

**Titre:** Modélisation multiphysique des disjoncteurs à haute-tension avec le couplage entre les méthodes des frontières immergées et des maillages superposés  
**Title:**

**Auteur:** Renan De Holanda Sousa  
**Author:**

**Date:** 2022

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** De Holanda Sousa, R. (2022). Modélisation multiphysique des disjoncteurs à haute-tension avec le couplage entre les méthodes des frontières immergées et des maillages superposés [Ph.D. thesis, Polytechnique Montréal]. PolyPublie.  
**Citation:** <https://publications.polymtl.ca/10375/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/10375/>  
**PolyPublie URL:**

**Directeurs de recherche:** Jean-Yves Trépanier, & Guillaume Pernaudat  
**Advisors:**

**Programme:** Génie mécanique  
**Program:**

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

**Modélisation multiphysique des disjoncteurs à haute-tension avec le couplage  
entre les méthodes des frontières immergées et des maillages superposés**

**RENAN DE HOLANDA SOUSA**

Département de génie mécanique

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*  
Génie mécanique

Juin 2022

**POLYTECHNIQUE MONTRÉAL**

affiliée à l'Université de Montréal

Cette thèse intitulée :

**Modélisation multiphysique des disjoncteurs à haute-tension avec le couplage  
entre les méthodes des frontières immergées et des maillages superposés**

présentée par **Renan DE HOLANDA SOUSA**

en vue de l'obtention du diplôme de *Philosophiæ Doctor*  
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

**Marcelo REGGIO**, président

**Jean-Yves TRÉPANIÉ**, membre et directeur de recherche

**Guillaume PERNAUDAT**, membre et codirecteur de recherche

**Sébastien LECLAIRE**, membre

**François MORENCY**, membre externe

## DÉDICACE

*A ma famille...*  
*"Dum Spiro Spero".*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, Pr. Jean-Yves Trépanier, pour m'avoir donné l'opportunité d'accomplir un rêve qui est la réalisation de cette thèse. Je le remercie également pour son aide et son soutien très important et très apprécié dans tous les sens, principalement dans les moments les plus difficiles. Merci vraiment d'avoir été un père pour moi pendant mon séjour au Canada. Je ne l'oublierais jamais.

Je remercie mon codirecteur de recherche, Dr. Guillaume Pernaudat, pour l'amitié et les conseils tout à fait pertinents, même avant de débiter mes études doctorales. Merci pour m'accompagner tout au long de mon parcours académique et professionnel. J'ai vraiment un ami sur qui je peux toujours compter.

J'exprime ma gratitude envers mon ancien codirecteur de recherche, Pr. Ricardo Camarero. Merci d'avoir partagé ses connaissances du domaine de la simulation numérique, et de m'avoir aidé pendant la réalisation du projet de recherche et la rédaction de ce document.

Je remercie le Dr. Philippe Robin-Jouan principalement pour m'avoir donné l'opportunité et confiance de réaliser cette thèse et de continuer mon parcours professionnel tant qu'ingénieur de développement d'outil de simulation numérique chez GE Grid Solutions à Villeurbanne.

C'est avec le plus grand des plaisirs que je remercie ma famille : mon père Renato Sousa, ma mère Sofia de Holanda, ma soeur Renata Sousa et mon frère Renno Sousa, pour vraiment plus que tout. Merci d'avoir fait de moi la personne que je suis aujourd'hui et de me soutenir dans mes projets de vie même s'ils m'éloignent physiquement de vous, mais on restera toujours liés par l'amour. Je vous tiens à mon coeur et à mon âme.

Je tiens à remercier ma copine, Vyctoria, pour le soutien et l'amour qu'elle m'accorde tous les jours. Il n'y a pas de mots pour décrire ce que tu représentes pour moi. Merci énormément pour les mots des encouragements. Je t'aime! J'espère du plus profond de mon âme que l'on sera capable d'accomplir tous nos rêves ensemble. "Eu e você, você e eu."

Je remercie mes amis de longue date qui je considère comme mes frères pour toute la vie : Thiago Ayres, Raimundo Vidal (Vidal), Rafael Josino (Stephen) et Lucas Carolino (Frodo). Merci beaucoup pour les rires, les échanges et les moments passés avec vous.

J'ai une profonde reconnaissance pour mes amis : Mike Leibner et Samara Adler. Vous avez été mes parents ici au Canada. Merci d'avoir pensé à moi tout le temps. Je vous aime beaucoup!

De plus, je remercie également les grandes amitiés faites durant la réalisation de la thèse : mes collègues Moustafa Awad et Sujaat Ali. Merci d'avoir été un excellent synonyme de fraternité et d'amitié. Merci pour tout !

Merci à l'organisme CRSNG (Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada), l'entreprise GE (General Electric) et le groupe GPS (Génie Par Simulation) pour leur contribution dans ce projet de thèse.

## RÉSUMÉ

Lors de la modélisation d'un système multiphysique comme un disjoncteur haute tension, le couplage fort entre différents phénomènes physiques et la gestion des géométries complexes et mobiles conduit à un modèle numérique non-linéaire et difficile. Afin d'obtenir des simulations efficaces et robustes dans ce domaine multiphysique, l'approche la plus communément employée est d'adapter les nouvelles méthodes numériques pour mieux convenir à l'ensemble des caractéristiques de l'application, permettant d'assurer un bon compromis entre complexité et performance.

Après une analyse approfondie des différentes méthodologies numériques existantes concernant les différentes contraintes physiques et numériques de l'application des disjoncteurs haute tension (e.g., multiphysique avec des écoulements compressibles à haute vitesse et gradients de pression, géométries rigides mobiles et efficacité numérique pour 2D et 3D simulations), le couplage entre les méthodes des frontières immergées (IBM) et des maillages superposés a été choisi comme la solution la plus prometteuse. En effet, la méthodologie proposée permet simplifier la génération des maillages malgré la complexité géométrique et la prise en compte du déplacement des objets mobiles.

Ce travail a pour objectif de développer une première version d'un code multiphysique 2D axisymétrique basé sur le couplage entre les méthodes IBM et des maillages superposés pour la modélisation des disjoncteur à haute tension.

Pour bien définir les différentes zones de calcul présentes dans un disjoncteur à haute tension, l'intégration d'un modèle géométrie et topologique rigoureux s'est avéré crucial. Pour cela, la notion de la *Topologie Discrète* a été employée. Cela représente un point d'originalité de la thèse.

Pour la méthode IBM, l'approche *IB Cartésien Hybride* a été retenue grâce à une formulation bien adaptée pour une représentation physiquement nette (de l'anglais, sharp) de l'interface fluide-géométrie. Afin de prendre en compte des multiples zones, la version *Interface* de la méthodologie a été implémentée. Afin de relier le maillage à la topologie, le marquage d'éléments a été réalisé par l'algorithme basé sur le parcours géométrique. Permettant de bien représenter les différentes échelles spatiales des géométries, le processus de raffinement hiérarchique basé sur les arbres quaternaires (QuadTree) a été intégré à la méthodologie IBM.

Dans la mise en oeuvre de la méthode des maillages superposés, le processus de couplage des maillages est réalisé par l'approche de *Découpage en Trou Implicite* dont l'algorithme est basé sur la recherche-identification des éléments à désactiver. Le critère de base utilisé pour le découpage en trou est la distance à la paroi en utilisant le concept de la ligne médiatrice comme la région plus appropriée pour le couplage des maillages superposés. L'approche conçue permet de prendre en compte automatique des situations de proximité, voire de contact, entre les courbes à partir de l'échelle du maillage, ceci représentant un point d'originalité. Le champ distance à la paroi a été obtenu par la résolution de l'équation d'Eikonal par la méthode de Balayage Rapide.

La prise en compte des conditions aux limites (i.e., IBM), le transfert de la solution entre les maillages (i.e., méthode des maillages superposés) et l'imposition de la condition d'interface matérielle (i.e., discontinuité des propriétés des matériaux) ont été faits par le schéma de reconstruction linéaire et basé sur la méthode de Moindres Carrés implicite d'ordre 2 et 1 pour les conditions aux limites du type Dirichlet et des types Neumann et Robin, respectivement. L'idée est de coupler les inconnus à reconstruire aux inconnus à résoudre reliés au solveur multiphysique. La condition d'interface matérielle a été imposée par le couplage entre les méthodes de Patankar et de reconstruction double, ceci représentant un autre point d'originalité.

Dans le but de modéliser les phénomènes physiques mis en jeu dans l'application disjoncteur ainsi que de vérifier la méthodologie proposée, le solveur multiphysique a été conçu pour calculer le champ électrique, le rayonnement et l'écoulement fluide en régime compressible. A cet égard, l'approche Volume Fini 2D axisymétrique d'ordre 2 pour les solveurs de Helmholtz (i.e., le champ électrique et le rayonnement) et d'ordre 1 pour le solveur d'Euler avec le schéma de Roe et d'ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) (i.e., l'écoulement fluide) a été utilisé pour la discrétisation spatiale des équations régissant les différentes physiques. Une première version du couplage entre les physique a été aussi réalisée en combinant ces différentes méthodes numériques.

Afin de démontrer la capacité et la faisabilité du couplage IBM et des maillages superposés appliqué à des géométries complexes et mobiles, et de vérifier les méthodologies des modules numériques, principalement les schémas de discrétisation et de reconstruction associés aux solveurs physiques, l'étape de vérification rigoureuse a été menée suite à l'implémentation du code. Les cas tests comprennent la résolution du champ électrique, du rayonnement thermique, de l'écoulement fluide et d'une version simplifiée d'un arc électrique.



L'ensemble des résultats numériques ont démontré une bonne concordance avec les solutions analytiques disponibles ainsi qu'avec celles obtenues par le solveur MC<sup>3</sup> basé sur le maillage non-structuré adaptatif et mobile lors d'une étude comparative. L'ordre de précision établie est d'ordre 1 due à l'imposition des conditions aux limites du type Neumann et Robin.

## ABSTRACT

The numerical simulation of complex multiphysics applications such as high-voltage circuit-breakers, the coupled physical phenomena and the management of moving geometries leads to a difficult and compounded nonlinear model. To obtain efficient and robust such simulations with a good compromise between fidelity and performance requires to adopt novel numerical methods to suit all the demanding characteristics of the application.

We propose a methodology based on the coupling of the Immersed Boundary (IBM) with the Overset Grids Methods as the most promising solution regarding the different physical and numerical requirements of the simulation of high voltage circuit breakers (e.g., plasmas interacting with high-speed unsteady compressible flows and high-pressure gradients, rigid moving geometries). Indeed, the proposed methodology simplifies the generation of meshes despite the geometric complexity of moving objects.

This work aims to develop a first attempt of an axisymmetric 2D multiphysics code based on the coupling between IBM and Overset Grids methods for the modeling of high voltage circuit breakers.

To properly define the different calculation zones existing within a high-voltage circuit breaker, a rigorous geometry and topological model, known as *Discrete Topology*, is integrated with the proposed methodology. This represents a point of originality of the thesis.

For the IBM, the *IB Cartesian Hybrid* approach was chosen for its well-suited formulation to the physically sharp representation of the fluid-geometry interface. In addition, to facilitate the resolution of multiple zones, the *Interface* version of the methodology has been solved. To link the independent mesh with the topology, the tagging of elements was carried out by an algorithm based on the Geometric Marching approach. To capture and represent the different spatial scales of the geometries, the hierarchical refinement process based on QuadTree has been integrated into the IB methodology.

The process of coupling the overset meshes is carried out by the *Implicit Hole Cutting* approach, based on a search-identification algorithm to disable the mesh elements. Moreover, the basic criterion for the hole cutting is the distance field using the concept of the medial axis as the most suitable region for the overset coupling. This approach automatically takes into account situations of proximity, even of contact, between the curves with the spatial resolution of the mesh, this represent an other point of originality. The wall distance field was obtained by solving the Eikonal equation using the Fast Sweeping method.

The boundary conditions imposition (i.e., IBM), the transfer of the solution between the meshes (i.e., Overset Mesh method), and the treatment of the material interface condition were carried out by the linear reconstruction scheme and based on the implicit Least Square method of order 2 and 1 for the boundary conditions of the Dirichlet type and of the Neumann and Robin types, respectively. The idea is to couple the unknowns to be reconstructed with those to be solved linked to the multiphysics solver. The material interface condition was imposed by the coupling between the methods of Patankar and double reconstruction, representing another point of originality.

To verify the proposed methodology and its extension to the circuit breaker application, the multiphysics solver was designed to calculate the electric field, the thermal radiation, and the compressible fluid flow. In this regard, the Finite Volume approach of order 2 for the Helmholtz solvers (i.e., the electric field and the radiation) and of order 1 for the Euler solver with the scheme of Roe and ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) has been implemented for the spatial discretization of the governing equations. This is an original attempt for the coupling between the physics.

To demonstrate the feasibility and capability of the IB with Overset Grid methods coupling for complex and mobile geometries, and to verify the methodologies of the numerical modules, mainly the discretization and reconstruction schemes associated with the physical solvers, a thorough verification process was conducted as the final part of the code development. Test cases include solving electric field, thermal radiation, fluid flow, and a simplified version of an electric arc. All the numerical results demonstrated a good agreement with the available analytical solutions as well as with the numerical solutions obtained by the MC<sup>3</sup> solver during a comparative study. The order of precision established of order 1 due to the imposition of boundary conditions of the Neumann and Robin type.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	ix
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	xi
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiv
LISTE DES FIGURES . . . . .	xv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xxi
CHAPITRE 1 Introduction . . . . .	1
1.1 Domaine d'étude . . . . .	1
1.2 Disjoncteurs haute-tension . . . . .	2
1.2.1 Coupure de l'arc électrique . . . . .	3
1.3 Limitations de la modélisation numérique . . . . .	4
1.4 Objectif général du projet recherche . . . . .	8
1.4.1 Objectifs spécifiques . . . . .	8
1.5 Originalité du projet . . . . .	8
1.6 Hypothèses . . . . .	9
1.7 Structure de la thèse . . . . .	10
CHAPITRE 2 Revue de littérature . . . . .	11
2.1 Méthode de frontières immergées . . . . .	11
2.1.1 Considérations générales sur la méthode IBM . . . . .	12
2.1.2 Vue d'ensemble de la méthodologie IBM . . . . .	13
2.1.3 Méthodes à Interfaces Conservées . . . . .	14
2.1.4 Méthodes à Interfaces Nettes . . . . .	16
2.1.5 L'adaptation de la méthode IBM pour les géométries mobiles . . . . .	19
2.1.6 Comparatif des méthodes IBM . . . . .	23
2.2 Méthode de maillages superposés . . . . .	26

2.2.1	Considérations générales sur la méthode de maillages superposés . . .	27
2.2.2	Vue d'ensemble de la méthode de maillages superposés . . . . .	28
CHAPITRE 3	Méthodologie globale . . . . .	33
3.1	Méthodologie proposée . . . . .	33
3.2	Architecture du code multiphysique . . . . .	36
3.2.1	Géométrie et topologie discrète . . . . .	37
3.2.2	Maillage hiérarchique . . . . .	40
3.2.3	Marquage d'éléments IBM . . . . .	44
3.2.4	Disjoncteur simplifié . . . . .	49
CHAPITRE 4	Module des maillages IBM superposés . . . . .	52
4.1	Méthodologie de traitement des maillages superposés . . . . .	52
4.1.1	Définitions de base . . . . .	54
4.1.2	Hypothèses . . . . .	56
4.1.3	Structure de la méthodologie . . . . .	57
4.1.4	Structure de données . . . . .	67
4.2	Solveur d'Eikonal . . . . .	68
4.2.1	Équation d'Eikonal . . . . .	68
4.2.2	Schéma numérique . . . . .	69
4.2.3	Méthode de Balayage Rapide . . . . .	72
4.2.4	Vérification de solveur d'Eikonal . . . . .	76
4.3	Vérification du module de maillages superposés . . . . .	80
4.3.1	Deux parois verticales parallèles . . . . .	80
4.3.2	Deux parois perpendiculaires . . . . .	83
4.4	Disjoncteur simplifié . . . . .	85
CHAPITRE 5	Solveur multiphysique . . . . .	89
5.1	Solveurs de Helmholtz . . . . .	89
5.1.1	Champ électrique . . . . .	89
5.1.2	Rayonnement thermique . . . . .	90
5.1.3	Schéma de discrétisation numérique . . . . .	91
5.2	Processus de reconstruction . . . . .	96
5.2.1	Prise en compte des conditions aux limites . . . . .	96
5.2.2	Transfert de l'information entre les maillages superposés . . . . .	102
5.2.3	Discontinuité des propriétés des matériaux . . . . .	105
5.2.4	Vérification du schéma de Reconstruction . . . . .	109

5.3	Intégration avec le solveur de Euler . . . . .	112
CHAPITRE 6	Résultats et discussion . . . . .	113
6.1	Implémentation du code numérique . . . . .	113
6.2	Vérification du code 2D axisymétrique . . . . .	113
6.2.1	Vérification - Champ Électrique - ELE . . . . .	115
6.2.2	Vérification - Rayonnement Thermique - RAD . . . . .	126
6.2.3	Vérification - Écoulement Fluide - FLU . . . . .	132
6.2.4	Vérification - Multiphysique - MUL . . . . .	149
6.2.5	Faisabilité - FAI . . . . .	153
CHAPITRE 7	CONCLUSION . . . . .	166
7.1	Synthèse des travaux . . . . .	166
7.2	Limitations de la méthodologie proposée . . . . .	167
7.3	Travaux futurs . . . . .	169
RÉFÉRENCES	. . . . .	170

**LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 6.1	Vérification - Champ électrique . . . . .	114
Tableau 6.2	Vérification - Rayonnement thermique . . . . .	114
Tableau 6.3	Vérification - Écoulement fluide . . . . .	114
Tableau 6.4	Vérification - Multiphysique . . . . .	114
Tableau 6.5	Faisabilité - Écoulement fluide . . . . .	114
Tableau 6.6	Débit massique en kg/s : Zone d'arc électrique. . . . .	152
Tableau 6.7	Débit massique en kg/s dans le canal thermique. . . . .	162
Tableau 6.8	Différence entre les valeurs de débit massique en %. . . . .	162

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Trois approches du développement d'un produit industriel. . . . .	1
Figure 1.2	Composants et configuration simplifiée d'un disjoncteur . . . . .	3
Figure 1.3	Extrait d'un résultat d'un résultat typique sous MC <sup>3</sup> - soufflage de l'arc [1]. . . . .	4
Figure 1.4	Exemple de calcul pour l'évolution de pression : Essai vs Simulation MC <sup>3</sup> [1,2]. . . . .	5
Figure 1.5	Extrait d'un maillage classique mobile et adaptatif dans le logiciel MC <sup>3</sup> . . . . .	6
Figure 1.6	Analyse de la répartition du temps de calcul pour chaque module physique-numérique [1]. . . . .	7
Figure 2.1	Un exemple des géométries non-conforme sur un maillage cartésien. . . . .	12
Figure 2.2	Classification des méthodologies IBM décrite dans le cadre du projet de recherche. . . . .	14
Figure 2.3	Un exemple des éléments "coupés" (en couleur) dans la méthode Cut-Cell, tiré de [3]. . . . .	15
Figure 2.4	Les flux d'un élément coupé, tiré de [4]. . . . .	15
Figure 2.5	Exemple d'un élément (le triangle vert) dont la vitesse doit être interpolée à l'aide de la condition aux limites (les croix marrons) et les éléments fluides (les carrés bleus). . . . .	17
Figure 2.6	Différents choix d'éléments appartenant à la méthode <i>IB Cartésien Hybride</i> . . . . .	18
Figure 2.7	Changement de la nature physique des éléments. . . . .	20
Figure 2.8	Le repère non-inertiel, tiré de [5]. . . . .	21
Figure 2.9	Extrait de la double couche ( <i>Interface</i> et <i>Fictif</i> , connu ici par <i>Forcing points</i> et <i>Pseudo fluid points</i> , respectivement) tiré de [6]. . . . .	22
Figure 2.10	Changement de la nature physique des éléments. . . . .	23
Figure 2.11	Comparatif des méthodes IBM . . . . .	24
Figure 2.12	Exemple des maillages superposés, tiré de [7] . . . . .	26
Figure 2.13	L'ensemble de maillages structurés adaptés, tiré de [8] . . . . .	29
Figure 2.14	L'ensemble de maillages non-structurés (Grid A : le maillage de fond, Grid B : le maillage adapté mobile), tiré de [9] . . . . .	29
Figure 2.15	Conditionnement d'interpolation (les éléments interpolés en carré bleu et en triangle verts, et les flèches rouges la direction de l'information) . . . . .	30
Figure 2.16	Exemple de pré-traitement du maillage, tiré de [8] . . . . .	31



Figure 2.17	L'ensemble d'éléments <i>interpolés</i> , tiré de [10] . . . . .	32
Figure 3.1	Structure numérique du code multiphysique proposé. . . . .	36
Figure 3.2	Exemple de la représentation topologique discrète d'une géométrie, inspiré de [11]. . . . .	37
Figure 3.3	La topologies discrète, inspiré de [11]. . . . .	39
Figure 3.4	Un exemple de raffinement hiérarchique de maillage, inspiré de [11]. .	40
Figure 3.5	Critère 1 de raffinement (e.g., maximum 4 points par élément), tiré de [11]. . . . .	41
Figure 3.6	Critères 1 et 2 de raffinement (e.g., maximum 2 points par élément et 3 niveaux de raffinement), tiré de [11]. . . . .	41
Figure 3.7	Critères 3 et 4 de raffinement (e.g., maximum 2 points par élément, 3 niveaux de raffinement et 1 couche ajoutée), tiré de [11]. . . . .	42
Figure 3.8	Les valeurs de $\Delta N_d$ , tiré de [11]. . . . .	43
Figure 3.9	Les informations stockées des éléments du maillage hiérarchique, tiré de [11]. . . . .	43
Figure 3.10	La classification des éléments IBM marqués, tiré de [11]. . . . .	45
Figure 3.11	L'algorithme MG, tiré de [11]. . . . .	46
Figure 3.12	Le triage des éléments intersectés, tiré de [11]. . . . .	46
Figure 3.13	La détection des éléments NIIC, tiré de [11]. . . . .	47
Figure 3.14	Identification des éléments FC et OC, tiré de [11]. . . . .	47
Figure 3.15	Informations stockées des éléments IC et IOC, tiré de [11]. . . . .	48
Figure 3.16	Topologie Discrète - Disjoncteur simplifié. . . . .	49
Figure 3.17	Disjoncteur simplifié - Zone Fluide à gauche . . . . .	49
Figure 3.18	Disjoncteur simplifié - Zone Fluide à droite . . . . .	50
Figure 3.19	Disjoncteur simplifié - Zone Fluide - Zoom. . . . .	50
Figure 3.20	Disjoncteur simplifié - Zones solides. . . . .	51
Figure 4.1	Exemple de l'adaptation et du couplage des mailles superposées. . . .	53
Figure 4.2	Exemple de ligne médiatrice. . . . .	53
Figure 4.3	Topologie et maillages du cas test : Un cercle mobile et un cercle fixe.	55
Figure 4.4	La classification d'éléments des maillages superposés. . . . .	55
Figure 4.5	Exemple de situation de contact avec les courbes alignées. . . . .	56
Figure 4.6	Zone d'intersection. . . . .	58
Figure 4.7	Identification des éléments de l'étape 1 : Maillage Mobile. . . . .	58
Figure 4.8	Les zones de couche et interne pour le maillage fixe. . . . .	59
Figure 4.9	Exemple d'application sans détection de proximité, tiré de [11]. . . .	59
Figure 4.10	Identification des éléments de l'étape 1 : Maillage Fixe. . . . .	60

Figure 4.11	Superposition des champs distance. . . . .	61
Figure 4.12	Champs distance. . . . .	61
Figure 4.13	Reconstruction de la valeur de la distance à la paroi dans le repère du maillage opposé. . . . .	62
Figure 4.14	Identification des éléments de l'étape 2. . . . .	62
Figure 4.15	Les Zones 1, 3 et 4 pour la détection des éléments <b>Interpolé</b> . . . . .	63
Figure 4.16	La zone 2 pour la détection des éléments <b>Interpolé</b> . . . . .	64
Figure 4.17	Identification des éléments de l'étape 3. . . . .	66
Figure 4.18	Visualisation des couches de transfert entre les mailles de l'étape 3. Les <b>Interpolés</b> des maillages fixe et mobile, respectivement, en rouge et en bleu. . . . .	67
Figure 4.19	Molécule de calcul cartésien de l'élément $P$ . . . . .	69
Figure 4.20	Voisinage hiérarchique. . . . .	71
Figure 4.21	Les directions de balayage en 2D, dont l'élément initial de la liste signalé avec le carré bleu. . . . .	73
Figure 4.22	Résultats du cas-test : paroi verticale. . . . .	77
Figure 4.23	Étude de convergence de l'erreur numérique. . . . .	79
Figure 4.24	Résultats du cas-test Deux Cercles. . . . .	79
Figure 4.25	Topologies discrètes : Deux parois verticales parallèles. . . . .	80
Figure 4.26	Maillages superposés : Deux parois verticales parallèles. . . . .	81
Figure 4.27	Visualisation de la ligne médiatrice sur le maillage fixe du cas-test : Deux parois verticales parallèles. . . . .	81
Figure 4.28	Résultats : Deux parois verticales parallèles. Les <b>Interpolés</b> des maillages fixe et mobile, respectivement, en rouge et en bleu. . . . .	82
Figure 4.29	Topologies discrètes. . . . .	83
Figure 4.30	Résultat - Parois Perpendiculaires. Les <b>Interpolés</b> des maillages fixe et mobile, respectivement, en rouge et en bleu. . . . .	84
Figure 4.31	Les topologies discrètes fixe et mobile superposées - Disjoncteur Simplifié. . . . .	85
Figure 4.32	Champ distance - Topologies Mobiles - Disjoncteur Simplifié. . . . .	86
Figure 4.33	Champ distance - Topologies Fixe - Disjoncteur Simplifié. . . . .	86
Figure 4.34	Maillages superposés. - Disjoncteur Simplifié. . . . .	87
Figure 4.35	Visualisation des situations de proximité - Disjoncteur Simplifié. . . . .	88
Figure 5.1	Molécule de calcul cartésien de l'élément $P$ - 2D axisymétrique. . . . .	91
Figure 5.2	Voisinage hiérarchique. . . . .	94
Figure 5.3	Exemple de reconstruction - Condition limites. . . . .	99

Figure 5.4	Exemple de reconstruction - Transfert de l'information entre les maillages superposés. . . . .	103
Figure 5.5	Condition d'interface matérielle - Approche de Patankar. . . . .	106
Figure 5.6	Condition d'interface matérielle - Approche de reconstruction double. . . . .	108
Figure 5.7	Configuration et topologie du cas-test Piston. . . . .	109
Figure 5.8	Maillages du cas-test Piston pour la vérification du schéma de Reconstruction. . . . .	110
Figure 5.9	Résultats du cas-test Piston pour la vérification du schéma de Reconstruction. . . . .	111
Figure 6.1	Configuration et maillage : Conducteur à deux matériaux constants. . . . .	115
Figure 6.2	Résultat numérique : Conducteur à deux matériaux constants. . . . .	117
Figure 6.3	Solution à la section médiane : Conducteur à deux matériaux constants. . . . .	117
Figure 6.4	Configuration et maillage : Conducteur incliné à un matériau non-linéaire. . . . .	118
Figure 6.5	Résultat numérique du cas-test pour le maillage 160 x 160 : Conducteur incliné à un matériau non-linéaire. . . . .	119
Figure 6.6	Étude de l'erreur - Conducteur incliné à un matériau non-linéaire. . . . .	120
Figure 6.7	Solution à la section médiane du cas test pour le maillage 160 x 160 : Conducteur incliné à un matériau non-linéaire. . . . .	120
Figure 6.8	Configuration : Conducteur mobile. . . . .	121
Figure 6.9	Évolution du maillage au cours du temps : Conducteur mobile. . . . .	122
Figure 6.10	Résultat numérique à la position initiale : Conducteur mobile. . . . .	123
Figure 6.11	Résultat numérique à la position médiane : Conducteur mobile. . . . .	124
Figure 6.12	Résultat numérique à la position finale : Conducteur mobile. . . . .	125
Figure 6.13	Configuration et maillage : Cylindre. . . . .	126
Figure 6.14	Loupe - Maillage hiérarchique 20 x 10 : Cylindre. . . . .	127
Figure 6.15	Résultat numérique du cas-test pour le maillage 320 x 160 : Cylindre. . . . .	127
Figure 6.16	Solution à la section médiane du cas test pour le maillage 320 x 160 : Cylindre. . . . .	128
Figure 6.17	Étude de l'erreur : Cylindre. . . . .	129
Figure 6.18	Configuration et maillage : Sphères concentriques. . . . .	130
Figure 6.19	Résultat numérique du cas test pour le maillage 256 x 256 : Sphères concentriques. . . . .	131
Figure 6.20	Étude de l'erreur : Sphères concentriques. . . . .	131
Figure 6.21	Configuration et maillage : Écoulement radial subsonique. . . . .	133
Figure 6.22	Étude de l'erreur : Écoulement radial subsonique. . . . .	134

Figure 6.23	Champ de pression du cas-test pour le maillage 192 x 192 : Écoulement radial subsonique. . . . .	134
Figure 6.24	Champ du nombre de <i>Mach</i> du cas-test pour le maillage 192 x 192 : Écoulement radial subsonique. . . . .	135
Figure 6.25	Configuration : Piston sans entrefer. . . . .	136
Figure 6.26	Exemple des maillages : Piston sans entrefer. . . . .	137
Figure 6.27	Zones de l'écoulement : Piston, inspiré de [11]. . . . .	138
Figure 6.28	Distribution de la pression à $t = 15$ ms : Piston sans entrefer. . . . .	138
Figure 6.29	Distribution de la vitesse $u$ à $t = 15$ ms : Piston sans entrefer. . . . .	138
Figure 6.30	Distribution de la vitesse $v$ à $t = 15$ ms : Piston sans entrefer. . . . .	139
Figure 6.31	Distribution de la densité à $t = 15$ ms : Piston sans entrefer. . . . .	139
Figure 6.32	Profil de la pression à $r = 2,5$ m à $t = 15$ ms : Piston sans entrefer. . . . .	139
Figure 6.33	Profil de la vitesse $u$ à $r = 2,5$ m à $t = 15$ ms : Piston sans entrefer. . . . .	140
Figure 6.34	Topologie : Piston avec entrefer. . . . .	141
Figure 6.35	Exemple des maillages : Piston sans entrefer. . . . .	141
Figure 6.36	Distribution de la pression à $t = 15$ ms : Piston avec l'entrefer non détecté. . . . .	142
Figure 6.37	Distribution de la vitesse $u$ à $t = 15$ ms : Piston avec l'entrefer non détecté. . . . .	142
Figure 6.38	Distribution de la vitesse $v$ à $t = 15$ ms : Piston avec l'entrefer non détecté. . . . .	142
Figure 6.39	Distribution de la densité à $t = 15$ ms : Piston avec l'entrefer non détecté. . . . .	143
Figure 6.40	Profil de la pression à $r = 2,5$ m et à $t = 15$ ms : Piston avec l'entrefer non détecté. . . . .	143
Figure 6.41	Profil de la vitesse $u$ à $r = 2,5$ m et à $t = 15$ ms : Piston avec l'entrefer non détecté. . . . .	143
Figure 6.42	Maillages : Piston avec entrefer. . . . .	145
Figure 6.43	Étude de convergence de la solution avec le raffinement du maillage. . . . .	145
Figure 6.44	Distribution de la pression à $t = 15$ ms : Piston avec entrefer. . . . .	146
Figure 6.45	Distribution de la vitesse $u$ à $t = 15$ ms : Piston avec entrefer. . . . .	146
Figure 6.46	Distribution de la vitesse $v$ à $t = 15$ ms : Piston avec entrefer. . . . .	146
Figure 6.47	Distribution de la densité à $t = 15$ ms : Piston avec entrefer. . . . .	147
Figure 6.48	Profil de la pression à $r = 2,5$ m et à $t = 15$ ms : Piston avec entrefer. . . . .	147
Figure 6.49	Profil de la vitesse $u$ à $r = 2,5$ m et à $t = 15$ ms : Piston avec entrefer. . . . .	147
Figure 6.50	Topologie et conditions aux limites : Zone d'arc électrique. . . . .	149
Figure 6.51	Maillage 40 x 120 : Zone d'arc électrique. . . . .	150

Figure 6.52	Résultats - Fluide pour le maillage 80 x 240 : Zone d'arc électrique. . . . .	151
Figure 6.53	Résultats - Électrique pour le maillage 80 x 240 : Zone d'arc électrique.	151
Figure 6.54	Topologie : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié. . . . .	153
Figure 6.55	Maillage II : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié. . . . .	154
Figure 6.56	Maillage non-structuré adaptatif de MC <sup>3</sup> équivalent au Maillage II IBM.	154
Figure 6.57	Conditions aux limites : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié.	155
Figure 6.58	Mouvement de translation des pièces mobiles (i.e., la tige et le piston) : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié. . . . .	156
Figure 6.59	Maillage II au cours du temps : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié. . . . .	157
Figure 6.60	Résultats numériques à $t = 1$ ms : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié. . . . .	158
Figure 6.61	Résultats numériques à $t = 4,5$ ms : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié. . . . .	159
Figure 6.62	Résultats numériques à $t = 8$ ms : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié. . . . .	160
Figure 6.63	Emplacement de la sonde de pression. . . . .	161
Figure 6.64	Courbe de pression au volume thermique au cours du temps. . . . .	161
Figure 6.65	Emplacement de la surface (ligne) pour le calcul du débit massique : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié. . . . .	162
Figure 6.66	Courbe de masse et de volume de gaz à l'intérieur de la chambre de coupure au cours du temps. . . . .	163

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

ADT	Alternating-Digital Tree
ALE	Arbitrary Lagrangian-Eulerian
AMR	Automatic Mesh Refinement
BMIC	Boundary Material Interface Cell
CSF	Couche Superposition Fixe
ESF	Extérieur Superposition Mobile
ESM	Extérieur Superposition Mobile
FC	Face Cell
FSM	Fast Sweeping Method
FVM	Finite Volume Method
IB	Immersed Boundary
IBM	Immersed Boundary Method
IC	Interface Cell
IDW	Inverse Distance Weighting
IIC	Intersected Interface Cell
IMIC	Internal Material Interface Cell
IOC	Interface Outside Cell
ISF	Intérieur Superposition Fixe
ISM	Intérieur Superposition Mobile
LTE	Local Thermodynamic Equilibrium
MC <sup>3</sup>	Modelling and Computation of Circuit-Breaker Chamber
NIIC	Non-Intersected Interface Cell
OC	Outside Cell
OOP	Object-Oriented Programming
PG	Parcours Géométrique
PTFE	Polytétrafluoroéthylène (Téflon)
RBF	Radial Basis Function
SF <sub>6</sub>	Hexafluorure de soufre

## CHAPITRE 1 Introduction

### 1.1 Domaine d'étude

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la simulation multiphysique, et porte précisément sur la modélisation de l'ensemble des phénomènes physiques mis en jeu lors du fonctionnement des disjoncteurs à haute-tension dans le but de prédire la coupure de l'arc électrique.

La multiphysique est une approche de modélisation, de simulation et d'analyse, permettant une étude complète de systèmes complexes : les disjoncteurs à haute-tension sont un bon exemple, où la prise en compte et le couplage des différentes physiques sont impérativement nécessaires pour une représentation précise et fiable des phénomènes.

Historiquement, avant l'utilisation des approches de modélisation-simulation numériques dont les simulations multiphysiques, le développement d'une nouvelle technologie a été souvent basé sur l'approche expérimentale et la modélisation mathématique (Fig. 1.1).

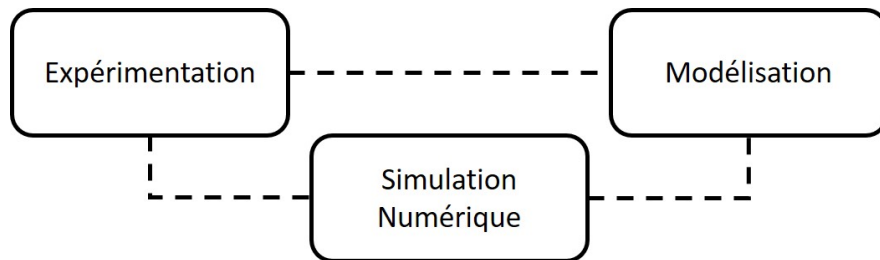


Figure 1.1 Trois approches du développement d'un produit industriel.

L'approche expérimentale dans le développement d'un nouveau disjoncteur haute-tension s'avère onéreuse à cause du coût élevé des essais pour chaque prototype conçu. Par contre, en s'appuyant exclusivement sur la modélisation mathématique, le projet ne peut pas être validé dû au manque de mesures expérimentales. De plus, à cause de la complexité des phénomènes physiques et de la géométrie, l'étude théorique est souvent approchée et permet uniquement d'avoir un point de départ pour la conception des prototypes.

La modélisation-simulation numérique pour les applications industrielles permet le remplacement d'une partie des essais par des simulation numériques robustes et prédictives, réduisant ainsi les coûts des projets. Cependant, afin de modéliser l'ensemble des physiques et de les simuler correctement, on rencontre de nombreux défis d'origines différentes : d'un côté, la modélisation de la physique, et d'un autre côté le choix des méthodes numériques pour la résolution des équations.

Effectivement, lors de la modélisation d'un système multiphysique complexe, la prise en compte du fort couplage des phénomènes physiques entraîne un modèle généralement non-linéaire, donc plus complexe numériquement et plus coûteux informatiquement, à cause du nombre élevé de variables et d'équations à résoudre.

Pour des simulations performantes et robustes, on identifie deux approches communément employées. La première consiste à simplifier les modèles mathématiques pour le couplage des physiques. Cependant, cette approche peut malheureusement entacher la prédiction des résultats. Dans la deuxième approche, les méthodes numériques sont plutôt conçues et adaptées à l'application en prenant en compte les contraintes et le couplage des modèles physiques permettant d'assurer un bon compromis entre complexité et performance.

La recherche menée dans ce projet s'intéresse principalement à choisir et à adapter des méthodes numériques modernes pour la simulation multiphysique, ayant comme base une modélisation physique déjà définie et validée pour décrire les phénomènes de la coupure de l'arc électrique.

## 1.2 Disjoncteurs haute-tension

Le disjoncteur haute-tension est un appareil qui interrompt un courant électrique dans les conditions de fonctionnement anormaux, afin de protéger le réseau électrique. La Fig. 1.2 illustre schématiquement la configuration des principaux composants d'un disjoncteur, qui comprend :

1. **Tige** et **Tulipe** : assure l'attachement de l'arc lors de l'ouverture du disjoncteur en mode interruption du courant. De plus, la Tige est mobile (i.e., déplacement vers la gauche).
2. **Buse** : contrôle l'écoulement de gaz lors du fonctionnement de l'appareil. Elle est composée de PTFE (Téflon).
3. **Volume thermique** : accumule des gaz chauds et fortement pressurisés pour assurer l'effet de soufflage sur l'arc.
4. **Piston** : augmente l'effet de soufflage sur l'arc par son déplacement vers la gauche.
5. **Canal thermique** : guide le gaz entre la zone de l'arc et le volume thermique.
6. **Capot** : offre une protection diélectrique et thermique à la tulipe.



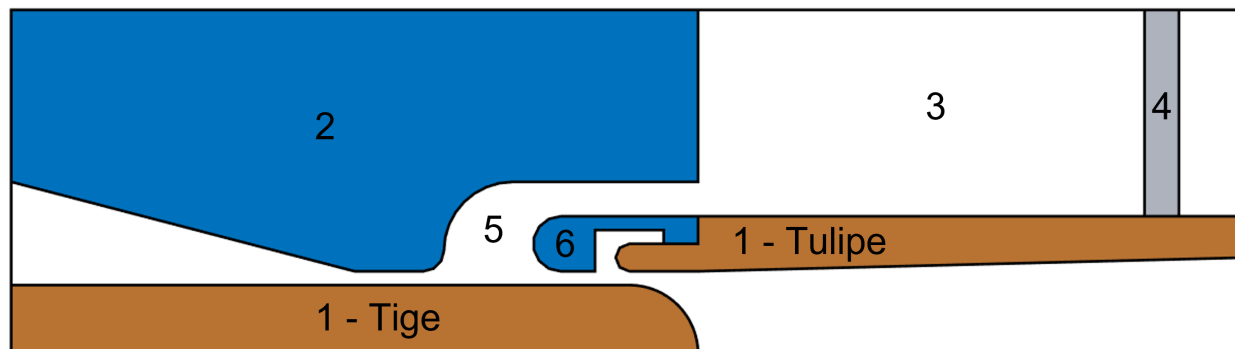


Figure 1.2 Composants et configuration simplifiée d'un disjoncteur .

### 1.2.1 Coupure de l'arc électrique

Le processus de coupure de l'arc électrique sur un réseau à courant alternatif comprend les étapes suivantes [1] :

1. Un arc électrique se forme entre les contacts d'arc (tige et tulipe) à cause du passage courant.
2. L'énergie de l'arc crée un gaz chaud et pressurisé (plasma thermique) (e.g., d'environ 25000 K et 100 bar, respectivement) qui se détend en remplissant le volume thermique.
3. La température et la pression dans la zone de l'arc décroissent dû à la perte d'énergie par le rayonnement thermique et le passage du courant par zéro (i.e, l'apport d'énergie devient minimal).
4. L'écoulement du gaz s'inverse grâce à la différence de pression entre les zones de l'arc et du volume thermique, et au déplacement du piston.
5. Avec le soufflage et l'augmentation de la résistance électrique (i.e., la distance entre les contacts), l'arc est refroidi, et le gaz redevient isolant, ce qui coupe l'arc électrique.

### 1.3 Limitations de la modélisation numérique

Pour la modélisation des phénomènes physiques lié à la coupure de l'arc, différents outils de simulation sont disponibles et utilisés : COMSOL [12], ANSYS FLUENT [13–15], Phoenix [16] et Open-FOAM [17]. Cependant, les fabricants préfèrent plutôt développer des logiciels à l'interne afin d'obtenir une modélisation multiphysique complète du fonctionnement d'un disjoncteur haute-tension [18–21]. Cela permet également d'avoir un outil de simulation performant informatiquement et adapté à la complexité et aux contraintes physiques et géométriques du fonctionnement de l'appareil.

Le logiciel MC<sup>3</sup> (Modelling and Computation of Circuit-Breaker Chamber) [1] est un outil de simulation 2D/2D-axisymétrique multiphysique des disjoncteurs haute-tension, développé dans le cadre d'une collaboration entre l'École Polytechnique de Montréal et ALSTOM-Grid (maintenant GE Grid Solutions). La Fig. 1.3 illustre un résultat de calcul obtenu par ce logiciel.

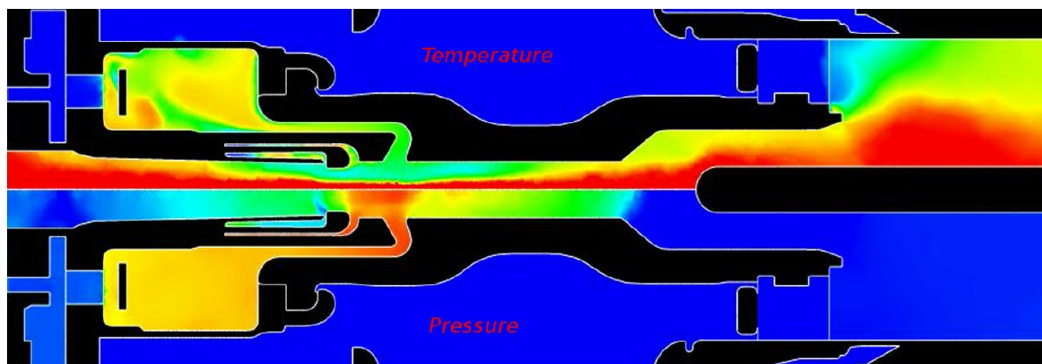


Figure 1.3 Extrait d'un résultat d'un résultat typique sous MC<sup>3</sup> - soufflage de l'arc [1].

