{r,d^i}. \quad (\text{B.13})$$

Par ailleurs, la relation suivante est vraie :

$$m_{z,c^i} = m_{r,d^i} \cos(\alpha). \quad (\text{B.14})$$

Les longueurs d'arcs dans la direction  $\mathbf{e}_{\theta,c^i}$  sur la conique et selon  $-\mathbf{e}_{\theta,d^i}$  sur la développée sont identiques. On en déduit l'équation suivante :

$$\begin{aligned} -m_{r,c^i} m_{\theta,c^i} &= m_{r,d^i} m_{\theta,d^i} \\ \iff m_{\theta,c^i} &= -\frac{m_{\theta,d^i}}{\sin(\alpha)} \quad \text{de l'équation (B.13)}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

L'équation (B.12) est démontrée par les équations (B.13) (B.14) et (B.15) et l'équation (B.11) en découle directement.  $\square$

## B.2.2 Section cylindrique

La surface porteuse cylindrique de la section  $i$ , de rayon  $r^i \neq 0$ , est présentée sur la figure B.3. Elle est définie dans  $\mathcal{R}'_c$  par l'ensemble de points suivant :

$$D_{\mathcal{R}'_c} = \{\mathbf{m}|_{\mathcal{R}'_c} : m_{r,c^i} = r^i, m_{\theta,c^i} \in [-\pi; \pi[, m_{z,c^i} \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{B.16})$$



L'origine du repère  $\mathcal{P}_{d^i}$  est définie par  $\mathbf{o}_{d^i}|_{\mathcal{R}_{c^i}} = (r^i, 0, 0)$ . Le cylindre est développé dans le plan  $(\mathbf{o}_{d^i}|_{\mathcal{R}_{c^i}}, \mathbf{e}_{y,c^i}, \mathbf{e}_{z,c^i})$  et le repère  $\mathcal{P}_{d^i}$  est utilisé pour repérer un point sur la surface développée. Le développement du cylindre est tel qu'un point de la surface cylindrique dans  $\mathcal{R}_{c^i}$  contenu dans le demi-plan  $\{\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3 : m_{y,c^i} = 0, m_{x,c^i} > 0\}$  a pour image un point sur l'axe  $(\mathbf{o}_{d^i}, \mathbf{e}_{u,d^i})$  dans  $\mathcal{P}_{d^i}$ . La surface développée est décrite par l'ensemble de points suivant :

$$D_{\mathcal{P}_{d^i}} = \{\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{d^i}} : m_{u,d^i} \in \mathbb{R}, m_{v,d^i} \in [-r^i\pi; r^i\pi]\}. \quad (\text{B.17})$$

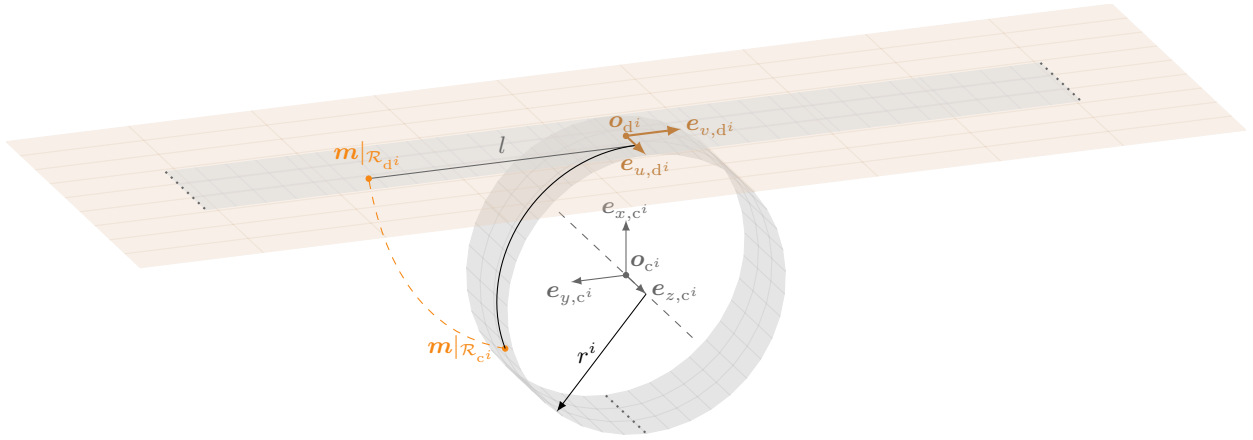


Figure B.3 Surface cylindrique dans  $\mathcal{R}'_{c^i}$  et sa développée dans  $\mathcal{P}_{d^i}$ , point  $\mathbf{m}|_{\mathcal{R}'_{c^i}}$  sur la surface cylindrique et son image  $\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  sur la développée.

Soit  $\mathbf{m}|_{\mathcal{R}'_{c^i}} \in D_{\mathcal{R}'_{c^i}}$  un point de la surface conique et  $\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{d^i}} \in D_{\mathcal{P}_{d^i}}$  le point correspondant sur la surface développée. La transformation  $f : D_{\mathcal{R}'_{c^i}} \rightarrow D_{\mathcal{P}_{d^i}}$  est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} m_{u,d^i} &= m_{z,c^i} \\ m_{v,d^i} &= -m_{r,c^i}m_{\theta,c^i}. \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

*Démonstration.* Soient les coordonnées  $\mathbf{m}|_{\mathcal{R}'_{c^i}}$  supposées connues. Comme illustré sur la figure B.3, les vecteurs  $\mathbf{e}_{z,c^i}$  et  $\mathbf{e}_{u,d^i}$  sont identiques. Par conservation des distances, la coordonnée  $m_{v,d^i}$  est égale à la longueur d'arc sur le cylindre, au signe près, soit  $m_{v,d^i} = l = -m_{r,c^i}m_{\theta,c^i}$ . La relation (B.18) est ainsi démontrée.  $\square$