Ce logiciel comprend des modèles physiques et numériques modélisent divers phénomènes physiques couplés résultant de la coupure électrique :

- **Maillage non-structuré mobile et adaptatif basé sur l'approche ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian)** : génère et adapte le maillage, en suivant le mouvement des parties mobiles du disjoncteurs [22, 23].
- **Écoulement de fluide** : modélise l'écoulement d'un fluide compressible, supersonique (un nombre de *Mach* d'environ 1,5) et non-visqueux basé sur les équations d'Euler. En effet, l'action de coupure est engendrée par la mise en mouvement impulsive du piston qui ne permet pas le développement important des effets visqueux. De plus, le système est en équilibre thermodynamique local (LTE, Local Thermodynamic Equilibrium) [22–24]. Ce modèle prend en compte des termes sources : l'apport de masse

par l'ablation, l'apport d'énergie par l'arc et l'apport de momentum par le champ magnétique.

- **Modèle de gaz réel** : simule le gaz  $\text{SF}_6$  en respectant les propriétés thermochimiques et les conditions de pression, de vitesse et de température élevés de l'écoulement [25].
- **Arc électrique** : modélise l'arc comme un gaz chaud et ionisé généré et maintenu par l'effet Joule [26].
- **Équations de Maxwell** : simule les champs électrique et magnétique [26–28].
- **Rayonnement thermique** : modélise le rayonnement thermique. Pour cela, on se sert du modèle P1 [29] ou modèle FVM (Finite Volume Method) [30].
- **Ablation** : simule l'ajout de masse par la sublimation du PTFE (Téflon) [31–33].

Cet outil modélise un ensemble de physiques lors de l'ouverture du disjoncteur haute-tension, c'est-à-dire la phase de l'arc électrique à fort courant. A titre d'exemple, la Fig. 1.4 illustre la précision et validité des simulations de  $\text{MC}^3$  en comparaison avec des mesures prises sur un appareil de taille réelle.

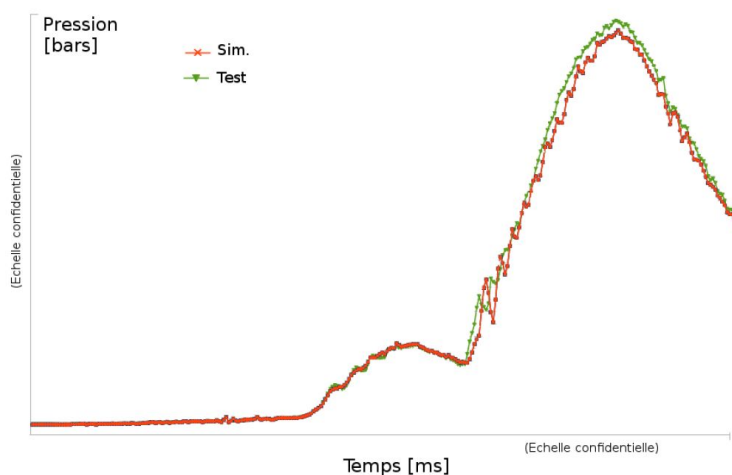
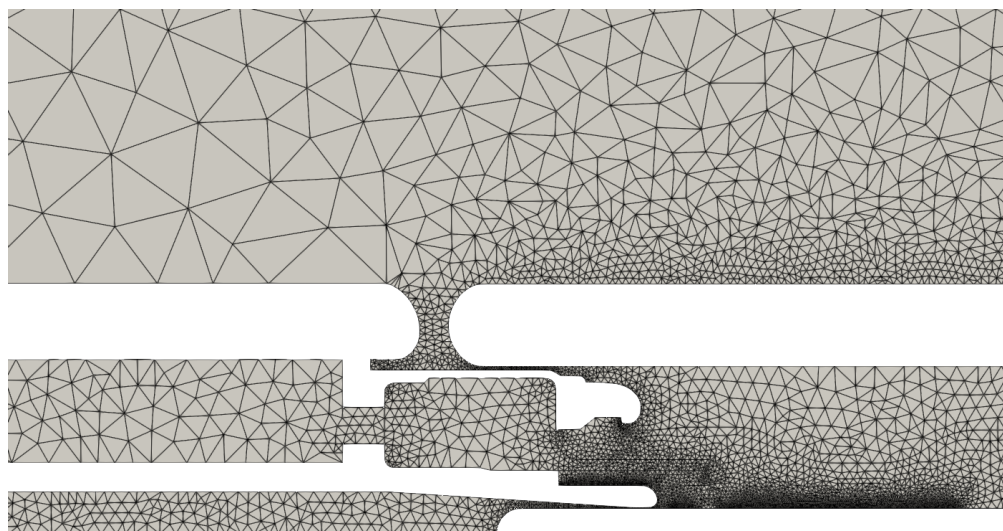


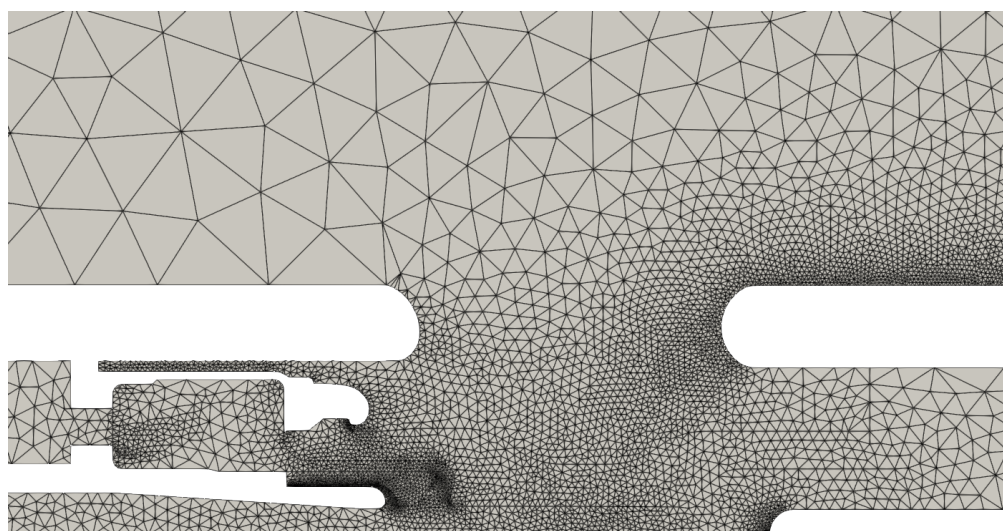
Figure 1.4 Exemple de calcul pour l'évolution de pression : Essai vs Simulation  $\text{MC}^3$  [1, 2].

Cependant, au niveau de l'efficacité du calcul numérique, l'outil présente encore des limitations pour la modélisation multiphysique. Le choix d'utiliser une approche basée sur les maillages non-structurés entraîne une modélisation et une résolution multiphysique assez lourde et complexe numériquement. En effet, l'une des tâches les plus difficiles est la génération d'un maillage suffisamment fin, bien adapté à la physique et au mouvement des parois. Pour cela, l'utilisation d'un maillage non-structuré adapté à la courbure et à la proximité des pièces est utilisé. De plus, avec des frontières mobiles et/ou déformables, la tâche d'adaptation du maillage complexifie le processus de calcul et en augmente le coût.

D'une manière globale, cette tâche de remaillage et d'adaptation représente environ 24 % du temps de calcul d'une simulation multiphysique (Fig. 1.6), et s'avère plus coûteuse que le module des autres physiques, sauf la dynamique des fluides [1]. La Fig 1.5, tirée de [1], illustre la complexité du maillage mobile et adaptatif dans une simulation de la chambre de coupure d'arc électrique dans un disjoncteur haute-tension.



(a) L'appareil fermé



(b) L'appareil ouvert

Figure 1.5 Extrait d'un maillage classique mobile et adaptatif dans le logiciel MC<sup>3</sup>.

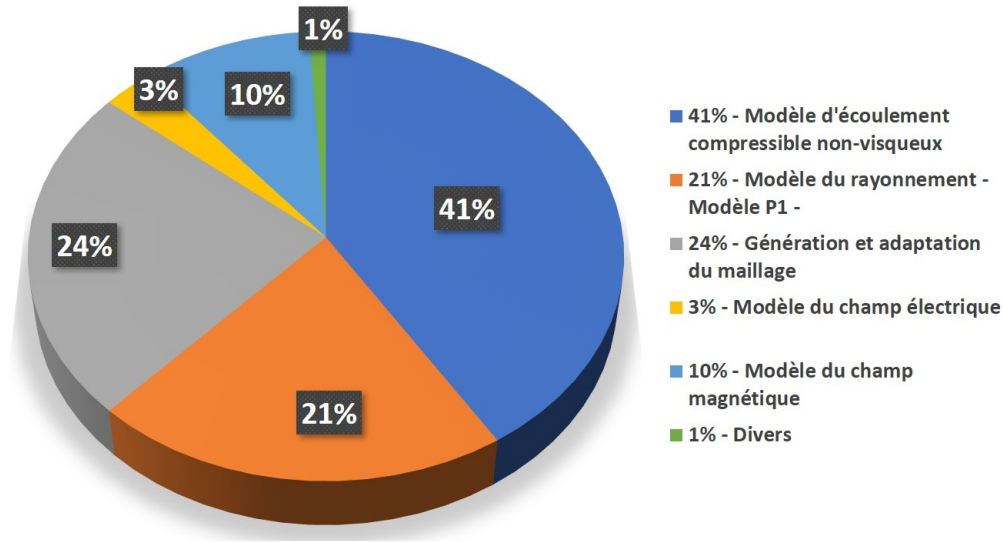


Figure 1.6 Analyse de la répartition du temps de calcul pour chaque module physique-numérique [1].

On propose donc un nouveau modèle de maillage, afin de faciliter la prise en compte du déplacement des géométries mobiles, de capturer et prédire les phénomènes transitoires des physiques, de réduire les coûts numériques et informatiques (l'utilisation des ressources), et éventuellement de rendre possible l'extension pour les applications 3D.

Ce nouveau modèle de maillage est basé sur le couplage entre les méthodes des frontières immergées (IBM, *Immersed Boundary Method*) et des maillages superposés (*Overset Grid Method*) afin de simplifier, respectivement, la génération du maillage vis-à-vis de la complexité géométrique et la prise en compte des géométries mobiles.

A la connaissance de l'auteur, la simulation multiphysique des disjoncteur à haute tension est basé à date sur l'approche de maillage mobile et du type *body-fitted* [15, 18–21]. Donc, le couplage proposé représente une innovation et une originalité pour la modélisation de l'appareil.

Comme l'approche numérique de base pour la discrétisation du domaine de calcul sera revue, les modèles numériques doivent être adaptés afin de maintenir une plate-forme de simulation cohérente. Cependant, l'ensemble des modèles physiques de l'outil MC<sup>3</sup> sera ré-utilisé, principalement pour l'étape de vérification du modèle proposé.

L'analyse et la justification de ces choix seront discutées en détail dans la revue de littérature au Chapitre 2.

## 1.4 Objectif général du projet recherche

Concevoir le couplage entre les méthodes IBM et des maillages superposés pour la modélisation multiphysique des disjoncteurs à haute tension.

### 1.4.1 Objectifs spécifiques

Afin de subdiviser l'ensemble de travaux de la recherche de ce projet, les objectifs spécifiques ont été établis permettant d'atteindre l'objectif général.

**Objectif Spécifique n° 1** : Intégrer un modèle géométrique et topologique rigoureux avec les approches IBM et de maillages superposés.

**Objectif Spécifique n° 2** : Concevoir un modèle numérique de maillages superposés, en considérant les multiples échelles d'espace et les géométries mobiles.

**Objectif Spécifique n° 3** : Développer un modèle multiphysique basé sur la méthode de frontières immergées en prenant en compte l'application à multi-matériaux.

**Objectif Spécifique n° 4** : Coupler et intégrer les modèles à un code numérique de calcul multiphysique 2D axisymétrique pour démontrer la précision des algorithmes et illustrer la versatilité du couplage.

## 1.5 Originalité du projet

L'originalité principale de la thèse est le développement du couplage entre les méthodes de frontières immergées et de maillages superposés pour la modélisation-simulation multiphysique de l'ensemble des physiques et des contraintes géométriques mobiles retrouvées dans un disjoncteur haute-tension.

On précise les points d'originalité liés à la méthode proposée :

- Une approche de la méthode de maillages superposés permettant la prise compte automatique de situations de proximité (e.g., les courbes superposés ou la présence de l'entrefer) à partir de l'échelle du maillage.
- Une approche IBM adaptée à la modélisation multiphysique avec une définition rigoureuse de la géométrie des régions multi-matériaux et des différentes zones de calcul pour les solveurs.
- Un schéma pour l'imposition des conditions d'interface matérielle intégrant les approches de Patankar et de reconstruction implicite de moindres carrés.

A la connaissance de l'auteur, le couplage numérique proposé dans la méthodologie n'a pas été profondément étudié et étendu aux contraintes susmentionnées, mettant en évidence l'originalité et l'innovation de l'approche développée.

## 1.6 Hypothèses

Les hypothèses suivantes délimitent et précisent, respectivement, le développement et les limitations des travaux réalisés dans le cadre de cette thèse :

- Les géométries sont non-déformables et symétriques selon l'axe azimutale. A cet égard, l'approche 2D axisymétrique du solveur multiphysique a été implémentée. Toutefois, le nouveau modèle de maillage proposé ainsi que le solveur multiphysique ont été conçus en prévoyant la faisabilité d'une extension 3D.
- Pour l'ensemble des modules physiques, le phénomène de l'ablation n'a pas été prise en compte permettant de conserver l'aspect non-déformable des géométries.
- Le modèle magnétique a aussi été mise de côté à cause de la formulation à une équation basée uniquement sur la composante azimutale du champ magnétique [1], qui n'est plus valide en considérant une extension en 3D de l'application disjoncteur à haute-tension.
- Le modèle de gaz parfait a été utilisé facilitant le développement et principalement la vérification du solveur de Euler.
- Le modèle P1 a été choisi pour la modélisation du rayonnement thermique grâce à la nature elliptique de l'équation différentielle (i.e., de Helmholtz) à résoudre similaire à d'autres physiques. Cela nous a aidé à concevoir les solveurs physiques avec la même structure numérique.
- Le mouvement relatif des pièces mobiles est de translation seulement.
- Le langage MATLAB a été utilisé pour le développement de cette première version plate-forme afin de faciliter la programmation et le prototypage de différentes fonctionnalités et modules du code numérique. Cependant, cela a limité les choix des maillages pour l'étape de vérification en raison de la performance réduite du calcul numérique. Il est à noter cependant que l'ensemble des développements a été réalisé en se servant du paradigme de programmation du type Orientée-Objet (OOP, *Object-Oriented Programming*) et que l'on prévoit également une extension en C++.

## 1.7 Structure de la thèse

Ce document est organisé et subdivisé en six chapitres :

- **Chapitre 1** : présente le domaine de la simulation multiphysique, l'application disjoncteurs haute-tension et la motivation de la thèse. Ensuite, la méthodologie proposée est introduite ainsi que les objectifs, l'originalité, les hypothèses et la structure de ce document.
- **Chapitre 2** : analyse et revue sur littérature de la méthodologie proposée. On réalise un comparatif des méthodes existantes vis-à-vis des contraintes de l'application permettant de justifier les choix pour la méthodologie.
- **Chapitre 3** : vue d'ensemble des différents modules composant le code de calcul multiphysique.
- **Chapitre 4** : présentation détaillée du module de traitement des maillages superposés. D'abord, la méthode, les terminologies ainsi que les algorithmes sont exposés, comprenant la méthode de Balayage Rapide pour la résolution de l'équation d'Eikonal permettant la génération du champ distance euclidien employé comme le critère de base pour la délimitation de la zone de superposition. Finalement, les résultats de vérification pour cette partie sont présentés et discutés.
- **Chapitre 5** : présentation du solveur multiphysique. Ici, on expose d'abord l'ensemble des solveurs physiques couplés : le solveur de l'équation de Helmholtz pour les champs électrique et magnétique, et le rayonnement thermique. Ensuite, les schémas de reconstruction pour la prise en compte des conditions limites, le transfert de la solution entre les mailles superposées et l'imposition de la condition d'interface matérielle sont détaillés. Finalement, on discute l'intégration des solveurs Helmholtz avec celui d'Euler pour l'écoulement fluide.
- **Chapitre 6** : l'ensemble des cas-test de vérification de la méthodologie proposée constituant le code numérique de calcul multiphysique 2D axisymétrique. De plus, l'étude de convergence numérique permettant d'analyser la précision et la prédiction du code est également discutée.
- **Chapitre 7** : synthèse de l'ensemble du travail mené dans la réalisation de thèse, analyse des limitations de la méthodologie proposée ainsi qu'une discussion sur les travaux futurs.



## CHAPITRE 2 Revue de littérature

La présentation de la revue de littérature sera faite en deux parties. On exposera d’abord l’état-de-l’art de la méthode de frontières immergées, et ensuite celui de la méthode de maillages superposés.

Globalement, la discussion sera basée sur une analyse critique de ces méthodes en regard des contraintes des disjoncteurs haute-tension : la multiphysique dont les écoulements compressibles à hauts gradients de vitesse et de pression, les géométries rigides mobiles et l’efficacité numérique pour des simulations en 2D et en 3D.

### 2.1 Méthode de frontières immergées

La méthode de frontières immergées, IBM, est une méthodologie numérique conçue pour imposer correctement les conditions frontières des domaines de calcul qui ne sont pas conformes avec le maillage. La méthode IBM a été proposée initialement par C. Peskin, en 1972, dans le but de modéliser et de simuler les interactions fluide-structures dans les applications médicales, plus précisément l’écoulement sanguin dans les valves du cœur humain [34].

L’idée de base de la méthode consiste à avoir une discrétisation spatiale régulière (structurée) indépendante de la complexité de la géométrie du domaine (Fig. 2.1). Par conséquent, les frontières du domaine intersectent une maille cartésienne d’une façon non régulière, et les conditions aux limites ne sont pas alignées avec le repère de la grille.

Tout cela entraîne certaines contraintes/difficultés pour la discrétisation des équations au niveau du solveur numérique :

- Différents sous-domaines de calcul dans un seul et même élément de maillage.
- Des conditions aux limites pas forcément attribuées aux arêtes (côtés) des éléments du maillage.

Globalement, le cœur de la méthode consiste à modifier soit les équations du modèle, soit les variables à l’interface des sous-domaines, en utilisant des approches mieux adaptées numériquement afin d’imposer correctement les conditions aux limites. Cependant, les approches pour le traitement des conditions aux limites immergées (IB, pour Immersed Boundaries), en assurant une bonne conservation des propriétés physiques de la solution et une bonne efficacité numérique, ne sont pas triviales.

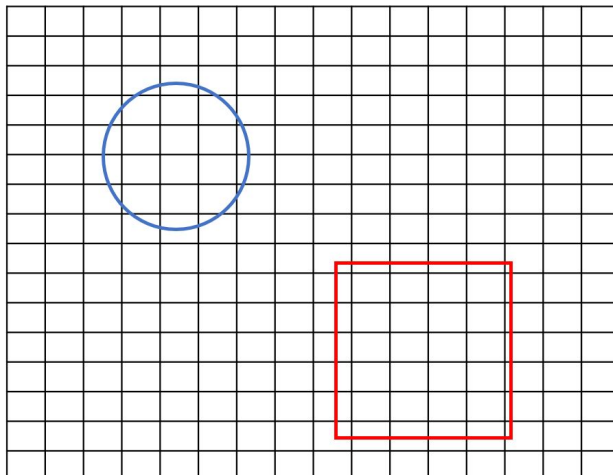


Figure 2.1 Un exemple des géométries non-conforme sur un maillage cartésien.

La motivation de l'utilisation de cette approche est de simplifier les problèmes associés à la génération et à l'adaptation du maillage au domaine, parfois géométriquement complexe, où les sous-domaines se déplacent et/ou se déforment arbitrairement.

### 2.1.1 Considérations générales sur la méthode IBM

Avant d'exposer et de détailler les différentes familles de méthodes appartenant à la méthodologie IBM, il est intéressant de faire une synthèse générale des avantages et désavantages de l'approche afin de montrer les impacts sur les différentes étapes du calcul numérique.

Le premier et principal avantage de l'utilisation de la méthode IBM repose sur le changement de l'approche pour la génération du maillage. En effet, le maillage est désormais du type cartésien, ce qui permet d'employer des méthodes simples et efficaces pour la discrétisation du domaine. De plus, un raffinement basé sur l'approche Quadtree en 2D (Octree en 3D) peut être utilisé pour assurer une bonne représentation des frontières [35]. Ce maillage permet également l'utilisation des schémas numériques d'ordre élevé [36].

La complexité de la géométrie des objets n'affecte plus la qualité de la discrétisation grâce à l'indépendance entre le maillage et l'interface physique. Globalement, le fait de mailler des géométries complexes n'est donc plus un défi majeur comme auparavant. Même avec les domaines mobiles, la prise en compte du mouvement sans le besoin de remailler et d'adapter le maillage est intéressante d'un point de vue numérique. Cependant, par rapport à la physique, le déplacement des frontières peut entraîner la présence d'oscillations au niveau des variables physiques, principalement la pression au niveau de l'écoulement du fluide [37].

En théorie, l'utilisation des ressources informatiques (mémoire et processeurs) sera plus faible en comparaison avec les approches numériques classiques, car ce n'est plus nécessaire de stocker toutes les informations relatives au maillage. Avec une discrétisation structurée, l'adressage implicite est utilisé pour localiser les informations de la grille (la localisation d'un point et les voisins d'un élément, par exemple). De plus, la quantité d'opérations mathématiques est réduite car les opérations relatives à l'adaptation sont évitées. De plus, il y a un gain possible sur le calcul des flux physiques pour les modèles numériques.

Par contre, un désavantage de la méthode IBM est que les propriétés conservatives du modèle physique ne sont pas forcément vérifiées dans certaines applications à cause de l'utilisation de méthodes d'interpolation, permettant de reconstituer les informations (les variables physiques) à l'interface des domaines. Afin de minimiser la perte d'information avec ou sans la prise en compte de mouvement des géométries, les choix de la méthode IBM ainsi que du schéma d'interpolation plus adaptés sont importants.

### 2.1.2 Vue d'ensemble de la méthodologie IBM

Depuis sa création en 1972, la méthode IBM a énormément évolué avec l'introduction de différentes approches afin d'améliorer les aspects numériques : la précision, la vitesse de calcul, la conservation des propriétés physiques-numériques et la prise en compte des géométries mobiles et/ou déformables.

La méthodologie a été initialement développée et appliquée aux écoulements incompressibles, laminaires et à basse vitesse, dû à la nature physique de ces applications [34]. Cependant, dans une vaste gamme d'applications industrielles (par exemple, l'appareillage à haute-tension et l'aérodynamique), la nature physique des écoulements de fluide est compressible, à haute vitesse (supersonique) et visqueuse. D'une manière générale, la recherche actuelle du domaine essaie d'adapter la méthode à ces nouvelles exigences.

Dans la classification proposée par Sotiropoulos *et al.* en [3], la méthodologie IBM est divisée en deux catégories : Méthodes à Interfaces Nettes (Sharp Interface Methods) et Méthodes à Interfaces Diffuses (Diffused Interface Methods).

En pratique, l'ensemble des méthodes du type « Interfaces Diffuses » sont rarement utilisées pour des écoulements compressibles, d'après de la recherche bibliographique de l'auteur. Cela vient du fait constaté que les méthodes donnent globalement une représentation plutôt lisse de l'interface, résultant en un ordre de précision numérique assez faible (généralement d'ordre 1 maximum) [3].

Toutefois, pour des écoulements compressibles ayant des gradients de vitesse et de pression élevés, et des géométries rigides et mobiles, on distingue deux catégories différentes : Méthodes à Interfaces Nettes, comme en [3], et Méthodes à Interfaces Conservées.

En effet, à la connaissance de l'auteur, la plupart des articles dans la littérature traitent une seule physique (e.g., l'écoulement fluide), un domaine de calcul géométriquement simple et uni-matériau (e.g., un cercle). Dans le cadre de ce projet, on vise à généraliser la méthode IBM pour la multiphysique retrouvée dans l'application disjoncteur à haute tension.

La Fig. 2.2 illustre l'ensemble de différentes méthodes appartenant à la méthodologie IBM décrite dans le cadre du projet de recherche.

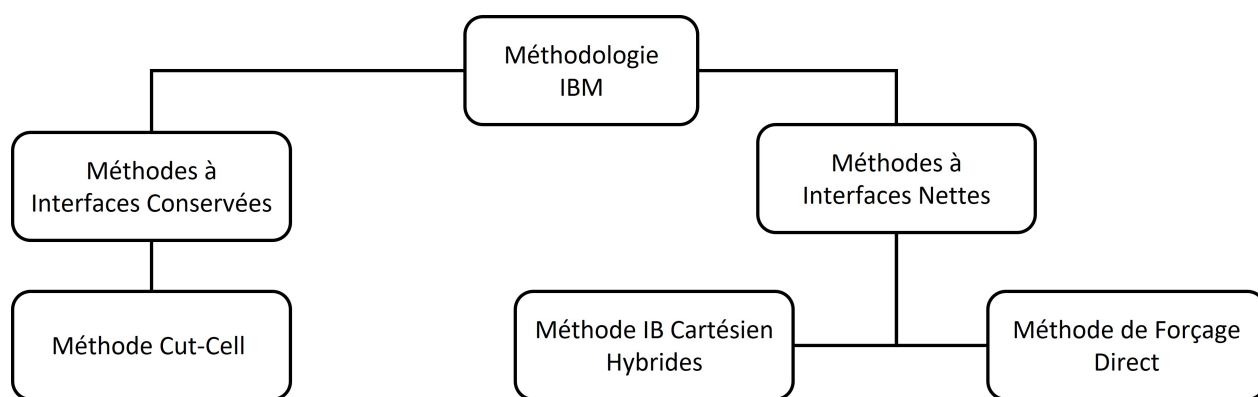


Figure 2.2 Classification des méthodologies IBM décrite dans le cadre du projet de recherche.

### 2.1.3 Méthodes à Interfaces Conservées

La catégorie *Interfaces Conservées* est basée sur la conservation explicite de la représentation discrète de l'interface des sous-domaines. Pour cela, on modifie plutôt le maillage en l'adaptant à la courbure des géométries. La méthode *Cut-Cell* est la seule à y appartenir. De plus, comme l'approche se base sur une modification du maillage, certaines références, dont [4], ne la considèrent pas comme une méthode purement IBM, dû à l'approche plutôt "maillage".

#### 2.1.3.1 Méthode Cut-Cell

La méthode *Cut-Cell* a été proposée et développée par [38] en 1986, afin de simuler des écoulements compressibles non-visqueux autour de profils aérodynamiques à multi-éléments. Une extension aux écoulements visqueux a été proposée par [4].

L'approche consiste à couper et raccorder les éléments du maillage cartésien intersectés par les géométries (cf. les éléments en couleur dans la Fig. 2.3). En effet, cela a pour but de représenter explicitement l'interface pour la prise en compte des conditions limites. Cependant, la discrétisation de l'interface est désormais formée par des éléments polygonaux quelconques en complexifiant le calcul des flux physiques échangés. Généralement, les quantités physiques sont ainsi approximées afin d'avoir un modèle conservatif.

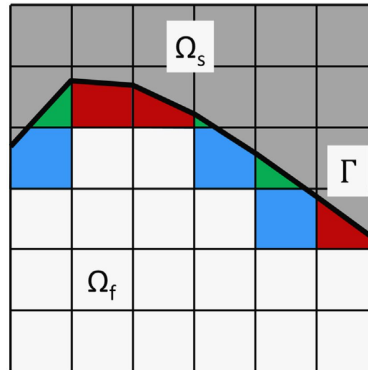


Figure 2.3 Un exemple des éléments "coupés" (en couleur) dans la méthode Cut-Cell, tiré de [3].

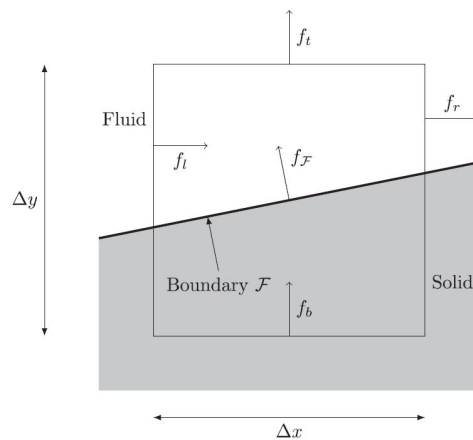


Figure 2.4 Les flux d'un élément coupé, tiré de [4].

Pour les applications en régime compressible avec géométries mobiles, l'approximation des flux physiques (cf. les vecteurs  $f_t$ ,  $f_l$ ,  $f_r$  et  $f_b$  dans la Fig. 2.4) est réalisée en général par deux approches.

La première consiste à évaluer les quantités physiques au niveau des flux par interpolation [39–41]. Pour la deuxième approche [4, 42], les flux sont d’abord évalués en prenant la forme de l’élément de base (e.g., un quadrilatère pour le maillage structuré). Ensuite, ils sont multipliés par un facteur ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), représentant la fraction de la présence du solide (i.e., le pourcentage) à l’intérieur de l’élément. Ce facteur est le rapport entre la taille du segment de l’élément intersecté et la dimension originale de son arête ( $\Delta x$  ou  $\Delta y$ ).

Les points forts :

- L’interface des sous-domaines est explicitement raccordée à la frontière des géométries et physiquement nette (*sharp*, en anglais) bien adaptée aux écoulements compressibles.
- L’imposition des conditions aux limites demeure explicite comme pour les méthodes à maillages non-structurés.

Les points faibles :

- Pré-traitement non-trivial du maillage en 2D et principalement en 3D.
- Instabilité numérique à cause de l’apparition de petits éléments, qui réduisent également le pas de temps pour les simulations en régime transitoires [42–44].

#### 2.1.4 Méthodes à Interfaces Nettes

L’approche de base de la catégorie *Interfaces Nettes* consiste à modifier les quantités physiques (les variables, les flux et les gradients, par exemple) autour des frontières ou d’ajouter une force discrète aux équations, de sorte que les conditions aux limites soient correctement vérifiées. Globalement, pour les méthodes de cette catégorie, le solveur numérique comprend deux parties majeures :

- **Pré-traitement géométrie/maillage, appelé "Tagging"** : relie la géométrie immergée au maillage structuré et identifie les différents domaines de calcul (e.g., les éléments fluide ou solide) et les éléments où les quantités physiques seront modifiées/interpolées (e.g., les éléments interface ou fictif).
- **Module de reconstruction** : prend en compte la présence physique de la géométrie, en reconstruisant les valeurs des quantités (variables) physiques des éléments proches de l’interface.

Par rapport à l’approche de reconstruction permettant de prendre en compte physique de la géométrie dans le module de reconstruction, on distingue les méthodes *Forçage Direct* et *IB Cartésien Hybride*. Lors de la discussion sur la méthodologie globale du code multi-physique proposé (cf. Section 3), le processus de *Tagging* sera exposé et détaillé. Pour plus d’information concernant la revue de littérature de ce processus, voir [11].

### 2.1.4.1 Méthode de Forçage Direct

La méthode de *Forçage Direct* a été proposée par [45], en 1997, pour simuler les écoulements incompressibles autour des géométries complexes, et ensuite étendue aux écoulements compressibles [46–49].

Afin de reproduire l'interaction entre le fluide et l'objet solide [3], on ajoute une force discrète à l'équation du bilan de la quantité de mouvement. De plus, le terme de force impose une vitesse prescrite par la condition limite aux éléments du maillages à l'interface des objets.

Cependant, comme le maillage n'est pas ajusté aux frontières (Fig. 2.5), la valeur de vitesse doit être approchée par interpolation, en prenant en compte la condition aux limites et la solution dans le fluide autour [46–50]. Pour les écoulements compressibles, les autres quantités physiques, comme la densité et la pression, doivent être également interpolées, afin d'avoir un modèle physiquement conservatif.

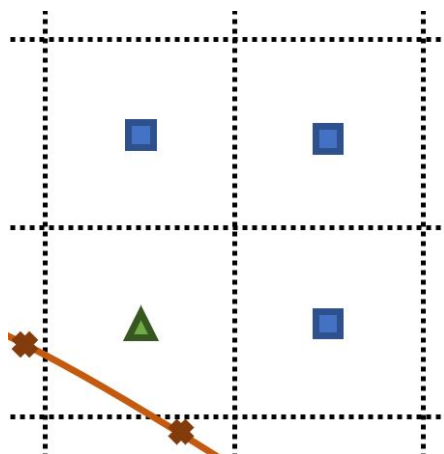


Figure 2.5 Exemple d'un élément (le triangle vert) dont la vitesse doit être interpolée à l'aide de la condition aux limites (les croix marrons) et les éléments fluides (les carrés bleus).

Les points forts :

- La représentation physique de l'interface des sous-domaines est nette.
- Le maillage demeure inchangé et structuré avec l'ajout du processus de *Tagging*.
- Des extensions en 3D sont possibles.

Les points faibles :

- L'interpolation entraîne la non-conservation des propriétés physiques (e.g., perte de masse ou de l'énergie).
- La présence des oscillations de pression pour les applications à géométries mobiles (Section 2.1.5).

### 2.1.4.2 Méthode IB Cartésien Hybride

La méthode *IB Cartésien Hybride* [50] impose les conditions limites aux éléments de maillage à l'interface directement par la reconstruction des quantités physiques par interpolation.

A partir du choix d'éléments pour l'imposition des conditions limites, la méthodologie est subdivisée en deux approches : *Interface* et *Fictif* (Fig. 2.6) :

Pour l'approche *Interface*, les variables sont reconstruites aux éléments localisés du côté fluide ayant un voisin à l'intérieur du solide (cf. les triangles verts) [51–55]. Pour l'approche *Fictif*, on choisit les éléments localisés du côté solide ayant un voisin au niveau fluide (cf. les losanges jaunes) [36, 56–82]. Cependant, Tran *et al.* [35] propose un couplage de ces deux approches afin d'assurer une meilleure conservation des propriétés physiques.

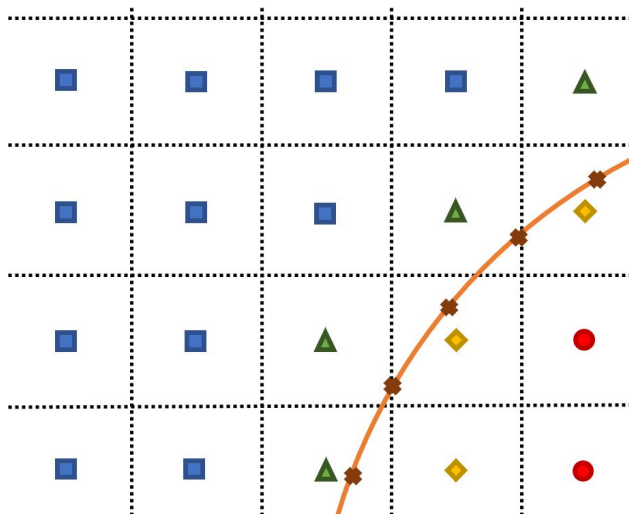


Figure 2.6 Différents choix d'éléments appartenant à la méthode *IB Cartésien Hybride*.

Le processus de reconstruction des quantités physiques demeure le même indépendamment de l'approche utilisée. Cela consiste à d'abord identifier l'ensemble des éléments fluide (cf. les carrés bleus) et des points de discrétisation de la géométrie (cf. les croix marrons). Ensuite, les quantités physiques sont reconstruites par interpolation à partir de l'ensemble des informations provenant du fluide et des conditions aux limites. Cependant, pour chaque relation choisie, la formulation mathématique, le nombre de points interpolant et la complexité numérique changent.

Les méthodes d'interpolation les plus répandues sont :

- Bilinéaire et Trilinéaire (2D et 3D, respectivement) [53, 55, 58–66, 69–73, 75, 76, 79, 82].
- Moindres Carrés (Pondérés y compris) [77, 78, 80].



- Pondération inverse à la distance (IDW, pour l'anglais Inverse Distance Weighting) [51, 54, 56, 57, 74, 81].
- Fonctions de base radiale (RBF, pour l'anglais Radial Basis Functions) [68].

De plus, certains auteurs utilisent un couplage de méthodes d'interpolation : [36, 67], pour le couplage entre Bilinéaire et Moindres Carrés, afin d'augmenter la précision et la robustesse du modèle numérique.

Les méthodes *IB Cartésien Hybride* et *Forçage Directe* sont similaires vis-à-vis du processus de reconstruction et en partagent les avantages et désavantages. Cependant, dû au fait qu'il n'y a plus de terme de force à ajouter, la réutilisation et l'automatisation d'un code basé sur l'approche de maillage structuré classique est tout à fait directe.

### 2.1.5 L'adaptation de la méthode IBM pour les géométries mobiles

Pour les applications à géométries mobiles, la méthodologie IBM appartenant à la catégorie *Interfaces Nettes* présente malheureusement des oscillations dans la solution numérique, principalement pour la pression [83].

En effet, le changement brusque du statut des éléments à l'interface nette et dynamique entraîne une discontinuité spatiale [83]. De plus, cela cause physiquement une discontinuité temporelle et spatiale pour la vitesse et la pression ainsi qu'une violation de conservation de masse/d'énergie [37]. Pour l'analyse en détail de cette problématique, la discussion est uniquement centrée sur la méthode *IB Cartésien Hybride*.

L'évolution temporelle de la solution (e.g.,  $t^n$  vers  $t^{n+1}$ ) n'est plus valide car le calcul des flux à  $t^n$  donne des valeurs physiquement non-réalistes dû au manque d'information ou à une mauvaise reconstruction des quantités physiques lors des transitions suivantes [6] :

- L'élément *interface* (en triangle vert) vers *fluide* (en carré bleu) pour l'approche *Interface* (Fig. 2.7a).
- L'élément *fictif* (en losange jaune) vers *fluide* (en carré bleu) pour l'approche *Fictif* (Fig. 2.7b).

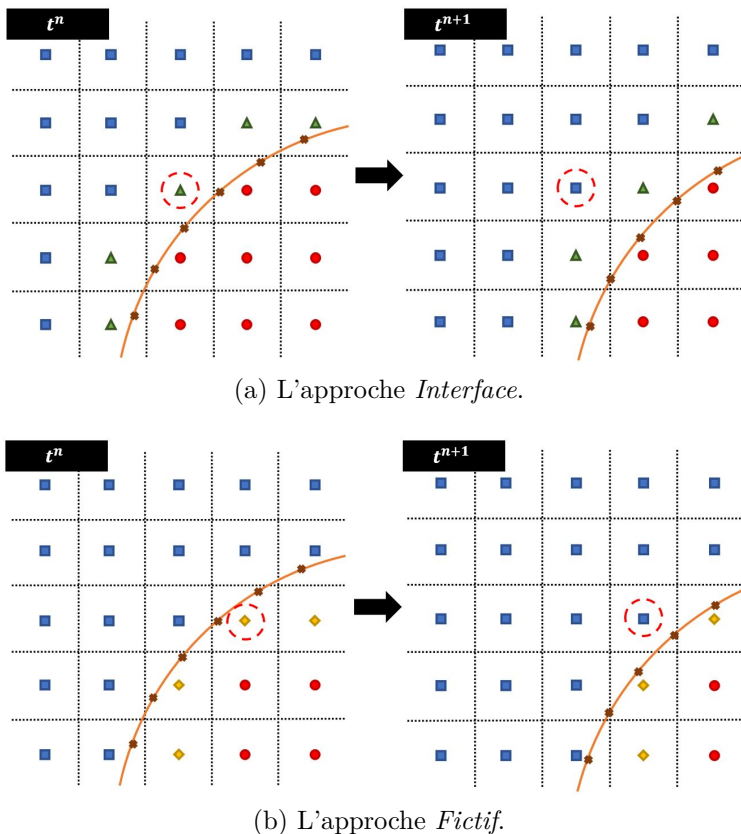


Figure 2.7 Changement de la nature physique des éléments.

Dans la littérature [37], l'adaptation de l'approche IBM aux applications à géométries mobiles est réalisée par les stratégies suivantes :

1. Transformation des coordonnées (Coordinate Transformation strategy) [5].
2. Technique d'extension du champ fluide (Field-Extension Technique) [6].
3. Interpolation des variables d'écoulement au "nouvel élément créé" (Interpolating the flow variables at the "fresh-cleared" cell) [84].

### 2.1.5.1 Transformation des coordonnées

Cette approche proposée par [5] et appliquée aux écoulements compressible par [85] consiste à rendre le maillage non-adapté mobile en se déplaçant avec la géométrie de l'objet. A cet égard, les équations du modèle sont réécrites dans un repère non-inertiel (Fig. 2.8).

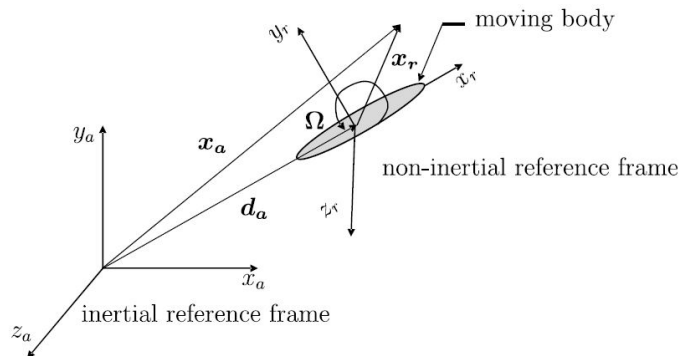


Figure 2.8 Le repère non-inertiel, tiré de [5].

Les points importants de cette approche sont :

- Une représentation discrète constante de l'interface car il n'y a pas de mouvement relatif entre la géométrie et le maillage.
- L'ajout des termes sources en considérant les forces dans le repère non-inertiel, comme celle de Coriolis, centrifuge et d'accélération de translation et de rotation [86].
- Application limitée à un seul objet mobile.

### 2.1.5.2 Extension du champs fluide

Proposée initialement par [6] et appliquée aux écoulements compressibles par [77, 78], la technique consiste à se servir d'une double couche d'éléments *interface* et *fictif* de part et d'autre de la frontière du domaine (cf. les triangles dans la Fig. 2.9) pour le calcul des flux échangés à  $t^n$  en évitant la perte d'information lors du déplacement de la frontière.

Les points importants de cette approche sont :

- Une gestion numérique du *Tagging* par zone pour la résolution de multiples régions de calcul.
- Une représentation physique plus lisse de l'interface à cause de reconstruction à double couche.
- Un choix d'une relation d'interpolation adaptée à la reconstruction de la solution autour et à l'intérieur de la géométrie.

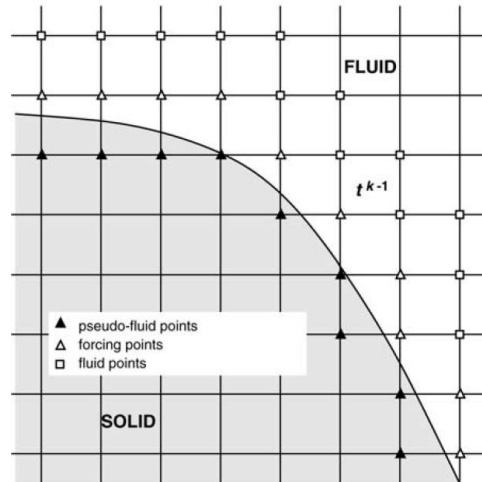


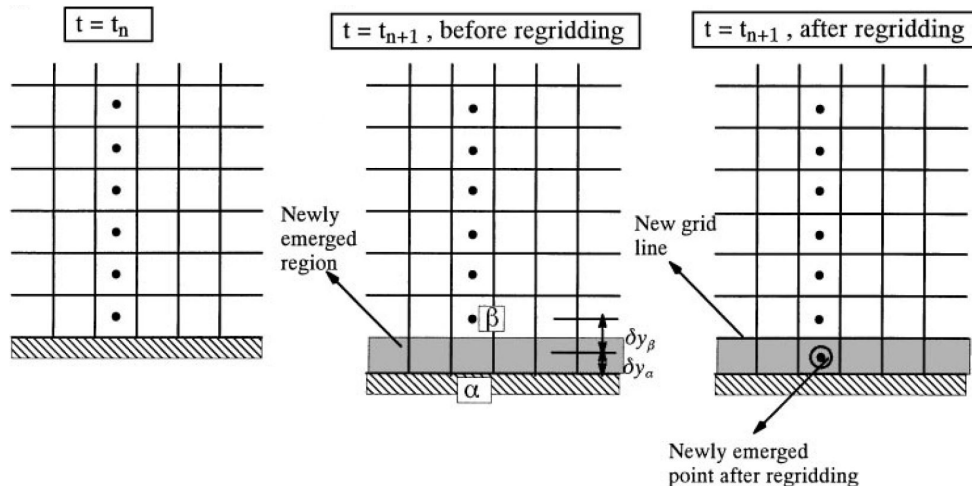
Figure 2.9 Extrait de la double couche (*Interface* et *Fictif*, connu ici par *Forcing points* et *Pseudo fluid points*, respectivement) tiré de [6].

### 2.1.5.3 Interpolation des variables d'écoulement au "nouvel élément créé"

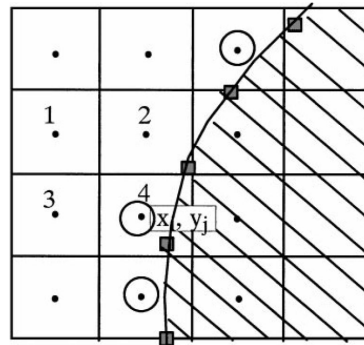
Introduite par [84] et appliquée aux écoulements compressibles par [56, 67, 71, 72, 74], la technique se base sur une approche de maillage avec adhérence à la paroi adaptatif (Fig. 2.10a).

En effet, cette approche consiste à reconstruire la solution à la nouvelle couche d'éléments introduite par le mouvement de la géométrie à partir de l'interpolation des quantités physiques au temps  $t^{n+1}$  d'éléments fluides et de la condition aux limites autour (cf. les éléments entourés et les carrés noirs dans la Fig. 2.10b) [84].

Ainsi que pour la technique *Extension du champs fluide*, le choix du module d'interpolation (l'ordre et les points interpolants) est crucial pour la reconstruction des flux échangés entre les éléments, permettant de conserver l'évolution temporelle de la solution physique.



(a) Extrait de l'approche de maillage classique "body-fitted", tiré de [84].



(b) Exemple de choix de points pour l'interpolation, tiré de [84].

Figure 2.10 Changement de la nature physique des éléments.

### 2.1.6 Comparatif des méthodes IBM

Le tableau ci-dessous comprend un comparatif des méthode IBM appliquées aux écoulements compressibles et aux géométries rigides et mobiles, selon certains critères numérique/informatiques : la facilité de génération initiale du maillage, la complexité d'implémentation, la précision, la robustesse, la vitesse de calcul et la facilité de traitement des géométries mobiles.

Ce comparatif a été établi par l'auteur suite à l'analyse des sections précédentes et le contexte de l'application des disjoncteurs haute-tension.

On s'intéressera à comparer principalement les méthodes IBM suivantes : *Cut-Cell*, *Forçage Directe* et *IB Cartésien Hybride*. Ces critères sont valables aussi bien pour le 2D que pour une extension possible en 3D.

	Cut-Cell	Forçage Direct	IB Cartésien Hybride
Facilité de génération initiale du maillage	--	++	++
Complexité d'implémentation	--	+	++
Précision	++	+	+
Robustesse	++	+	++
Vitesse de calcul	-	++	++
Facilité de traitement des géométries mobiles	--	+	+

Figure 2.11 Comparatif des méthodes IBM

### Génération initiale du maillage

Les méthodes appartenant à l'approche *Interfaces Nettes* s'avèrent les plus avantageuses grâce au maillage structuré indépendant de la géométrie et au processus de *Tagging* facile à générer. En effet, pour la méthode *Cut-Cell*, la génération initiale du maillage n'est pas triviale, car il y a une nécessité de le pré-traiter auparavant.

### Complexité d'implémentation

La méthode *IB Cartésien Hybride* est la plus avantageuse car le cœur du modèle numérique reste tout à fait similaire à celui des simulations classiques. De plus, au niveau du solveur, la différence majeure est le module d'interpolation ajouté qui n'impacte pas forcément la complexité d'implémentation. En outre, pour la méthode *Forçage Directe*, dû à la présence d'un terme source, la formulation de la discrétisation temporelle du modèle numérique doit être plus robuste afin d'assurer la stabilité du modèle. Toutefois, pour les autres méthodes, l'implémentation numérique peut devenir assez complexe à cause d'une formulation mathématique plus lourde : le calcul des flux pour des éléments quelconques pour la méthode *Cut-Cell*.

### Précision des calculs

La méthode *Cut-Cell* est la plus précise car l'imposition des conditions aux limites est faite directement grâce à la représentation explicite de la frontière. De plus, pour les autres méthodes, il y a une non-conservation des propriétés physiques à la proximité de l'interface à cause de l'interpolation des quantités physiques qui peut être imprécise, mais possiblement corrigée avec l'augmentation de l'ordre des schémas d'interpolation.

Dans la littérature, la précision de l'ensemble des méthodes est d'ordre 2 pour une vaste gamme d'applications, et cela vient directement du choix de la relation de reconstruction ou d'interpolation.

### Robustesse

Les méthodes *Cut-Cell* et *IB Cartésien Hybride* sont les plus robustes et permettent de simuler, avec une bonne précision et performance, une vaste gamme d'applications en régime compressible. A cause d'une extension plus facile à implémenter de l'approche *IB Cartésien Hybride*, la méthode *Forçage Directe* n'est presque plus utilisée.

### Vitesse de calcul

Les méthodes *Forçage Direct* et principalement *IB Cartésien Hybride* sont les plus prometteuses car il n'y a pas de pré-traitement pour le maillage (la méthode *Cut-Cell*).

### Facilité de traitement des géométries mobiles

Les méthodes *Forçage Direct* et *IB Cartésien Hybride* sont les seules à permettre une prise en compte facile des conditions aux limites aux interfaces mobiles, principalement avec l'utilisation des stratégies d'adaptation (cf. 2.1.5). Pour cela, il est nécessaire également de mettre à jour le processus de *Tagging* à chaque pas de temps. Pour la méthode *Cut-Cell*, comme on modifie le maillage, le traitement du maillage devient coûteux et complexe (l'apparition d'éléments petits), donc potentiellement instables.

## 2.2 Méthode de maillages superposés

La méthode de maillages superposés est une approche de maillage développée afin de simplifier le processus de discrétisation spatiale du domaine à géométries complexes et mobiles. Historiquement, l'utilisation de maillages superposés, aussi connus sous le nom de maillages chimères, a été introduite aux applications aérodynamiques compressibles, dans les années 80, par Steger *et al.* [87] et par Benek *et al.* [88].

L'idée principale de la méthode est d'avoir un domaine de calcul discret formé par la superposition de plusieurs maillages statiques ou mobiles, simples à générer et adaptés à la géométries des sous-domaines (Fig. 2.12). De plus, les sous-domaines géométriquement complexes peuvent être aussi discrétisés séparément et ensuite raccordés.

La discrétisation du modèle est généralement composée de deux type de maillages : le maillage de fond et les maillages mobiles. Le maillage de fond est conçu comme la discrétisation statique de base (cf. la grille cartésien) sur laquelle les maillages mobiles se déplacent en s'y superposant (cf. la grille curviligne).

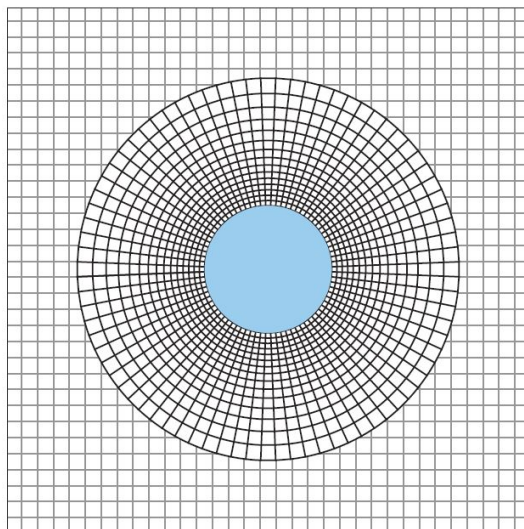


Figure 2.12 Exemple des maillages superposés, tiré de [7]

Le chevauchement des mailles entraîne certaines difficultés pour l'implémentation du modèle numérique, principalement au niveau de la gestion du maillage, et de l'assemblage pour le solveur :

- La présence de différentes couches de maillage dans une même région.
- Les maillages des sous-domaines doivent être maintenus à jour (e.g., la position) pour les applications à géométrie mobiles.



- Le transfert bi-directionnel d'information entre les maillages (les conditions aux limites aux frontières) doit être fait permettant de les coupler. De plus, cela doit être réalisé localement.
- L'assemblage du système d'équations (e.g., la matrice du système) est plus complexe.

L'approche générale de maillages superposés comprend plusieurs étapes : la génération des maillages, le pré-traitement géométrie/maillage dont le processus de Découpage en Trou (*Hole Cutting*), et le transfert d'information entre les maillages dont le schéma d'interpolation.

Aussi comme l'approche de frontières immergées (Section 2.1), la motivation principale de l'utilisation de cette méthode est de faciliter la prise en compte du mouvement des géométries mobiles sans remailler le domaine. Effectivement, en utilisant des mailles mobiles et adaptées aux géométries, la génération, l'adaptation et la gestion dynamique du maillage se simplifient énormément vis-à-vis des approches classiques (Section 1.3).

Pour ce projet de recherche, cette méthode est envisagée est couplée avec l'approche IBM pour les applications en régime compressible. Ce couplage serait donc une extension d'un point de vue maillage de la stratégie de *Transformation des coordonnées* (Section 2.1.5.1) à plusieurs sous-domaines. En effet, cela permettrait de maintenir, voire conserver, une représentation discrète constante de l'interface des sous-domaines. Jusqu'à date, ce couplage a été appliqué uniquement aux écoulements incompressibles et à une seule géométrie mobile [48, 86, 89].

### 2.2.1 Considérations générales sur la méthode de maillages superposés

Avant de présenter et d'analyser les composants de base de l'approche de maillages superposés, on résume les avantages ainsi que les particularités de cette méthode, permettant d'identifier les points d'amélioration possibles.

D'abord, les tâches associées à la génération, à l'adaptation et à la gestion dynamiques du maillage mobile sont très simplifiées, car la discrétisation n'est plus à refaire, mais simplement à mettre à jour lors du mouvement des sous-domaines. Cela est un avantage important vis-à-vis des méthodes à un seul maillage mobile adaptatif où l'on doit le refaire en suivant le déplacement des domaines. De plus, le couplage avec un module de raffinement basé sur les approches *QuadTree* ou AMR (Automatic Mesh Refinement) peut être ainsi réalisé [90–92].

De plus, malgré l'utilisation simultanée de plusieurs maillages indépendants, les tâches de génération et de gestion restent assez simples car les mailles appartiennent souvent à l'approche structurée. L'approche non-structurée peut être également utilisée, en simplifiant davantage l'adaptation des mailles à la courbure des géométries [9].

Ayant comme base la grille structurée, commune à l'approche IBM, l'autre avantage majeur de la méthode de maillages superposés est la réduction de la consommation des ressources informatiques (Section 2.1.1). Cela permet d'avoir un modèle numérique plus robuste et performant. Du fait que les maillages s'adaptent à la courbure des sous-domaines, la représentation fidèle des frontières (l'interface) est toujours assurée.

Cependant, comme il a été mentionné auparavant, l'approche de maillage superposés se sert des schémas d'interpolation, permettant de transférer la solution entre les maillages, via une communication bi-directionnelle (Section 2.2.2). Ainsi que pour la méthode IBM, le principal désavantage de cette approche est le défi de la conservation de propriétés physiques de la solution numérique. Malgré cela, l'utilisation d'une formulation en ordre élevé pour l'interpolation permet théoriquement d'assurer une bonne conservation.

## 2.2.2 Vue d'ensemble de la méthode de maillages superposés

Dans les différentes revues de littérature de l'approche de maillages superposés [8, 93, 94], la méthodologie de base est globalement divisée en trois blocs majeurs : *Génération des maillages superposés*, *Pré-traitement de la géométrie et des maillages* et *Transfert d'information entre les maillages*.

### 2.2.2.1 Génération des maillages superposés

Globalement, le bloc *Génération des maillages superposés* consiste à générer l'ensemble des maillages pour la simulation numérique. D'abord, le maillage de fond est créé, en recouvrant tout le domaine de calcul, et ensuite les maillages mobiles sont générés pour chacun des sous-domaines : structuré [8, 88, 95–108] (Fig. 2.13) et non-structuré [9, 10, 109–113] (Fig. 2.14).

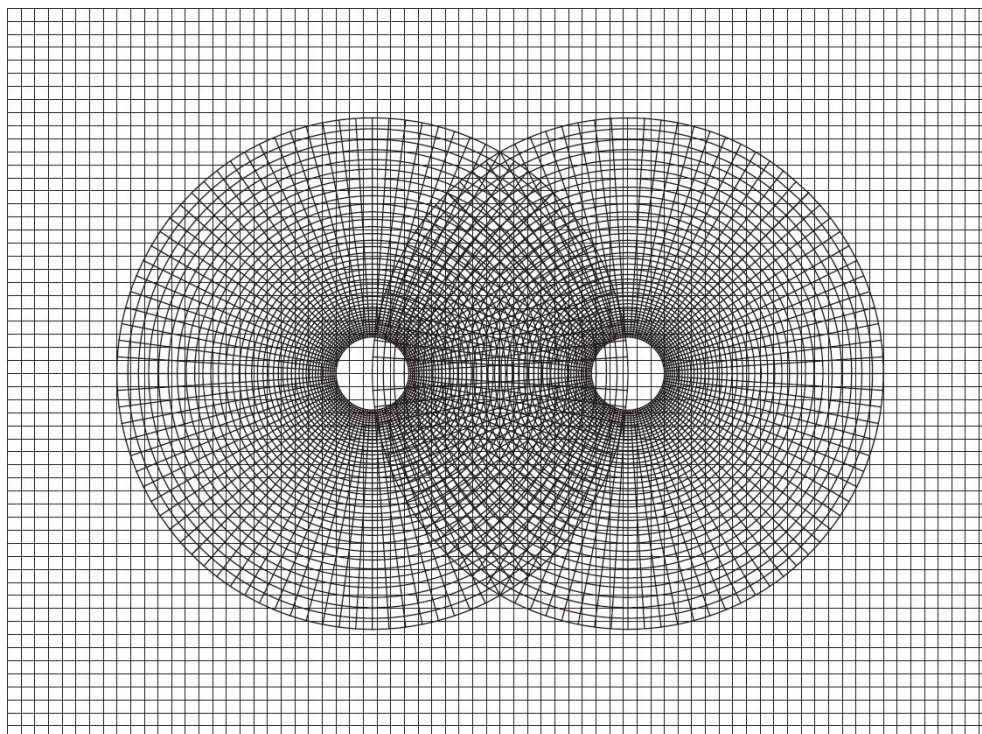


Figure 2.13 L'ensemble de maillages structurés adaptés, tiré de [8]

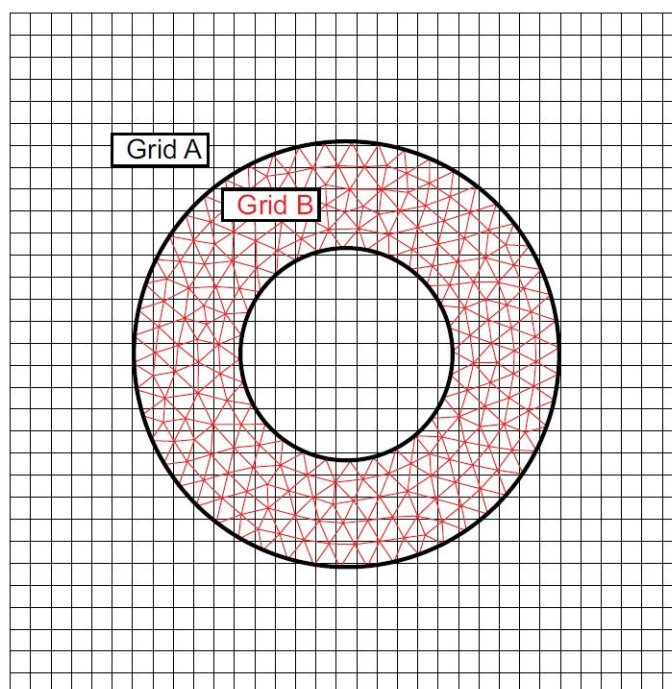
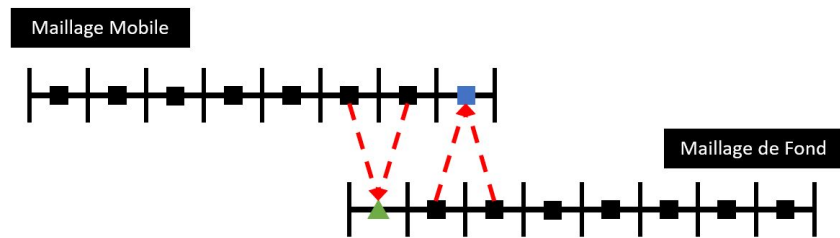
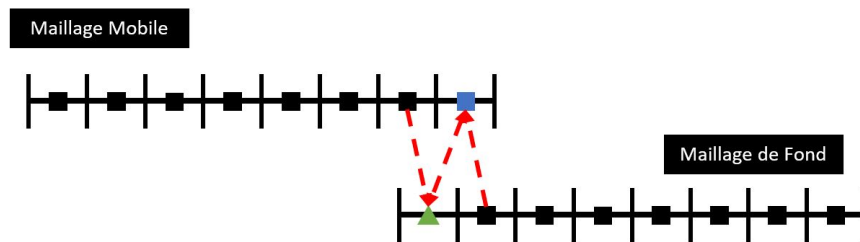


Figure 2.14 L'ensemble de maillages non-structurés (Grid A : le maillage de fond, Grid B : le maillage adapté mobile), tiré de [9]

Toutefois, lors de la génération des maillages mobiles, le nombre de couches d'éléments par maille doit être suffisant, afin d'assurer un bon conditionnement du transfert de la solution physique entre le maillage mobile et la grille de fond et vice-versa. En effet, comme illustré aux Fig. 2.15a et 2.15b, les éléments interpolants doivent appartenir à des zones d'interpolation différentes (maillage de fond vers maillage mobile et vice-versa). Cela représente la contrainte majeure pour la génération des maillages superposés [114].



(a) Bon conditionnement.



(b) Mauvais conditionnement.

Figure 2.15 Conditionnement d'interpolation (les éléments interpolés en carré bleu et en triangle vert, et les flèches rouges la direction de l'information)

### 2.2.2.2 Pré-traitement de la géométrie et du maillage

Suite à la génération des mailles, l'étape suivante consiste à les adapter à l'approche des maillages superposés. Pour cela, un module de pré-traitement géométrie/maillage a été développé, comprenant le processus de Découpage en Trou et la tâche de marquage d'éléments.

#### Processus de Découpage en Trou

Il désactive certains éléments (appelés *masqués*) des maillages de fond et mobiles, en réduisant le nombre de couches (2, maximum) et des zones de chevauchement limitées au bord des mailles (Fig. 2.16). Généralement, pour les applications à plusieurs sous-domaines, les éléments des maillage de fond sont désactivés lorsqu'ils sont superposés/intersectés par les géométries, et lorsqu'ils ne sont pas nécessaires pour le processus de transfert d'information (le schéma d'interpolation).

D'autre part, pour les maillages mobiles, les éléments sont désactivés lorsqu'ils sont en dehors du domaine de calcul, et lorsqu'ils sont chevauchés par un autre maillage mobile et ne sont pas nécessaires pour le transfert d'information [94]. Dans la littérature, le processus non-trivial de désactivation est réalisé à l'aide de plusieurs méthodes existantes [88,96,98,100–104,106–109].

### Tâche de marquage d'éléments

Il libelle les éléments d'un maillage où la solution doit être interpolée de l'autre maille, c'est-à-dire les zones d'interpolation. A l'aide de cette tâche, les éléments *interpolés* sont identifiés (Fig. 2.17). Normalement, ils se localisent à la frontière des maillages mobiles et à la couche d'éléments du maillage de fond qui englobe ceux du type *masqués*. Pour les éléments restants dans les mailles, libellés comme *calculés*, la solution est calculée à l'aide du solveur numérique classique.

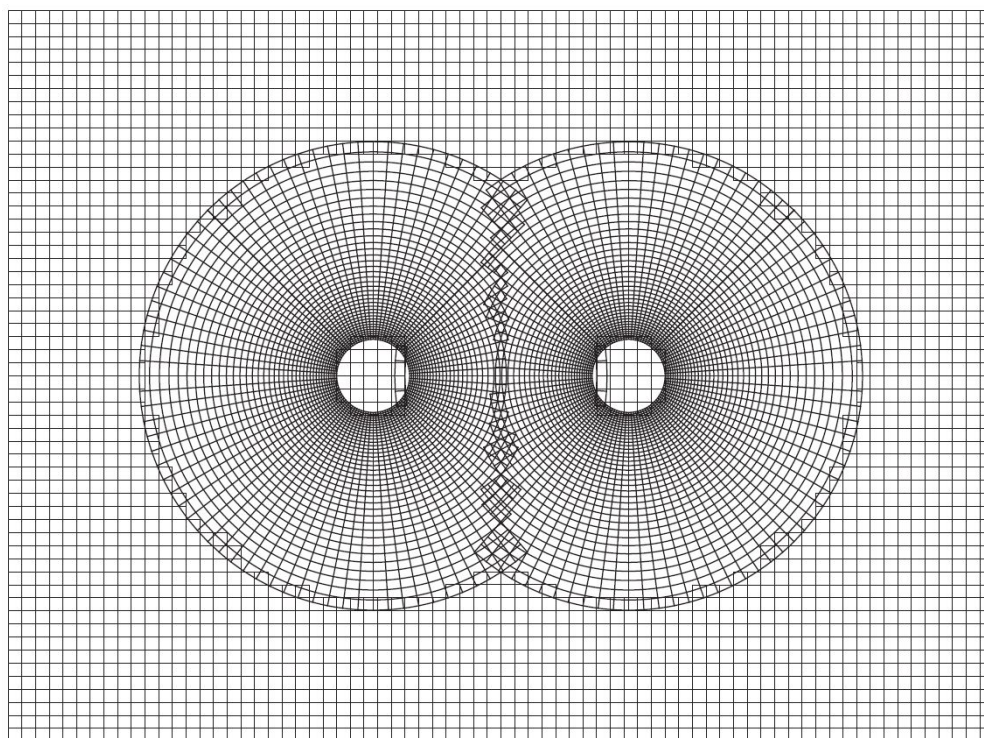


Figure 2.16 Exemple de pré-traitement du maillage, tiré de [8]

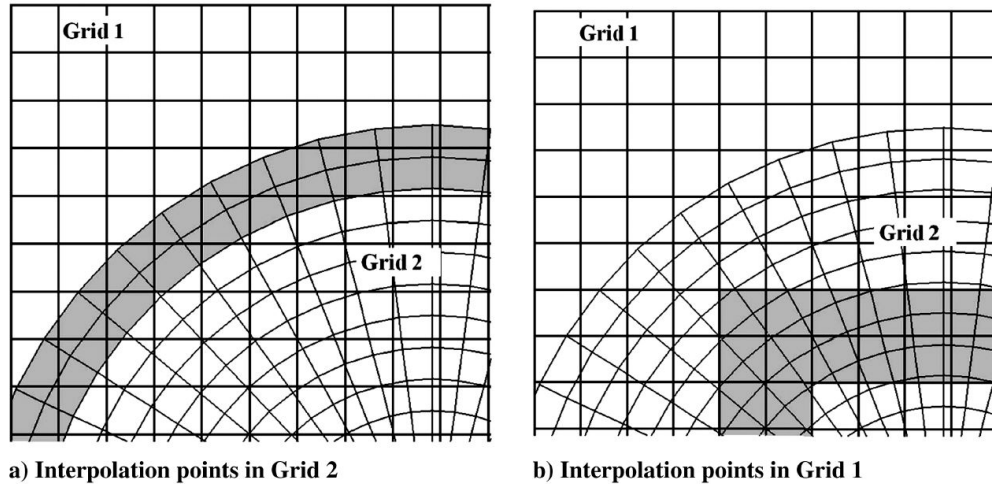


Figure 2.17 L'ensemble d'éléments *interpolés*, tiré de [10]

### 2.2.2.3 Transfert d'information entre les maillages

Le dernier bloc de l'approche de maillages superposés est le *Transfert d'information entre les maillages*, qui comprend deux étapes : la recherche des éléments interpolants et l'interpolation de quantités physiques. Pour la première étape, les éléments interpolations pour la reconstruction des quantités physiques aux éléments *interpolés* sont cherchés à l'aide de deux approches : la méthode de *Stencil Walk* [88] et la méthode basé sur l'ADT (de l'anglais, Alternating-Digital-Tree) [97]. Ces éléments se trouvent globalement dans une couche d'éléments appartenant à un autre maillage (Fig. 2.15a).

La deuxième étape représentée par le schéma d'interpolation consiste à reconstruire les quantités physiques à partir de la solution déjà connue (les éléments *calculés*). Pour cela, on se sert de plusieurs schémas d'interpolation existants, référencés en [9, 10, 95, 99, 105, 115]. De plus, concernant la contrainte au niveau de la couche d'éléments (Section 2.2.2.1), l'emploi d'une relation d'interpolation compacte est envisagée permettant de faciliter la génération du maillage et d'assurer le transfert cohérent de la solution physique.

## CHAPITRE 3 Méthodologie globale

Pour donner suite à la revue de littérature des méthodes IBM et des maillages superposés, on présente les choix réalisés.

Ce chapitre est subdivisé en deux parties. D’abord, les méthodes et les approches choisies pour la méthodologie proposée sont présentées à la section 3.1. Finalement, l’architecture numérique du code multiphysique développé est présentée à la section 3.2.

### 3.1 Méthodologie proposée

#### Méthode IBM

L’approche *IB Cartésien Hybride* est la méthode mieux adaptée à l’ensemble des exigences de l’application disjoncteur haute-tension (Section 2.1.6). De cette famille, on emploiera l’approche *Interface* afin de restreindre la reconstruction des conditions limites aux éléments à l’interface dans la même région de calcul du solveur.

Pour l’application aux géométries mobiles, on propose l’intégration avec la méthode des maillages superposés comme la solution la plus viable vis-à-vis des approches d’adaptation de la méthode IBM pour les géométries mobiles (Section 2.1.5). L’idée est discrétiser indépendamment les zones de calcul statiques et mobiles et de déplacer les mailles mobiles dans le repère des objets mobiles. En outre, il ne sera donc plus nécessaire de refaire le marquage d’éléments du *Tagging* avec le déplacement des frontières. Cela permet d’éliminer le changement brusque de la représentation dynamique de l’interface.

En visant la modélisation des disjoncteur haute-tension, la structure numérique de l’approche IBM doit être capable de prendre en compte les applications à multi-matériaux, multiphysique et à géométrie complexe. Dans ce contexte, il est tout à fait important et nécessaire de définir et de discrétiser rigoureusement les géométries complexes et les différentes zones de calcul. Pour cela, on emploiera la notion de *Topologie Discrète* et de raffinement hiérarchique des maillages. A la connaissance de l’auteur, cela représente une contribution pour la méthodologie IBM car, dans la littérature, la plupart des articles traitent une seule physique (e.g., l’écoulement fluide), un domaine de calcul uni-matériel et des géométries simples (e.g., un cercle).

Pour le processus de *Tagging*, on utilise l'approche basée sur l'algorithme de *Marche Géométrique* où le marquage des éléments est réalisé en parcourant la géométrie [11]. C'est un processus globalement plus simple, robuste et moins coûteux que d'autres méthodes existantes dans la littérature (e.g., l'algorithme de Ray-Tracing [116], l'approche Level-Set [117] et les méthodes basées sur le produit interne ou vectoriel des vecteurs distance et normal [71, 72]).

Pour l'imposition des conditions limites, on emploiera le schéma d'interpolation basé sur l'approche de Moindre Carrés implicite. La solution à la frontière des sous-domaines est reconstruite à l'aide d'un système matriciel en couplant les éléments *Interface* de la même zone de calcul. Cela permet le stockage de plusieurs informations différentes dans le même élément dans les cas multi-matériaux.

Pour les solveur des physiques décrites par l'équation de Helmholtz, l'approche de discrétisation choisie est la méthode des Volumes Finis en 2D axisymétrique d'ordre 2. En effet, puisqu'il s'agit d'une méthode déjà utilisée pour la modélisation multiphysique des disjoncteurs haute tension, ce choix a été retenu pour le module des physiques de la plate-forme. Cependant, on implémente également une extension pour les maillages hiérarchiques où les flux échangés et le coefficient de diffusion à l'interface des éléments voisins à différents niveaux de raffinement sont reconstruits à l'aide d'un schéma d'interpolation linéaire et de l'approche de Patankar [118], permettant de conserver l'ordre 2 du schéma de discrétisation du solveur.

En outre, la prise en compte de la condition d'interface matérielle à la frontière multi-matériaux est réalisée par le couplage entre les approches de Patankar et de reconstruction double où l'on couple et reconstruit les éléments de la maille qui partagent la même interface en respectant la continuité de la solution et des flux. Selon l'auteur, cela représente une autre contribution pour la méthodologie IBM vis-à-vis de la résolution des équations elliptiques (e.g., Helmholtz) à l'interface discontinue. Les méthodes existantes dans la littérature se basent sur la discrétisation en différences finis et entraînent souvent l'ajout des variables supplémentaires permettant de respecter ces contraintes susmentionnées à l'interface matérielle [119–121].

### **Méthode des maillages superposés**

Le processus de Découpage en Trou et la tâche de marquage d'éléments *interpolés* sont fusionnés et réalisés à l'aide de la méthode de Découpage en Trou Implicite. C'est une méthode basé sur l'algorithme de recherche-identification permettant de désactiver, pour le calcul du solveur numérique, les éléments dans la région de chevauchement des maillages superposés à partir d'un critère de base [104, 122].



Dans la littérature [123], les critères les plus répandus et employés sont : la qualité de l'élément de la maille et la distance à la paroi. La discrétisation des différentes zones géométriques et physiques de l'application disjoncteur haute-tension est cartésienne hiérarchique et presque à la même échelle spatiale. Le choix de la qualité de la cellule comme le critère de base n'est donc pas tout à fait pertinent. Ainsi, le critère de base choisi est la distance à la paroi.

Par rapport à la tâche de transfert de l'information, on utilise le même schéma d'interpolation que celui de la méthode IBM pour la reconstruction des conditions limites. Cela permet d'avoir les mailles couplées dans un même système matriciel.

### 3.2 Architecture du code multiphysique

Dans cette section, on s'intéresse à présenter une vue d'ensemble de la plate-forme numérique du code multiphysique développé. De plus, on expose et justifie plus précisément les méthodes et les structures de données pour les différents modules permettant l'intégration et le couplage des méthodes numériques.

La Fig. 3.1 illustre l'architecture du code multiphysique proposé :

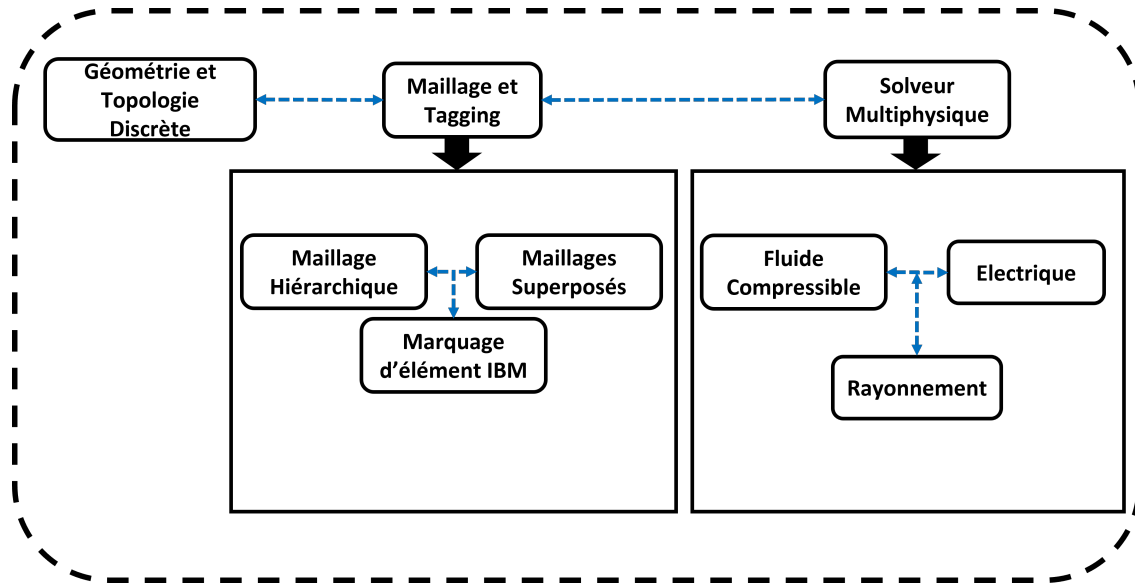


Figure 3.1 Structure numérique du code multiphysique proposé.

1. **Géométrie et topologie discrète** : représentation discrète des géométries immergées ainsi que la topologie des domaines 2D de calcul.
2. **Maillage hiérarchique** : génération et raffinement local les maillages cartésiens IB superposés à l'aide d'une hiérarchisation d'arbre quaternaire.
3. **Marquage d'éléments IBM** : relie numériquement les topologies discrètes des géométries immergées aux maillages cartésiens IB hiérarchiques superposés. Tri et identification des éléments à la frontière et internes.
4. **Maillages superposés** : gestion des différents maillages cartésiens IB superposés.
5. **Solveur multiphysique** : résolution des équations décrivant l'ensemble des physiques couplées (l'écoulement de fluide compressible, les champs électrique et magnétique et le rayonnement).

La discussion détaillée des modules **Géométrie et topologie discrète**, **Maillage hiérarchique** et **Marquage d'éléments IBM** est abordée respectivement aux Sections 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3. Pour plus d'information concernant les algorithmes de ces modules développés par l'équipe de recherche, on réfère le lecteur à la référence [11].

La méthodologie proposée pour les modules **Maillages superposés** et **Solveur multiphysique** qui constituent les contributions principales de la présente thèse seront présentée aux Chapitres 4 et 5.

### 3.2.1 Géométrie et topologie discrète

Le module **Géométrie et topologie discrète** gère les géométries immergées du domaine de calcul. En effet, il permet de définir les informations géométriques, c'est-à-dire les entités, des sous-domaines avec une structure de données adaptée au calcul numérique. Pour l'application disjoncteur haute-tension, les géométries complexes ainsi que les multiples zones de calcul à différents matériaux doivent être représentées de façon rigoureuse permettant de bien structurer le solveur multiphysique basé sur le couplage proposé.

Pour ce projet en particulier, la géométrie des sous-domaines est modélisée dans une représentation B-Rep et fournie par le logiciel open source GMSH. A partir de ces géométries, on définit donc la représentation discrétisée, connue comme *Topologie Discrète*, correspondante pour la description des sous-domaines de calcul. Tel qu'illustré à la Fig. 3.2, à partir d'une courbe géométrique (Fig. 3.2a), on représente le domaine de calcul par une face topologique composée des points, des côtés et des boucles (Fig. 3.2b). De plus, dans ce module, on génère le fichier de topologie discrète pour l'intégration et le transfert d'information avec les autres modules numériques.

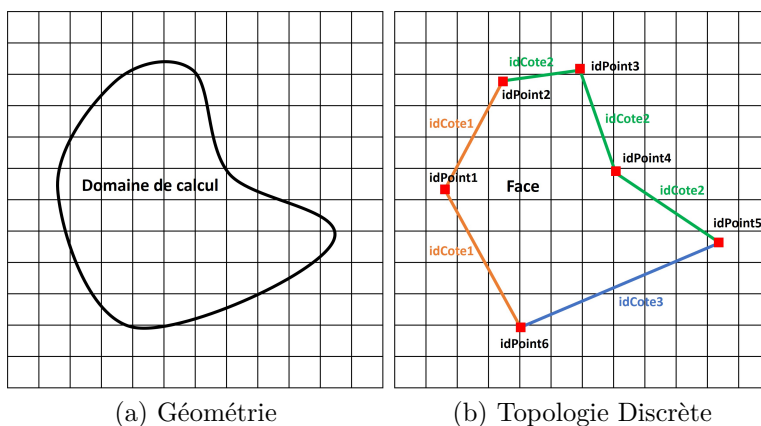


Figure 3.2 Exemple de la représentation topologique discrète d'une géométrie, inspiré de [11].

### 3.2.1.1 Définition de base et structure de données

La topologie discrète comprend une hiérarchie d'entités permettant de représenter précisément et d'une façon unique les géométries définissant le domaine de calcul. Les éléments de base de la topologie discrète sont décrits ci-dessous, selon l'ordre hiérarchique.

#### Points

Les points géométriques définissant les courbes discrétisées, comme illustré à la Fig. 3.3a. Pour la structure de données, la position de la liste, **idPoint**, permet d'accéder aux coordonnées spatiales  $x$  et  $y$  de chaque point.

#### Côté

L'ensemble des segments des droites ou des polygones définies par points (Fig. 3.3b). Un côté peut être une polygone fermée ou ouverte si les points initial et final coïncident ou non, respectivement. On conserve les côtés selon l'identifiant **idCote**, c'est-à-dire la position au niveau de la liste, et les points **idPoint** constituants des polygones.

#### Boucle

Une séquence orientée des segments de droites ou des polygones, c'est-à-dire des côtés, comme illustré à la Fig. 3.3c. Physiquement, une boucle est un parcours fermé et définie par au moins un côté. L'orientation par convention employée est le sens trigonométrique. On stocke les boucles à l'aide de l'identifiant **idBoucle** permettant d'obtenir la liste des côtés. De plus, on attribue une valeur de **idCote** positive ou négative si la polygone est dans le même sens ou non de l'orientation trigonométrique, respectivement.

#### Face

On définit un domaine de calcul par un ensemble des faces comprenant une boucle extérieure et plusieurs boucles intérieures sans intersection. L'ensemble des boucles permettant de définir un domaine de calcul (Fig. 3.3d).

Ici, afin de distinguer les scénarios où le domaine n'est pas simplement connexe, c'est-à-dire troué, on identifie et ordonne différemment les boucles. Pour cela, la première boucle est la boucle externe et est définie dans le sens trigonométrique. Les autres boucles sont les boucles internes (les trous) et sont orientées dans le sens horaire, comme illustré à la Fig. 3.3c. On conserve les faces selon l'identifiant **idFace**, c'est-à-dire la position au niveau de la liste, et la liste des boucles **idBoucle** constituants.

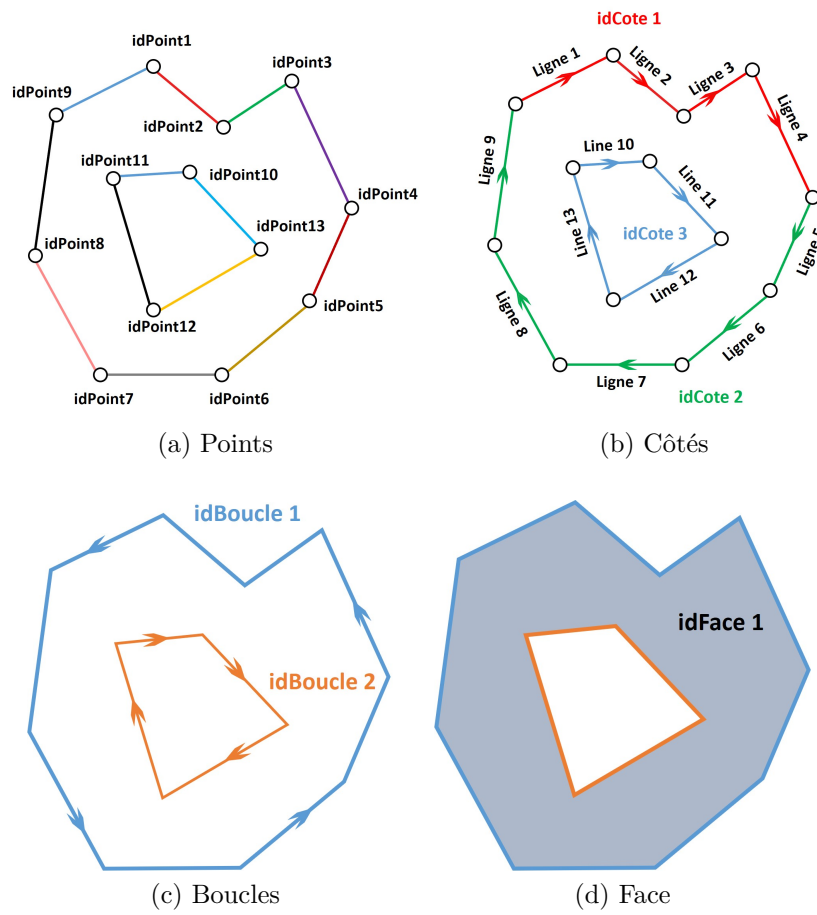


Figure 3.3 La topologies discrète, inspiré de [11].

### 3.2.2 Maillage hiérarchique

Le module **Maillage hiérarchique** génère et raffine les maillages cartésiens IB superposés. Cela permet d’avoir une meilleure représentation de l’interface géométrique des sous-domaines. Pour cela, on se sert d’une adaptation hiérarchique par l’approche des arbres quaternaires.

Le but de ce module consiste à raffiner le maillage cartésien en subdivisant localement les éléments de maille (Fig. 3.4). L’aspect hiérarchique vient de l’organisation (la structure) en différents niveaux de raffinement.

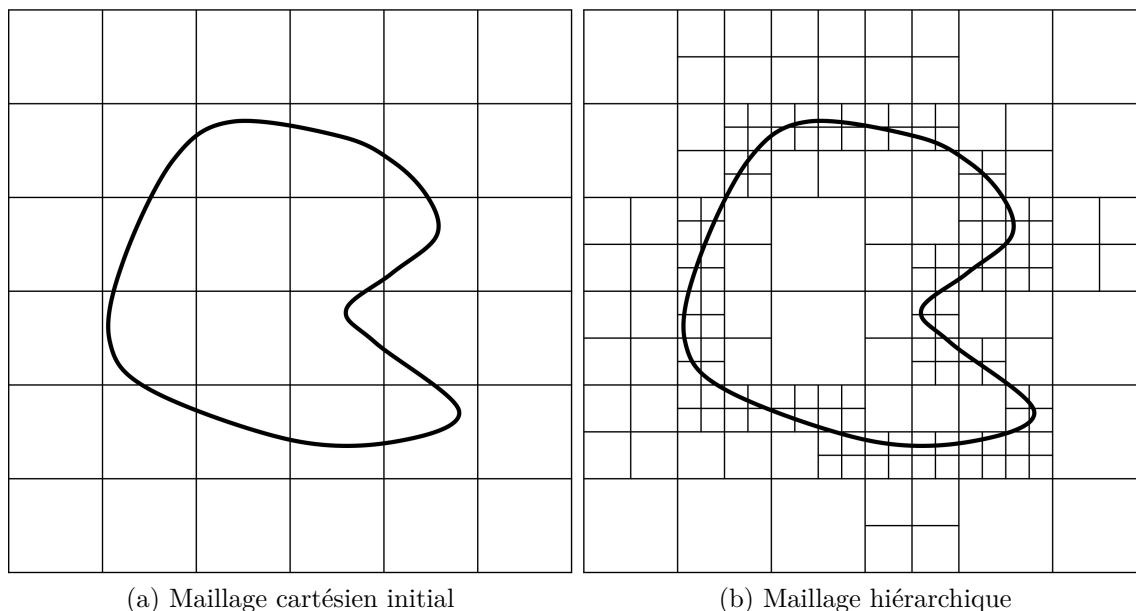


Figure 3.4 Un exemple de raffinement hiérarchique de maillage, inspiré de [11].

Initialement, le maillage cartésien de base est au niveau hiérarchique  $N_0$ . Par exemple, pour un raffinement  $k$  réalisé, on remplace un élément de maille à  $N_{k-1}$  en introduisant quatre sous-éléments à  $N_k$ . Les nouveaux sous-éléments, dit *enfants*, sont physiquement les quatre quadrants de l’élément originaire, dit *parent* (Fig. 3.4).

Le processus de raffinement du maillage a été basé sur les critères ci-dessous [11] :

1. Courbure géométrique (Critère 1) : limite le nombre de points géométriques dans un élément de maillage (Fig. 3.5).
2. Niveau de courbe minimum (Critère 2) : impose un niveau de raffinement aux éléments parcourus par les courbes géométriques (Fig. 3.6).

3. Un élément - Une boucle (Critère 3) : limite à une boucle intersectant un élément de maillage (Fig. 3.7).
4. Courbes en proximité (Critère 4) : ajout d'un certain nombre de couches d'éléments entre deux éléments intersectés par la géométrie (Fig. 3.7).