La transformation inverse  $f^{-1} : D_{\mathcal{P}_{d^i}} \rightarrow D_{\mathcal{R}'_{c^i}}$  est définie par :

$$\begin{cases} m_{r,c^i} &= r^i \\ m_{\theta,c^i} &= -\frac{m_{v,d^i}}{r^i} \\ m_{z,c^i} &= m_{u,d^i}. \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

*Démonstration.* Soient les coordonnées  $\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  supposées connues ;  $\mathbf{m}$  appartient à la surface porteuse donc  $m_{r,c^i} = r^i$ . Les deux autres relations découlent directement des équations (B.18).  $\square$

### B.3 Passage entre le repère d'une développée $\mathcal{P}_{d^i}$ et le repère des profils $\mathcal{P}_p$

Le passage entre les repères  $\mathcal{P}_{d^i}$  et  $\mathcal{P}_p$  est une transformation linéaire sans déformation du profil, composée d'une rotation autour de  $\mathbf{o}_p$  et d'une translation (voir figures 4.5 et 4.6).

Les paramètres de passage requis sont les coordonnées  $\mathbf{n}^i|_{\mathcal{P}_p}$  et  $\mathbf{n}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  d'un point  $\mathbf{n}^i$  de la section dans les deux repères, ainsi que l'angle  $\widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{w}^i)}$ , où  $\mathbf{w}^i$  est la corde du profil définie à l'équation (4.5). Pour faciliter l'expression de la transformation sous forme matricielle, les coordonnées homogènes  ${}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_\bullet} = (m_{u,\bullet}, m_{v,\bullet}, 1)$  sont utilisées dans cette section. Des matrices de translation et rotation élémentaires sont définies dans la première sous-section avant de présenter la transformation complète dans la deuxième sous-section.

#### B.3.1 Transformations linéaires élémentaires

Soient deux repères plans  $\mathcal{P}_1 = (\mathbf{o}_1, \mathbf{e}_{u,1}, \mathbf{e}_{v,1})$  et  $\mathcal{P}_2 = (\mathbf{o}_2, \mathbf{e}_{u,2}, \mathbf{e}_{v,2})$ .

**Translation.** Le repère  $\mathcal{P}_2$  est supposé translaté par rapport à  $\mathcal{P}_1$  d'un vecteur  $\mathbf{t} = \mathbf{o}_2|_{\mathcal{P}_1}$ . Les coordonnées homogènes de  $\mathbf{m}$  dans les deux repères sont liées par la matrice de translation  $\mathbf{T}_2^1 = \mathbf{T}(\mathbf{t})$ , notée  $\mathbf{T}(\mathbf{t})$  :

$${}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_2} = \mathbf{T}_2^1 {}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_1}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{T}_2^1 = \mathbf{T}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_{u,1} \\ 0 & 1 & -t_{v,1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

La transformation inverse est donnée par la relation  ${}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_1} = \mathbf{T}(-\mathbf{t}) {}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_2}$ .

**Rotation.** Le repère  $\mathcal{P}_2$  est supposé tourné par rapport à l'origine d'un angle  $\psi = \widehat{(\mathbf{e}_{u,1}, \mathbf{e}_{u,2})}$  par rapport à  $\mathcal{P}_1$ . Dans ce cas, les coordonnées homogènes de  $\mathbf{m}$  dans les deux repères sont liées par la matrice de rotation  $\mathbf{R}_2^1$ , notée  $\mathbf{R}(\psi)$  :

$${}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_2} = \mathbf{R}_2^1 {}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_1}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{R}_2^1 = \mathbf{R}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

La transformation inverse est donnée par la relation  ${}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_1} = \mathbf{R}(-\psi) {}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_2}$ .

### B.3.2 Transformation composée

La transformation des coordonnées  ${}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_p}$  aux coordonnées  ${}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  est donnée par :

$${}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{d^i}} = \mathbf{T}(\mathbf{t}^i) \mathbf{R}(\psi^i) {}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_p}, \quad (\text{B.22})$$

où  $\psi^i = \widehat{(\mathbf{w}^i, \mathbf{e}_{u,d^i})}$  et  $\mathbf{t}^i$  est déduit de  ${}^+\mathbf{t}^i = \mathbf{R}(\psi^i) {}^+\mathbf{n}^i|_{\mathcal{P}_p} - {}^+\mathbf{n}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$ .

La transformation inverse des coordonnées  ${}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  aux coordonnées  ${}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_p}$  est donnée par :

$${}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_p} = \mathbf{R}(-\psi^i) \mathbf{T}(-\mathbf{t}^i) {}^+\mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{d^i}}. \quad (\text{B.23})$$

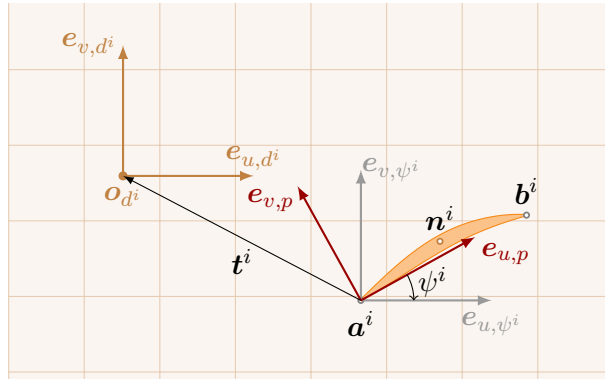


Figure B.4 Passage des repères  $\mathcal{P}_{d^i}$  à  $\mathcal{P}_p$  via le repère intermédiaire  $\mathcal{P}_{\psi^i}$ .