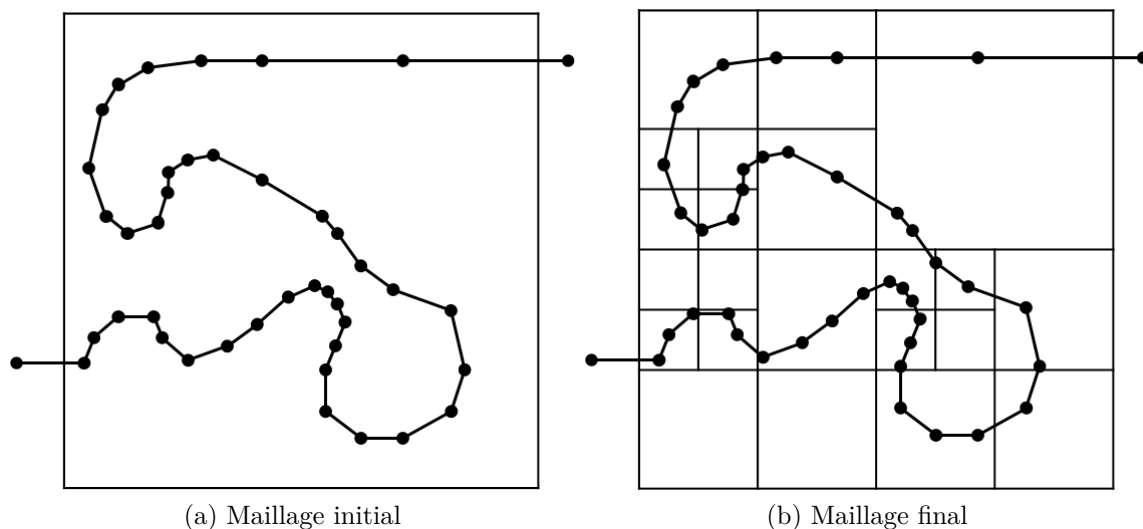


Figure 3.5 Critère 1 de raffinement (e.g., maximum 4 points par élément), tiré de [11].

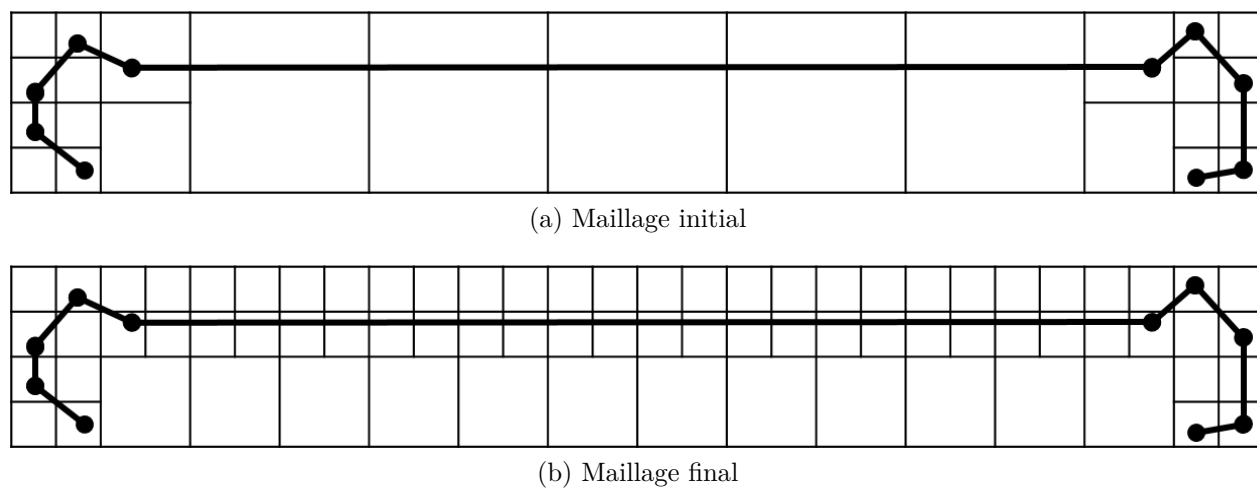


Figure 3.6 Critères 1 et 2 de raffinement (e.g., maximum 2 points par élément et 3 niveaux de raffinement), tiré de [11].

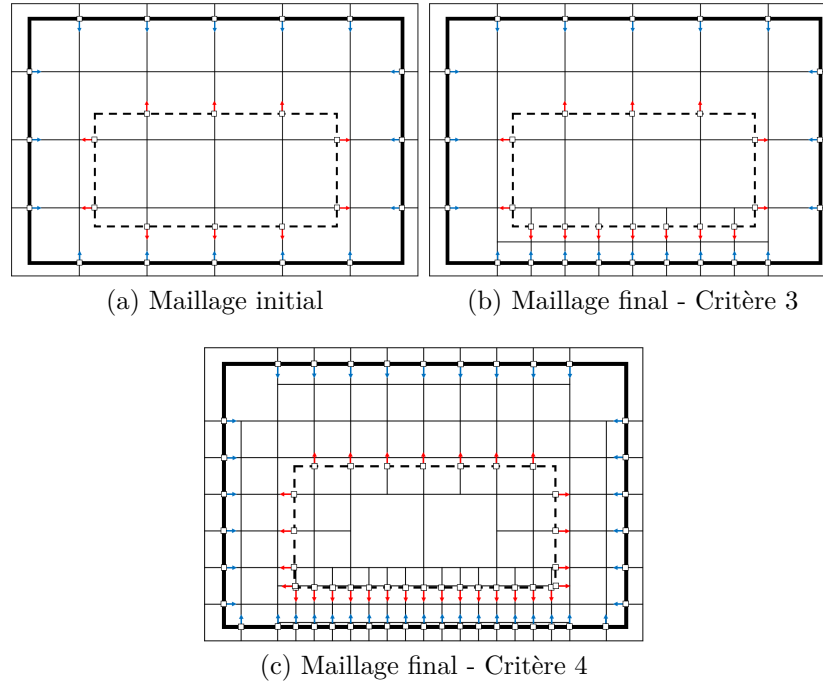


Figure 3.7 Critères 3 et 4 de raffinement (e.g., maximum 2 points par élément, 3 niveaux de raffinement et 1 couche ajoutée), tiré de [11].

Lors du processus de raffinement, on impose également une contrainte au niveau de la différence de niveau hiérarchique entre les éléments voisins. On cherche ainsi à garantir une transition d'échelle spatiale régulière dans le maillage hiérarchique. Cela permet également d'assurer un schéma numérique régulier. Pour cela, la différence entre le niveau de raffinement d'un élément à l'autre doit être au maximum d'un niveau [11].

### 3.2.2.1 Structure de données

On attribue un identifiant **idCell** unique à chaque élément du maillage. On accède aux informations suivantes avec cet identifiant, et un adressage hiérarchique global [11] :

- Les coordonnées  $x$  et  $y$  des sommets diagonaux en bas à gauche et en haut à droite (Fig. 3.9).
- Le niveau de raffinement  $N$ .
- La différence de niveau de raffinement  $\Delta N_d$  selon les directions cardinales, c'est-à-dire  $d = N, S, E$  et  $W$ .
  - Les valeurs de  $\Delta N_d$  peuvent être 0 (i.e., le même niveau hiérarchique), +1 (i.e., le voisin est plus raffiné, donc au niveau hiérarchique +1) ou -1 (i.e., le voisin est moins raffiné, donc au niveau hiérarchique -1) (Fig. 3.8).



- Les indices locaux  $i$  et  $j$  selon les axes  $x$  et  $y$ , respectivement.

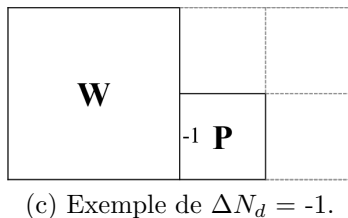
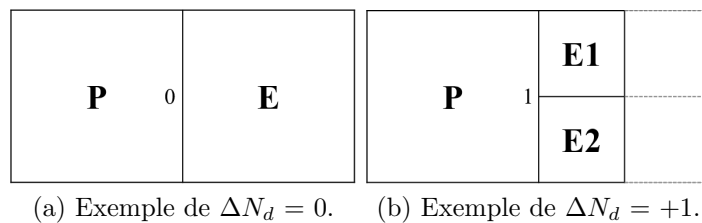


Figure 3.8 Les valeurs de  $\Delta N_d$ , tiré de [11].

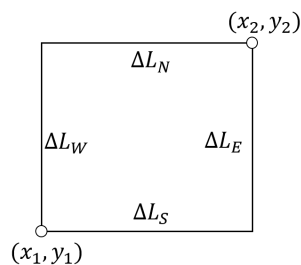


Figure 3.9 Les informations stockées des éléments du maillage hiérarchique, tiré de [11].

Cependant, on calcule les informations du voisinage et de la relation *parent-enfants* de l'élément **idCell** au besoin. Ces algorithmes sont encapsulés dans des fonctions informatiques. Avec l'adressage global implicite utilisé, le calcul de ces informations est très rapide.

De plus, on converse les données du maillage cartésien initial sous-jacent.

- Les coordonnées  $x$  et  $y$  (i.e., *max* et *min*) des sommets définissant la grille cartésienne.
- La résolution initiale  $N_x$  et  $N_y$ , c'est-à-dire le nombre de subdivisions selon les axes  $x$  et  $y$  respectivement.

Par rapport au solveur de l'écoulement dans le module **Solveur multiphysique**, le calcul des flux est réalisé aux côtés des éléments de maillage. Pour cela, on doit générer et stocker les listes de côtés permettant d'associer un côté aux éléments adjacents, et vice-versa [11]. Les tables de hachage (de l'anglais, hash-table) ont été employées pour le stockage des informations du maillage hiérarchique. Cette structure permet une gestion plus facile du maillage.

### 3.2.3 Marquage d'éléments IBM

Le module **Marquage d'éléments IBM** génère et gère le lien entre les topologies discrètes (les géométries immergées) et les maillages IB hiérarchiques superposés indépendants.

Le processus de marquage d'éléments a pour objectifs de :

- Classifier les éléments du maillage hiérarchique dans le domaine de calcul défini par la topologie discrète (Section 3.2.3.1).
- Calculer et stocker les informations topologiques aux éléments intersectés par la géométrie. Cela permet d'imposer correctement les conditions limites. (Section 3.2.3.2)
- Déclencher le processus de raffinement hiérarchique local à partir d'un critère géométrique (Section 3.2.2).
- Trier les listes de côtés du maillage à partir du type d'élément marqué pour le calcul des termes de flux physique.

L'idée principale de l'approche de classification consiste à attribuer un rôle spécifique aux éléments de la maille dans le domaine de calcul permettant de coupler numériquement le maillage hiérarchique et la topologie. A cet égard, on se sert d'une approche basée sur la position du centre des éléments à l'interface géométrique. Cela est également en conformité avec la méthode des Volumes Finis choisie pour l'approche numérique de base pour le solveur multiphysique (Chapitre 5).

#### 3.2.3.1 Définitions de base

On présente les différents types d'éléments, en suivant la nomenclature tirée de [11], résultant du processus de marquage d'éléments IBM, illustrés à la Fig. 3.10 :

- **Intérieur** : les éléments dont le centre se situe à l'intérieur de la face définie par la topologie discrète.
  - **Face (FC, *Face Cell*)** : les éléments ayant la molécule de calcul (i.e., les quatre voisins) à l'intérieur du domaine de calcul (cf. les éléments carrés en bleu).
  - **Interface (IC, *Interface Cell*)** : les éléments ayant un de ses voisins du type OC.
    - **Interface Intersecté (IIC, *Intersected Interface Cell*)** : les éléments Interface intersectés par la topologie discrète (cf. les éléments carrés troués en rouge).
    - **Interface Non-Intersecté (NIIC, *Non-Intersected Interface Cell*)** : les éléments Interface non-intersectés par la topologie discrète (cf. les éléments carrés troués en jaune).
- **Extérieur (OC, *Outside Cell*)** : les éléments dont le centre se situe à l'extérieur de la face définie par la topologie discrète (cf. les éléments cercles en blanc).

- **Extérieur Interface (IOC, *Interface Outside Cell*)** : les éléments OC intersectés par la topologie discrète (cf. les éléments cercles troués en gris).

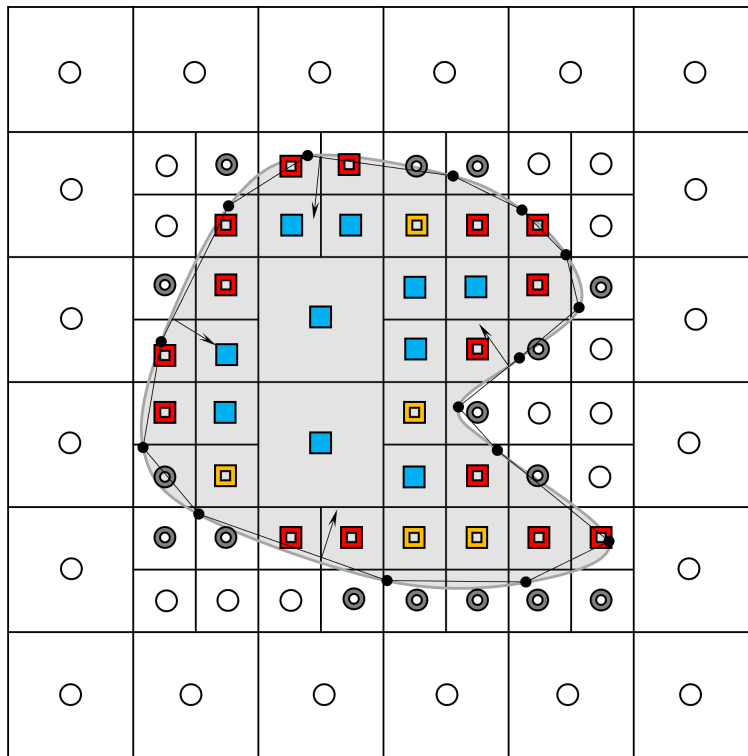


Figure 3.10 La classification des éléments IBM marqués, tiré de [11].

Le processus de marquage des éléments IBM comprend les étapes suivantes [11] :

1. Algorithme de *Parcours Géométrique* (PG) : identifie les éléments intersectés du maillage en parcourant l'ensemble des segments de droite orientés de la géométrie. Pour une boucle donnée, on parcourt de proche en proche chaque segment en identifiant l'élément du maillage intersecté ainsi qu'en calculant les intersections grille-géométrie (Fig. 3.11).
2. Triage des éléments intersectés : les éléments intersectés sont identifiées en deux catégories (i.e., IIC et IOC). Pour cela, à l'aide des vecteurs normaux calculés aux points d'intersection, on détermine si le centre de l'élément intersecté est à l'intérieur ou à l'extérieur de la face topologique, c'est-à-dire du domaine de calcul (Fig. 3.12).
3. Détection des éléments NIIC : assure une représentation étanche (de l'anglais, *water-tight*) de l'interface géométrique. Il faut détecter la présence des éléments à l'interface non-intersectés par la géométrie. On se sert du voisinage des éléments IOC pour identifier les NIIC (Fig. 3.13).

4. Identification des éléments FC et OC : permet de remplir le domaine de calcul en identifiant les éléments FC à l'intérieur et OC à l'extérieur. Pour cela, l'algorithme de remplissage (de l'anglais, *Flood-Fill*) est employé (Fig. 3.14).

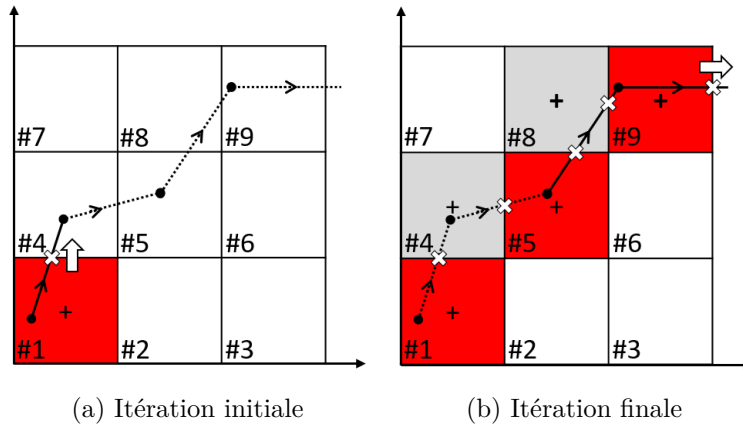


Figure 3.11 L'algorithme MG, tiré de [11].

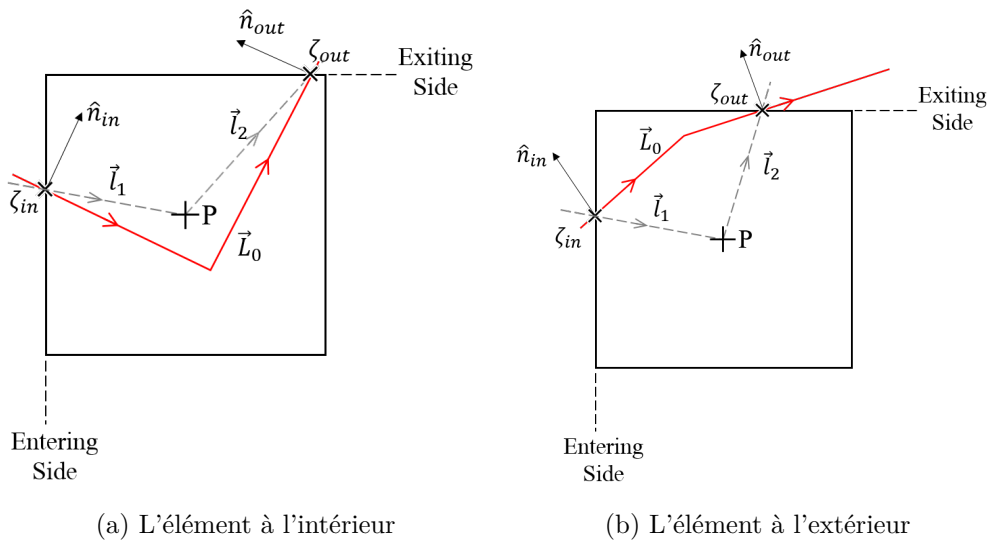


Figure 3.12 Le triage des éléments intersectés, tiré de [11].

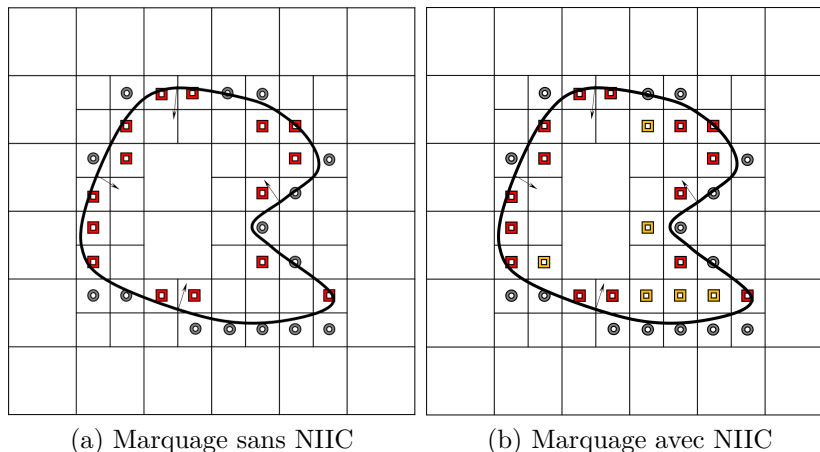


Figure 3.13 La détection des éléments NIIC, tiré de [11].

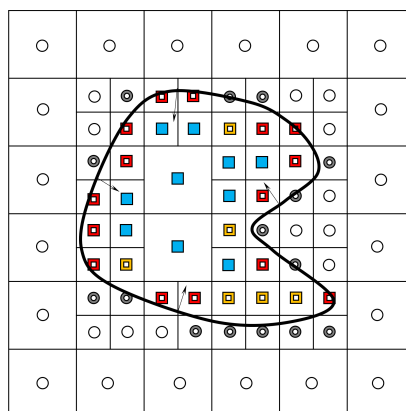


Figure 3.14 Identification des éléments FC et OC, tiré de [11].

Le marquage des éléments est réalisé pour chaque face topologique définissant les différentes zones du domaine de calcul.

### 3.2.3.2 Structure de données

La structure de données définie pour ce module comprend :

- Pour chaque face topologique, les listes des éléments du maillage appartenant aux types de marquage sont stockés dans une table de hachage ayant comme valeur-clé l'identifiant **idFace**. De plus, les éléments marqués sont ordonnés selon la numérotation globale, **idCell**, du maillage hiérarchique.
- Pour chaque élément intersecté, c'est-à-dire les IC et IOC, on stocke les informations des points d'intersection grille-géométrie (Fig. 3.15). Pour y accéder, on se sert d'une

fonction implémentée à l'intérieur du module ayant comme donnée d'entrée **idCell** de l'élément.

- Le nombre d'intersections de l'élément.
- Les directions d'entrée/sortie de la courbe géométrique d'intersection. Pour cela, on a donc Nord, Sud, Ouest et Est.
- Les coordonnées  $x$  et  $y$  des points d'intersection aux côtés d'entrée et de sortie.
- Le pourcentage des côtés verticales et horizontales intersectés d'entrée et de sortie.
- Le **idCote** du côté topologique intersectant les points d'intersection d'entrée et de sortie.
- Le **idBoucle** de la boucle topologique intersectant les points d'intersection d'entrée et de sortie.

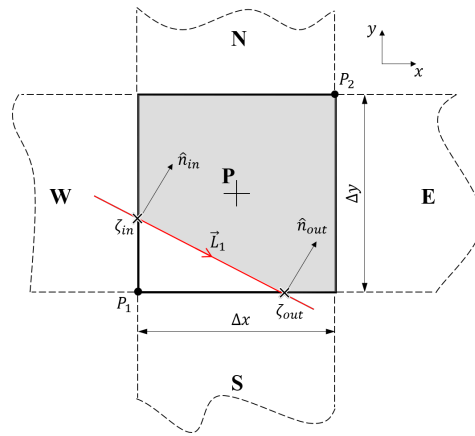


Figure 3.15 Informations stockées des éléments IC et IOC, tiré de [11].

### 3.2.4 Disjoncteur simplifié

La Fig. 3.16 illustre la configuration des différentes zones de calcul d'un disjoncteur simplifié, principalement pour les géométries statiques. A titre d'exemple, pour un maillage 90 x 25 avec un niveau maximal de raffinement de 3 au niveau des courbes, les Fig. 3.17 - 3.20 illustrent la discrétisation hiérarchique pour les différentes zones de calcul. De plus, par rapport au marquage des éléments IBM, les éléments **FC**, **IIC**, **NIIC**, **IOC** et **OC** sont identifiés, respectivement, en bleu, en rouge, en orange, en gris et en blanc. Ce type de maillage sera utilisé dans les chapitres suivantes pour la résolution des différentes physiques.

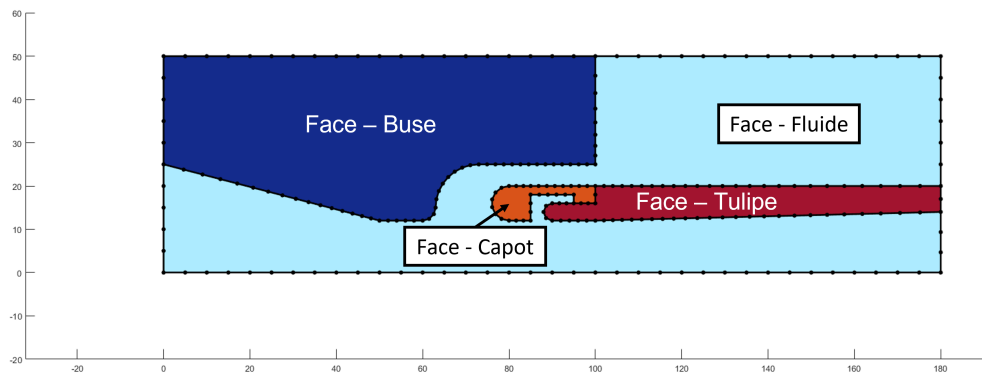


Figure 3.16 Topologie Discrète - Disjoncteur simplifié.

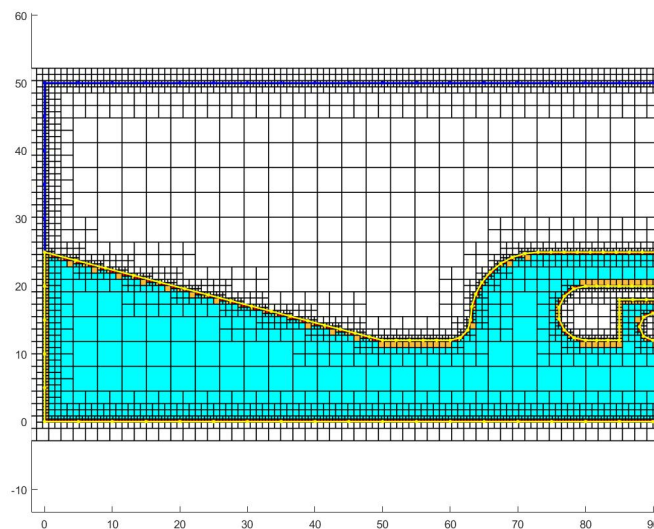


Figure 3.17 Disjoncteur simplifié - Zone Fluide à gauche

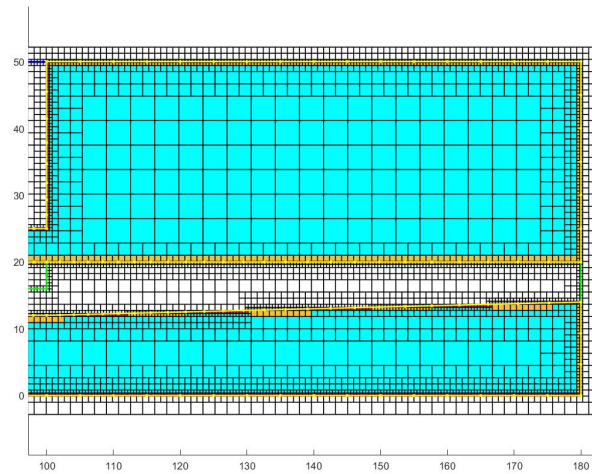
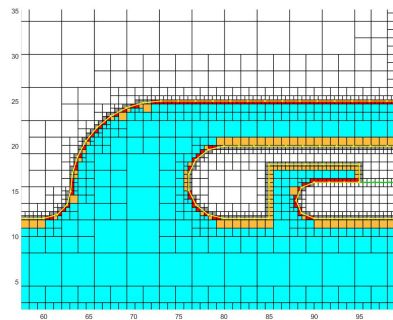
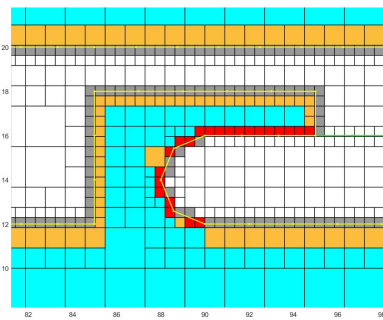


Figure 3.18 Disjoncteur simplifié - Zone Fluide à droite



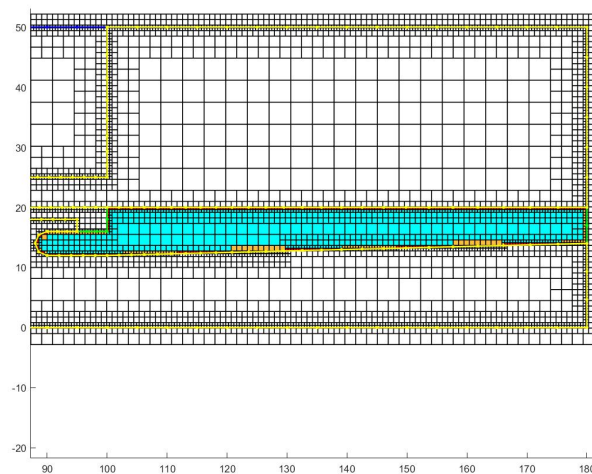
(a) Canal Thermique



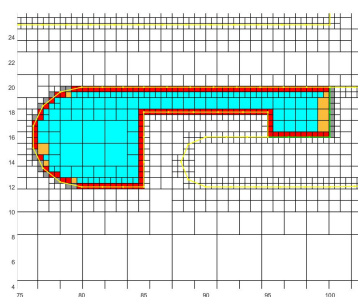
(b) Entre-jeu Capot/Tulipe

Figure 3.19 Disjoncteur simplifié - Zone Fluide - Zoom.

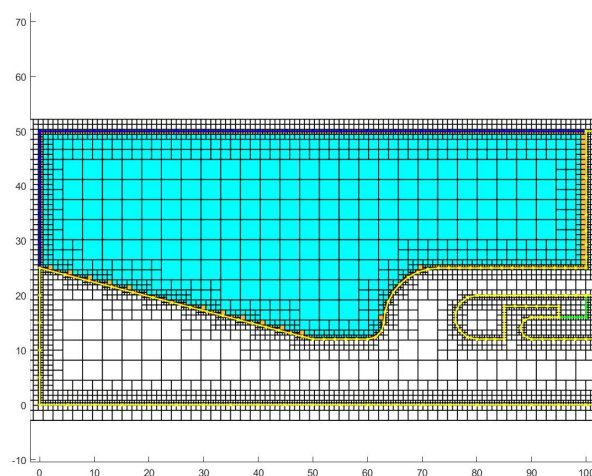




(a) Tulipe.



(b) Capot.



(c) Buse.

Figure 3.20 Disjoncteur simplifié - Zones solides.

## CHAPITRE 4 Module des maillages IBM superposés

Suite à la discussion sur les modules de la topologie discrète, du maillage cartésien hiérarchique et du marquage d'éléments IBM permettant la définition et discrétisation des différentes zones géométriques et physiques (e.g., les pièces du disjoncteur), la prochaine étape de la structure du code multiphysique est la gestion et le couplage numérique de solutions obtenus sur des maillages indépendants dans le but d'obtenir une solution globale sur le domaine.

On détaillera d'abord la méthodologie adoptée pour le module des maillages superposés (Section 4.1). Ensuite, le solveur d'Eikonal et la méthode de balayage rapide (*Fast Sweeping Method*) seront exposés permettant de générer le champ distance euclidien à la base du critère pour le traitement des mailles superposées. A la fin de la discussion de la méthodologie, on présente des résultats afin de vérifier numériquement l'ensemble des implémentations.

### 4.1 Méthodologie de traitement des maillages superposés

La prise en compte du mouvement des géométries mobiles est réalisé par la méthodologie des maillages superposés qui couple des solutions obtenus à partir de différents maillages en mouvement relatif (Fig. 4.1). Cela permet de simplifier la prise en compte du déplacement des domaines géométriquement complexes et mobiles, principalement pour l'application disjoncteur haute-tension (Section 2.2).

Ce module numérique réunit des tâches de pré-traitement du maillage inspirées de la structure classique de la méthode de maillages superposés (Section 2.2).

D'une manière globale, il a les fonctionnalités suivantes :

- Délimitation des zones de superposition par le processus de découpage en trou (de l'anglais, *Hole Cutting*).
- Détection des éléments pour le couplage numérique des maillages, c'est-à-dire le transfert de l'information.
- Mise-à-jour du marquage d'éléments de la grille IBM.

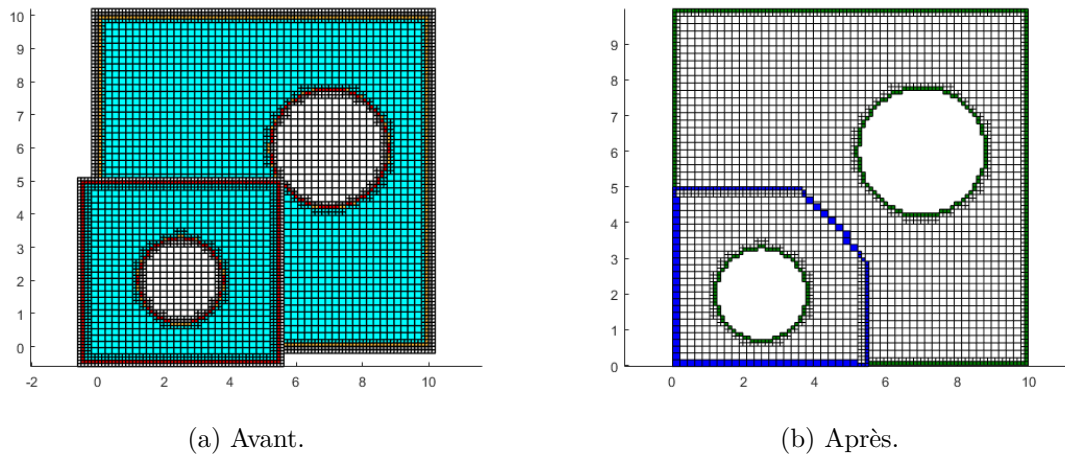


Figure 4.1 Exemple de l'adaptation et du couplage des mailles superposées.

Le processus de découpage en trou est le coeur méthodologique du module de maillages superposés développé et est basé sur la méthode de *Découpage en Trou Implicite* (de l'anglais, *Implicit Hole Cutting*) [104, 122] (Section 3.1). Cette méthode comprend l'identification et la désactivation des éléments pour le solveur numérique dans la région de chevauchement entre les maillages à partir de la comparaison du critère de base. On utilise la distance à la paroi comme critère de base, permettant d'employer le concept de la ligne médiatrice pour le découpage des mailles superposées. Par définition, la ligne médiatrice est une courbe virtuelle définie par l'ensemble des points équidistants aux frontières. A titre d'exemple, la Fig. 4.2 illustre la ligne médiatrice (en rouge) à l'intérieur d'un rectangle formé par les frontières ( $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$ ). Ici, on identifie ainsi la zone spatiale la plus proche à chaque frontière. Cela nous aide à déterminer les zones du maillage à activer et à désactiver pour le couplage.

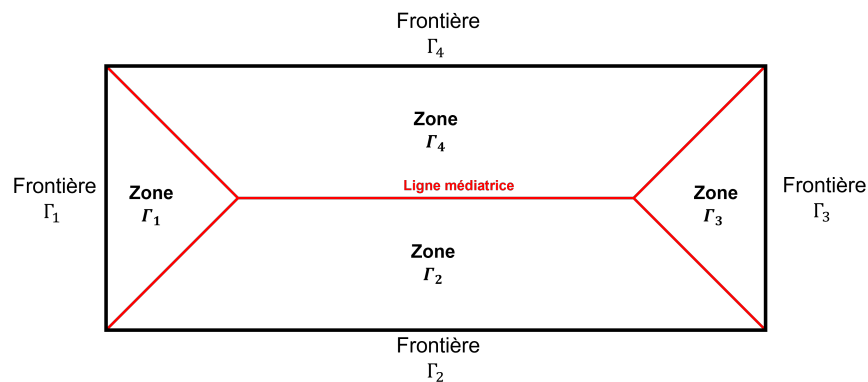


Figure 4.2 Exemple de ligne médiatrice.

Le critère de la distance à la paroi permet également de ne pas prioriser un maillage en particulier au détriment des autres. Afin d'obtenir la distance à la paroi pour tous les éléments de chaque maillage, on doit donc générer le champ distance euclidien (Sections 4.2 et 4.2.3).

#### 4.1.1 Définitions de base

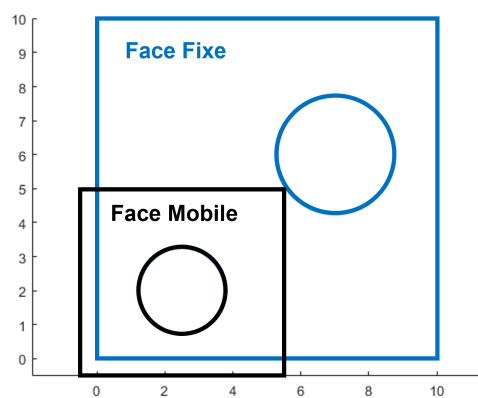
Les définitions de base comprennent les différents statuts et rôles des éléments vis-à-vis du solveur multiphysique. On détermine globalement le statut de ces éléments à partir de la comparaison entre les valeurs de la distance à la paroi des géométries.

Afin d'illustrer la classification des éléments et la méthodologie des maillages superposés (Section 4.1.3), on applique l'algorithme développé au cas-test suivant : un cercle mobile et un cercle fixe. Cet exemple comprend le découpage en trou et le couplage des maillages superposés reliés chacune à un cercle qui demeure statique.

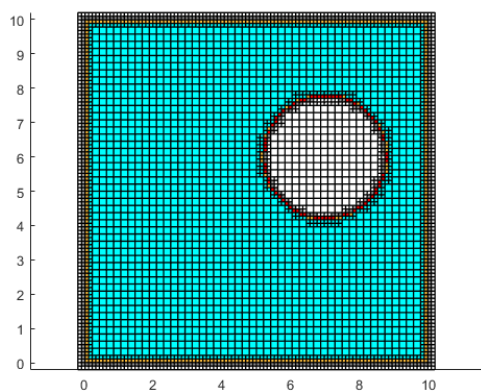
La Fig. 4.3 illustre les topologies fixe et mobile, ainsi que les maillages avant l'application de la méthodologie. Topologiquement, le domaine de calcul est défini par la face fixe (Fig. 4.3a). Pour les maillages fixe et mobile, la résolution spatiale est, respectivement, 50 x 50 et 30 x 30, avec un niveau de raffinement maximal 2 au niveau des courbes (Fig. 4.3c).

Les éléments sont classifiés selon les types suivants, comme illustré à la Fig. 4.4 :

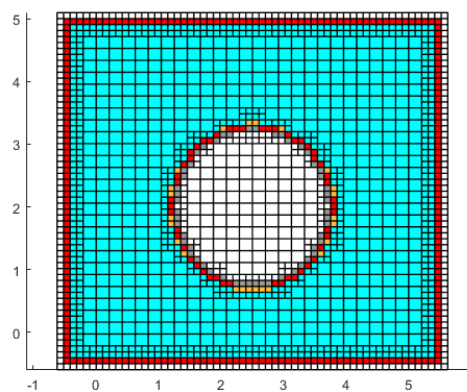
- **Activé** : les éléments dont la distance à la géométrie reliée à son maillage est inférieure à celle associée à la maille superposée correspondante. Ils sont maintenus activés pour le calcul numérique dans le solveur (cf. les éléments en bleu).
- **Désactivé** : les éléments dont la distance à la géométrie reliée à son maillage est supérieure à celle associée à la maille superposée correspondante, ainsi que les éléments dehors du domaine de calcul défini par la face fixe (cf. les éléments en orange). Ils sont désactivés pour le calcul numérique dans le solveur car on utilise plutôt l'élément de l'autre maillage.
- **Trou** : les éléments chevauchés par les géométries définissant les différentes zones du calcul (cf. les éléments en violet). Ils sont également désactivés.
- **Interpolé** : les éléments responsables du couplage numérique entre les mailles (cf. les éléments en noir). Pour le solveur numérique, le schéma d'interpolation réalise le transfert de l'information entre les maillages.



(a) Topologies superposés.

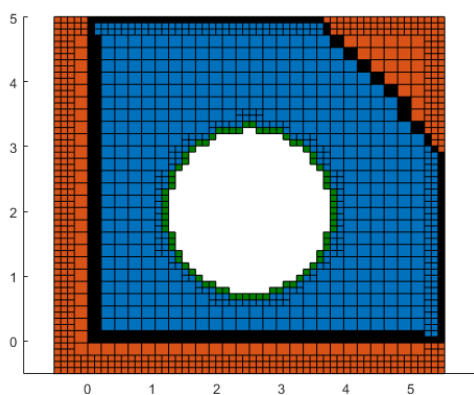


(b) Maillage initial fixe.

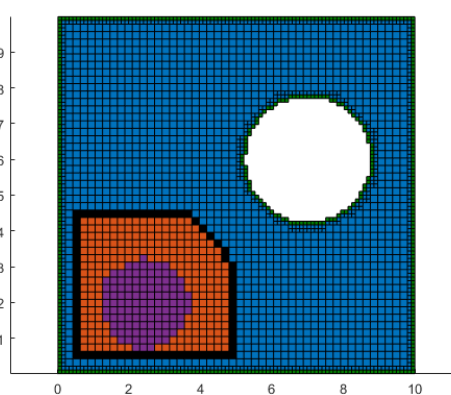


(c) Maillage initial mobile.

Figure 4.3 Topologie et maillages du cas test : Un cercle mobile et un cercle fixe.



(a) Maille mobile.



(b) Maille fixe.

Figure 4.4 La classification d'éléments des maillages superposés.

### 4.1.2 Hypothèses

La méthodologie développée pour le processus de Découpage en Trou a été formulée en suivant les hypothèses suivantes :

- Les zones de calcul statiques sont discrétisées par un seul maillage, libellé **Fixe**. De plus, le repère global du domaine de calcul est associé à cette maille.
- Chaque zone de calcul mobile est discrétisée et reliée à un maillage, appelé **Mobile**, superposé à celui **Fixe**.
- Les régions de superposition possibles entre les maillages sont des rectangles et les topologies discrètes décrivant les différentes zones de calcul sont délimitées par une boucle externe rectangulaire.
- Comme les objets géométries mobiles (e.g., la tige et le piston) d'un disjoncteur sont distants et ne se chevauchent pas, la méthodologie traite uniquement les situations comparant une seule superposition **Mobile - Fixe**.
- Les situations de contact avec les courbes géométriques alignées sont prise en compte. Par exemple, le cas d'un piston (cf. les courbes en bleu et en noir composant les topologies statique et mobile) illustré à la Fig. 4.5 où les courbes définissant les géométries fixe et mobile sont superposées.
- Les zones de calcul mobiles peuvent sortir du domaine de calcul décrit par la topologie discrète fixe (Fig. 4.1).

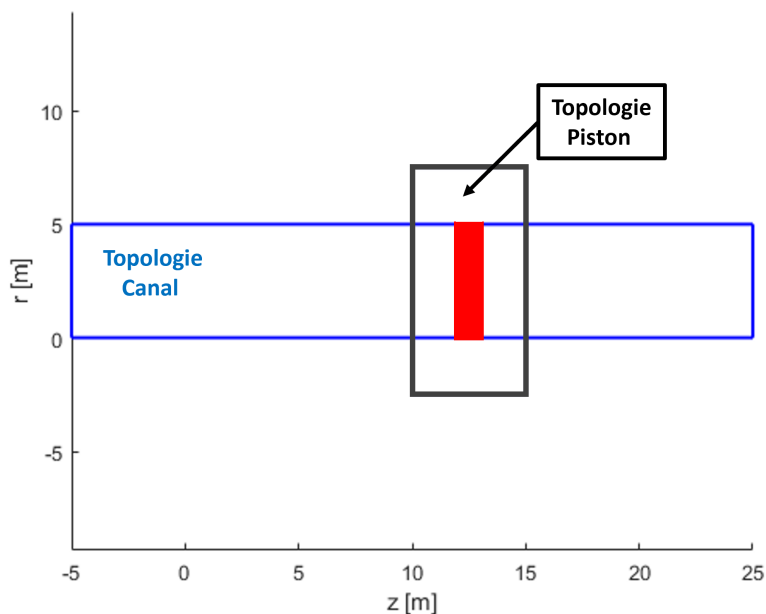


Figure 4.5 Exemple de situation de contact avec les courbes alignées.

A partir d'une analyse des caractéristiques de la géométrie et du déplacement des différentes pièces d'un disjoncteur haute-tension, les hypothèses ci-dessus ont servi de cadre pour une approche orientée vers l'application.

### 4.1.3 Structure de la méthodologie

La structure de l'algorithme développé comprend les trois étapes suivantes :

1. Détection de la zone de superposition.
2. Détection de la ligne médiatrice.
3. Identification de la couche d'éléments pour le couplage numérique.

Les étapes 1 et 2 englobent les tâches du processus de Découpage en Trou : l'identification de la région de chevauchement et le découpage des maillages superposés à partir de l'approche de la ligne médiatrice. Ensuite, l'étape 3 détecte les éléments **Interpolé** pour le transfert de l'information entre les mailles et met à jour le marquage IBM.

#### 4.1.3.1 Détection de la zone de superposition

Cette étape consiste à détecter la zone de chevauchement entre les maillages superposés et le maillage fixe et à identifier les éléments des mailles selon leur position par rapport à cette zone. Cela permet de restreindre la région d'application de l'algorithme uniquement à la superposition entre les mailles.

On vérifie et calcule d'abord l'intersection entre les boucles externes définissant les topologies fixe et mobile (Fig. 4.6). Comme le type d'intersection est *Rectangle - Rectangle* (Section 4.1.2), on obtient le rectangle d'intersection à partir des dimensions des boucles externes mobile et fixe (e.g., les points les points M1 et M2, et F1 et F2, respectivement) (Fig. 4.6).

Les expressions employées sont les suivantes :

$$x_{\min} = \max(x_{F1}, x_{M1}) \qquad y_{\min} = \max(y_{F2}, y_{M2}) \qquad (4.1)$$

$$x_{\max} = \min(x_{F2}, x_{M2}) \qquad y_{\max} = \min(y_{F1}, y_{M1}) \qquad (4.2)$$

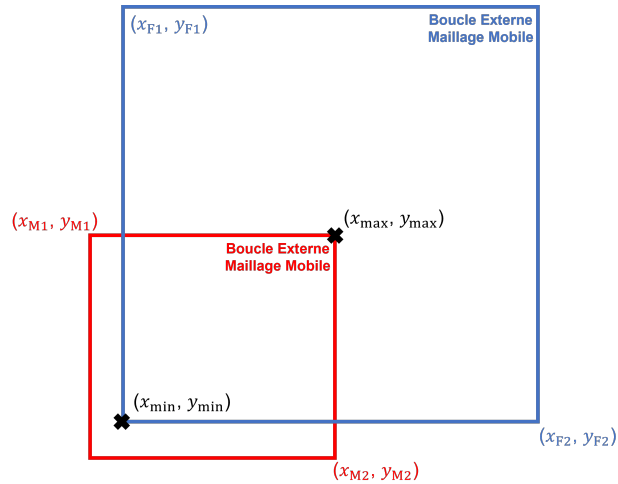


Figure 4.6 Zone d'intersection.

Ensuite, on identifie les éléments en comparant les coordonnées de leur centre aux sommets définissant le rectangle d'intersection. De plus, à cette étape, les éléments de maille situés en dehors du domaine de calcul défini par la topologie discrète fixe sont également identifiés pour être désactivés. Pour le maillage mobile, les éléments sont identifiés selon deux types (Fig. 4.7) :

- Intérieur Superposition Mobile (ISM) : les éléments intérieurs à la zone de superposition (cf. Fig. 4.7, les éléments en bleu).
- Extérieur Superposition Mobile (ESM) : les éléments extérieurs à la zone de superposition ou au domaine de calcul. Ils seront désactivés pour le calcul du solveur (cf. Fig. 4.7, les éléments en rouge).

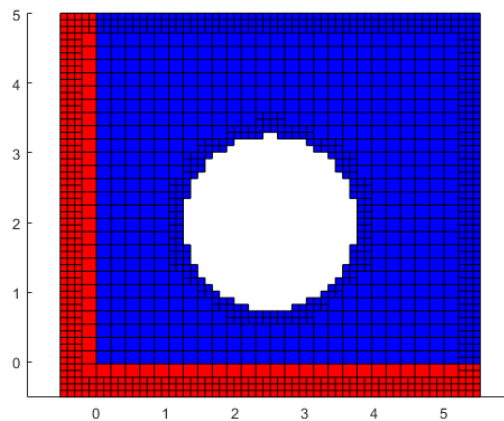


Figure 4.7 Identification des éléments de l'étape 1 : Maillage Mobile.



Toutefois, pour le maillage fixe, on délimite une autre région à l'intérieur du rectangle d'intersection afin d'imposer par défaut un nombre de couches d'éléments activés entre les zones de couplage. Le rectangle délimitant cette région est obtenu en réduisant la dimension de l'intersection en  $x$  et  $y$  avec les  $\Delta x$  et  $\Delta y$  de la maille fixe, respectivement (Fig. 4.8).

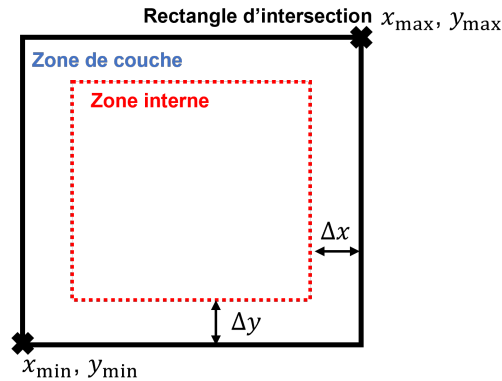


Figure 4.8 Les zones de couche et interne pour le maillage fixe.

Pour les applications sans détection de proximité, Fig. 4.9, comme ceux étudiés par [11], cela permet d'établir automatiquement la bonne position pour la zone de transfert de l'information vis-à-vis de la contrainte du couplage entre les mailles (Section 2.2.2.1).

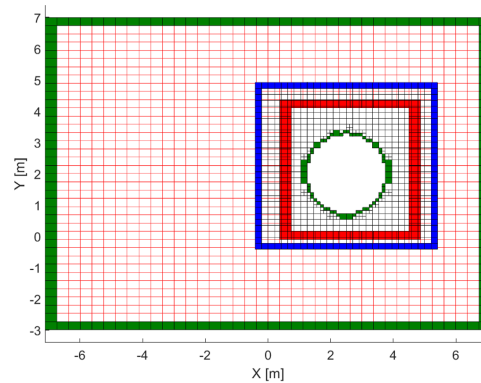


Figure 4.9 Exemple d'application sans détection de proximité, tiré de [11].

La zone de superposition pour la maille fixe comprend désormais une région de couche et une région interne. Par conséquent, les éléments sont classifiés en trois types (Fig. 4.10) :

- Intérieur Superposition Fixe (ISF) : les éléments intérieurs à la région interne de la zone de superposition (cf. Fig. 4.10, les éléments en bleu).
- Couche Superposition Fixe (CSF) : les éléments intérieurs à la région de couche de la zone de superposition (cf. Fig. 4.10, les éléments en vert foncé).

- Extérieur Superposition Fixe (ESF) : les éléments extérieurs à la zone de superposition qui seront maintenus activés pour le calcul du solveur (cf. Fig. 4.10, les éléments en rouge).

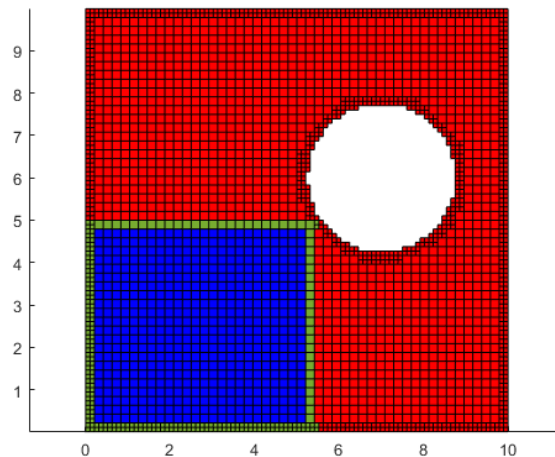


Figure 4.10 Identification des éléments de l'étape 1 : Maillage Fixe.

#### 4.1.3.2 Détection de la ligne médiatrice

Cette étape réalise le découpage des maillages superposés au niveau de la ligne médiatrice dans la région de chevauchement. De plus, on active ou désactive les éléments permettant de limiter la superposition des mailles et d'éviter la redondance pour le calcul numérique dans le solveur multiphysique.

L'idée de base de la détection de la ligne médiatrice est de superposer les champs de distance des mailles superposées (Fig. 4.11). L'approche consiste à comparer la valeur de la distance à la paroi dans les repères du maillage fixe et du maillage mobile pour tous des éléments appartenant à la zone de superposition en déterminant leur statut (i.e., **Activé** ou **Désactivé**) à partir du critère de la valeur minimale.

Les Figs. 4.11a et 4.11b illustrent la soustraction des champs distance (Figs. 4.12a et 4.12b) sur les maillages mobile et fixe, respectivement, permettant de visualiser plus clairement la ligne médiatrice, c'est-à-dire la zone des maillages à découper.

Cependant, comme les mailles superposées ne sont pas nécessairement alignées, on doit reconstruire par interpolation au centre des éléments *pivot* (i.e., à établir le statuts) la valeur du champ distance dans le repère du maillage opposé.

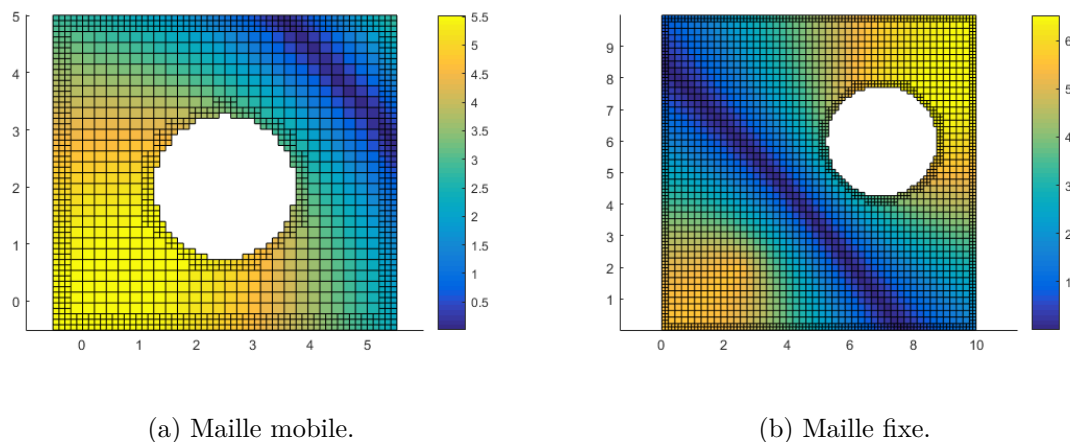


Figure 4.11 Superposition des champs distance.

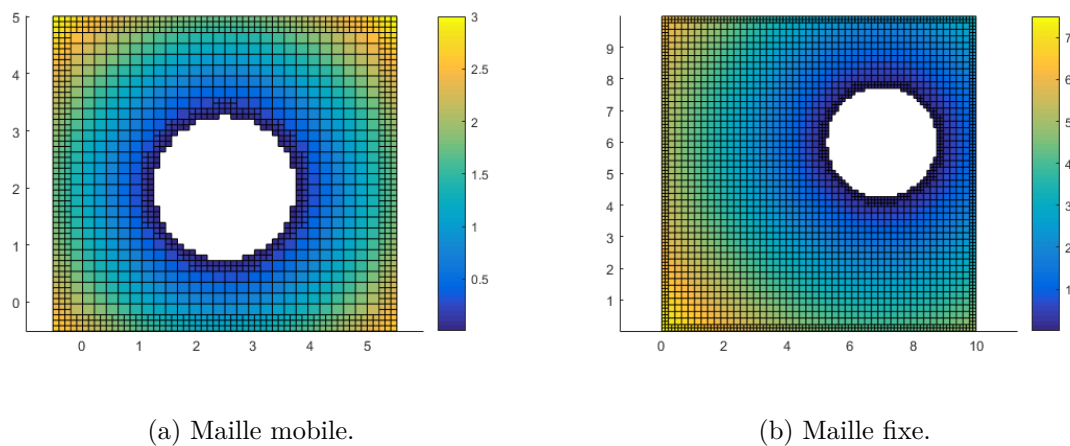


Figure 4.12 Champs distance.

La reconstruction est basée sur la valeur et sur le gradient du champ distance de l'élément correspondant à l'autre maille superposée (Fig. 4.13). La relation ci-dessous permet une reconstruction d'ordre deux.

$$\varphi_P = \varphi_C + \vec{\nabla}\varphi_C \cdot \vec{\Delta x}_{PC} \quad (4.3)$$

où,  $\varphi_R$  la valeur reconstruite de l'élément *pivot*,  $\varphi_C$  la valeur et  $\vec{\nabla}\varphi_C$  le vecteur gradient de l'élément correspondant, et  $\vec{\Delta x}_{PC}$  le vecteur différence des coordonnées entre l'élément *pivot* et l'élément correspondant.

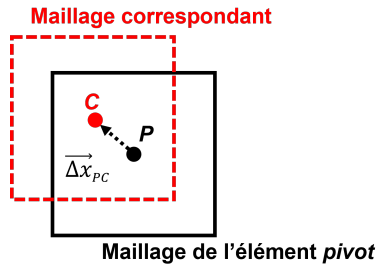


Figure 4.13 Reconstruction de la valeur de la distance à la paroi dans le repère du maillage opposé.

A partir du critère de la valeur minimale, les éléments *pivot* sont marqués, comme suit (Fig. 4.14) :

- Pour le maillage mobile : Si la valeur dans le repère mobile est inférieure à celle dans le repère fixe, l'élément *pivot* devient **Activé** (cf. en bleu). Sinon, il devient **Désactivé** (cf. en orange).
- Pour le maillage fixe : Si la valeur dans le repère fixe est inférieure à celle dans le repère mobile, l'élément *pivot* devient **Activé** (cf. en bleu). Sinon, il devient **Désactivé** (cf. en orange).

Cependant, lors de la recherche de l'élément correspondant, il est tout à fait possible qu'il soit à l'intérieur de la géométrie, et donc n'ayant pas de l'information du champ distance. Pour cette situation, l'élément *pivot* devient automatiquement **Trou** (cf. en violet).

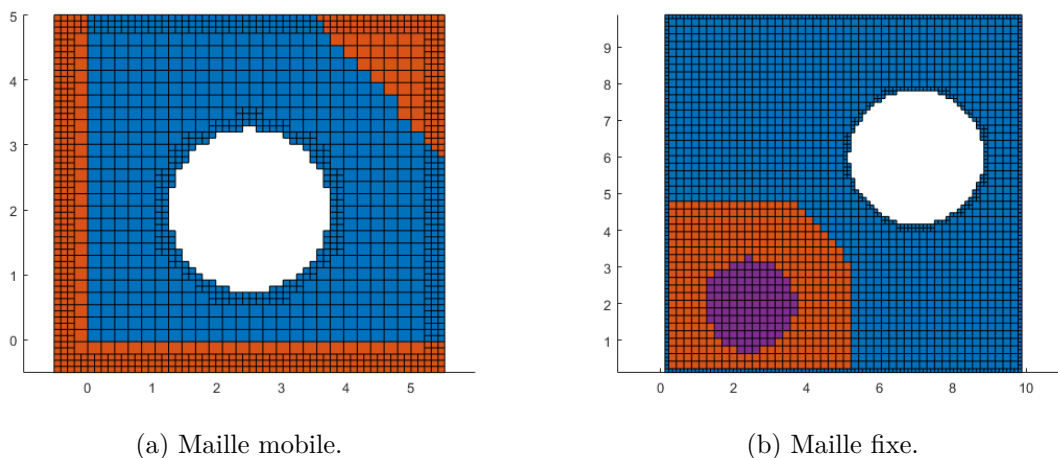


Figure 4.14 Identification des éléments de l'étape 2.

### 4.1.3.3 Détection de la couche pour le couplage numérique

Cette étape est dédiée à la définition des éléments couche pour le couplage et le transfert de l'information entre les maillages superposés. L'approche consiste principalement à générer une couche d'éléments **Interpolé** pour les maillages superposés.

D'une façon générale, les éléments **Interpolé** décrivent spatialement une enveloppe convexe (de l'anglais, *Convex Hull*) englobant les régions à maintenir activé pour le maillage mobile et à désactiver pour le maillage fixe (Fig. 4.4).

Le marquage des **Interpolé** est basé sur l'algorithme d'identification à partir d'une recherche dans le voisinage des éléments de la maille appartenant, au minimum, à une des zones suivantes, comme illustré dans les Fig. 4.15 et 4.16. La Fig. 4.16 illustre la situation de proximité avec les géométries alignées dans le cas d'un piston mobile (Fig. 4.16c).

1. La portion du maillage à désactiver par le critère de la ligne médiatrice avec la liste des éléments **Désactivé**.
2. Les régions de trou avec la liste des éléments **Trou** (i.e., le chevauchement avec la géométrie dans les situations de contact avec les courbes géométriques alignées).
3. Les portions du maillage mobile à désactiver externes au domaine de calcul avec la liste des éléments Extérieur Superposition Mobile (ESM) (Section 4.1.3.1).
4. La couche des éléments **Interface** (i.e., les listes IC du marquage IBM) au bord du maillage et qui est reliée à la boucle externe définissant la face topologique.

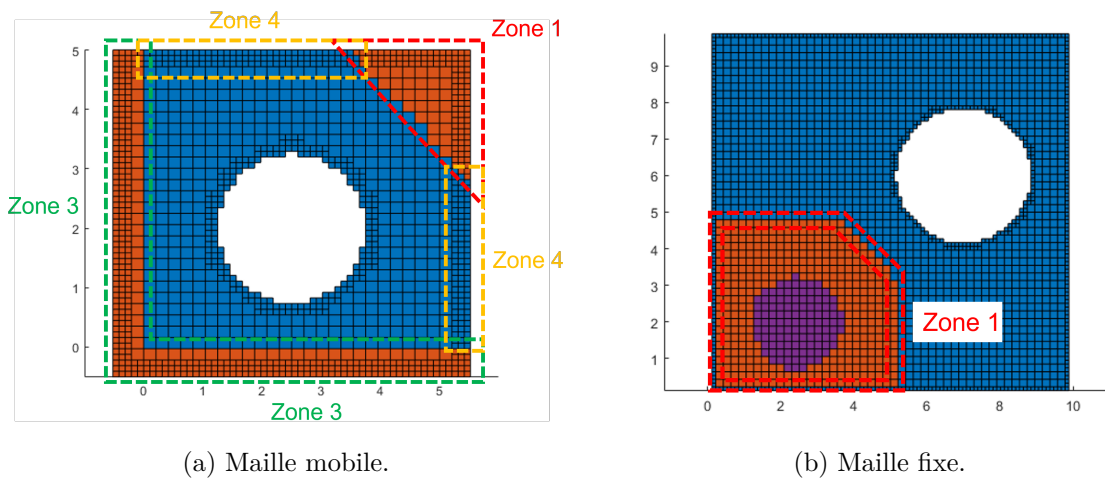


Figure 4.15 Les Zones 1, 3 et 4 pour la détection des éléments **Interpolé**.

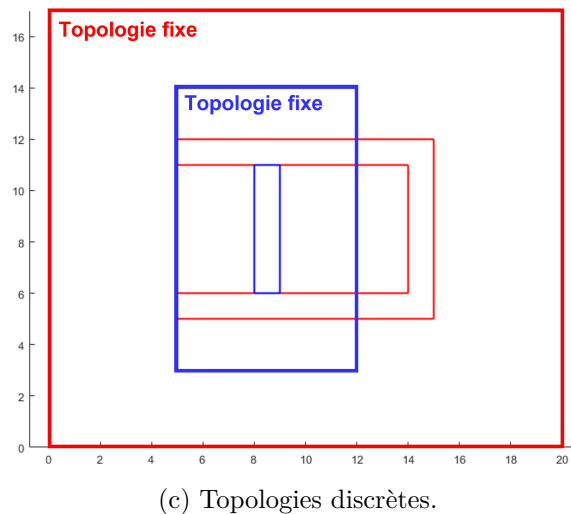
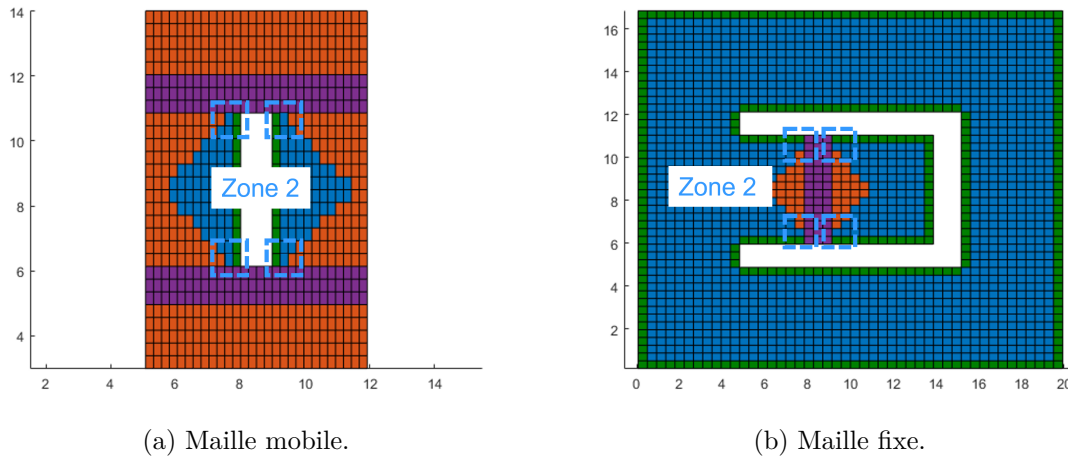


Figure 4.16 La zone 2 pour la détection des éléments **Interpolé**.

Pour le découpage du maillage mobile, les critères de la ligne médiatrice, de contact entre les géométries fixe-mobile et du déplacement à l'intérieur du domaine de calcul sont effectivement employés en obtenant les régions à désactiver : les Zones 1, 2 et 3 respectivement. Cependant, il est également possible qu'une portion de ce maillage ne soit pas désactivée par un de ces critères. Dans cette situation, on se sert de la Zone 4 afin de garder la forme en enveloppe convexe. De plus, pour les applications étudiées par [11], la liste des éléments de la Zone 4 est la principale source des **Interpolé**.

Toutefois, le découpage de la maille fixe est réalisé principalement par les critères de la ligne médiatrice et de contact entre les géométries fixe-mobile. Donc, les Zones 1 et 2 sont la base pour générer la liste des éléments **Interpolé**.

Comme la topologie discrète fixe délimite le domaine de calcul, le critère du déplacement à l'intérieur du domaine de calcul n'est plus pertinent. La Zone 4 n'y est pas également employée car la région de couche de la superposition (Section 4.1.3.1) conserve les éléments **Interface** afin de maintenir la prise en compte des conditions limites lors du couplage entre les mailles superposées pour la situation où le maillage mobile sort du domaine de calcul.

Suite à l'identification des zones clés, les conditions pour l'algorithme d'identification ont été établies, comme suit :

1. Pour la Zone 1, à partir de la liste **Désactivé**, les éléments adjacents à la région à maintenir activée (i.e, la liste **Activé**) deviennent **Interpolé**.
2. Pour la Zone 2, à partir de la liste **Trou**, comme ils sont à l'intérieur des géométries, les éléments **Activé** voisins (i.e., ayant de l'information de la distance à la paroi) deviennent **Interpolé**.
3. Pour la Zone 3, à partir de la liste des éléments ESM, comme ils se situent à l'extérieur du domaine de calcul, les éléments **Activé** voisins (i.e., à l'intérieur du domaine de calcul) deviennent **Interpolé**.
4. Pour la Zone 4, à partir de la liste **IC** du marquage IBM reliés à la boucle topologique externe, les éléments Interface à maintenir activés, c'est-à-dire appartenant à la liste **Activé**, deviennent **Interpolé**.

Pour le maillage fixe, avant d'appliquer la démarche de l'algorithme implémenté, on réalise d'abord les tâches : 1) de détection des éléments **Trou** pour la région de couche et 2) de l'ajout d'une couche d'éléments **Activé**. En effet, la première tâche consiste à identifier les éléments appartenant à la région de couche chevauchés par les géométries mobiles. Pour cela, on se sert de la logique suivante :

- Pour chaque élément de la liste Couche Superposition Fixe (CSF) (Section 4.1.3.1), nommé *pivot*, on trouve l'élément correspondant de la maille mobile :
  - Si l'élément correspondant est externe à la géométrie mobile (i.e, ayant de l'information de la distance à la paroi), l'élément *pivot* devient **Activé**.
  - Sinon, si l'élément correspondant est externe à la topologie mobile (i.e., la boucle externe), l'élément *pivot* devient **Activé**.
    - Sinon, l'élément *pivot* devient **Trou** car il est chevauché par la géométrie mobile.

La deuxième tâche à réaliser est d'ajouter une couche d'éléments **Activé** afin de garder les zones de couplage numérique pour la maille à une couche de distance. Ceci consiste à changer le marquage des éléments **Désactivé**, à proximité de la zone du maillage à maintenir à activé, en **Activé**.

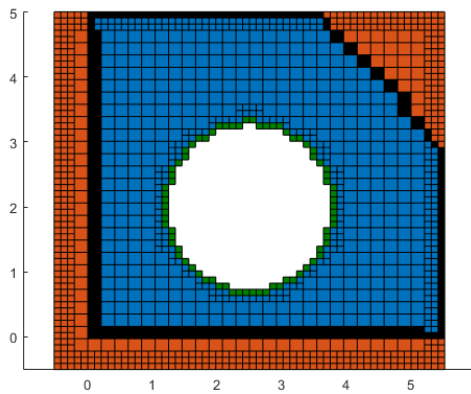
Finalement, on réorganise les listes des étapes 1 et 2 en une structure de données à trois listes seulement : **Activé** (cf. en bleu), **Désactivé** (cf. en orange) ou **Interpolés** (cf. en noir) (Fig. 4.17). Pour cela, on applique la démarche ci-dessous :

Maillage Mobile :

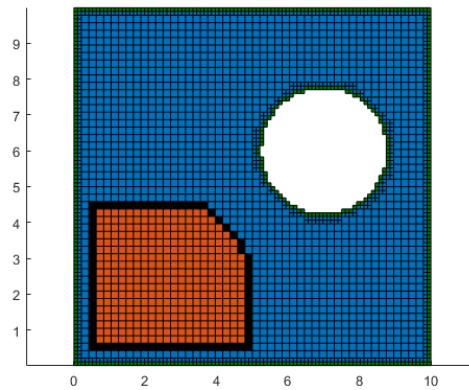
- Pour la liste ESM (i.e., les éléments externes à la topologie du domaine de calcul), les éléments internes à la face topologique et externes à la géométrie mobile (i.e., ayant de l'information de la distance à la paroi) deviennent **Désactivé**.
- Les éléments de la liste **Trou** sont ajoutés à celle **Désactivé**.

Maillage Fixe :

- Pour la liste ESF (i.e., les éléments externes à la zone de chevauchement), les éléments deviennent **Activé**.
- Les éléments de la liste **Trou** sont ajoutés à celle **Désactivé**.



(a) Maille mobile.



(b) Maille fixe.

Figure 4.17 Identification des éléments de l'étape 3.



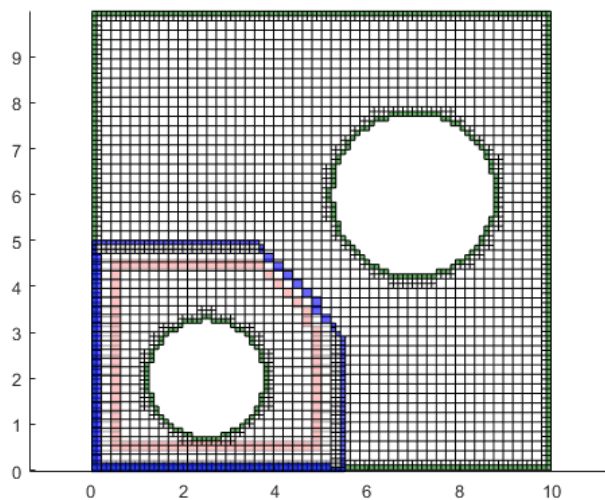


Figure 4.18 Visualisation des couches de transfert entre les mailles de l'étape 3. Les **Interpolés** des maillages fixe et mobile, respectivement, en rouge et en bleu.

#### 4.1.4 Structure de données

- Pour chaque maillage du domaine de calcul, les listes **Activé**, **Désactivé** et **Interpolé**, contenant les **idCell** des éléments de la maille, sont stockés dans une cellule ordonnée type MATLAB. Par convention, les informations liées au maillage fixe sont à la première position. Le choix d'utiliser une cellule comme type de donnée est justifié par l'application à géométries mobiles où les listes ci-dessous doivent être mises à jour régulièrement permettant de capturer la nouvelle position de la ligne médiatrice avec le déplacement des mailles mobiles et de garantir les zones de transfert de l'information. De plus, pour la liste **Interpolé**, on stocke également l'identifiant **idMesh** permettant de localiser le maillage superposé correspondant. Pour le maillage fixe, **idMesh** est défini comme -1 par convention. Cependant, pour les maillages mobiles, **idMesh** passe de zéro à  $N_M - 1$ , où  $N_M$  est le nombre de mailles au total.
- On réalise la mise-à-jour du marquage d'éléments IBM à partir des listes **Désactivé** et **Interpolés**. En effet, chaque fois que l'on emploie le traitement des maillages superposés, on génère et modifie une copie de la table de hachage du marquage d'éléments IBM. Cette modification consiste à enlever les éléments désactivés et interpolés du marquage original.

## 4.2 Solveur d'Eikonal

Un solveur d'Eikonal pour la génération du champ distance (i.e., la distance à la paroi) est pour le traitement des maillages hiérarchiques superposés.

On présente en premier l'équation d'Eikonal afin de comprendre la nature et le comportement physique du champ distance (Section 4.2.1). Dans un deuxième temps, le schéma numérique du solveur et l'extension de l'approche pour les applications aux maillages hiérarchiques sont détaillés à la Section 4.2.2. Ensuite, la méthode de Balayage Rapide (FSM, *Fast Sweeping Method*) et l'approche de balayage hiérarchique sont décrites permettant d'obtenir le champ distance pour un maillage hiérarchique. Finalement, on expose l'ensemble des cas-tests de vérification du solveur Eikonal (Section 4.2.4).

### 4.2.1 Équation d'Eikonal

L'équation d'Eikonal est une équation différentielle aux dérivées partielles de type hyperbolique non-linéaire d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} |\nabla u(\vec{x})| &= f(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \Omega \\ u(\vec{x}) &= 0, \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $u(\vec{x})$  le champ distance et  $f$  la fonction définissant le repère de propagation de  $u$ .

La résolution de cette équation donne le champ distance par rapport à la frontière d'une géométrie dans un espace défini par la fonction  $f$  (e.g., ralenti ou accéléré lié à la variation de  $f$ ).

L'information se propage comme un front le long des caractéristiques à partir de la frontière, et des chocs peuvent apparaître à cause de l'interaction entre les différents fronts provenant de différentes frontières [124].

Pour cette thèse, on s'intéresse à résoudre l'équation d'Eikonal avec la fonction  $f$  unitaire. Cela permet d'obtenir la distance euclidienne à la paroi.

$$\begin{aligned} |\nabla u(\vec{x})| &= 1, \quad \forall \vec{x} \in \Omega \\ u(\vec{x}) &= 0, \quad \forall \vec{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.5)$$

### 4.2.2 Schéma numérique

L'approche de discrétisation spatiale la plus répandue pour résoudre l'équation d'Eikonal est un schéma aux différences finies décentré en amont, d'ordre 1 et non-linéaire de Godunov [124, 125].

Pour l'élément  $P$  de la maille cartésienne, ayant les voisins cardinaux  $N, S, E$  et  $W$  (Fig. 4.19), l'expression de la discrétisation est la suivante :

$$\max(D_W u, 0)^2 + \min(D_E u, 0)^2 + \max(D_S u, 0)^2 + \min(D_N u, 0)^2 = 1 \quad (4.6)$$

où  $D_W, D_E, D_N$  et  $D_S$  les opérateurs aux différences d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} D_W u &= \frac{u_P - u_W}{\Delta x}, & D_E u &= \frac{u_E - u_P}{\Delta x} \\ D_S u &= \frac{u_P - u_S}{\Delta y}, & D_N u &= \frac{u_N - u_P}{\Delta y} \end{aligned} \quad (4.7)$$

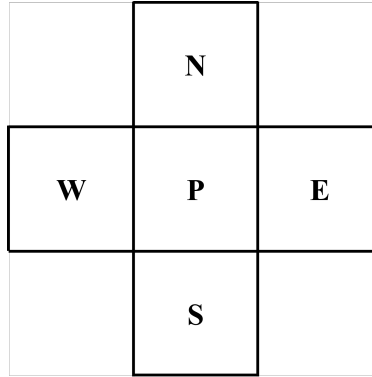


Figure 4.19 Molécule de calcul cartésien de l'élément  $P$ .

En regroupant les termes selon les axes  $x$  et  $y$ , on peut récrire l'équation 4.6 dans une version plus simple et compacte [125] :

$$\left[ \max \left( \frac{u_P - u_X}{\Delta x}, 0 \right) \right]^2 + \left[ \max \left( \frac{u_P - u_Y}{\Delta y}, 0 \right) \right]^2 = 1 \quad (4.8)$$

où  $u_X = \min(u_E, u_W)$  et  $u_Y = \min(u_N, u_S)$ .

Lors de la propagation de l'information par le front, la solution  $u$  en  $P$  est supérieure à  $u_X$  et  $u_Y$  pour les régions de l'espace encore non traversées. L'expression ci-dessus devient donc :

$$\left(\frac{u_P - u_X}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{u_P - u_Y}{\Delta y}\right)^2 = 1 \quad (4.9)$$

Pour la résolution de cette équation, on applique une démarche itérative [124]. D'abord, on considère que le front arrive par une seule direction. Cette direction est déterminée par le voisin dont la valeur de  $u$  est la plus petite, afin de respecter la causalité imposée par la condition d'entropie [125].

Par exemple, sans perte de généralité, en considérant  $u_X < u_Y$  :

$$\left(\frac{\tilde{u}_P - u_X}{\Delta x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \tilde{u}_P = u_X + \Delta x \quad (4.10)$$

où  $\tilde{u}_P$  est une solution intermédiaire. Cependant, si  $\tilde{u}_P < u_Y$ , la solution  $u_P = \tilde{u}_P$ , car on vérifie que l'onde arrive par  $x$  et non par  $y$  due à la valeur minimale. Sinon, c'est-à-dire  $\tilde{u}_P > u_Y$ , le front arrive effectivement par les deux directions au même temps :

$$\left(\frac{u_P - u_X}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{u_P - u_Y}{\Delta y}\right)^2 = 1 \quad (4.11)$$

La solution  $u_P$  est alors obtenue à partir de résolution de l'équation de degré 2 ci-dessus :

$$\begin{aligned} u_P &= \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ A &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ B &= -2[u_Y(\Delta x)^2 + u_X(\Delta y)^2] \\ C &= (u_Y \Delta x)^2 + (u_X \Delta y)^2 - (\Delta x \Delta y)^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

On prend la valeur maximale des solutions possibles afin de respecter les conditions :  $u_P > u_X$  et  $u_P > u_Y$ .

#### 4.2.2.1 Extension pour le maillage hiérarchique

Pour l'application aux maillages hiérarchiques, le choix des valeurs définissant  $u_X$  et  $u_Y$  n'est pas direct à cause de la différence de niveau hiérarchique entre les voisins (Fig. 4.20).

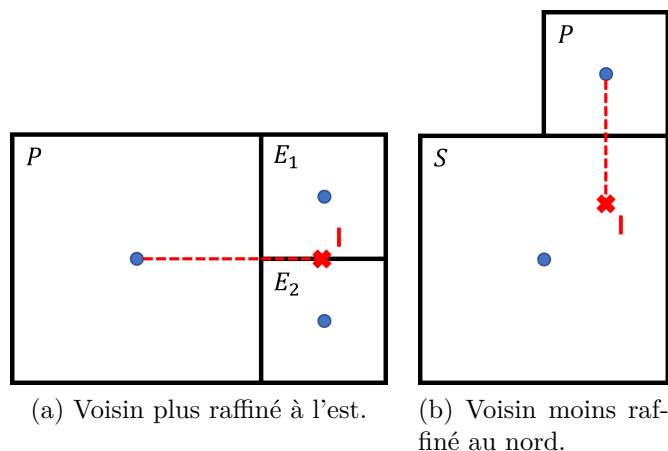


Figure 4.20 Voisinage hiérarchique.

En effet, en prenant la valeur de  $u$  du l'élément voisin (e.g.,  $E_1$  ou  $S$ ), on néglige la variation selon l'axe perpendiculaire car le centre du voisin n'est pas sur la croix définissant spatialement la molécule numérique de l'élément  $P$ . Cela entraîne une erreur pour la discrétisation aux différences finies où la variation doit être uniquement soit selon  $x$ , soit selon  $y$ .

Afin de maintenir une approximation cohérente, la valeur de  $u$  est donc reconstruite dans une autre position selon les axes  $x$  ou  $y$  de la croix de la molécule numérique dans l'élément voisin (cf. les points  $I$  dans la Fig. 4.20).

Pour la situation où le voisin est plus raffiné (Fig. 4.20a), la solution  $u$  est approximée au point  $I$  par la moyenne des valeurs aux éléments voisins  $E_1$  et  $E_2$ .

Cependant, pour la situation où le voisin est moins raffiné (Fig. 4.20b), la solution  $u$  au point  $I$  est plutôt approchée à partir de la valeur et du vecteur gradient du champ distance à l'élément voisin  $S$ . Pour cela, on emploie l'interpolation développée pour la détection de la ligne médiatrice (Eq. 4.3).

Lors de la mise-à-jour de la solution, on connaît la direction de propagation du front (i.e, le gradient du champ distance) au fur et à mesure que l'information se propage à partir de la solution initiale définie à l'interface géométrique. Avec le vecteur gradient, on peut donc approximer la variation de la solution à l'intérieur d'un élément.

#### 4.2.2.2 Calcul du vecteur gradient

Dans l'application du schéma numérique, on obtient également le vecteur gradient à partir de la solution calculée  $u_P$  et de la condition pour l'orientation du déplacement de l'onde du front de la démarche itérative (i.e.,  $u_X$  ou  $u_Y$ ).

On applique la logique suivante :

Si le front vient d'une seule direction (e.g.,  $u_X$  ou  $u_Y$ ), le gradient a une seule composante :

- Si  $u_X < u_Y$  et  $u_X = u_E$  (i.e., le front vient du voisin  $E$ ) :  $\vec{\nabla}u = (D_E u, 0)$ .
- Si  $u_X < u_Y$  et  $u_X = u_W$  (i.e., le front vient du voisin  $W$ ) :  $\vec{\nabla}u = (D_W u, 0)$ .
- Si  $u_Y < u_X$  et  $u_Y = u_N$  (i.e., le front vient du voisin  $N$ ) :  $\vec{\nabla}u = (0, D_N u)$ .
- Si  $u_Y < u_X$  et  $u_Y = u_S$  (i.e., le front vient du voisin  $S$ ) :  $\vec{\nabla}u = (0, D_S u)$ .

Cependant, si l'orientation du front est selon une des diagonales (e.g.,  $u_X$  et  $u_Y$ ), le gradient en a plutôt deux :

- $u_X = u_E$  et  $u_Y = u_N$  :  $\vec{\nabla}u = (D_E u, D_N u)$ .
- $u_X = u_E$  et  $u_Y = u_S$  :  $\vec{\nabla}u = (D_E u, D_S u)$ .
- $u_X = u_W$  et  $u_Y = u_N$  :  $\vec{\nabla}u = (D_W u, D_N u)$ .
- $u_X = u_W$  et  $u_Y = u_S$  :  $\vec{\nabla}u = (D_W u, D_S u)$ .

### 4.2.3 Méthode de Balayage Rapide

C'est une méthode de résolution itérative de l'équation d'Eikonal qui consiste à mettre-à-jour le champ distance à l'aide du schéma numérique en traversant le maillage à plusieurs reprises et d'une façon orientée selon la direction des balayages.

Les balayages sont définis à partir des directions possibles de propagation de l'information dans la région spatiale du domaine de calcul. Donc, à chaque fois que le maillage est balayé, un groupe de caractéristiques est donc couvert pour le calcul du champ distance. Cela permet d'avoir une approche plutôt globale et rapide pour le calcul du champ distance car on définit initialement les directions des balayages et on emploie ensuite le schéma de discrétisation numérique pour tous les éléments en traversant le maillage selon tous les balayages. De plus, la convergence est accrue par la méthode de Gauss-Seidel où les valeurs récemment calculées sont prises en compte immédiatement pour les prochains calculs dans le parcours sur la maillage.

Pour l'application en 2D, il y a uniquement quatre directions de balayage : Nord-Est, Nord-Ouest, Sud-Ouest et Sud-Est, comme illustré à la Fig. 4.21, ce qui est suffisant pour avoir une solution convergée [124].

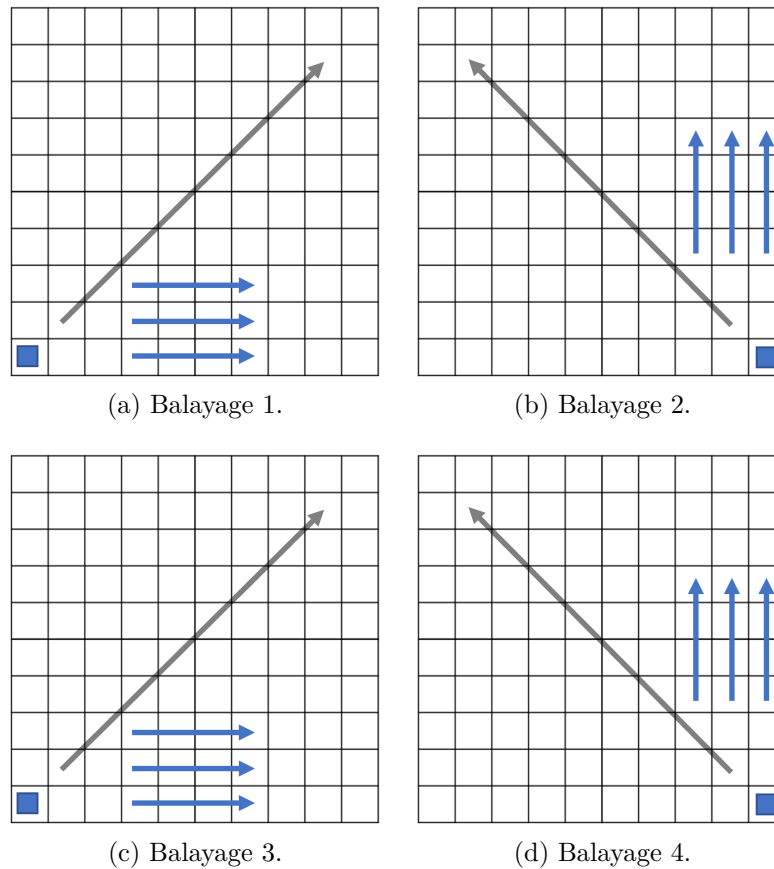


Figure 4.21 Les directions de balayage en 2D, dont l'élément initial de la liste signalé avec le carré bleu.

La méthode FSM implémentée dans ce travail comprend les étapes suivantes :

1. Génération de la matrice de balayage hiérarchique.
2. Initialisation du champ distance.
3. Mise-à-jour du champ distance.

#### 4.2.3.1 Génération de la matrice de balayage hiérarchique

Dans cette étape, on ordonne la liste des éléments à parcourir lors du balayage du maillage, en suivant les quatre directions possibles des caractéristiques dans l'application 2D.

Cette approche s'appelle Ordonnancement par Ligne Majeure (*Row-Major Ordering*) et consiste à orienter les éléments de la maille hiérarchique de tous les niveaux dans la même orientation de balayage que celle définie pour le maillage cartésien de départ.

Différemment de la méthodologie proposée par [126], la démarche classique de la méthode FSM pour l'ordonnancement du maillage cartésien initial est plutôt employée et est basée directement sur l'orientation des indices locaux  $i$  et  $j$ .

La première tâche consiste à construire, pour chaque direction de balayage, une liste intermédiaire des éléments ordonnées du maillage cartésien avec la numérotation globale **idCell** et à partir des indices  $i$  et  $j$  :

$$\text{idCell} = N_x(j - 1) + i; \quad (4.13)$$

- **Balayage 1** :  $i$  et  $j$  sont croissants (1 à  $N_x$ , et 1 à  $N_y$ , respectivement).
- **Balayage 2** :  $i$  est décroissant ( $N_x$  à 1), et  $j$  est croissant (1 à  $N_y$ ).
- **Balayage 3** :  $i$  et  $j$  sont décroissants ( $N_x$  à 1, et  $N_y$  à 1, respectivement).
- **Balayage 4** :  $i$  est croissant (1 à  $N_x$ ), et  $j$  est décroissant ( $N_y$  à 1).

Ensuite, on enlève les éléments situés en dehors des faces définissant les zones de calcul activées pour le calcul du champ distance. A partir des éléments **Face** et **Interface** pour chaque face activée, on supprime donc les éléments des listes intermédiaires qui n'appartiennent pas aux listes **FC** et **IC**.