*Démonstration.* Les repères  $\mathcal{P}_p$  et  $\mathcal{P}_{d^i}$  sont présentés avec un profil quelconque sur la figure B.4. Un repère plan intermédiaire  $\mathcal{P}_{\psi^i}$  est introduit et correspond à la rotation de  $\mathcal{P}_p$  d'un angle  $\psi^i = -\widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{w}^i)}$ , où  $\mathbf{w}^i$  est défini à l'équation (4.5) et donne l'orientation de la corde du profil dans  $\mathcal{P}_{d^i}$ . Ainsi, la transformation de  $\mathcal{P}_p$  à  $\mathcal{P}_{d^i}$  se décompose en

deux changements de repères élémentaires : une rotation de  $\mathcal{P}_p$  à  $\mathcal{P}_{\psi^i}$  suivie d'une translation de  $\mathcal{P}_{\psi^i}$  à  $\mathcal{P}_{d^i}$ .

La transformation des coordonnées  ${}^+ \mathbf{m}|_{\mathcal{P}_p}$  aux coordonnées  ${}^+ \mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{\psi^i}}$  est décrite par :

$${}^+ \mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{\psi^i}} = \mathbf{R}(\psi^i) {}^+ \mathbf{m}|_{\mathcal{P}_p}. \quad (\text{B.24})$$

Le repère  $\mathcal{P}_{d^i}$  est translaté par rapport à  $\mathcal{P}_{\psi^i}$  d'un vecteur  $\mathbf{t}^i = \mathbf{o}_{d^i}|_{\mathcal{P}_{\psi^i}}$ , comme le montre la figure B.4. La transformation des coordonnées  ${}^+ \mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{\psi^i}}$  aux coordonnées  ${}^+ \mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  peut ainsi s'écrire :

$${}^+ \mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{d^i}} = \mathbf{T}(\mathbf{t}^i) {}^+ \mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{\psi^i}}. \quad (\text{B.25})$$

où  $\mathbf{t}^i$  reste à déterminer. Par définition,  $\mathbf{t}^i = \mathbf{o}_{d^i}|_{\mathcal{P}_{\psi^i}} = \mathbf{o}_{d^i}|_{\mathcal{P}_{\psi^i}} - \mathbf{o}_{d^i}|_{\mathcal{P}_{d^i}}$ . Tous les points de la section subissent la même translation, par conséquent  $\mathbf{t}^i = (t_u, t_v)$  peut être calculé à partir de  ${}^+ \mathbf{n}^i|_{\mathcal{P}_p}$  et  ${}^+ \mathbf{n}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  :

$$\begin{aligned} (t_u, t_v, 0) &= {}^+ \mathbf{n}^i|_{\mathcal{P}_{\psi^i}} - {}^+ \mathbf{n}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}} \\ &= \mathbf{R}(\psi^i) {}^+ \mathbf{n}^i|_{\mathcal{P}_p} - {}^+ \mathbf{n}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}} \quad \text{de (B.25)}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Finalement, l'équation (B.22) découle directement des équations (B.24) et (B.25). Les matrices inverses des transformations linéaires élémentaires étant connues, la transformation inverse (B.23) est immédiatement démontrée.  $\square$

Dans le cas où  $\mathbf{n}^i = \mathbf{a}^i$  comme dans le module RET (voir section 4.2.3.2), la relation (B.23) se simplifie en :

$${}^+ \mathbf{m}|_{\mathcal{P}_p} = \mathbf{R}(\psi^i) \mathbf{T}(\mathbf{a}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}) {}^+ \mathbf{m}|_{\mathcal{P}_{d^i}}. \quad (\text{B.27})$$

#### B.4 Démonstrations supplémentaires

Lors de la phase de génération d'aube (module GEN), le point  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  doit être calculé à partir des paramètres d'empilement. Les équations associées sont données selon le type de section.

### B.4.1 Section conique

Pour une section conique, les coordonnées du point  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  en fonction des paramètres d'empilement sont données par :

$$t_{u,d^i}^i = \frac{r^i}{\sin |\gamma^i|} \cos(-\operatorname{sgn}(\gamma^i)\Delta\theta^i \sin |\gamma^i|), \quad (4.7)$$

$$t_{v,d^i}^i = \frac{r^i}{\sin |\gamma^i|} \sin(-\operatorname{sgn}(\gamma^i)\Delta\theta^i \sin |\gamma^i|) \quad (4.8)$$

et l'angle de la corde  $\mathbf{w}^i$  dans  $\mathcal{P}_{d^i}$  par :

$$\widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{w}^i)} = \begin{cases} -\operatorname{sgn}(\gamma^i)\Delta\theta^i \sin |\gamma^i| + \lambda^i & \text{pour une section conique positive,} \\ -\operatorname{sgn}(\gamma^i)\Delta\theta^i \sin |\gamma^i| + \lambda^i + \pi & \text{pour une conique négative.} \end{cases} \quad (4.9)$$

*Démonstration.* Les paramètres d'empilement sont liés aux coordonnées de  $\mathbf{t}^i$  dans  $\mathcal{R}_a$  ;  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  est donc exprimé en fonction de  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{R}_a}$  :

$$\begin{aligned} t_{u,d^i}^i &= t_{r,d^i}^i \cos(t_{\theta,d^i}^i) \\ &= \frac{t_{r,c^i}^i}{\sin |\gamma^i|} \cos(-t_{\theta,c^i}^i \sin |\gamma^i|) && \text{de (B.11)} \\ &= \frac{t_{r,a^i}^i}{\sin |\gamma^i|} \cos(-\operatorname{sgn}(\gamma^i)t_{\theta,a^i}^i \sin |\gamma^i|) && \text{de (B.1)} \\ &= \frac{r^i}{\sin |\gamma^i|} \cos(-\operatorname{sgn}(\gamma^i)\Delta\theta^i \sin |\gamma^i|) && \text{par définition de } r^i \text{ (4.1) et } \Delta\theta^i \text{ (4.2),} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} t_{v,d^i}^i &= t_{r,d^i}^i \sin(t_{\theta,d^i}^i) \\ &= \frac{t_{r,c^i}^i}{\sin |\gamma^i|} \sin(-t_{\theta,c^i}^i \sin |\gamma^i|) && \text{de (B.11)} \\ &= \frac{t_{r,a^i}^i}{\sin |\gamma^i|} \sin(-\operatorname{sgn}(\gamma^i)t_{\theta,a^i}^i \sin |\gamma^i|) && \text{de (B.1)} \\ &= \frac{r^i}{\sin |\gamma^i|} \sin(-\operatorname{sgn}(\gamma^i)\Delta\theta^i \sin |\gamma^i|) && \text{par définition de } r^i \text{ (4.1) et } \Delta\theta^i \text{ (4.2)} \end{aligned}$$

Concernant le calcul de l'angle de la corde  $\widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{w}^i)}$ , soit  $\mathbf{v}^i = \mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}} / \|\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}\|$  (défini

à la page 109), l'équation suivante est satisfaite :

$$\widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{w}^i)} = \widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{v}^i)} + \widehat{(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)}. \quad (\text{B.28})$$

D'une part, le terme  $\widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{v}^i)}$  peut être exprimé en fonction des paramètres d'empilement tel que ;

$$\begin{aligned} \widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{v}^i)} &= t_{\theta,d^i}^i && \text{par définition de } t_{\theta,d^i}^i \\ &= -\text{sgn}(\gamma^i) t_{\theta,a}^i \sin |\gamma^i| && \text{de (B.11) et (B.1)} \\ &= -\text{sgn}(\gamma^i) \Delta\theta^i \sin |\gamma^i| && \text{par définition de } \Delta\theta^i \text{ (4.2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

D'autre part, par définition de l'angle de calage  $\lambda^i$  (4.6), le terme  $\widehat{(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)}$  est donné par :

$$\widehat{(\mathbf{v}^i, \mathbf{w}^i)} = \begin{cases} \lambda^i & \text{pour une conique positive,} \\ \lambda^i + \pi & \text{pour une conique négative.} \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

Par conséquent, de (B.28), (B.29) et (B.30), la relation (4.9) est démontrée.  $\square$

#### B.4.2 Section cylindrique

Pour une section cylindrique, les coordonnées du point  $\mathbf{t}^i|_{\mathcal{P}_{d^i}}$  et l'angle de la corde  $\widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{w}^i)}$  sont donnés en fonction des paramètres d'empilement par :

$$\begin{cases} t_{u,d^i}^i = 0 \\ t_{v,d^i}^i = -r^i \Delta\theta^i \\ \widehat{(\mathbf{e}_{u,d^i}, \mathbf{w}^i)} = \lambda^i. \end{cases} \quad (\text{4.10})$$

*Démonstration.* La coordonnée  $t_{u,d^i}^i$  est donnée par :

$$\begin{aligned} t_{u,d^i}^i &= t_{z,c^i}^i && \text{de (B.18)} \\ &= t_{z,a}^i - k_{z,a}^i && \text{de (B.8)}. \end{aligned}$$

Pour la procédure de génération d'aube GEN,  $\mathbf{k}^i$  est choisi tel que  $\mathbf{k}^i|_{\mathcal{R}'_a} = (r^i, 0, \Delta z^i)$  d'après l'équation (4.11). Par conséquent,  $t_{u,d^i}^i = \Delta z^i - \Delta z^i = 0$ .

La coordonnée  $t_{v,d}^i$  est donnée par :

$$\begin{aligned} t_{u,v}^i &= -t_{r,c}^i t_{\theta,c}^i && \text{de (B.18)} \\ &= -t_{r,a}^i t_{\theta,a}^i && \text{de (B.8)} \\ &= -r^i \Delta\theta^i && \text{par définition de } r^i \text{ (4.1) et } \Delta\theta^i \text{ (4.2)}. \end{aligned}$$

Enfin, par définition de l'angle de calage à l'équation (4.6), on a directement  $\widehat{(\mathbf{e}_{u,d}, \mathbf{w}^i)} = \lambda^i$ . □

## ANNEXE C REMARQUES SUR LA NOTION DE CONTINUITÉ GÉOMÉTRIQUE

Dans la littérature relative aux paramétrisations d'aubes et aux outils de modélisation, la continuité  $\mathcal{G}^n$  est fréquemment invoquée pour caractériser la régularité des courbes et surfaces. La continuité  $\mathcal{G}^n$  peut être vue comme un équivalent de la régularité  $\mathcal{C}^n$  dans le cas de courbes ou surfaces décrites par morceaux par des équations paramétriques. Dans la littérature, les termes « continuité de la pente » et « continuité de la courbure » sont généralement employés pour décrire respectivement la continuité  $\mathcal{G}^1$  et  $\mathcal{G}^2$  [6]. Toutefois, aucune définition formelle de la continuité  $\mathcal{G}^n$  n'a été trouvée dans la littérature portant sur les outils de modélisation. Cette annexe vise à fournir quelques clés de compréhension sur la notion de continuité  $\mathcal{G}^n$  et sa pertinence. La continuité  $\mathcal{G}^n$  est uniquement discutée ici dans le cas de courbes de  $\mathbb{R}^2$ .