Finalement, la dernière tâche comprend la démarche pour la construction des listes finales pour le balayage hiérarchique. L'idée est de parcourir l'arbre hiérarchique des éléments à partir du maillage cartésien. Pour cela, on emploie l'algorithme récursif de Parcours en Profondeur (de l'anglais, *Depth-First Search*) [127], où l'on traverse l'arbre hiérarchique de la maille en descendant tous les niveaux de raffinement avant de remonter et de passer à l'autre élément encore non-visité dans le premier niveau. Ce qui donne :

1. Boucler sur les listes intermédiaires des éléments ordonnés.
2. Pour élément *pivot*, tester s'il y a des *éléments-fils*.
3. Si oui :
  - (i) Ordonner les *éléments-fils* selon le même sens du balayage global.
  - (ii) Pour chaque *élément-fils*, il devient *pivot*, et on répète l'étape 2.
4. Sinon :
  - (i) Ajouter l'élément *pivot* à la matrice de balayage hiérarchique.

On finit donc par construire la matrice de balayage dont la dimension est  $4 \times N_E$ , où  $N_E$  le nombre total d'éléments à parcourir.



### 4.2.3.2 Initialisation du champ distance

Dans cette étape, on l’initialise le champ distance. La première tâche est de créer la matrice de solution à partir d’une valeur et du vecteur gradient initiaux de champ distance pour l’ensemble des éléments situés à l’intérieur des zones (i.e., les faces topologiques) de calcul activées.

Toutefois, comme la démarche de résolution de l’équation Eikonal est itérative et basée sur la valeur de la distance minimale calculée à partir de la solution au voisinage des éléments de la maille, on ne peut pas initialiser la matrice avec une solution initiale nulle car on bloquerait l’étape de mise-à-jour de la solution numérique (Section 4.2.3.3). Ainsi, on initialise plutôt le champ distance avec une valeur très élevée (e.g., dix fois la valeur maximale théorique pour l’application en particulier) et le vecteur gradient nul.

D’une façon générale, pour les éléments **FC**, on attribue la valeur maximale initialement admise. Cependant, pour les éléments **IC**, on doit les traiter différemment à partir de la condition limite attribuée aux points d’intersection. Deux types de condition limite sont supportées :

- Paroi : les éléments sont à la frontière des géométries. On impose donc la valeur de la distance à la paroi. Pour cela, on calcule la distance du centre  $C$  de l’élément au segment de ligne défini par les points d’intersection  $I_1$  et  $I_2$  (Eq. 4.14). De plus, le gradient est le vecteur normal.

$$u_0 = \frac{|(x_{I_1} - x_{I_2})(y_{I_1} - y_C) - (y_{I_1} - y_{I_2})(x_{I_1} - x_C)|}{\sqrt{(x_{I_1} - x_{I_2})^2 + (y_{I_1} - y_{I_2})^2}} \quad (4.14)$$

- Interface : les éléments sont à l’interface virtuelle à travers laquelle la solution se propage en sortant du domaine de calcul. Pour le solveur numérique, ils sont traités comme **FC**. On impose donc la valeur maximale admise initialement et le gradient nul.

### 4.2.3.3 Mise-à-jour du champ distance

Dans cette étape, on obtient le champ distance pour le domaine de calcul en employant le schéma numérique du solveur (Section 4.2.2) et l’approche Gauss-Seidel pour le calcul et la mise-à-jour de la solution itérative. Pour cela, on applique l’algorithme suivant :

1. Boucler sur les éléments ordonnés (i.e., les colonnes) pour chaque direction de balayage (i.e, la ligne) dans la matrice de balayage hiérarchique.

2. Si la condition limite de l'élément *pivot* n'est pas Paroi :

- (i) Calculer la nouvelle valeur de la solution  $u$  et du vecteur gradient  $\vec{\nabla}u$  à partir du solveur Eikonal.
- (ii) Mettre-à-jour la solution et le vecteur gradient dans la matrice du champ distance si et seulement si la nouvelle valeur de la solution est inférieure à l'ancienne.

#### 4.2.4 Vérification de solveur d'Eikonal

Les cas-tests ont pour objectif de vérifier et analyser la solution du champ distance à partir des géométries dont l'expression mathématique est connue et analytique.

##### 4.2.4.1 Une paroi verticale

Le domaine de calcul est composé de la topologie représentée par un rectangle de dimension 10 x 10 m (Fig. 4.22a). On impose les conditions limites du type Paroi pour la frontière à gauche et du type Interface pour les autres frontières.

La résolution de la maillage hiérarchique est 20x20 avec un niveau de raffinement maximal 3 sur les courbes. La configuration du cas-test est illustrée aux Fig. 4.22a et 4.22b.

Pour l'initialisation de la matrice solution, on choisit une valeur de 1.0E+2.

Le champ distance à partir d'une paroi verticale est linéaire, et son expression est la suivante :

$$u(x, y) = x \quad (4.15)$$

Comme le schéma numérique est d'ordre 1, on s'attend à obtenir une erreur à la précision machine, tel que montré à la Fig. 4.22c.

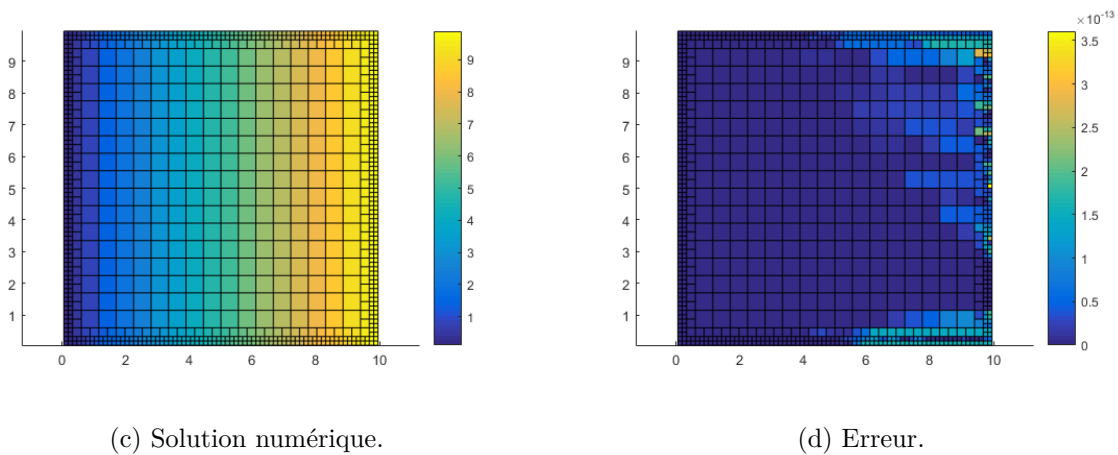
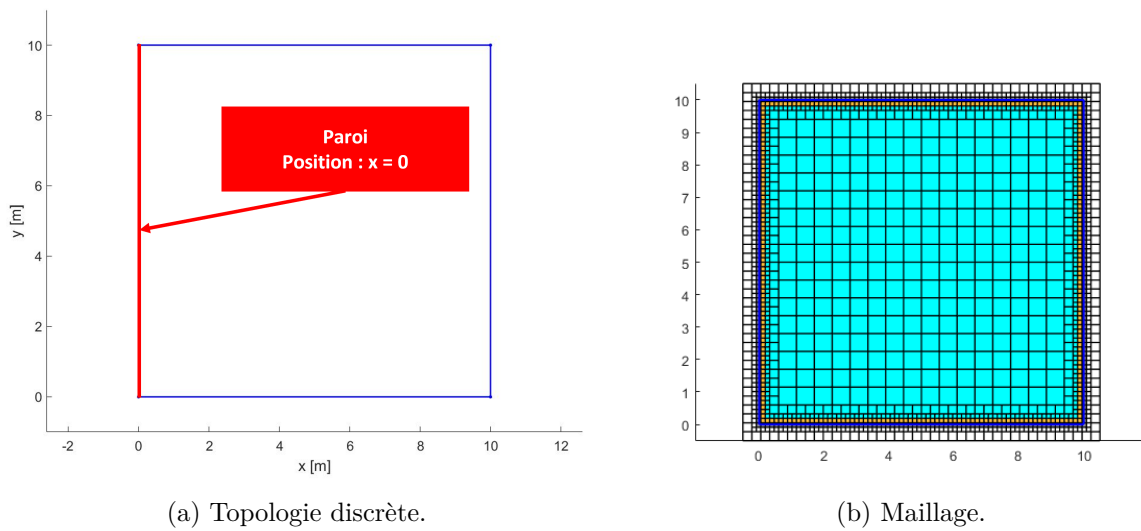


Figure 4.22 Résultats du cas-test : paroi verticale.

#### 4.2.4.2 Deux cercles

La topologie discrète du domaine de calcul comprend une face composée d'un rectangle formant la boucle externe et de deux cercles formant des trous. Le rectangle est de dimension 10 x 10 m, et les cercles sont centrés à (7,6) et (2.5,2) avec les rayons de 1.75 et 1.25, respectivement. Cette topologie est illustrée à la Fig. 4.24a

On impose les conditions limites du type Paroi pour la frontière des cercles et du type Interface pour le côtés du rectangle.

La résolution de la maillage hiérarchique est 40 x 40 avec un niveau de raffinement maximal 3. La configuration du cas-test est illustrée à la Fig. 4.24b.

Pour la matrice solution, on l'initialise avec la valeur 1.0E+2.

Le champ distance exact pour cette configuration est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \min(D_1, D_2) \\
 D_1 &= \sqrt{(x - 7)^2 + (y - 6)^2} - 1.75 \\
 D_2 &= \sqrt{(x - 2.5)^2 + (y - 2)^2} - 1.25
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Les Fig. 4.24c et 4.24d illustrent la solution et l'erreur numériques. On observe que la solution est la superposition du champ distance individuel des cercles dont les courbes de niveau montrent des circonférences centrées au centre des géométries. De plus, la ligne médiatrice est aussi observée dans la région entre les cercles, plus clairement avec l'évaluation de l'erreur car on la détecte ainsi comme une discontinuë due à l'interaction entre les différents fronts de la propagation de la solution.

Tel qu'illustré à la Fig. 4.24d, le profil d'erreur est en croix et l'erreur reste petite selon les directions cardinales et croît selon les directions diagonales. Cela est relié à la propagation de l'erreur dans le schéma de discrétisation numérique dans lequel, lorsque le front se déplace de façon oblique, l'incrément de la solution d'un voisin à l'autre représente la somme en  $x$  et en  $y$ .

On s'attend à obtenir une erreur non-nulle (Fig. 4.24d) mais qui décroît avec un pente d'ordre 1 en raffinant uniformément la maille, comme vérifié à la Fig. 4.23 où l'on présente l'étude de convergence de l'erreur avec les normes  $L_\infty$  (i.e., la valeur maximale) et  $L_2$  (cf. l'Eq. 4.17). Pour la solution visualisée, les valeurs de l'erreur sont : 4,05E-2 ( $L_2$ ) et 9,86E-2 ( $L_\infty$ ).

$$\|u - u_{\text{ref}}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\Omega} \sum_{n=1}^N \omega_n |u_n - u_{\text{ref}, n}|^2} \tag{4.17}$$

$$h = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N \omega_n}{N}} \tag{4.18}$$

où,  $u_{\text{ref}}$  la solution référence (e.g., analytique),  $\Omega$  l'aire total du domaine de calcul,  $\omega_n$  l'aire d'un élément hiérarchique, et  $N$  le nombre d'éléments du maillage.

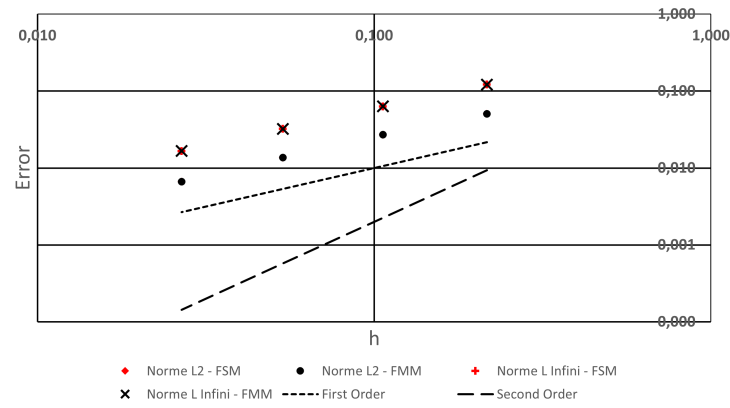


Figure 4.23 Étude de convergence de l'erreur numérique.

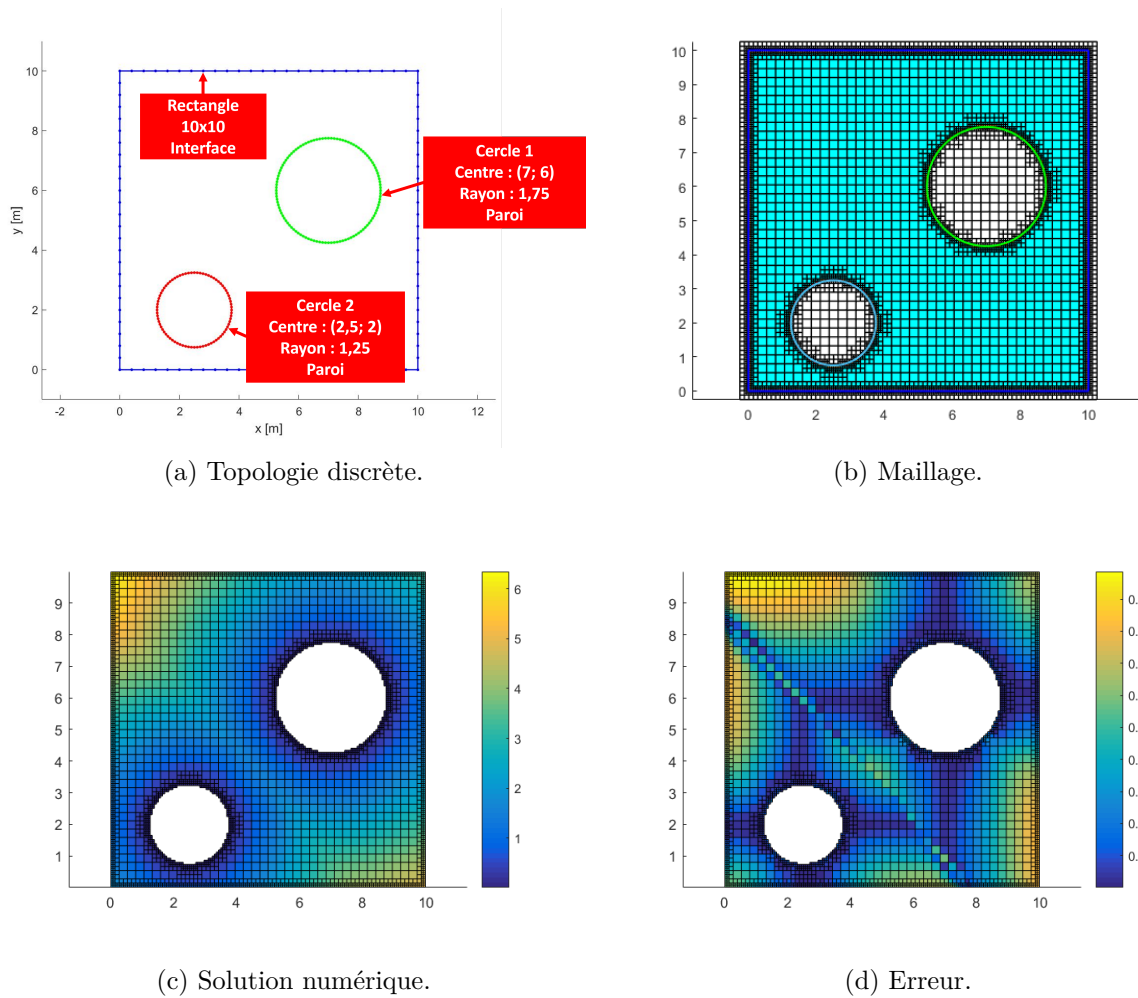


Figure 4.24 Résultats du cas-test Deux Cercles.

### 4.3 Vérification du module de maillages superposés

La dernière étape du développement de ce module a été de vérifier l'ensemble des algorithmes pour le traitement des maillages superposés afin de garantir une implémentation cohérente et robuste.

Les cas-tests ont pour objectif de vérifier le processus de découpage et de couplage des maillages superposés à partir de la ligne médiatrice formée par les géométries fixe et mobile et dont l'emplacement est connue et analytique. De plus, le domaine de calcul est composé des maillages fixe et mobile qui demeurent stationnaires.

#### 4.3.1 Deux parois verticales parallèles

Les topologies fixe et mobile sont représentées par des rectangles de dimensions 10 x 10 m et 7 x 10 m, respectivement. Les parois parallèles sont identifiées comme les frontières à gauche de la topologie fixe et à droite de la topologie mobile. Pour le solveur d'Eikonal, on impose les conditions limites du type Paroi pour les parois et du type Interface pour les autres frontières. La résolution des maillages hiérarchiques fixe et mobile sont 20 x 20 avec un niveau de raffinement maximal 3 au niveau des courbes. La configuration de ce cas-test est illustré aux Figs. 4.25 et 4.26.

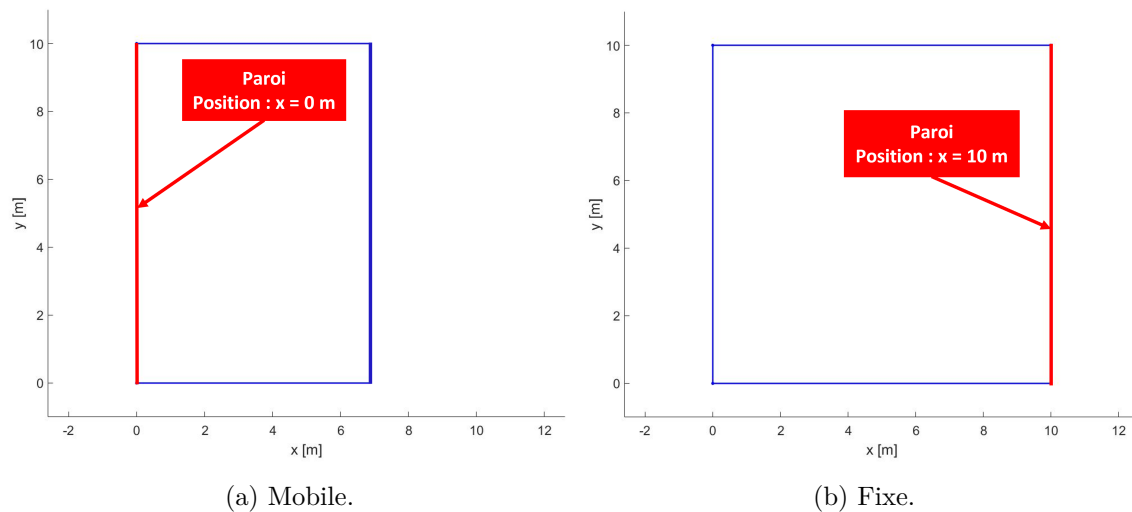


Figure 4.25 Topologies discrètes : Deux parois verticales parallèles.

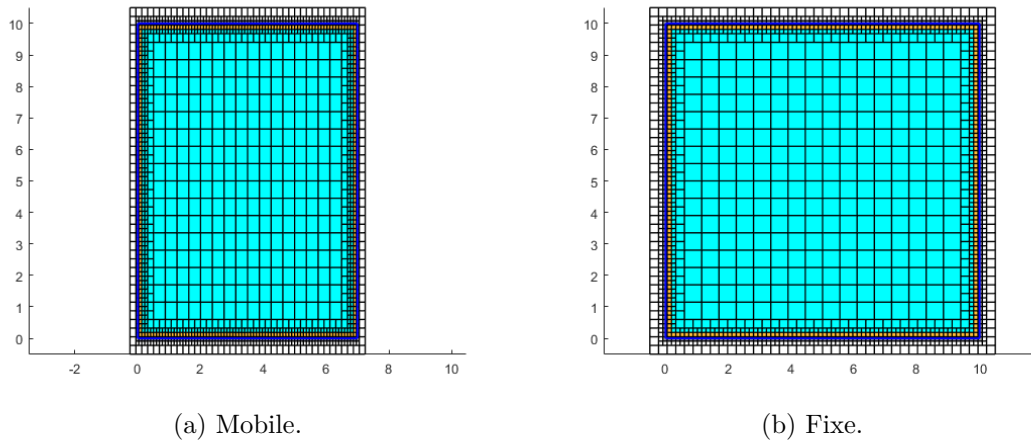


Figure 4.26 Maillages superposés : Deux parois verticales parallèles.

Comme les parois fixe et mobile sont à  $x = 0$  et  $x = 10$ , respectivement, la ligne médiatrice se trouve à la position  $x = 5$  et est une ligne verticale. De plus, on peut la détecter également à l'aide la superposition des champs distance dans un même maillage. Par exemple, la Fig. 4.27 illustre le résultat sur le maillage fixe.

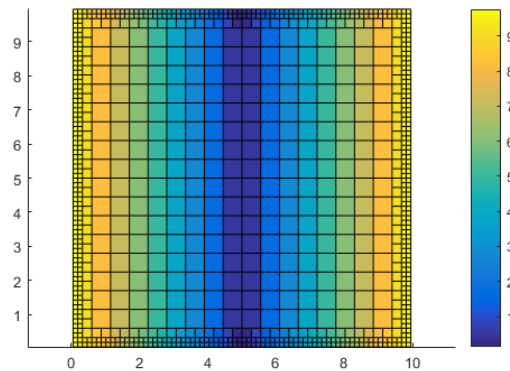
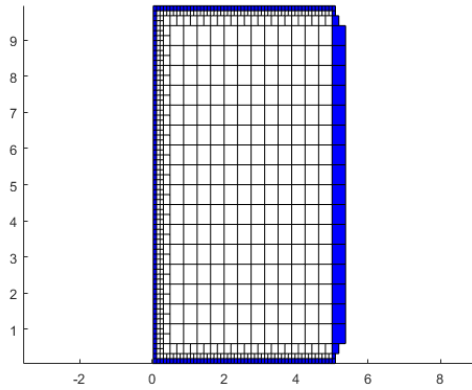


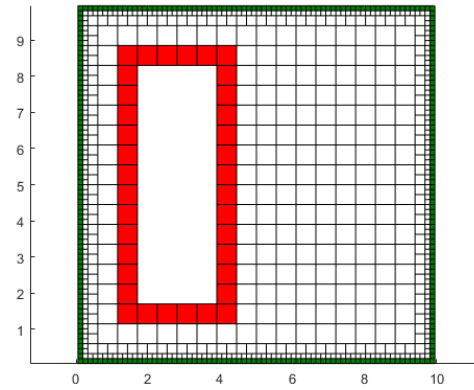
Figure 4.27 Visualisation de la ligne médiatrice sur le maillage fixe du cas-test : Deux parois verticales parallèles.

Au niveau des résultats, on observe que la maille mobile a été découpée le long de la ligne médiatrice. De plus, tel qu'illustré à la Fig. 4.28a, les éléments **Interpolés** ont été correctement détectés car ils englobent la région des éléments activés (i.e., entre  $x = 0$  et  $x = 5$ ) comme une enveloppe convexe.

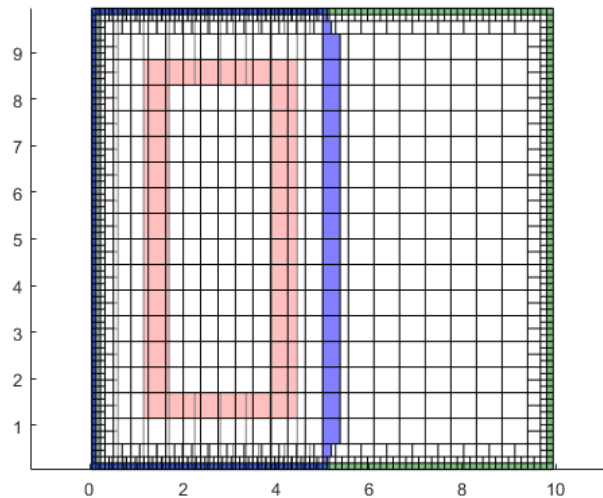
Par rapport au maillage fixe, il a été désactivé dans la région  $x = 0$  et  $x = 5$ , comme prévu (Fig. 4.28b). A l'aide de la zone de couche dans la zone de superposition (Section 4.1.3.1), la région des éléments **IC** du marquage IBM a été conservé permettant la prise en compte de la condition limite pour le solveur multiphysique. En enveloppant la région désactivée, les éléments **Interpolés** de la maille fixe sont placés à une distance cohérente de la zone du couplage du maillage mobile (Fig. 4.28c).



(a) Mobile.



(b) Fixe.



(c) Superposés.

Figure 4.28 Résultats : Deux parois verticales parallèles. Les **Interpolés** des maillages fixe et mobile, respectivement, en rouge et en bleu.



### 4.3.2 Deux parois perpendiculaires

Ce test est effectué pour évaluer la capacité de la détection de la ligne médiatrice pour un champ distance fonction de  $x$  et  $y$ .

Les topologies fixe et mobile sont représentées par des rectangles de la même dimension 10 x 10 m. De plus, on utilise la même résolution hiérarchique pour les maillages fixe et mobile : 20x20 avec un niveau de raffinement maximale 3 (Fig. 4.26b). Les frontières en haut et à droite sont identifiées comme les parois perpendiculaires pour la topologie fixe. Cependant, pour la topologie mobile, on sélectionne les frontières en bas et à gauche. On se sert de la même démarche pour le solveur d'Eikonal concernant l'imposition des conditions limites.

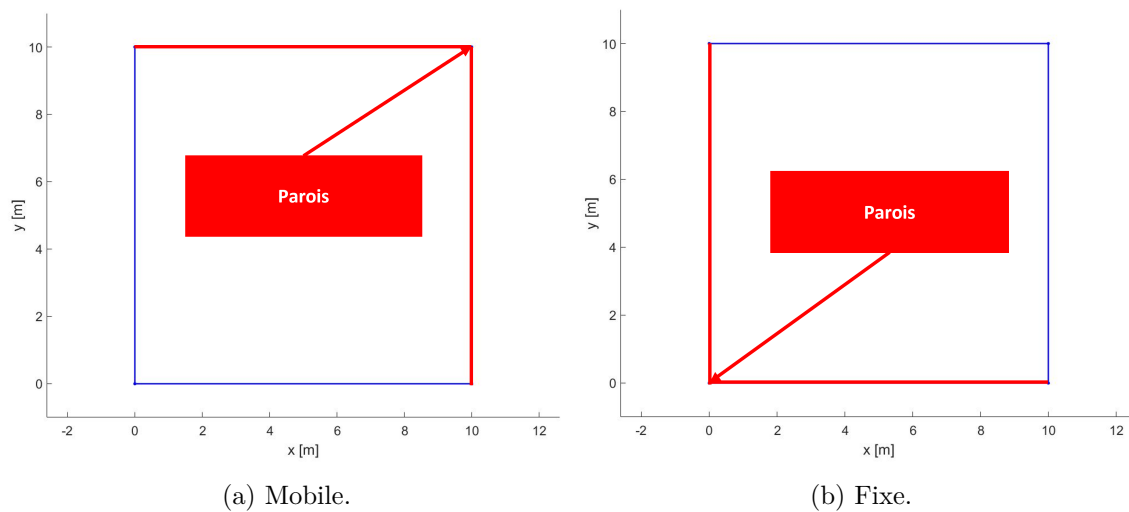
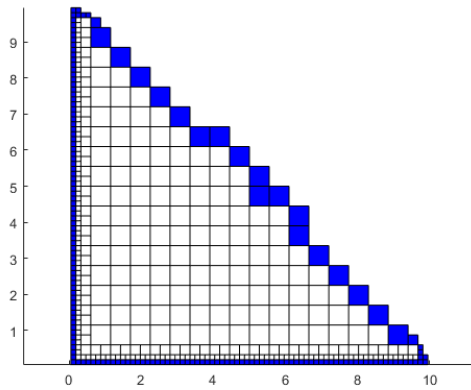


Figure 4.29 Topologies discrètes.

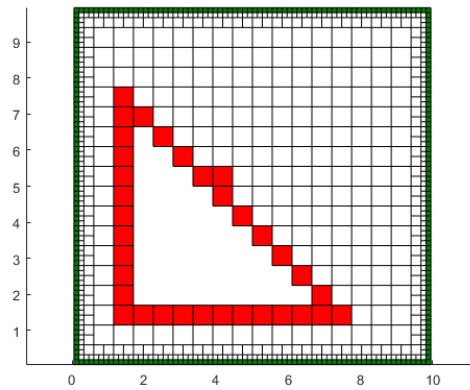
Comme les parois sont les diagonales opposées d'un carré, la ligne médiatrice est une droite inclinée et décrite par l'Eq. 4.19 (Fig. 4.30a) :

$$y = -x + 10 \quad (4.19)$$

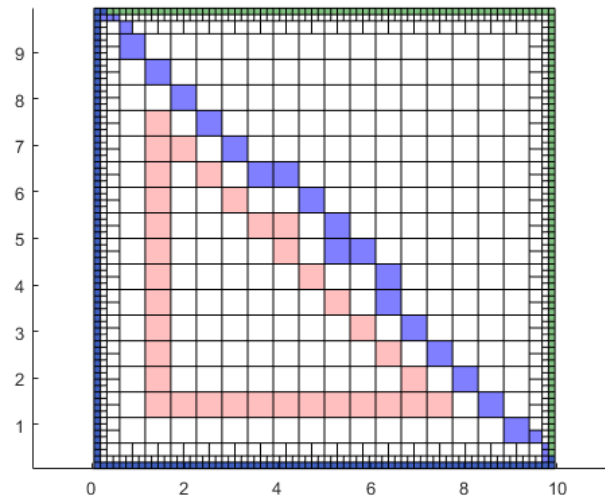
Le maillage mobile est maintenu activé uniquement dans la région à gauche de la ligne médiatrice et délimité par la couche des éléments **Interpolés** (Fig. 4.30a). Dans cette même région, on a troué le maillage fixe permettant d'utiliser uniquement les éléments de la maille mobile. De plus, les éléments **Interpolés** de la maille fixe entourent ce trou permettant le couplage entre les maillages (Fig. 4.30b).



(a) Mobile.



(b) Fixe.



(c) Superposé.

Figure 4.30 Résultat - Parois Perpendiculaires. Les **Interpolés** des maillages fixe et mobile, respectivement, en rouge et en bleu.

#### 4.4 Disjoncteur simplifié

On présente un exemple de l'application de la méthode de maillages superposés pour le disjoncteur simplifié. Le choix de la résolution des maillages superposés a été cartésienne pour garder une bonne visualisation du couplage : 252 x 70 pour le maillage fixe, 280 x 100 et 50 x 100 pour les maillages mobiles de la tige et du piston, respectivement.

La Fig. 4.31 illustre les faces topologiques délimitant le domaine de calcul fluide (Fig. 3.16). Pour les maillages mobiles, la zone est délimité par la boucle externe (cf. le rectangle) et la géométrie du piston et de la tige. Tel qu'illustré aux Fig. 4.32 et 4.33, on présente les champs distance base de la méthodologie superposés. Pour cela, les géométries solides ont été considérées comme des Parois. Suite à l'obtention du critère de base, les Figs. 4.34 et 4.35 illustrent le découpage et le couplage entre les maillages superposés. Les **Interpolés** des maillages fixe et mobile sont, respectivement, en rouge et en bleu. Les éléments verts sont les **Interface** (IC). Pour les prochains chapitres, ce schématique des couleurs sera repris.

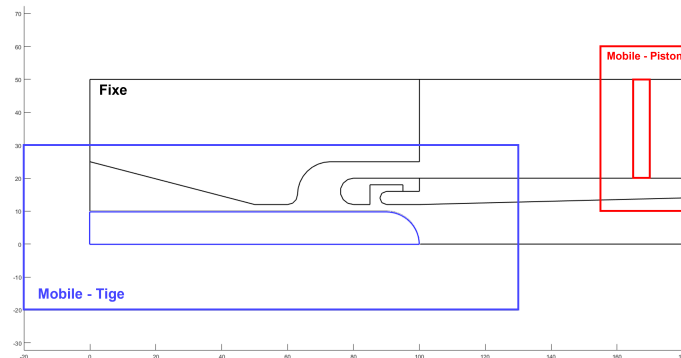


Figure 4.31 Les topologies discrètes fixe et mobile superposées - Disjoncteur Simplifié.

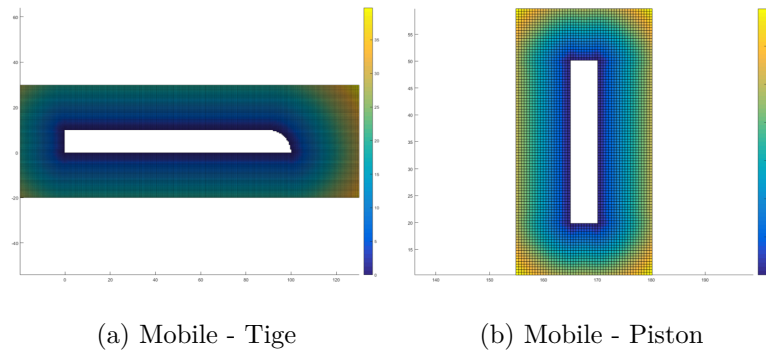


Figure 4.32 Champ distance - Topologies Mobiles - Disjoncteur Simplifié.

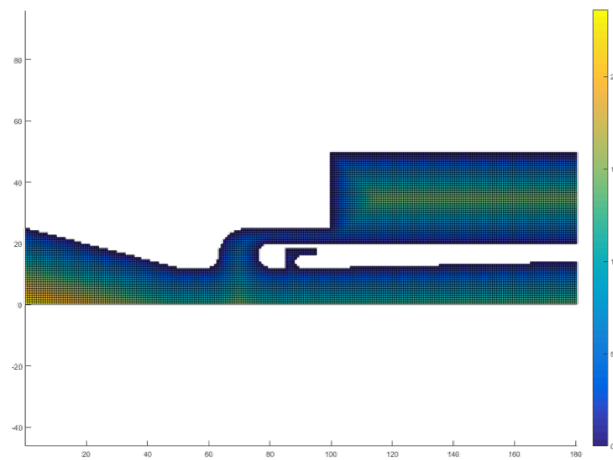


Figure 4.33 Champ distance - Topologies Fixe - Disjoncteur Simplifié.

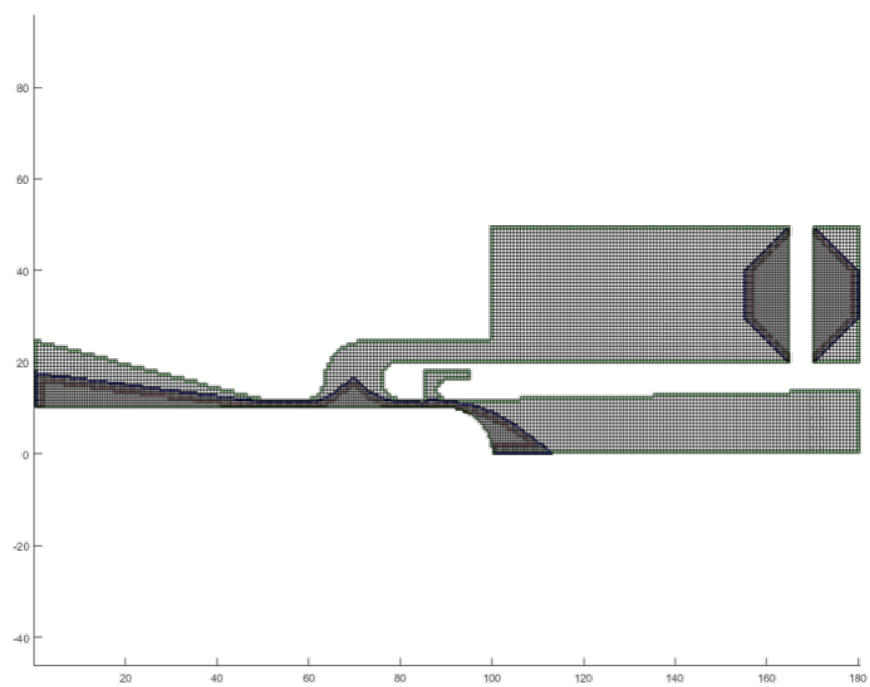
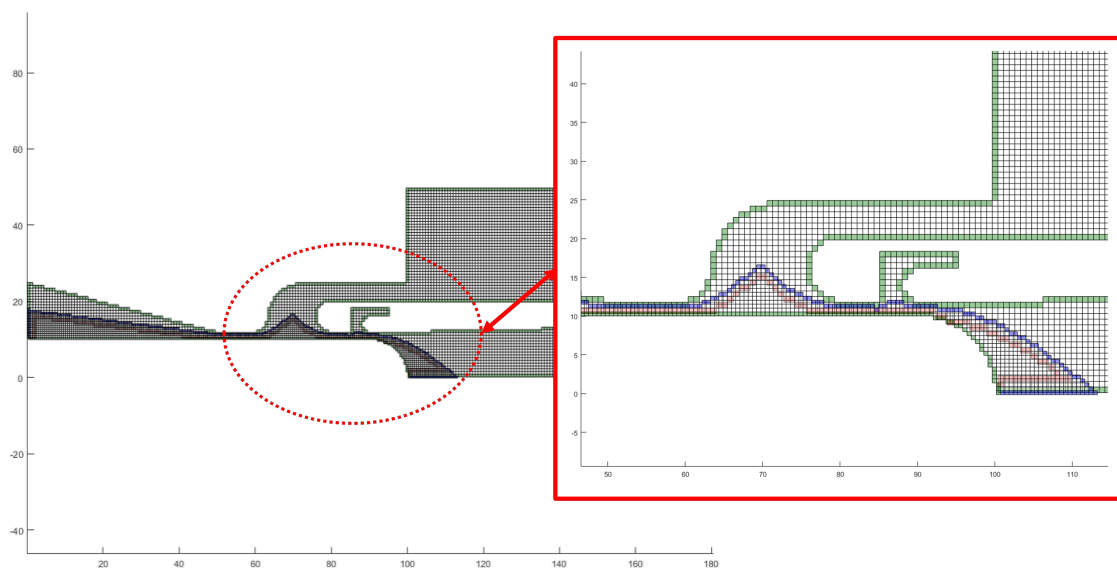
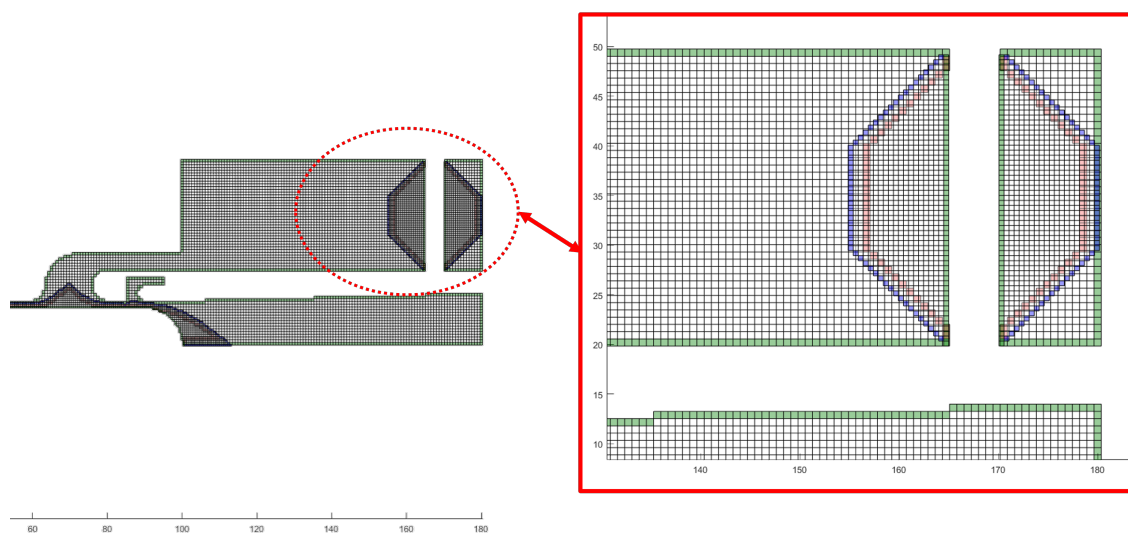


Figure 4.34 Maillages superposés. - Disjoncteur Simplifié.



(a) Zone d'arc.



(b) Piston.

Figure 4.35 Visualisation des situations de proximité - Disjoncteur Simplifié.

## CHAPITRE 5 Solveur multiphysique

Ce chapitre présente le solveur de Helmholtz qui sera couplé avec le solveur de mécanique des fluides. Ensemble, ils représentent un solveur multiphysique.

Les modules numériques pour la définition, la discrétisation et le couplage des zones géométriques et physiques superposées ont été présentés dans les chapitres précédents. Le dernier élément à développer pour construire la plate-forme numérique concerne les physiques liées à la coupure de l'arc électrique dans les disjoncteurs à haute-tension présentés à la Section 1.3 : l'écoulement fluide, le champs électrique stationnaire, et le rayonnement thermique.

Ce chapitre comprend trois parties. Tout d'abord, l'équation de Helmholtz pour les physiques visées ainsi que le schéma de discrétisation numérique basé sur l'approche de Volume Fini en 2D axisymétrique sont détaillés à la Section 5.1. Ensuite, les schémas de reconstruction pour les conditions aux limites IBM, les schémas d'interpolation pour le transfert de l'information entre les maillages superposés et finalement l'approche proposée pour la condition d'interface matérielle sont présentés (Section 5.2). Enfin, on conclura ce chapitre avec le couplage avec le solveur Euler (Section 5.3).

### 5.1 Solveurs de Helmholtz

Les différentes physiques sont modélisées par l'équation aux dérivées partielles elliptique de Helmholtz dont la formulation générale en 2D axisymétrique  $(r, z)$  est la suivante :

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla U(r, z)) + \tau U(r, z) = Q \quad (5.1)$$

où  $U$  est la variable à résoudre (e.g., le potentiel électrique  $\varphi$  et le rayonnement incident  $G$ ),  $\kappa(r, z)$  et  $\tau(r, z)$  sont le coefficient de diffusion et le coefficient de Helmholtz respectivement, et  $Q(r, z)$  le terme source. Certains termes s'annulent selon la physique.

#### 5.1.1 Champ électrique

Dans le cas du modèle du champ électrique stationnaire, on calcule le potentiel électrique, noté  $\phi$ .

En présence d'un arc électrique, par l'intégration de la loi d'Ohm avec l'équation de continuité stationnaire de distribution de courant [1], on obtient les équations du potentiel et du champ électrique  $\vec{E}$  à résoudre :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi(r, z)) = 0 \quad (5.2)$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \quad (5.3)$$

où  $\sigma$  est la conductivité électrique du milieu.

En écoulement froid, c'est-à-dire sans la présence de l'arc électrique, on résout plutôt [1] :

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi(r, z)) = 0 \quad (5.4)$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi \quad (5.5)$$

où  $\varepsilon$  est la permittivité électrique du milieu.

#### Conditions aux limites :

En mode l'arc électrique, les zones conductrices ( $\sigma \neq 0$ ) sont uniquement résolues en appliquant des conditions de type Dirichlet aux frontières des électrodes (i.e., la tige et la tulipe), et une condition de type Neumann à l'interface de la zone de l'arc électrique et du gaz est imposée (la transition conducteur-isolant). En mode l'écoulement froid, tout le domaine (les conducteur et les isolants) est résolu, en appliquant des conditions de type Dirichlet aux électrodes, et d'interface matérielle entre les matériaux : le gaz et le Téflon, par exemple.

### 5.1.2 Rayonnement thermique

Le rayonnement thermique est modélisé par la méthode  $P_1$  [1,29] dont la formulation conservative est la suivante :

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\kappa} \nabla G(r, z) \right) - 3\kappa G(r, z) = -12\pi\kappa I_b \quad (5.6)$$

où  $G$  est le rayonnement incident,  $\kappa$  le coefficient d'absorption,  $I_b$  l'intensité radiative.

#### Conditions aux limites :

On impose une condition aux limites de type Robin, connue comme la condition de Marshak (Eq. 5.7) de la méthode P1, aux parois et de type Neumann nulle sur l'axe de symétrie [1].

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{3}{2} \kappa G \quad (5.7)$$



### 5.1.3 Schéma de discrétisation numérique

La discrétisation employée dans ce travail est la méthode des volumes finis (FVM, *Finite Volume Method*) [1]. Utilisant une formulation intégrale, un élément de la maille se traduit par un bilan sur un volume de contrôle.