### C.1 Problématique

Une courbe dans  $\mathbb{R}^2$  est considérée. Les coordonnées d'un point  $\mathbf{m}$  de la courbe peuvent être définies par des fonctions paramétrées  $m_u(t), m_v(t) : T \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dans cette section, le vecteur  $\mathbf{m}(t) = (m_u(t), m_v(t))$  est appelé paramétrage de la courbe,  $t$  est le paramètre et  $m_u(t)$  et  $m_v(t)$  sont les fonctions de coordonnées. Si les fonctions de coordonnées sont de classe  $\mathcal{C}^n$ , le paramétrage est dit de classe  $\mathcal{C}^n$ . En général, une courbe peut être séparée en plusieurs morceaux sur lesquels des paramétrages usuels (spline, cercle, ellipse...) peuvent être utilisés.

Une courbe lisse  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  est considérée et décrite par deux paramétrages  $\mathbf{m}^1(t^1)$  et  $\mathbf{m}^2(t^2)$  se rejoignant en un point  $\mathbf{y}$ . Les fonctions de coordonnées sont supposées de classe  $\mathcal{C}^1$ . Bien que la courbe  $A$  soit lisse, il est possible que les dérivées des fonctions de coordonnées de  $\mathbf{m}^1$  et  $\mathbf{m}^2$  au point  $\mathbf{y}$  soient différentes en raison des paramétrages choisis [72, exemple 3.1].

La notion de continuité  $\mathcal{C}^n$  n'est ainsi pas adaptée pour décrire la régularité d'une courbe représentée par plusieurs paramétrages. C'est pour cette raison que la notion de continuité géométrique  $\mathcal{G}^n$  est utilisée dans la littérature pour décrire la régularité de courbes définies par plusieurs paramétrages [6].



## C.2 Définition issue de la littérature

La définition la plus précise de la notion de continuité géométrique  $\mathcal{G}^n$  trouvée dans la littérature date de 1988 [72, définition 3.1]. Elle est retranscrite ci-dessous ; les notations sont adaptées et le cadre est limité aux courbes dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition C.2.1** (Continuité géométrique  $\mathcal{G}^n$  de courbes paramétrées dans  $\mathbb{R}^2$ ).  
 Soient  $\mathbf{m}^1$  et  $\mathbf{m}^2$  deux paramétrages de classe  $\mathcal{C}^n$  d'une courbe  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  se rejoignant en un point  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ . La continuité  $\mathcal{G}^n$  est vérifiée au point  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  s'il existe un paramétrage  $\tilde{\mathbf{m}}^1$  équivalent à  $\mathbf{m}^1$  tel que  $\tilde{\mathbf{m}}^1$  et  $\mathbf{m}^2$  se rejoignent en  $\mathbf{y}$  avec une continuité  $\mathcal{C}^n$ .

Certains termes, tels que « paramétrage » et « équivalent » ne sont pas rigoureusement définis et la définition ne caractérise la continuité  $\mathcal{G}^n$  qu'au point de jonction  $\mathbf{y}$ . Il semble toutefois raisonnable de considérer que la continuité  $\mathcal{G}^n$  est vérifiée partout ailleurs qu'au point  $\mathbf{y}$  car les paramétrages sont de classe  $\mathcal{C}^n$ . En d'autres termes, la définition indique que si la courbe  $A$  est suffisamment régulière, il existe un paramétrage de cette courbe de même régularité.

## C.3 Interprétation géométrique

Une interprétation plus géométrique de la continuité  $\mathcal{G}^n$  est proposée. Soit  $\mathbf{m}^{i(n)}$  le vecteur contenant les dérivées  $n^{\text{e}}$  des fonctions de coordonnées par rapport à  $t^i$ , la continuité  $\mathcal{G}^n$  est vérifiée au point  $\mathbf{y}$  si les directions des vecteurs  $\mathbf{m}^{1(n)}$  et  $\mathbf{m}^{2(n)}$  sont colinéaires au point  $\mathbf{y}$ . Dans le cas d'une courbe  $A$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , cela traduit le fait que la direction du vecteur normal (ou tangent) à la courbe  $A$  est continue au point  $\mathbf{y}$ , quels que soient les paramétrages considérés.

## ANNEXE D PARAMÈTRES D'AUBE

## D.1 Aube rotor 37 paramétrée à 3 sections

paramètre	section 1	section 2	section 3
$r^i$	182,235	215,563	248,570
$\Delta\theta^i$	0,000	-0,070	-0,189
$\Delta z^i$	0,000	0,647	1,079
$\gamma^i$	12,600	-1,320	-15,240
$\lambda^i$	38,725	50,564	60,518
$s_{u,p}^i$	31,752	33,544	40,040
$s_{v,p}^i$	6,754	3,884	2,505
$p_{u,p}^i$	34,981	37,749	45,928
$c^i$	57,003	56,285	56,336
$e^i$	4,555	3,076	1,774
$r_{BA^+}^i$	0,875	0,606	0,292
$r_{BA^-}^i$	0,352	0,287	0,251
$r_{BF}^i$	0,225	0,226	0,061
$\phi_{BA}^i$	4,622	0,209	0,603
$\psi_{BA^+}^i$	12,474	8,138	4,094
$\psi_{BA^-}^i$	1,974	0,010	0,000
$\phi_{BF}^i$	19,944	8,438	18,089
$\psi_{BF^+}^i$	9,967	10,195	0,000
$\psi_{BF^-}^i$	8,180	1,436	14,317

Tableau D.1 Paramètres de l'aube rotor 37 paramétrée à 3 sections.

## ANNEXE E ÉTUDE DE CONVERGENCE DES MAILLAGES ÉLÉMENTS FINIS

Des maillages éléments finis comportant  $n_h \in [6; 60]$  éléments sur la hauteur d'aube sont générés. Pour chacune des dix premières fréquences propres, les erreurs relatives de fréquences entre deux maillages correspondant à des valeurs consécutives de  $n_h$  sont calculées.

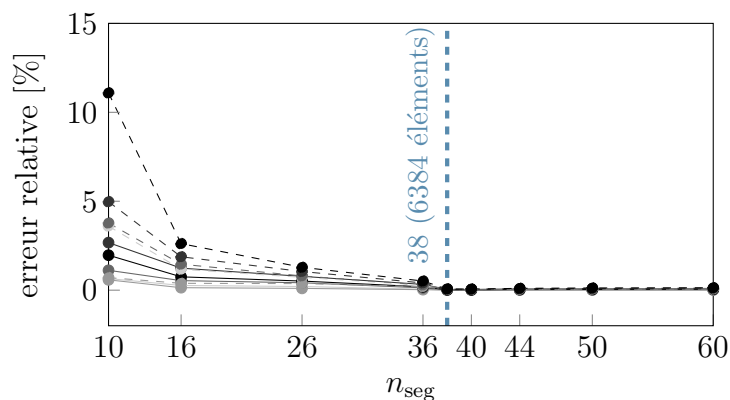


Figure E.1 Étude de convergence du maillage sur les dix premières fréquences propres pour l'aube rotor 37 paramétrée à 5 sections.  $f_1$  (—○—),  $f_2$  (—●—),  $f_3$  (—●—),  $f_4$  (—●—),  $f_5$  (—●—),  $f_6$  (—●—),  $f_7$  (—●—),  $f_8$  (—●—),  $f_9$  (—●—),  $f_{10}$  (—●—).

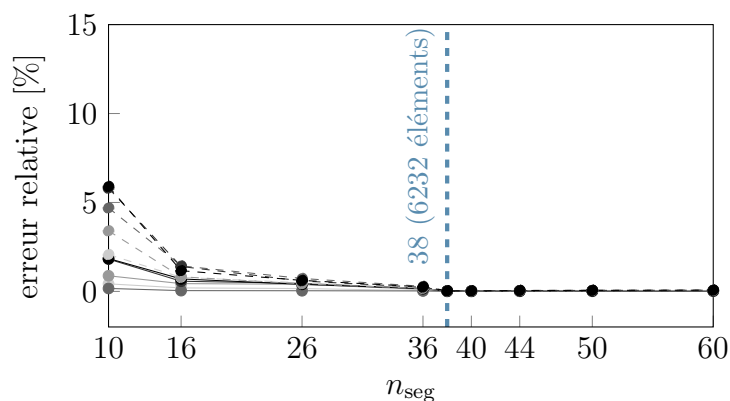


Figure E.2 Étude de convergence du maillage sur les dix premières fréquences propres pour l'aube rotor 67 paramétrée à 5 sections.  $f_1$  (—○—),  $f_2$  (—●—),  $f_3$  (—●—),  $f_4$  (—●—),  $f_5$  (—●—),  $f_6$  (—●—),  $f_7$  (—●—),  $f_8$  (—●—),  $f_9$  (—●—),  $f_{10}$  (—●—).

## ANNEXE F PARAMÈTRES DE LA STRATÉGIE NUMÉRIQUE PRÉDICTIVE

Les simulations de contact effectuées dans le cadre de ce travail sont réalisées avec une stratégie numérique existante basée sur l'intégration temporelle [35]. Les paramètres des modèles relatifs aux aubes rotor 37 et rotor 35 sont donnés dans le tableau F.1 et les paramètres des modèles relatifs à l'aube rotor 67 sont donnés dans le tableau F.2.

### F.1 Aubes rotor 37 et rotor 35

schéma d'intégration	pas de temps [s]	$5 \times 10^{-8}$
	nombre de tours	200
	plage de vitesses d'intérêt [ $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ]	[1250; 1550] (rotor 37) [1150; 1550] (rotor 35)
scénario de contact	nombre de lobes du carter	2
	facteur définissant la largeur angulaire des lobes	0,15
	hauteur de lobe [m]	$6,25 \times 10^{-4}$
	jeu [m]	$5 \times 10^{-4}$
	coefficient de frottement	0,15
modèle réduit	nombre de modes encastrés $\eta$	10
	nombre de nœuds frontière $n_f$	8
	amortissement modal pour les 3 premiers modes	0,001
	amortissement modal pour les autres modes	0,005
	effets centrifuges	non pris en compte

Tableau F.1 Paramètres des simulations de contact pour les aubes rotor 37 et rotor 35.

## F.2 Aube rotor 67

	pas de temps [s]	$5 \times 10^{-8}$
schéma d'intégration	nombre de tours	200
	plage de vitesses d'intérêt [ $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ]	[900; 1780]
	nombre de lobes du carter	2
	facteur définissant la largeur angulaire des lobes	0,15
scénario de contact	hauteur de lobe [m]	$5,25 \times 10^{-4}$
	jeu [m]	$4 \times 10^{-4}$
	coefficient de frottement	0,15
	nombre de modes encastrés $\eta$	10
modèle réduit	nombre de nœuds frontière $n_f$	8
	amortissement modal pour les 3 premiers modes	0,001
	amortissement modal pour les autres modes	0,005
	effets centrifuges	non pris en compte

Tableau F.2 Paramètres des simulations de contact pour les aubes rotor 67.