Pour l'équation de Helmholtz (Eq. 5.1) sous forme générale de la méthode FVM donne :

$$\underbrace{\oint_{\partial V} \kappa \nabla U(r, z) \cdot \vec{n} dS}_I + \underbrace{\int_V \tau U(r, z) dV}_{II} = \underbrace{\int_V Q dV}_{III} \quad (5.8)$$

où  $\vec{n}$  le vecteur normal unitaire sortant du volume de contrôle  $V$ . Considérant un maillage cartésien, la molécule numérique centrée sur l'élément  $P$  est illustrée à la Fig. 5.1.

L'intégrale de surface (I) associée au terme de divergence (i.e.,  $\nabla \cdot \kappa \nabla U$ ) représente physiquement un flux échangé (i.e.,  $\kappa \nabla U$ ) à l'interface du volume de contrôle. On approxime le terme I par la somme des flux aux interfaces  $n$ ,  $s$ ,  $e$  et  $w$  :

$$I = \kappa_n \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_n S_n + \kappa_s \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_s S_s + \kappa_e \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_e S_e + \kappa_w \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_w S_w \quad (5.9)$$

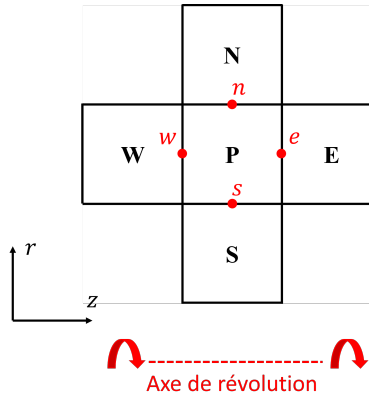


Figure 5.1 Molécule de calcul cartésien de l'élément  $P$  - 2D axisymétrique.

Considérant l'axe de révolution azimuthal pour le calcul des aires  $S$ , on obtient l'expression finale du terme I :

$$I = 2\pi \Delta z \left( r_P + \frac{\Delta r}{2} \right) \kappa_n \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_n + 2\pi \Delta z \left( r_P - \frac{\Delta r}{2} \right) \kappa_s \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_s + 2\pi r_P \Delta r \kappa_e \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_e + 2\pi r_P \Delta r \kappa_w \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_w \quad (5.10)$$

où les gradients sont approchés par des différences centrées d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_w &= \frac{U_P - U_W}{\Delta z}, & \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_e &= \frac{U_P - U_E}{\Delta z} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_s &= \frac{U_P - U_S}{\Delta r}, & \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_n &= \frac{U_P - u_N}{\Delta r} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Les valeurs des coefficients  $\kappa$  aux interfaces  $n$ ,  $s$ ,  $e$  et  $w$  sont obtenues à partir de l'approche de Patankar [118], qui consiste à calculer une valeur moyenne harmonique en exploitant le concept des résistances thermiques en série.

Pour un maillage cartésien, l'expression de  $\kappa$  à l'interface est donnée par :

$$\kappa_d = \frac{2\kappa_D\kappa_P}{\kappa_D + \kappa_P} \quad (5.12)$$

où  $d = n, s, e$  et  $w$  ainsi que  $D = N, S, E$  et  $W$ , respectivement.

Les intégrales de volume restantes (II) et (III) sont approximées par la méthode du point milieu d'ordre 2, ce qui donne :

$$\text{II} = (2\pi r_P \Delta z \Delta r) \tau_P U_P \quad (5.13)$$

$$\text{III} = (2\pi r_P \Delta z \Delta r) Q_P \quad (5.14)$$

Donc, pour l'élément  $P$ , l'équation à résoudre est :

$$a_P U_P - a_N U_N - a_S U_S - a_E U_E - a_W U_W = (2\pi r_P \Delta z \Delta r) Q_P \quad (5.15)$$

où :

$$a_N = 2\pi \kappa_n \left( r_P + \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\Delta z}{\Delta r} \quad a_S = 2\pi \kappa_s \left( r_P - \frac{\Delta r}{2} \right) \frac{\Delta z}{\Delta r}$$

$$a_E = 2\pi \kappa_e r_P \frac{\Delta r}{\Delta z} \quad a_W = 2\pi \kappa_w r_P \frac{\Delta r}{\Delta z}$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + (2\pi r_P \Delta z \Delta r) \tau_P$$

Le schéma de discrétisation est utilisé uniquement pour les éléments **Face (FC)** car ils ont une molécule numérique de calcul complète. Pour une discrétisation spatiale implicite, on doit assembler et résoudre un système algébrique en combinant toutes les équations obtenues pour tous les éléments du maillage. On doit également prendre en compte les conditions aux limites, le transfert de l'information entre les maillages et la discontinuité des propriétés des matériaux dans le processus de reconstruction (Section 5.2).

La matrice du système couplé est ainsi assemblée, permettant la résolution simultanée des schémas numérique du solveur de Helmholtz et de reconstruction IBM, des maillages superposés et des conditions d'interface matérielle pour l'ensemble des maillages composant le domaine de calcul. Dans ce contexte, pour chaque maille, on assemble le système séquentiellement à partir des équations des **FC** (i.e., Helmholtz), des **Interface (IC)** (i.e., la prise en compte des conditions aux limites et d'interface matérielle) et des **Interpolés** (i.e., le transfert de l'information entre les mailles). L'emplacement des inconnues dans la matrice du système couplé est réalisé à l'aide d'une numérotation locale définie par maillage (i.e., le bloc matriciel), par le type de marquage d'élément (i.e., **FC**, **IC** et **Interpolés**) et par la position de l'élément dans les listes (i.e., le marquage IBM et de maillages superposés). Pour cela, la position, notée `posMatrix`, dans la matrice couplée est donnée par l'expression suivante :

$$\text{posMatrix} = \text{posListe} + \text{décalage} \quad (5.16)$$

où `posListe` est la position de l'élément dans la liste du marquage IBM et des maillages superposés, et le décalage est défini selon le type de l'élément à la maille d'origine, et le nombre total d'éléments de la maille définissant le bloc précédant :

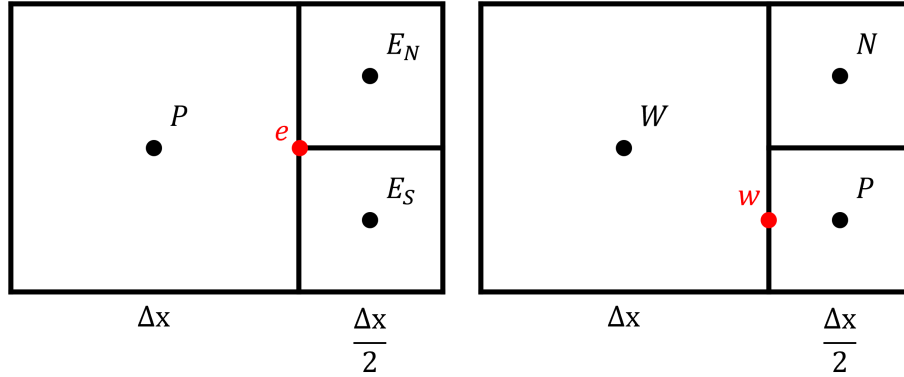
- **FC** : décalage =  $N_E(\text{idBloc} - 1)$ .
- **IC** : décalage =  $N_E(\text{idBloc} - 1) + N_{FC}(\text{idBloc})$ .
- **Interpolé** : décalage =  $N_E(\text{idBloc} - 1) + N_{FC}(\text{idBloc}) + N_{IC}(\text{idBloc})$ .

$$\text{idBloc} = \text{idMesh} + 2, \quad \text{idMesh} = -1, 0, 1, \dots, N_M - 1 \quad (5.17)$$

où  $N_E$  est le nombre de total des éléments à l'intérieur de la zone de calcul d'un maillage,  $N_{FC}$  et  $N_{IC}$  sont la taille des listes **FC** et **IC**, et  $N_M$  est le nombre total des maillages composant le domaine de calcul.

### 5.1.3.1 Extension aux maillages hiérarchiques

Dans un maillage hiérarchique, le calcul des gradients et du coefficient  $\kappa$  à l'interface  $n$ ,  $s$ ,  $e$  et  $w$  doit être modifié à cause de la différence de niveau de raffinement. Dans cette extension, on utilise une reconstruction de la valeur du flux en considérant une variation linéaire de la solution en  $r$  et  $z$  entre les éléments voisins. On distingue deux scénarios pour le voisinage hiérarchique : plus fin ou plus grossier (Fig. 5.2).



(a) Voisin plus fin pour l'élément  $P$ . (b) Voisin plus grossier pour l'élément  $P$ .

Figure 5.2 Voisinage hiérarchique.

Dans le scénario où le voisin est plus raffiné (Fig. 5.2a), on reconstruit le flux en  $e$  à partir de la solution dans les éléments  $P$ ,  $E_N$  et  $E_S$ . Pour cela, en considérant un polynôme linéaire centré sur  $P$ , les valeurs  $E_N$  et  $E_S$  peuvent être réécrites comme suit :

$$U_{E_N} = U_P + b \left( \frac{3\Delta z}{4} \right) + c \left( \frac{\Delta r}{4} \right) \quad (5.18)$$

$$U_{E_S} = U_P + b \left( \frac{3\Delta z}{4} \right) - c \left( \frac{\Delta r}{4} \right) \quad (5.19)$$

En combinant ces expressions, on obtient la valeur de la composante normale du gradient au côté  $e$  :

$$b = \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_e \approx \frac{(U_{E_N} + U_{E_S} - 2U_P)}{\frac{3\Delta z}{2}} \quad (5.20)$$

De plus, pour le calcul du coefficient  $\kappa$ , on emploie la notion de la résistance thermique en parallèle [118] car le flux thermique se divise en deux en sortant de  $P$  et en entrant dans  $E_N$  et  $E_S$  :

$$\kappa_e = \frac{1}{2}(\kappa_{e_N} + \kappa_{e_S}) \quad (5.21)$$

$$\kappa_{e_N} = \frac{3\kappa_P\kappa_{E_N}}{(2\kappa_{E_N} + \kappa_P)}, \quad \kappa_{e_S} = \frac{3\kappa_P\kappa_{E_S}}{(2\kappa_{E_S} + \kappa_P)} \quad (5.22)$$

Finalement, le flux traversant le côté  $e$  est approximé tel que :

$$\kappa_e \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_e dS \approx 2\pi r_P \kappa_e \frac{2\Delta r}{3\Delta z} (U_{E_N} + U_{E_S} - 2U_P) \quad (5.23)$$

Par exemple, la contribution des voisins à l'est est prise en compte dans la matrice du solveur par les coefficients  $a_{E_N}$  et  $a_{E_S}$  :

$$a_{E_N} = a_{E_S} = 2\pi r_P \kappa_e \frac{2\Delta r}{3\Delta z} \quad (5.24)$$

$$a_P = a_{E_N} + a_{E_S} \quad (5.25)$$

D'autre part, dans le scénario où le voisin est plus grossier (Fig. 5.2b), afin d'obtenir une discrétisation conservative, on se base sur une expression de la même forme du flux en  $e$  (Eq. 5.23). Dû à la relation entre les surface d'échange entre les voisins  $P$  et  $E$ , le flux entrant l'élément  $E_S$  est la moitié de celui en  $e$ . Donc, comme le flux en  $w$  se dirige dans le sens opposé, son expression obtenue est la suivante :

$$\kappa_w \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_w dS \approx -2\pi r_P \kappa_w \frac{1\Delta r}{3\Delta z} (U_N + U_P - 2U_W) \quad (5.26)$$

L'expression de  $\kappa_w$  est égale à celle de  $\kappa_{E_S}$  dans l'Eq. 5.22. A titre d'exemple, les coefficients de la matrice du solveur à partir de la contribution du voisin à l'ouest  $W$  est :

$$a_W = 2\pi r_P \kappa_w \frac{2\Delta r}{3\Delta z} \quad a_N = -2\pi r_P \kappa_w \frac{1\Delta r}{3\Delta z} \quad (5.27)$$

$$a_P = a_N + a_W$$

## 5.2 Processus de reconstruction

Le schéma de reconstruction est un composant majeur des méthodologies de frontières immergées et de maillages superposés.

La méthode IB prend en compte les conditions limites en reconstruisant la solution des éléments du maillage à l'interface des géométries. De plus, la méthode des maillages superposés établit le couplage numérique par la reconstruction et l'injection de la solution des éléments dans les zones de transfert à partir du repère de la maille opposé.

On verra aussi que, dans l'application du solveur de Helmholtz avec discontinuités de propriétés de matériaux, la solution doit être reconstruite en respectant la condition d'interface matérielle due à la variation discontinue du coefficient  $\kappa$ .

Les processus de reconstruction IBM, de maillages superposés et de gestion d'interfaces matérielles sont centralisés dans une même structure de la plate-forme numérique. Cela permet de générer et rendre disponible l'ensemble des informations reconstruites simultanément pour une application directe des différents solveurs physiques et de garantir une organisation optimale du couplage multiphysique.

### 5.2.1 Prise en compte des conditions aux limites

Les éléments **Interface (IC)** doivent être traités différemment vis-à-vis du schéma numérique à cause d'une molécule numérique incomplète. Afin d'imposer correctement les conditions aux limites, on cherche plutôt à reconstruire la solution physique de ces éléments à l'aide d'une relation d'interpolation.

Pour une solution, notée  $\varphi$ , qui varie linéairement en fonction de  $r$  et de  $z$  dans le domaine de calcul, on peut approximer cette solution par un polynôme de degré 1 :

$$\varphi = a + b z + c r \quad (5.28)$$

En choisissant le centre de l'élément  $P$ , où la solution est à reconstruire, comme repère local, l'Eq. 5.28 devient :

$$\varphi = a + b (z - z_P) + c (r - r_P) \quad (5.29)$$

où les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les inconnues à déterminer et représentent :

$$a = \varphi_P \quad b = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_P \quad c = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_P$$

A partir de cette équation, on peut formuler la reconstruction de la solution en  $P$  à partir des conditions limites. Selon physique de la solution à la frontière, on distingue trois types de conditions aux limites :

• Dirichlet

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \alpha_D(r_i, z_i) \\ a + b(z_i - z_P) + c(r_i - r_P) &= \alpha_D(r_i, z_i)\end{aligned}\tag{5.30}$$

• Neumann

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_i &= \overrightarrow{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{n}_i = \alpha_N(r_i, z_i) \\ (b, c) \cdot (n_{z_i}, n_{r_i}) &= \alpha_N(r_i, z_i) \\ b n_{z_i} + c n_{r_i} &= \alpha_N(r_i, z_i)\end{aligned}\tag{5.31}$$

• Robin

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_i &= \overrightarrow{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{n}_i = \alpha_R(r_i, z_i) \varphi_i + \beta_R(r_i, z_i) \\ \overrightarrow{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{n}_i - \alpha_R(r_i, z_i) \varphi_i &= \beta_R(r_i, z_i) \\ (b, c) \cdot (n_{z_i}, n_{r_i}) - \alpha_R(r_i, z_i) [a + b(z_i - z_P) + c(r_i - r_P)] &= \beta_R(r_i, z_i) \\ -a \alpha_R(r_i, z_i) + b [n_{z_i} - (z_i - z_P)] + c [n_{r_i} - (r_i - r_P)] &= \beta_R(r_i, z_i)\end{aligned}\tag{5.32}$$

où l'indice  $i$  peut dénoter soit le centre d'un élément du maillage, soit un point d'intersection entre la géométrie et la maille.

Pour chaque élément  $P$ , on construit d'abord un système matriciel local de reconstruction en évaluant les Eqs. 5.30, 5.31 et/ou 5.32 à partir du type d'information (e.g., la solution physique ou la condition aux limite) des voisins cardinaux (i.e.,  $N$ ,  $S$ ,  $E$  et  $W$ ).

En employant la méthode des Moindres Carrés, on résout ensuite ce système local permettant d'obtenir l'expression pour la solution de l'élément  $P$  (i.e., le terme  $a$  du polynôme de reconstruction) en fonction des coefficients, appelés de pondération, associés à l'information reçue des voisins.

Finalement, on couple implicitement les conditions aux limites à la résolution du schéma numérique du solveur par l'ajout de l'ensemble de ces coefficients à la matrice du système global.

En fonction du marquage IBM et des maillages superposés (Sections 3.2.3.1 et 4.1.1), le voisin appartient à un des types suivantes :

- **Face (FC)** : on applique l'Eq. 5.30 en prenant la valeur stockée au centre de l'élément.
- **Interface (IC)** : on applique l'Eq. 5.30 en couplant tous les éléments à reconstruire afin d'obtenir une approche implicite.
- **Interpolé** : on applique l'Eq. 5.30 permettant de prendre en compte implicitement la solution dans le repère de la maille opposée. Ce type apparaît dans les situations de proximité entre les géométries.
- **Interface Non-Intersecté NIIC** : on applique les Eq. 5.30, 5.31 et/ou 5.32 à partir du type des conditions limites stockés aux points d'intersection reliés à cet élément.
- **Extérieur Interface (IOC)** : on applique la même démarche que pour l'élément **NIIC**, mais les points d'intersection sont plutôt reliés à l'élément  $P$  car il est intersecté par la frontière géométrique.

Résumé des étapes de la méthodologie :

1. On assemble un système matricielle de reconstruction locale pour tous les éléments  $P$  à partir de l'information des voisins. Ce système est de taille  $4 \times 3$  car il comprend les quatre équations obtenus à partir des voisins  $N$ ,  $S$ ,  $E$  et  $W$  et les trois inconnues à déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
2. A l'aide de l'approche des moindres carrés, on établit l'équation du terme  $a$  des éléments  $P$  en fonction des coefficients de pondération associés à l'information des voisins.
3. Pour chaque l'élément  $P$ , on additionne les coefficients de pondération dans la matrice globale couplée du solveur de Helmholtz.

De plus, grâce à la méthode de moyennage [128], la dimension du système demeure la même, malgré l'application hiérarchique et la prise en compte simultanée des conditions limites aux deux points d'intersection (i.e., les points d'entrée et de sortie).



Afin d'illustrer la méthodologie, on applique l'approche de reconstruction à l'exemple de la figure (Fig. 5.3) :

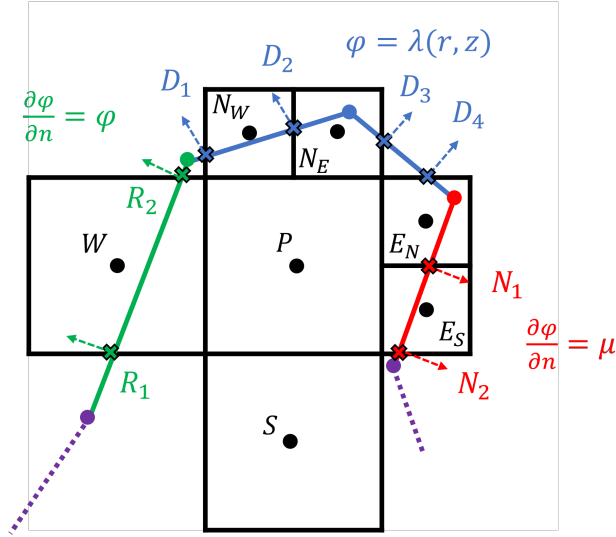


Figure 5.3 Exemple de reconstruction - Condition limites.

Dans cet exemple, l'élément  $P$  est entouré par une **FC** au sud (i.e.,  $S$ ), par des **IC** au nord-est (i.e.,  $N_E$  et  $E_N$ ), et par des **NIIC** à l'ouest, au nord-ouest et au sud-est (i.e.,  $W$ ,  $N_W$  et  $E_S$ ). De plus, les conditions de Dirichlet, de Neumann et de Robin sont imposées, respectivement, aux points d'intersection  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  et  $D_4$  (i.e., le côté en bleu),  $N_1$  et  $N_2$  (i.e., le côté en rouge) et  $R_1$  et  $R_2$  (i.e., le côté en vert). Pour l'élément  $P$ , le système d'équation est le suivant :

- **Direction Nord** ( $N_E$  et  $N_W$ ) :

$$a + b(z_{N_E} - z_P) + c(r_{N_E} - r_P) = \varphi_{N_E}$$

$$a + b(z_{D_1} - z_P) + c(r_{D_1} - r_P) = \lambda_{D_1}$$

$$a + b(z_{D_2} - z_P) + c(r_{D_2} - r_P) = \lambda_{D_2}$$

- **Direction Sud** :

$$a + b(z_S - z_P) + c(r_S - r_P) = \varphi_S$$

• **Direction Est** ( $E_N$  et  $E_S$ ) :

$$\begin{aligned} a + b (z_{N_E} - z_P) + c (r_{N_E} - r_P) &= \varphi_{E_N} \\ b n_{z_{N_1}} + c n_{r_{N_1}} &= \mu_{N_1} \\ b n_{z_{N_2}} + c n_{r_{N_2}} &= \mu_{N_2} \end{aligned}$$

• **Direction Ouest** :

$$\begin{aligned} -a + b [n_{z_{R_1}} - (z_{R_1} - z_P)] + c [n_{r_{R_1}} - (r_{R_1} - r_P)] &= 0 \\ -a + b [n_{z_{R_2}} - (z_{R_2} - z_P)] + c [n_{r_{R_2}} - (r_{R_2} - r_P)] &= 0 \end{aligned}$$

En appliquant la méthode de moyennage [128], la notation matricielle des équations devient :

• **Direction Nord** :

$$\begin{bmatrix} 3 & (z_{N_E} + z_{D_1} + z_{D_2} - 3 z_P) & (r_{N_E} + r_{D_1} + r_{D_2} - 3 r_P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [\varphi_{N_E} + \lambda_{D_1} + \lambda_{D_2}]$$

• **Direction Sud** :

$$\begin{bmatrix} 1 & (z_S - z_P) & (r_S - r_P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [\varphi_S]$$

• **Direction Est** :

$$\begin{bmatrix} 1 & (n_{z_{N_1}} + n_{z_{N_2}} + z_{N_E} - z_P) & (n_{r_{N_1}} + n_{r_{N_2}} + r_{N_E} - r_P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [\varphi_{E_N} + \mu_{N_1} + \mu_{N_2}]$$

• **Direction Ouest** :

$$\begin{bmatrix} -2 & [(n_{z_{R_1}} + n_{z_{R_2}}) - (z_{R_1} + z_{R_2} - 2 z_P)] & [(n_{r_{R_1}} + n_{r_{R_2}}) - (r_{R_1} + r_{R_2} - 2 r_P)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [0]$$

On peut représenter ce système d'équation sous la forme  $\mathbf{M} \vec{x} = \vec{B}$  :

$$\begin{bmatrix} M_{aN} & M_{bN} & M_{cN} \\ M_{aS} & M_{bS} & M_{cS} \\ M_{aE} & M_{bE} & M_{cE} \\ M_{aW} & M_{bW} & M_{cW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_N \\ B_S \\ B_E \\ B_W \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

A l'aide de la méthode de Moindres Carrés [52], la solution de ce système matriciel est obtenue à partir de la matrice des coefficients, notée par  $\mathbf{M}_R$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}^T \mathbf{M}) \vec{x} &= \mathbf{M}^T \vec{B} \\ \vec{x} &= \underbrace{(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T}_{\mathbf{M}_R} \vec{B} \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{R_{aN}} & M_{R_{bN}} & M_{R_{cN}} \\ M_{R_{aS}} & M_{R_{bS}} & M_{R_{cS}} \\ M_{R_{aE}} & M_{R_{bE}} & M_{R_{cE}} \\ M_{R_{aW}} & M_{R_{bW}} & M_{R_{cW}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_N \\ B_S \\ B_E \\ B_W \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

On obtient l'expression du terme  $a$ , qui est la solution reconstruite en  $P$  :

$$\varphi_P = a = M_{R_{aN}} B_N + M_{R_{aS}} B_S + M_{R_{aE}} B_E + M_{R_{aW}} B_W \quad (5.36)$$

Ensuite, la dernière étape consiste à assembler les coefficients de pondération dans la matrice globale du solveur de Helmholtz. Pour cela, à partir du marquage IBM et de maillages superposés, on détermine si l'information des voisins est inconnue ou non, afin de placer judicieusement les coefficients de pondération dans le système matriciel du solveur (i.e., dans la matrice ou dans le vecteur de droite de l'égalité). Comme les voisins  $S$ ,  $N_E$  et  $E_N$  sont de type **FC** et **IC** respectivement, l'information reçue est aussi une inconnue à déterminer à l'aide du couplage entre le schéma numérique et la reconstruction implicite. Cependant, pour les conditions limites associées aux éléments voisins  $N_W$ ,  $E_S$  et  $W$ , l'information est déjà connue et disponible, et les coefficients sont placés dans le membre de droite de l'égalité.

En reformulant l'Eq. 5.36 à partir de l'expression des composantes du vecteur  $\vec{B}$ , la ligne à ajouter à la matrice globale couplée du solveur de Helmholtz est :

$$\varphi_P - M_{R_{aN}} \varphi_{N_E} - M_{R_{aS}} \varphi_S - M_{R_{aE}} \varphi_{E_N} = M_{R_{aN}} (\lambda_{D_1} + \lambda_{D_2}) + M_{R_{aE}} (\mu_{N_1} + \mu_{N_2}) \quad (5.37)$$

### 5.2.2 Transfert de l'information entre les maillages superposés

La prochaine étape du processus de reconstruction est de garantir le couplage numérique des maillages superposés. Pour cela, on interpole la solution des éléments de la zone de transfert en prenant l'information dans le repère du maillage opposée.

En profitant de la nature similaire des reconstructions IBM et de maillages superposés, on ré-utilise donc le développement mathématique et l'approche de résolution du schéma d'interpolation par la méthode des Moindres Carrés décrits précédemment pour l'imposition des conditions limites (Section 5.2.1).

La méthodologie comprend la reconstruction de la solution numérique au centre des éléments **Interpolé**,  $C$ , à partir de la valeur de la solution et de son gradient pour l'élément correspondant,  $P$ , du maillage superposé. En effet, on applique le même raisonnement développé pour la détection implicite de la ligne médiatrice dans la méthodologie du traitement des maillages superposés (Section 4.1.3).

Premièrement, pour chaque élément  $C$ , on recherche d'abord l'élément correspondant  $P$  dans le maillage opposée. Pour l'ensemble des voisins cardinaux  $N$ ,  $S$ ,  $E$  et  $W$  de  $P$ , on formule le système matriciel de reconstruction local  $4 \times 3$  à partir de Eq. 5.30, 5.31 et/ou 5.32 selon le type de marquage de l'élément. La procédure de traitement des conditions aux limites (Section 5.2.1) demeure valable. De plus, cela permet de prendre en compte automatique des situations de proximité.

Dans un deuxième temps, ce système est résolu par la méthode des Moindres Carrés en obtenant l'expression du gradient de l'élément  $P$  (i.e., les termes  $b$  et  $c$  du polynôme) en fonction des coefficients de pondération des voisins interpolants. A l'aide de cette expression, on formule l'équation de la solution en  $C$ .

Pour finir, de la même manière employée pour la prise en compte des conditions limites, l'ensemble des coefficients de pondération associés à  $C$  sont placés dans la matrice du système couplé.

Dans le but de clarifier les étapes de la méthodologie, l'approche de reconstruction est appliquée à l'exemple présenté à la Fig. 5.4, où l'élément correspondant  $P$  est entouré par des éléments **FC** au nord-est et sud-est (i.e.,  $N_W$  et  $E_S$  en carré bleu), par des éléments **IC** à l'ouest et au sud (i.e.,  $W$  et  $S$  en cercle vert) et par des éléments **Interpolés** au nord-est (i.e.,  $N_E$  et  $E_N$  en triangle noir). Le système d'équation de l'élément  $P$  par la méthode de moyennage [128] pour chaque direction est alors :

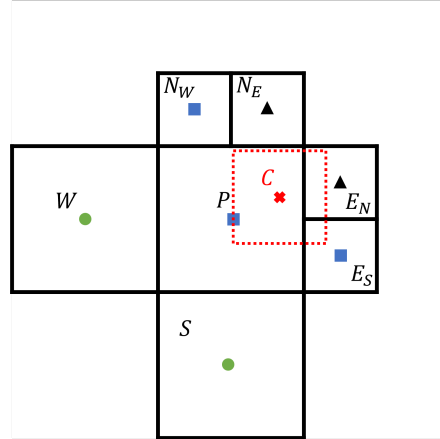


Figure 5.4 Exemple de reconstruction - Transfert de l'information entre les maillages superposés.

- **Direction Nord** ( $N_E$  et  $N_W$ ) :

$$2a + b(z_{N_E} + z_{N_W} - 2z_P) + c(r_{N_E} + r_{N_W} - 2r_P) = \varphi_{N_E} + \varphi_{N_W}$$

- **Direction Sud** :

$$a + b(z_S - z_P) + c(r_S - r_P) = \varphi_S$$

- **Direction Est** ( $E_N$  et  $E_S$ ) :

$$2a + b(z_{E_N} + z_{E_S} - 2z_P) + c(r_{E_N} + r_{E_S} - 2r_P) = \varphi_{E_N} + \varphi_{E_S}$$

- **Direction Ouest** :

$$a + b(z_W - z_P) + c(r_W - r_P) = \varphi_W$$

La représentation du système d'équation sous la forme  $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{B}$  donne :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & (z_{N_E} + z_{N_W} - 2z_P) & (r_{N_E} + r_{N_W} - 2r_P) \\ 1 & (z_S - z_P) & (r_S - r_P) \\ 2 & (z_{E_N} + z_{E_S} - 2z_P) & (r_{E_N} + r_{E_S} - 2r_P) \\ 1 & (z_W - z_P) & (r_W - r_P) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_{N_E} + \varphi_{N_W} \\ \varphi_S \\ \varphi_{E_N} + \varphi_{E_S} \\ \varphi_W \end{bmatrix}}_{\vec{B}} \quad (5.38)$$

La solution du système est obtenue en employant Eq. 5.34 où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}_R$  correspondent respectivement à  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{M}_R$  :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{R_{aN}} & A_{R_{bN}} & A_{R_{cN}} \\ A_{R_{aS}} & A_{R_{bS}} & A_{R_{cS}} \\ A_{R_{aE}} & A_{R_{bE}} & A_{R_{cE}} \\ A_{R_{aW}} & A_{R_{bW}} & A_{R_{cW}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_N \\ B_S \\ B_E \\ B_W \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Les expressions des termes  $b$  et  $c$ , qui nous intéressent, sont alors :

$$b = A_{R_{bN}} B_N + A_{R_{bS}} B_S + A_{R_{bE}} B_E + A_{R_{bW}} B_W \quad (5.40)$$

$$c = A_{R_{cN}} B_N + A_{R_{cS}} B_S + A_{R_{cE}} B_E + A_{R_{cW}} B_W \quad (5.41)$$

A partir des termes  $b$  et  $c$  ci-dessus, on peut trouver la valeur de la solution en  $C$  à partir de  $P$  :

$$\varphi_C = \varphi_P + b (z_C - z_P) + c (r_C - r_P) \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \varphi_C = \varphi_P + & \left[ A_{R_{bN}} B_N + A_{R_{bS}} B_S + A_{R_{bE}} B_E + A_{R_{bW}} B_W \right] (z_C - z_P) \\ & + \left[ A_{R_{cN}} B_N + A_{R_{cS}} B_S + A_{R_{cE}} B_E + A_{R_{cW}} B_W \right] (r_C - r_P) \end{aligned} \quad (5.43)$$

En reformulant l'expression 5.43 à partir de l'expression des composantes du vecteur  $\vec{B}$ , la ligne à ajouter à la matrice de Helmholtz est :

$$\varphi_C - \varphi_P - D_N (\varphi_{N_E} + \varphi_{N_W}) - D_S \varphi_S - D_E (\varphi_{E_N} + \varphi_{E_S}) - D_W \varphi_W = 0 \quad (5.44)$$

où :

$$D_I = \left[ A_{R_{bI}} (z_C - z_P) + A_{R_{cI}} (r_C - r_P) \right], \quad I = N, S, E, W \quad (5.45)$$

A partir de l'Eq. 5.45, le processus d'assemblage de la matrice globale du système couplé est réalisé conformément à la méthode de la Section 5.1.3.

### 5.2.3 Discontinuité des propriétés des matériaux

Dans les applications multi-matériaux retrouvées dans le disjoncteur haute-tension, on doit prendre en compte la présence de différents matériaux où les discontinuités du même matériau dans les schémas numériques du solveur multiphysique.

A la transition entre les propriétés des matériaux, les coefficients de l'équation de Helmholtz peuvent varier de manière discontinue. Cela entraîne un effet dans le comportement de la solution à l'interface matérielle où l'on doit respecter :

$$\varphi_L = \varphi_R \quad (5.46)$$

$$\kappa_L \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = \kappa_R \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_R \quad (5.47)$$

où les Équations 5.46 et 5.47 représentent la continuité de la solution et des flux à gauche  $L$  et à droite  $R$  de l'interface.

Afin de bien identifier les différentes zones de calcul multi-propriétés, la définition rigoureuse de la topologie discrète et du marquage d'éléments IBM par zone géométrique/physique a une grande importance. En effet, la notion de la face topologique joue un rôle significatif permettant de rendre indépendantes, si besoin, les zones de calcul multi-propriétés. Comme illustrés à la Fig. 1.2, les objets sont décrits topologiquement par des faces et discrétisés indépendamment par le marquage IBM. Donc, à la frontière des objets, on a une double couche d'éléments de type **IC** qui est essentielle pour la mise-en-œuvre de la formulation de la condition d'interface matérielle.

La méthodologie proposée comprend l'imposition de la contrainte de continuité de la solution et des flux à gauche et à droite de l'interface matérielle par l'intégration des approches de Patankar et de reconstruction double. De plus, on la subdivise en deux parties :

- Marquage spécifique des éléments de type **IC** à l'interface matérielle.
- Couplage des approches de Patankar et de reconstruction double.

La première partie consiste à identifier les éléments voisins à l'interface partagée par différents matériaux :

A cet égard, pour l'ensemble des éléments de type **IC** d'une zone matérielle (i.e., face topologique), on sélectionne les voisins de type **IC** de la zone matérielle qui partage la même interface. Ensuite, on distingue les éléments couplés en deux types selon la prise en compte simultanée des conditions aux limites :

- **Interface Matériau Interne (IMIC, Internal Material Interface Cell)** : les éléments ayant uniquement des voisins de type **FC** et **IC**. Ils sont traités et discrétisés comme un élément **FC** dans le solveur de Helmholtz, avec un traitement spécial qui utilisera la position de l'interface matérielle dans le calcul du coefficient  $\kappa$  équivalent par l'approche de Patankar [118].
- **Interface Matériau Frontière (BMIC, Boundary Material Interface Cell)** : les éléments ayant des voisins de type **NIIC** et **IOC**. Ils sont reconstruits par une approche de reconstruction double basée sur la méthode des Moindres Carrés.

La deuxième partie consiste à appliquer la formulation des approches de Patankar et de reconstruction double en formulant les équations des éléments **IMIC** et **BMIC**, respectivement.

Comme les éléments **IMIC** ne sont pas intersectés par une frontière, et possèdent une molécule numérique complète, on les traite comme des éléments de type **FC**. On reprend donc l'approche de Patankar employée dans le schéma numérique du solveur de Helmholtz (Section 5.1.3). Cependant, on doit prendre en compte physiquement la frontière matérielle entre les éléments couplés  $P$  et  $D$  dans le concept des résistances en série pour modéliser le changement des matériaux. Cela permet directement de respecter les conditions de continuité de la solution et des flux.

Pour les voisins couplés selon l'axes  $x$ , comme illustré à la Fig. 5.5, l'expression du coefficient  $\kappa$  à l'interface  $d$  (i.e.,  $e$  ou  $w$ ) des éléments  $P$  et  $D$  (i.e.,  $E$  ou  $W$ ) est la suivante :

$$\kappa_d = \left( \frac{\Delta x_{PI}}{\kappa_P \Delta x_{PD}} + \frac{\Delta x_{DI}}{\kappa_D \Delta x_{PD}} \right)^{-1}, \quad (5.48)$$

où,  $\Delta x_{PI} = |x_{IM} - x_P|$ ,  $\Delta x_{DI} = |x_D - x_{IM}|$  et  $IM$  le point d'intersection entre la frontière matérielle et le segment  $\overrightarrow{PD}$  en reliant les centre des éléments couplés.

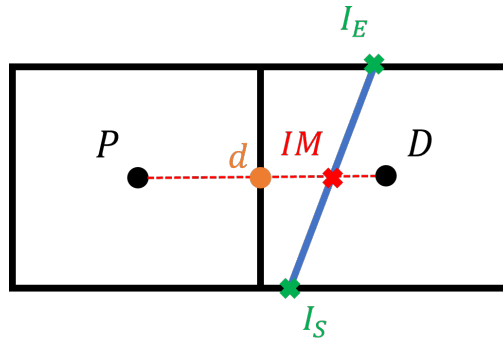


Figure 5.5 Condition d'interface matérielle - Approche de Patankar.



Pour les voisins couplés selon l'axes  $y$  (i.e.,  $N$  ou  $S$ ), on applique la même expression ci-dessus en convertissant  $x$  par  $y$  et  $\Delta x$  par  $\Delta y$ . Avec les expressions de  $\kappa$  à l'interface entre les éléments, on obtient les coefficients  $a$  de la matrice du solveur numérique de la Section 5.1.3.

Globalement, le calcul des informations (i.e., la position et le vecteur normal) de la frontière physique entre les éléments situés de part et d'autre de l'interface matérielle est réalisé à l'aide du point d'intersection entre les segments  $\overrightarrow{PD}$  et  $\overrightarrow{I_E I_S}$  [129].

$$x_{IM} = x_P + t (x_D - x_P) \quad y_{IM} = y_P + t (y_D - y_P) \quad (5.49)$$

$$n_{x_{IM}} = \frac{(y_{I_S} - y_{I_E})}{\sqrt{(x_{I_S} - x_{I_E})^2 + (y_{I_S} - y_{I_E})^2}} \quad n_{y_{IM}} = -\frac{(x_{I_S} - x_{I_E})}{\sqrt{(x_{I_S} - x_{I_E})^2 + (y_{I_S} - y_{I_E})^2}} \quad (5.50)$$

$$t = \frac{(x_P - x_{I_E})(y_{I_E} - y_{I_S}) - (y_P - y_{I_E})(x_{I_E} - x_{I_S})}{(x_P - x_D)(y_{I_E} - y_{I_S}) - (y_P - y_D)(x_{I_E} - x_{I_S})} \quad (5.51)$$

où  $P$  et  $D$  sont les éléments couplés (i.e., **IMIC** et **BMIC**),  $I_E$  et  $I_S$  sont les points d'intersection d'entrée et de sortie de  $P$  ou  $D$  valides pour détermination du point  $IM$  (i.e.,  $0 < t < 1$ ) (Fig. 5.5).

Pour les éléments **BMIC**, la solution des éléments couplés  $P$  et  $D$  est obtenue simultanément par un processus de reconstruction double, permettant de respecter la condition de continuité de la solution et du flux sur l'interface matérielle, et les conditions limites sur la frontière du domaine du calcul.

Basé sur l'approche de reconstruction pour les conditions aux limites et le transfert de l'information entre les maillages superposés (Section 5.2.1), on écrit un système d'équation  $8 \times 6$  pour reconstruire, en même temps, les éléments couplés  $P$  et  $D$  (i.e., les termes  $a$ ,  $b$  et  $c$  du polynôme) à partir des informations disponibles (e.g., les types d'éléments) appartenant à la face matérielle d'origine de l'élément couplé. Pour la ligne du système d'équations correspondant à l'élément voisin couplé, on ajoute une des équations pour la continuité de la solution et du flux (Eq. 5.46 et 5.47) formulées à partir du polynôme de reconstruction. Pour cela, on se sert de la position  $IM$  à l'interface permettant d'établir les égalités suivantes :

$$a_P + b_P (z_{IM} - z_P) + c_P (r_{IM} - r_P) = a_D + b_D (z_{IM} - z_D) + c_D (r_{IM} - r_D) \quad (5.52)$$

$$b_P k_L n_{z_{IM}} + c_P k_L n_{r_{IM}} = b_D k_R n_{z_{IM}} + c_D k_R n_{r_{IM}} \quad (5.53)$$

On considère le cas illustré à la Fig. 5.6, permettant de clarifier le développement mathématique du système 6 x 8 de l'approche de reconstruction double. Dans ce cas, l'élément  $P$  appartient à la zone de matériau  $\kappa_1$ , et est entouré par des éléments de type **FC** au nord (i.e.,  $N_P$ ), par des **NIIC** à l'ouest et au sud (i.e.,  $W_P$  et  $S_P$ ) et par l'élément couplé,  $D$ , à l'est. De son côté, l'élément  $D$  appartient à une zone de matériau  $\kappa_2$ , et ses voisins  $N_D$ ,  $S_D$ ,  $E_D$  et  $W_D$  sont, respectivement, **IC**, **IC**, **FC** et l'élément couplé,  $P$ . Pour les conditions aux limites, on applique la condition de Neumann nulle aux points  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .

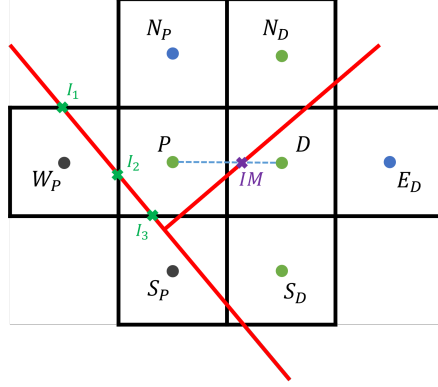


Figure 5.6 Condition d'interface matérielle - Approche de reconstruction double.

La matrice 8 x 6 de reconstruction double pour l'exemple de la Fig. 5.6 devient alors :

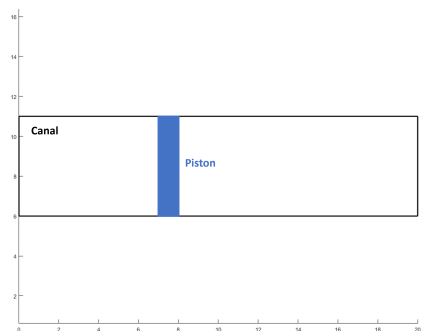
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & (z_{N_P} - z_P) & (r_{N_P} - r_P) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{z_{I_3}} & n_{r_{I_3}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (z_{IM} - z_P) & (r_{IM} - r_P) & -1 & (z_{IM} - z_D) & (r_{IM} - r_D) \\ 0 & (n_{z_{I_1}} + n_{r_{I_2}}) & (n_{z_{I_1}} + n_{r_{I_2}}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (z_{S_D} - z_D) & (r_{S_D} - r_D) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (z_{E_D} - z_D) & (r_{E_D} - r_D) \\ 0 & \kappa_1 n_{z_{IM}} & \kappa_1 n_{r_{IM}} & 0 & -\kappa_2 n_{z_{IM}} & -\kappa_2 n_{r_{IM}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_P \\ b_P \\ c_P \\ a_D \\ b_D \\ c_D \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_{N_P} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_{S_D} \\ \varphi_{E_D} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{\mathbf{B}}} \quad (5.54)$$

A partir de la résolution de ce système matriciel par la méthode des Moindres Carrés, on obtient les équations pour  $P$  et  $D$  (i.e., les termes  $a_P$  et  $a_D$ , respectivement) en fonction des coefficients de pondération à ajouter dans la matrice globale du système couplé du solveur physique. A cet égard, on se sert de la démarche expliquée à la Section 5.1.3.

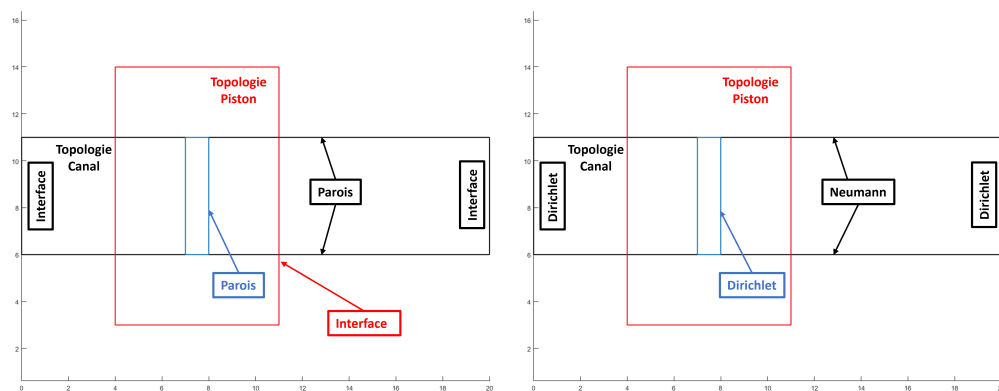
### 5.2.4 Vérification du schéma de Reconstruction

On se limitera, dans cette section, à analyser la prise en compte des conditions limites et le transfert de l'information entre les maillages superposés. L'analyse en détail de la condition d'interface matérielle sera plutôt réalisée avec l'étape de vérification du solveur de Helmholtz au Chapitre 6.