## ANNEXE G MODÉLISATION DE L'AUBE ROTOR 35

La procédure de rétro-ingénierie présentée dans la section 4.2.3 est appliquée à la CAO d'entrée rotor 35. Le modèle CAO paramétré à 5 sections obtenu est présenté sur la figure G.1, superposé à la CAO d'entrée. Les deux modèles CAO sont visuellement indiscernables. Afin de vérifier la fidélité du modèle paramétré, les critères de comparaison géométriques et dynamiques introduits dans la section 4.3 sont détaillés ci-après.

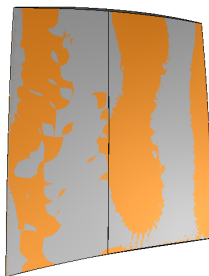


Figure G.1 CAO d'entrée (■) et CAO paramétrée à 5 sections (■) pour l'aube rotor 35.

### G.1 Critères géométriques

La proportion de volume perdu  $\Delta V_{\text{per}}^e$  sur la CAO d'entrée (équation (4.17)) et la variation du volume central  $\Delta V_c$  (équation (4.18)) sont données dans le tableau G.1. Le volume perdu en pied et sommet d'aube est négligeable, tandis que la faible variation de la quantité  $\Delta V_c$  atteste de la bonne représentation de la courbure de l'aube avec 5 sections.

Tableau G.1 Variations du volume de la CAO paramétrée à 5 sections rotor 35.

$\Delta V_{\text{per}}^e$ [%]	$\Delta V_c$ [%]
-0,04	0,5

L'erreur sur les profils, définie à l'équation (4.16), est inférieure à 0,022 pour les 5 profils paramétrés. Cette valeur est inférieure au seuil de validation de 0,05 considéré dans la section 4.3.1.2.

## G.2 Critères dynamiques

Les erreurs sur les dix premières fréquences propres (équation (4.19)) sont présentées dans le tableau G.2. Les erreurs sont très faibles ; en particulier, l'erreur sur la fréquence du premier mode propre est bien inférieure à la limite cible de 1%.

Tableau G.2 Erreurs sur les fréquences propres de l'aube paramétrée à 5 sections par rapport à l'aube d'entrée rotor 35.

$\Delta f_1$	$\Delta f_2$	$\Delta f_3$	$\Delta f_4$	$\Delta f_5$	$\Delta f_6$	$\Delta f_7$	$\Delta f_8$	$\Delta f_9$	$\Delta f_{10}$
0,36	0,28	0,74	0,14	0,68	0,37	-0,17	0,52	0,07	0,16

L'erreur sur la consommation de jeu  $\Delta c$  (équation (4.20)) du nœud au BA pour le premier mode de flexion est de -0,12%, ce qui atteste d'une très bonne fidélité du modèle paramétré. Par ailleurs, les CRF de l'aube d'entrée et de l'aube paramétrée sont calculées comme dans la section 4.3.2.3 et superposées sur la figure G.2. L'accord entre les deux courbes est excellent. À titre illustratif, les cartes d'interactions des deux aubes sont présentées sur la figure G.3. Un très bon accord est également observé.

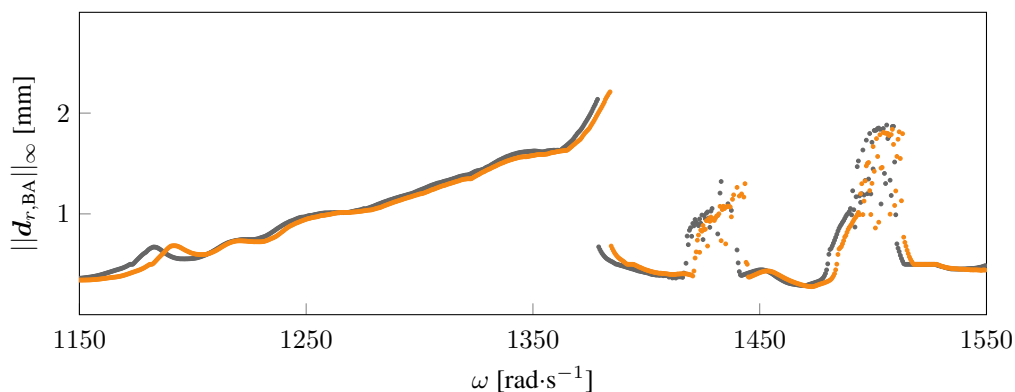
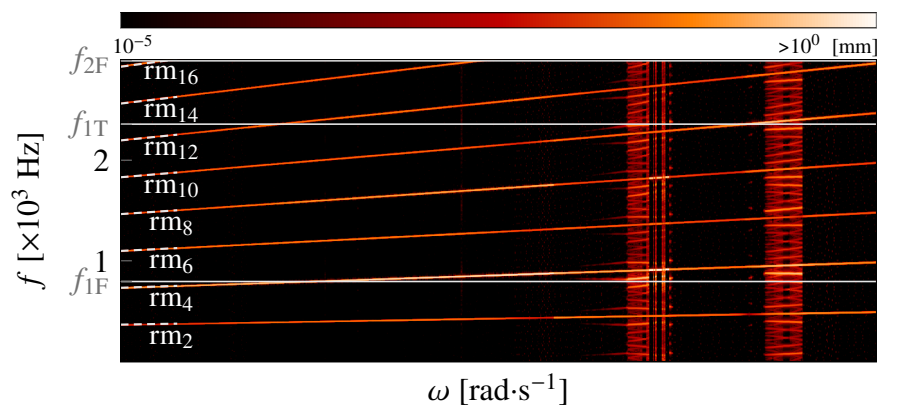
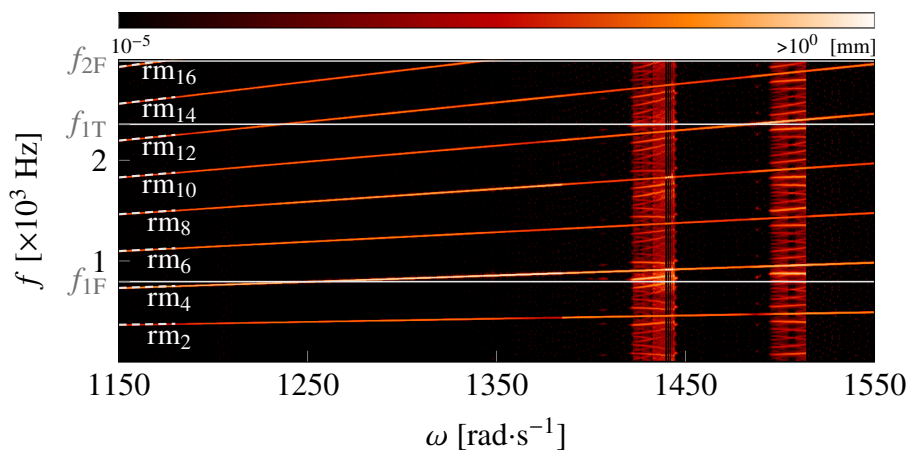


Figure G.2 CRF des aubes rotor 35 d'entrée (●) et paramétrée à 5 sections (●).

Au vu de l'excellent accord obtenu, tant sur les critères géométriques que dynamiques, la haute fidélité du modèle paramétré à 5 sections est attestée. Ce modèle est donc choisi comme aube initiale pour démarrer l'optimisation lors du processus de reconception (figure 3.8) de l'aube rotor 35.



(a) aube d'entrée



(b) aube paramétrée à 5 sections

Figure G.3 Cartes d'interactions des aubes rotor 35 d'entrée et paramétrée à 5 sections.



## ANNEXE H DÉTAILS RELATIFS À LA LA PROCÉDURE D'OPTIMISATION

### H.1 Influence de l'interpolation de la flèche axiale et de l'angle d'inclinaison

Les CRF des aubes initiales rotor 37, rotor 35 et rotor 67 sans (●) et avec (●) interpolation quadratique de la flèche axiale et de l'angle d'inclinaison des sections sur la hauteur d'aube sont présentées sur la figure H.1.

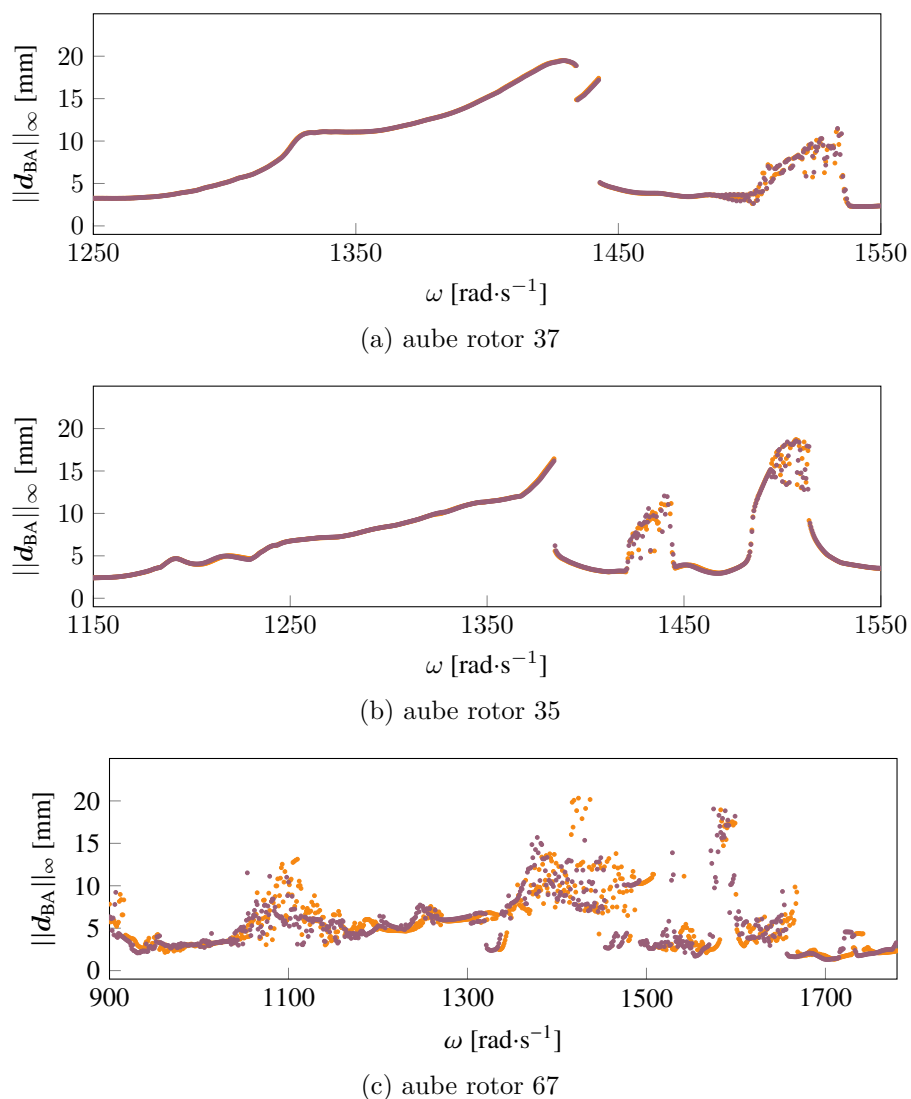


Figure H.1 CRF des aubes initiales rotor 37, rotor 35 et rotor 67 sans (●) et avec (●) interpolation quadratique de la flèche axiale et de l'angle d'inclinaison sur la hauteur d'aube.