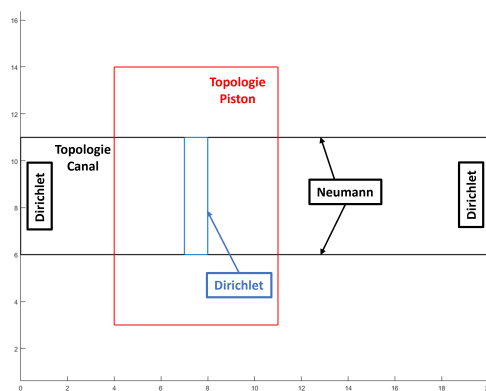
Le cas-test choisi est celui d'un piston, illustré à la Fig. 5.7.



(a) Géométrie.



(b) Champ Distance.

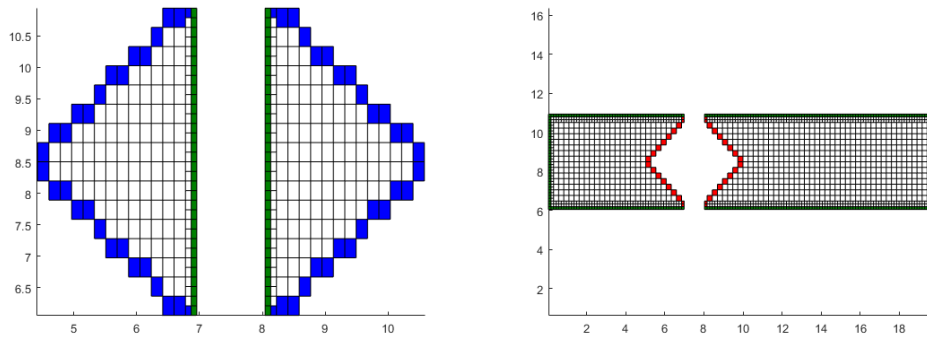


(c) Conditions limites.

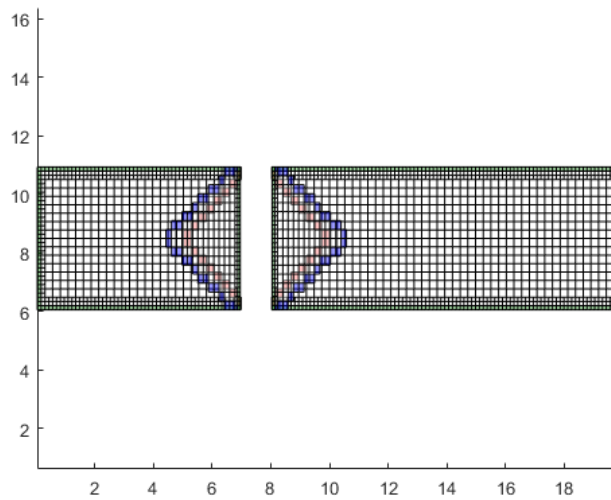
Figure 5.7 Configuration et topologie du cas-test Piston.

Le domaine de calcul est composé d'un maillage fixe et d'un maillage mobile qui demeure statique. Pour la topologie fixe, les conditions limites du solveur d'Eikonal et de Reconstruction sont respectivement de type Paroi et de type Dirichlet (Eq. 5.55) aux frontières supérieure et inférieure, ainsi que de type Interface et de type Neumann (Eq. 5.56) aux frontières à gauche et à droite. Puis, pour la topologie mobile, on impose Paroi et Dirichlet au piston, et Interface à la frontière externe.

On illustre les maillages superposés couplés :



(a) Maillage Mobile : 80 x 20 et Niveau Hiérarchique 2. (b) Maillage Fixe : 40 x 40 et Niveau Hiérarchique 2.



(c) Maillages superposés.

Figure 5.8 Maillages du cas-test Piston pour la vérification du schéma de Reconstruction.

Pour l'ensemble des éléments de type **FC**, on impose la fonction analytique :

$$\varphi = 10 + 3 z + 5 r \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 3 n_z + 5 n_r \quad (5.56)$$

La démonstration de l'ordre de précision de la reconstruction n'est pas triviale en vérifiant uniquement la reconstruction des **Interface** (IC) et **Interpolé** pour les fonctions de degré élevé car la variation du nombre d'éléments à reconstruire ne suit pas celle des éléments totaux du maillage après le raffinement.

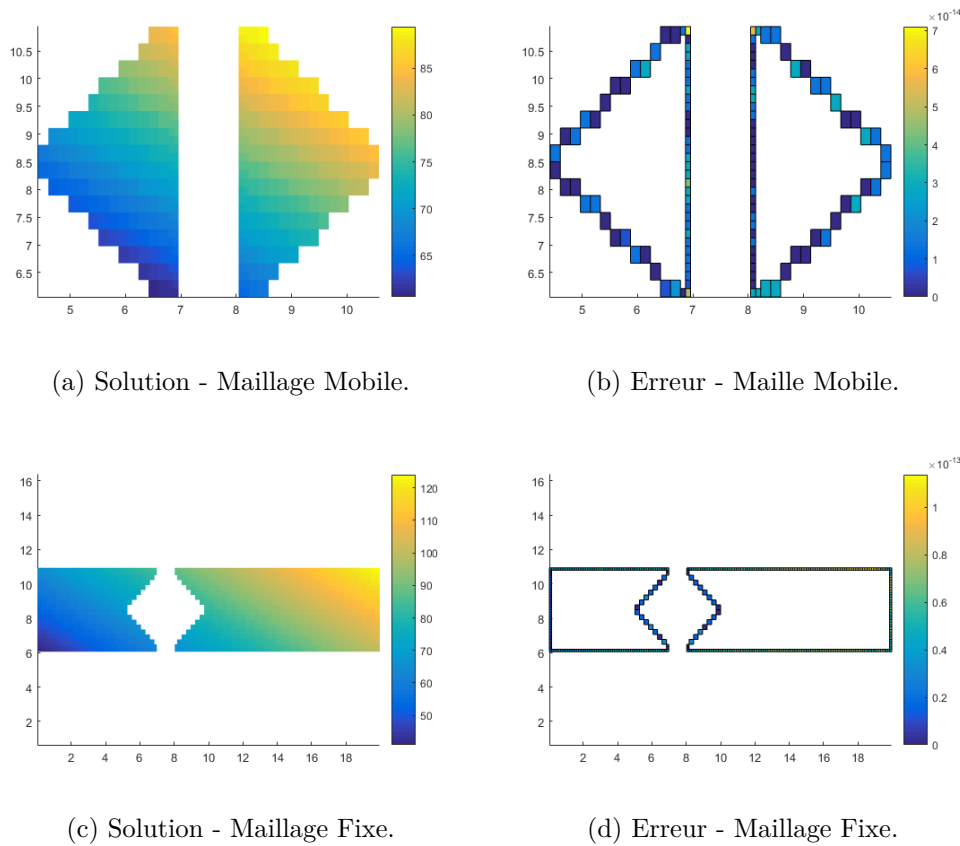


Figure 5.9 Résultats du cas-test Piston pour la vérification du schéma de Reconstruction.

Ensuite, les éléments de type **IC** et **Interpolé** sont reconstruits à partir des schémas de reconstruction présentés ci-dessus. Comme la fonction testée est linéaire, on s'attend à obtenir une erreur à précision machine, c'est-à-dire les valeurs numériques égales à celles analytiques, comme l'on observe à la Fig. 5.9.

### 5.3 Intégration avec le solveur de Euler

Pour réaliser un solveur multiphysique complet, le solveur de Helmholtz est couplé avec celui de la mécanique de fluide développé par l'équipe de recherche [11]. Cela constitue la base de la modélisation multiphysique d'un disjoncteur haute-tension.

La première étape d'intégration a été l'extension du solveur de Euler basé sur le schéma de Roe et l'approche ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) [11] pour les applications en 2D axisymétrique. On a donc modifié le calcul des surfaces et des volumes en tenant en compte l'axe de révolution azimutale.

Le terme source de pression suivant a été ajouté à l'équation du bilan de la quantité du mouvement pour la composante  $v$  selon l'axe  $r$  [1] :

$$\vec{Q}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P/r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Ensuite, la deuxième et dernière étape consiste à formuler les termes sources dus à l'arc électrique.

L'arc électrique est modélisé par le passage du courant dans le milieu conducteur (le coefficient  $\sigma$  non-nul) qui produit l'effet Joule. Un terme source dans l'équation de l'énergie du modèle fluide [1] s'ajoute :

$$\vec{Q}_J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma |\vec{E}|^2 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Le transport d'énergie de l'arc électrique par le rayonnement thermique doit être également prise en compte dans l'équation d'énergie (Section 5.1.2) [29] :

$$\vec{Q}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(4\pi I_b - G) \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

## CHAPITRE 6 Résultats et discussion

Dans ce chapitre, on présente la structure et de l'implémentation numérique de la plate-forme multiphysique appliquée à des domaines 2D axisymétrique. Ensuite, afin de valider l'implémentation de la méthodologie pour le couplage proposé, de nombreux cas test de vérification ont été menés et sont discutés au détail.

### 6.1 Implémentation du code numérique

La plate-forme multiphysique 2D axisymétrique a été codée sous MATLAB R2019a dans un paradigme du type Orienté-Objet de programmation (OOP, *Object-Oriented Programming*) où les modules numériques conçus **Géométrie et topologie discrète**, **Maillage hiérarchique**, **Marquage d'éléments IBM**, **Maillages superposés** et **Solveur multiphysique** (Section 3.2) ont été encapsulés dans des classes.

L'utilisation du langage MATLAB a été un choix stratégique pour faciliter la programmation et le prototypage d'une première version de la plate-forme numérique proposée. Toutefois, comme ce langage de programmation est du type interprété, il n'est pas très performant par rapport à d'autres langages compilés, comme C++ par exemple.

### 6.2 Vérification du code 2D axisymétrique

La réalisation des cas test a été conduite de façon incrémentale afin de démontrer la capacité et la faisabilité du couplage des méthodologies IBM avec les maillages superposés.

Spécifiquement, on vérifie les schémas de discrétisation du solveur Helmholtz d'ordre 2 couplé à celui de la reconstruction pour la prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann et Robin, pour le transfert de l'information entre les maillages superposés et pour le traitement de la discontinuité des propriétés des matériaux. De plus, l'intégration avec le solveur d'Euler a été vérifiée. Ceci permet de valider l'extension pour les applications en 2D axisymétrique et ensuite le couplage multiphysique.

La norme  $L_2$  (Section 4.2) a été utilisée pour l'analyse de l'erreur et pour établir l'ordre de précision du schéma de discrétisation spatial, et de la reconstruction IBM dans le cadre des maillages superposés pour le mouvement des parois.

Les cas test sont divisés en deux catégories : vérification et faisabilité. Pour la première catégorie, les solveurs du champ électrique stationnaire, du rayonnement thermique, de l'écoulement fluide et de la multiphysique sont vérifiés à l'aide des cas-tests illustrés aux Tableaux 6.1 - 6.4. D'autre part, pour la deuxième catégorie, on démontre la faisabilité du couplage proposé vis-à-vis des contraintes de l'application disjoncteur à haute tension pour l'écoulement fluide (Tableau 6.5).

Tableau 6.1 Vérification - Champ électrique

<b>Identifiant</b>	<b>Cas test</b>
<b>ELE1</b>	Conducteur à deux matériaux constants
<b>ELE2</b>	Conducteur incliné à un matériau non-linéaire
<b>ELE3</b>	Conducteur mobile

Tableau 6.2 Vérification - Rayonnement thermique

<b>Identifiant</b>	<b>Cas test</b>
<b>RAD1</b>	Cylindre
<b>RAD2</b>	Sphères concentriques

Tableau 6.3 Vérification - Écoulement fluide

<b>Identifiant</b>	<b>Cas test</b>
<b>FLU1</b>	Écoulement radial subsonique
<b>FLU2</b>	Piston

Tableau 6.4 Vérification - Multiphysique

<b>Identifiant</b>	<b>Cas test</b>
<b>MUL1</b>	Zone d'arc électrique

Tableau 6.5 Faisabilité - Écoulement fluide

<b>Identifiant</b>	<b>Cas test</b>
<b>FAI1</b>	Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié



### 6.2.1 Vérification - Champ Électrique - ELE

On vérifie la résolution de l'équation du potentiel et du champ électriques. De plus, afin de valider l'implémentation des méthodes de Patankar et de la reconstruction double pour le traitement de la discontinuité des propriétés des matériaux (Section 5.2), les applications à multiples matériaux ont été ainsi considérées pour la formulation de ces cas test.

La vérification comprend la réalisation des cas tests suivants : conducteur à deux matériaux constants, conducteur dans un domaine incliné à un matériau non-linéaire et conducteur mobile.

#### 6.2.1.1 Conducteur à deux matériaux constants

La Fig. 6.1 illustre la topologie discrète et la configuration du conducteur des dimensions 2 x 1 m, ainsi que le maillage du cas test.

Dans ce cas test, on obtient le potentiel et le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur composé de deux matériaux différents de conductivité  $\sigma$  constante. Donc, les équations à résoudre sont Eq. 5.2 et 5.3.

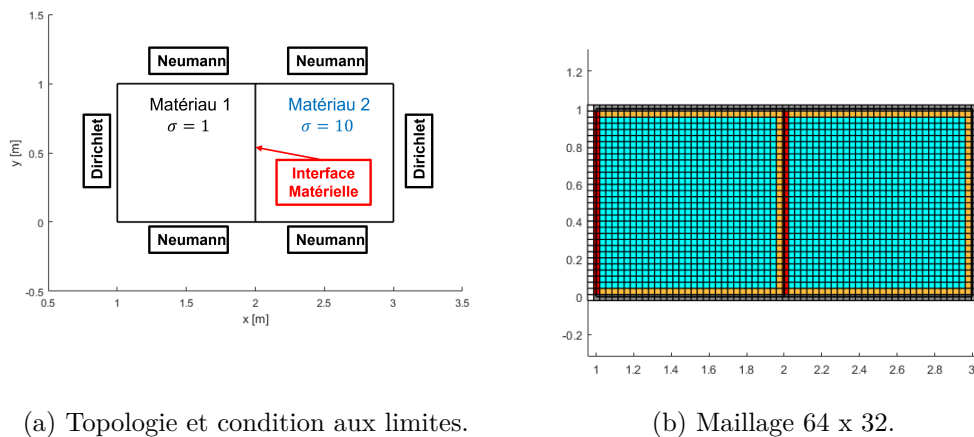


Figure 6.1 Configuration et maillage : Conducteur à deux matériaux constants.

Pour chaque matériau, on définit et associe une face topologique délimitant une zone de calcul permettant de respecter la condition d'interface matérielle à l'interface entre les matériaux à  $z = 2$  m (Fig. 6.1a). Les conditions aux limites du type Dirichlet aux frontières à gauche ( $\varphi(z = 1) = 11$ ) et à droite ( $\varphi(z = 3) = 0$ ), du type Neumann nulle à l'ensemble des frontières en haut et en bas, et du type Matérielle (i.e., discontinuité de matériau) à la frontière au

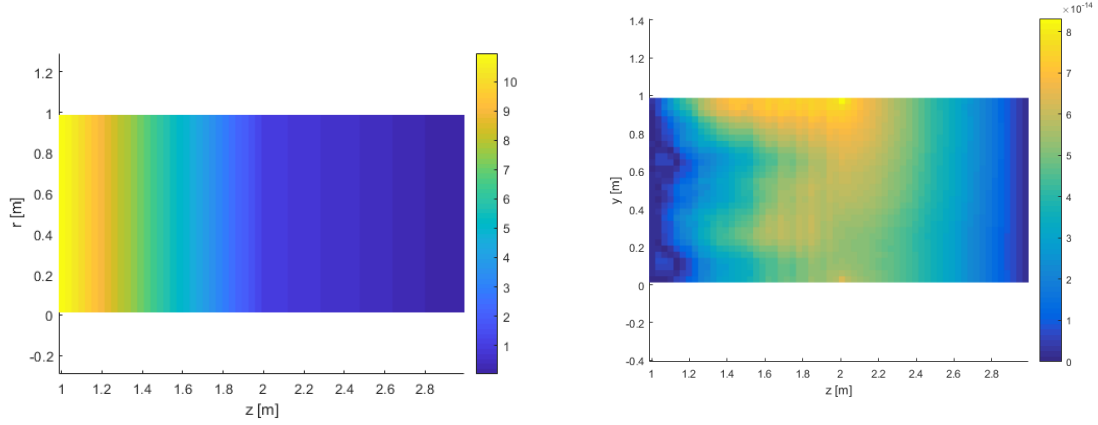
milieu sont appliquées (Fig. 6.1a). Tel qu'illustré à la Fig. 6.1b, le test a été réalisé dans un maillage de  $64 \times 32$ .

Les solutions analytiques du potentiel et du champ électrique dépendent uniquement de  $x$  et sont données par les expressions ci-dessous :

$$\varphi(z) = \begin{cases} 11 - 10z, & z \leq 2 \\ 3 - z, & z > 2 \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} 10, & z \leq 2 \\ 1, & z > 2 \end{cases} \quad (6.2)$$

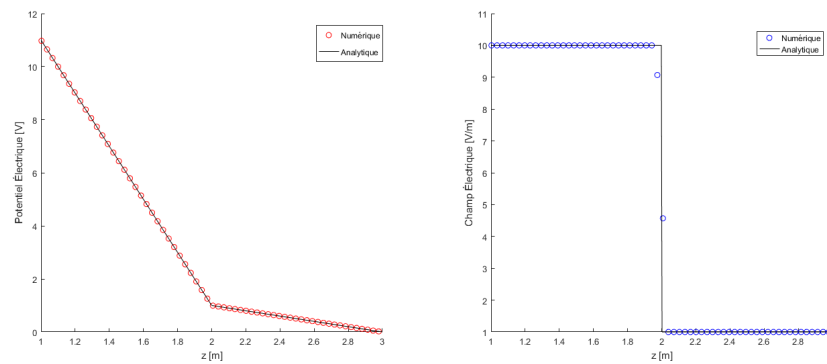
Les Figs. 6.2a et 6.2b montrent, respectivement, la solution et l'erreur numériques du potentiel électrique. D'une manière générale, on observe que l'erreur est à la précision machine et bornée par la valeur  $9.0E-14$ , c'est-à-dire la solution numérique vérifie la solution exacte. Cela est justifié par l'ordre 2 des schémas de discrétisation du solveur et de reconstruction développés permettant de représenter exactement les solutions linéaires. Afin de réaliser une analyse qualitative, on affiche également le potentiel et le champ électriques à la section du conducteur à  $r = 0,5$  m (Fig. 6.3a et 6.3b). On remarque que le potentiel électrique est continu, et le profil de la solution est linéaire par morceaux, en conformité avec la solution analytique. Cependant, le champ électrique est discontinu, mais constant par morceaux car la condition d'interface matérielle prévoit uniquement la continuité pour le produit  $\sigma$  et  $\vec{E}$ . La discontinuité n'est pas bien représentée à cause d'un maillage assez grossier.



(a) Solution.

(b) Erreur.

Figure 6.2 Résultat numérique : Conducteur à deux matériaux constants.



(a) Potentiel Électrique.

(b) Champ Électrique.

Figure 6.3 Solution à la section médiane : Conducteur à deux matériaux constants.

### 6.2.1.2 Conducteur incliné à un matériau non-linéaire

Différemment du cas test précédent, on calcule le potentiel et le champ électrique à l'intérieur d'un domaine (i.e., conducteur) incliné dont un des matériaux est non-linéaire, c'est-à-dire la conductivité dépend de  $r$  et  $z$ . En effet, on a incliné la géométrie de  $45^\circ$  permettant de complexifier la vérification des méthodologies développées dans un contexte IBM où la grille n'est pas alignée avec les frontières du domaine.

La Fig. 6.4 illustre la topologie discrète du conducteur incliné de dimension  $2 \times 1$  m, ainsi que le maillage utilisé pour ce cas test.

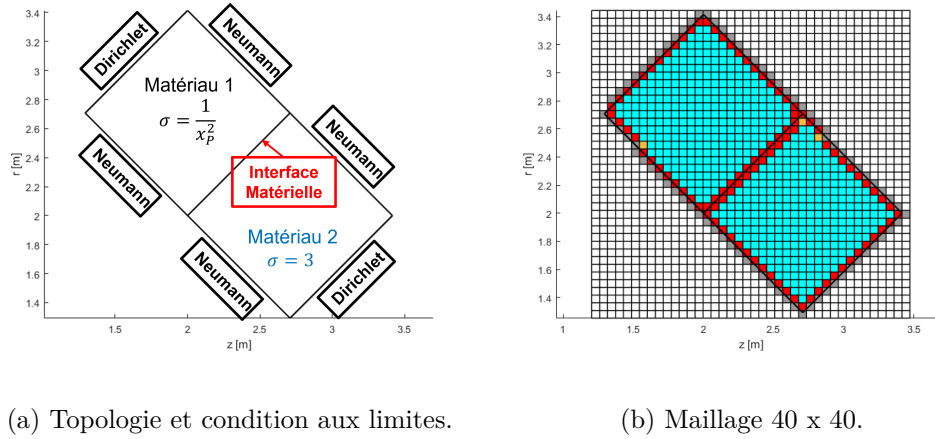


Figure 6.4 Configuration et maillage : Conducteur incliné à un matériau non-linéaire.

Dans le domaine incliné, les conditions aux limites du type Dirichlet aux frontières à gauche ( $\varphi = 10$ ) et à droite ( $\varphi = 2$ ), du type Neumann nul à l'ensemble des frontières au haut et en bas, et du type Matérielle à la frontière du milieu sont appliquées (Fig. 6.4a). Ce test a été réalisé avec les maillages de  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  (Fig. 6.4b),  $80 \times 80$ ,  $160 \times 160$  et  $320 \times 320$ .

Les solutions analytiques du potentiel et du champ électriques dépendent désormais de  $r$  et  $z$ . Cependant, dans le repère tourné, le comportement demeure uni-dimensionnel et dépend de  $z_R$  (i.e., la position selon le repère incliné). A cet égard, on peut écrire la solution analytique à partir de la géométrie non-inclinée et en appliquant une rotation de  $45^\circ$ .

Les expressions sont alors les suivantes :

$$\varphi(z_R) = \begin{cases} 11 - z_R^3, & z_R \leq 2 \\ 5 - z_R, & z_R > 2 \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\vec{E}(z_R) = \begin{cases} 3z_R^2, & z_R \leq 2 \\ 1, & z_R > 2 \end{cases} \quad (6.4)$$

où :

$$z_R(r, z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(z - 2) - \frac{\sqrt{2}}{2}(r - 2) + 2 \quad (6.5)$$

La solution et l'erreur numériques du potentiel électrique sont affichées aux Fig. 6.5a et 6.5b. On remarque que la solution numérique varie comme un profil uni-dimensionnel dans la direction tournée, en conformité avec la solution analytique. L'erreur est plus prononcée dans la zone du matériau 1 à cause du comportement cubique pour lequel les schémas numériques ne sont pas exacts. De plus, l'erreur est maximale aux bords où l'on applique les conditions limites du type Neumann. Cela vient de la formulation de la reconstruction dans laquelle l'on impose uniquement la valeur de la pente sans y associer ainsi une position précise en dégradant par conséquent l'ordre de précision global du solveur.

Comme l'erreur est non-nulle, ayant comme la valeur maximale 1.9E-2 pour un maillage de 40 x 40, on a donc réalisé l'étude paramétrique de la convergence de l'erreur avec le raffinement du maillage permettant déduire l'ordre numérique du solveur, tel qu'illustré à la Fig. 6.6. On obtient ordre 1 ( $p = 1, 1025$ ) à cause de la formulation faible de la condition aux limites du type Neumann.

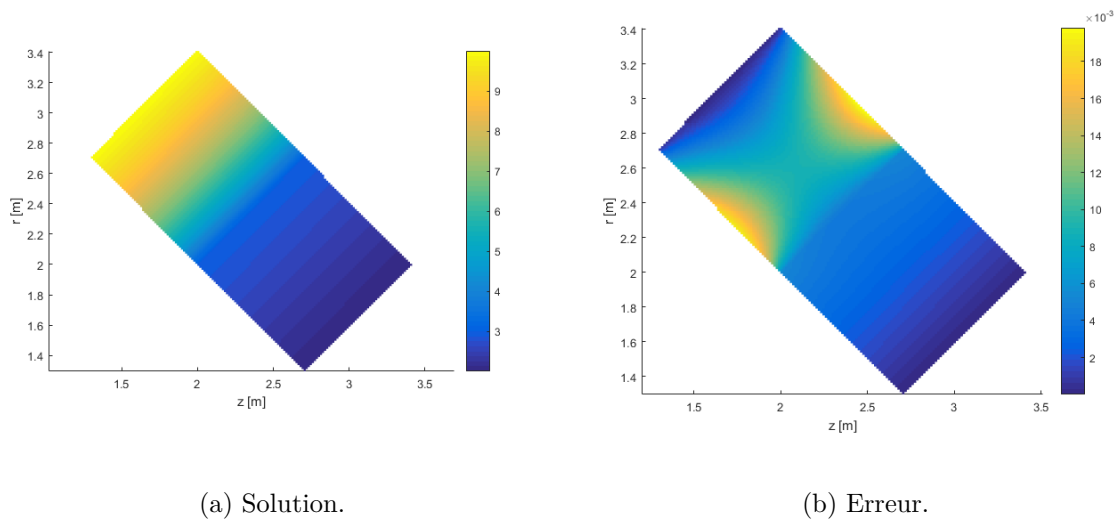


Figure 6.5 Résultat numérique du cas-test pour le maillage 160 x 160 : Conducteur incliné à un matériau non-linéaire.

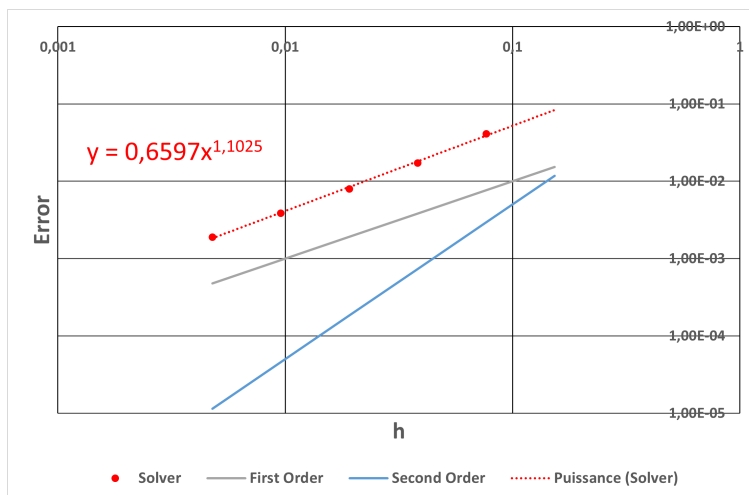


Figure 6.6 Étude de l'erreur - Conducteur incliné à un matériau non-linéaire.

On affiche également le potentiel et le champ électrique à la section médiane du conducteur selon le repère incliné (Fig. 6.7). On observe bien que, pour le potentiel électrique (Fig. 6.7a), la solution est continue, et le profil est cubique et linéaire dans les zones des matériaux 1 et 2, respectivement. Pour le champ électrique, tel qu'illustré à la Fig. 6.7b, il est discontinu, et, avec le raffinement du maillage, cette discontinuité est de mieux en mieux représentée numériquement.

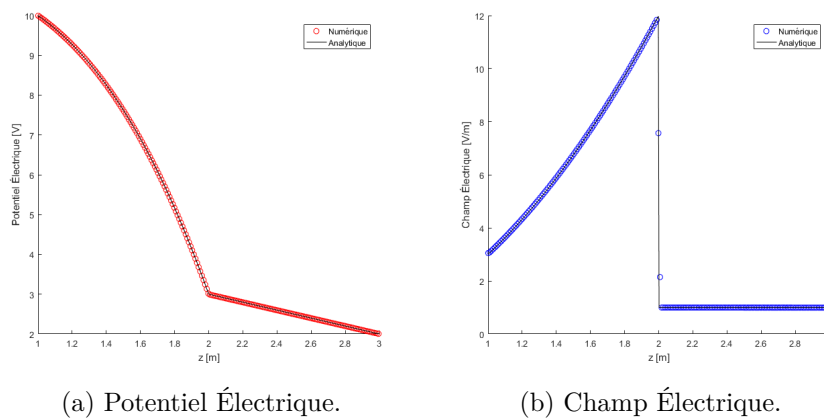


Figure 6.7 Solution à la section médiane du cas test pour le maillage 160 x 160 : Conducteur incliné à un matériau non-linéaire.

### 6.2.1.3 Conducteur mobile

On calcule le potentiel et le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur dont le potentiel est variable et mobile, et la conductivité  $\sigma$  est non-linéaire et décroît avec  $r$  au carré. La Fig. 6.8 illustre la topologie discrète et la configuration du cas test.

Globalement, on définit des rectangles de dimensions 20 x 5 m et 1 x 5 comme les domaines de calcul fixe et mobile (Fig. 6.8a).

L'idée est de calculer la variation du champ électrique générée par le déplacement d'un conducteur mobile à un potentiel fixé (2 V) superposé à celui fixe. Pour cela, on impose initialement aux extrémités à gauche et à droite du conducteur stationnaire un potentiel respectivement de 3 V et 1 V. Avec le mouvement du conducteur mobile, le champ électrique de chaque côté du conducteur fixe devient variable avec la distance entre les différentes surfaces de potentiel imposé.

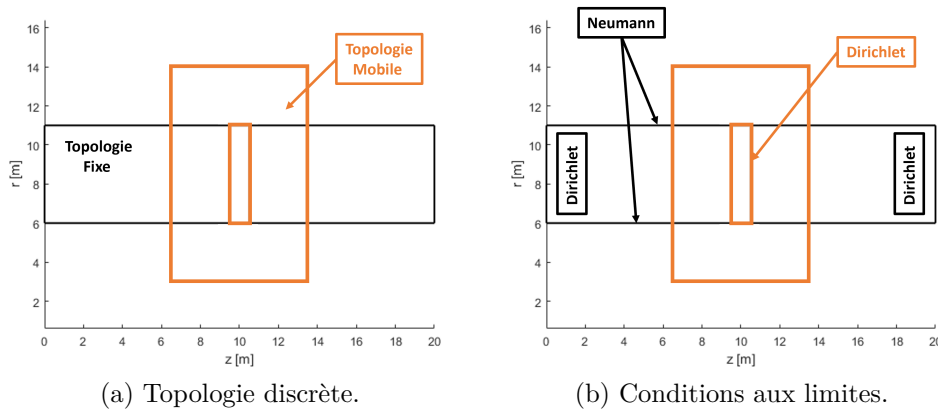


Figure 6.8 Configuration : Conducteur mobile.

Pour la topologie fixe, les conditions aux limites de type Dirichlet aux frontières à gauche ( $\varphi(z=0) = 3$ ) et à droite ( $\varphi(z=20) = 1$ ), du type Neumann nulle à l'ensemble des frontières en haut et en bas (Fig. 6.8b). Cependant, pour la topologie mobile, on impose uniquement la condition aux limite du type Dirichlet ( $\varphi = 2$ ) à toutes les frontières (Fig. 6.8b).

Le conducteur mobile se déplace à une vitesse constante,  $V = 15$  m/s, selon l'axe  $z$ . Pour la simulation, le temps final de déplacement est  $t = 1$  s. Pour la visualisation des résultats, on analyse les solutions à  $t = 0$  (i.e., la position initiale) (Fig. 6.9a), à  $t = 0,5$  s (i.e., la position médiane) (Fig. 6.9b), et à  $t = 1$  s (i.e., la position finale) (Fig. 6.9c). Le test a été réalisé avec un maillage superposé 60 x 20 (i.e., fixe) et 20 x 40 (i.e., mobile).

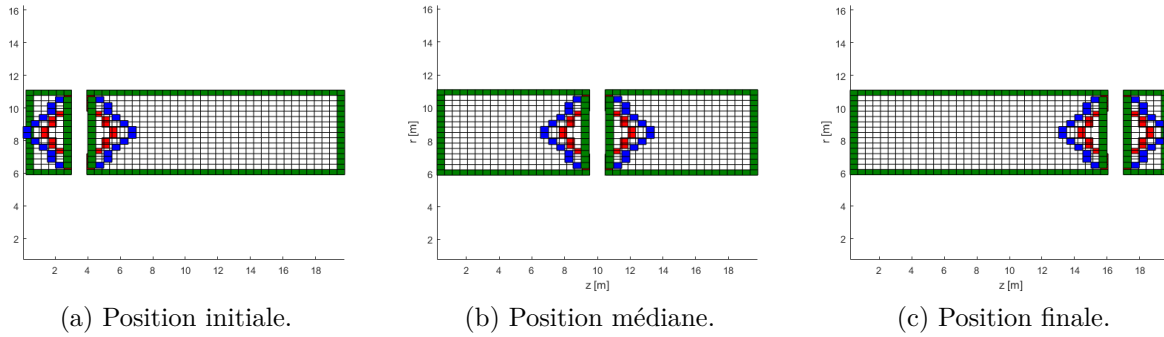


Figure 6.9 Évolution du maillage au cours du temps : Conducteur mobile.

Les solutions analytiques du potentiel et du champ électrique dépendent de  $x$  et  $t$  et sont données par les expressions ci-dessous :

$$\varphi(z) = \begin{cases} 3 - \frac{z}{z_G(t)}, & z \leq z_G(t) \\ 2, & z_G(t) < z < z_D(t) \\ 2 - \frac{(z - z_D(t))}{20 - z_D(t)}, & z \geq z_D(t) \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z_G(t)}, & z \leq z_G(t) \\ 0, & z_G(t) < z < z_D(t) \\ \frac{1}{20 - z_D(t)}, & z \geq z_D(t) \end{cases} \quad (6.7)$$

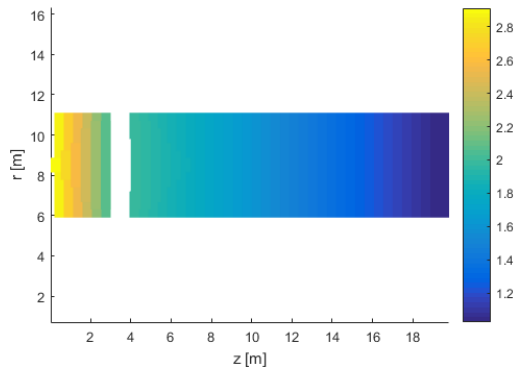
où  $z_G$  et  $z_D(t)$  sont la position des frontières à gauche et à droite du conducteur mobile au cours du temps. Aux positions initiale, médiane et finale,  $z_G$  et  $z_D(t)$  sont, respectivement 3 et 4 m, 9,5 et 10,5 m, et 16 et 17 m.

Les Figs. 6.10 à 6.12 illustrent, respectivement, la solution numérique et l'erreur du potentiel électrique aux positions initiale, médiane et finale.

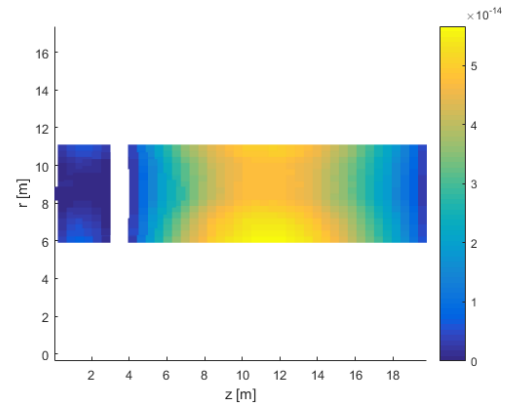
D'une manière générale, on s'attend que l'erreur soit à la précision machine ( $9.0E-14$ ) car la solution est linéaire et exactement calculée et reconstruite numériquement. Encore une autre fois, les schémas de discrétisation d'ordre 2 du solveur et de reconstruction développés donnent avec exactitude des solutions linéaires comme celle du cas test utilisé. On affiche



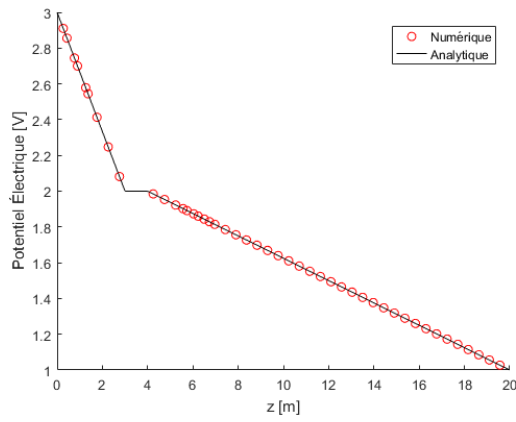
également le potentiel et le champ électrique à la section médiane du conducteur (Fig. 6.10c, 6.10d, 6.11c, 6.11d, 6.12c et 6.12d).



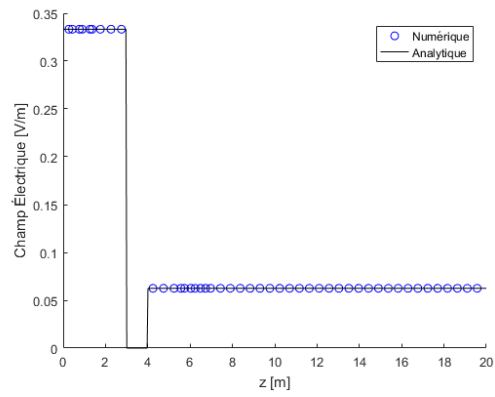
(a) Solution.



(b) Erreur.

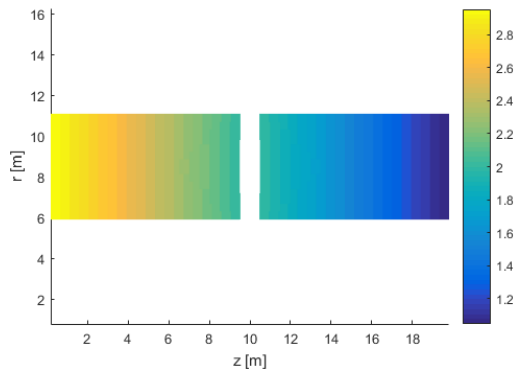


(c) Potentiel à la section médiane.

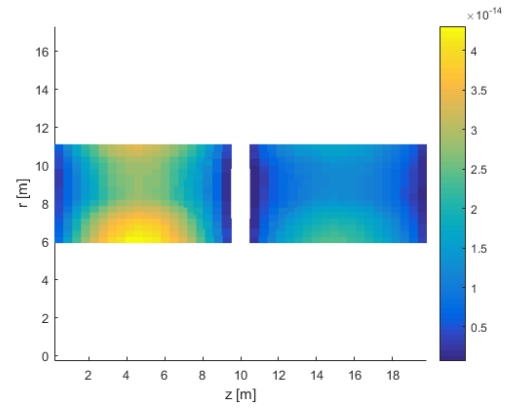


(d) Champ à la section médiane..

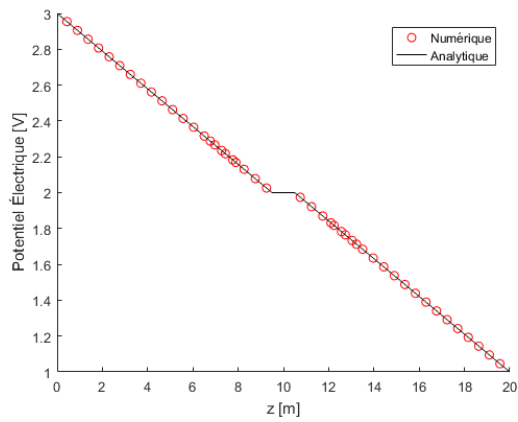
Figure 6.10 Résultat numérique à la position initiale : Conducteur mobile.



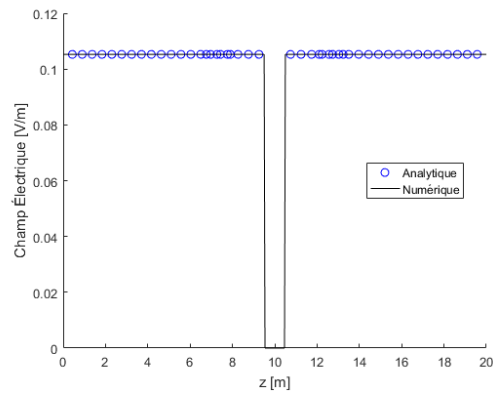
(a) Solution.



(b) Erreur.

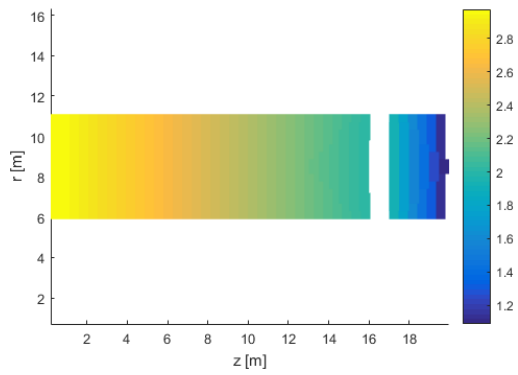


(c) Potentiel à la section médiane.

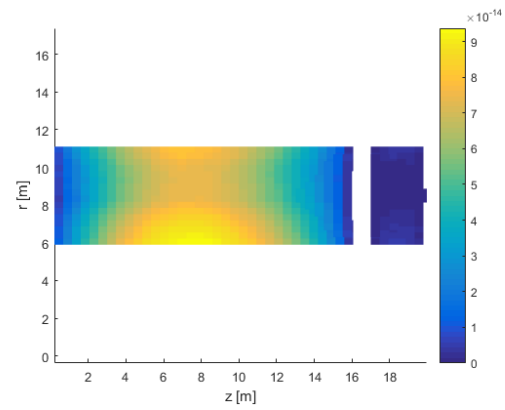


(d) Champ à la section médiane..

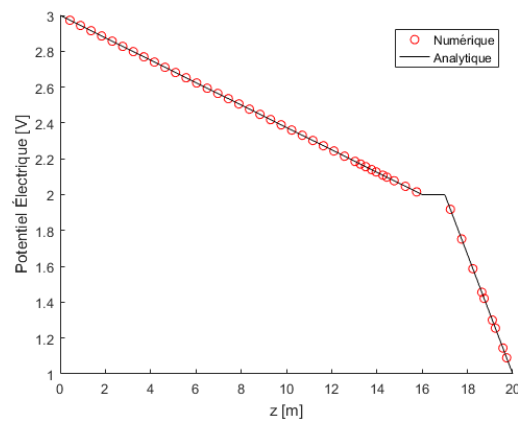
Figure 6.11 Résultat numérique à la position médiane : Conducteur mobile.



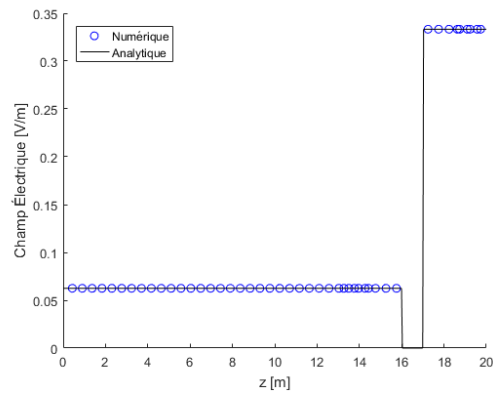
(a) Solution.



(b) Erreur.



(c) Potentiel à la section médiane.



(d) Champ à la section médiane.

Figure 6.12 Résultat numérique à la position finale : Conducteur mobile.

## 6.2.2 Vérification - Rayonnement Thermique - RAD

L'ensemble des cas tests de cette section visent à vérifier le calcul du rayonnement thermique par le modèle  $P_1$  dont la formulation mathématique est la version complète de l'équation de Helmholtz. De plus, les conditions aux limites des types Dirichlet et Neumann, la condition de Marshak (i.e., de type Robin) sera ainsi vérifiée. La vérification comprend la réalisation des cas tests suivants : cylindre et sphères concentriques.

### 6.2.2.1 Cylindre

Le rayonnement thermique, c'est-à-dire le rayonnement incident  $G$ , est calculé dans un cylindre. Dans ce cas test, on pose que les termes de l'équation dépendent uniquement de  $r$ . On illustre aux Fig. 6.13a et 6.13b le domaine de calcul (i.e., la topologie discrète), la configuration des propriétés et des conditions limites choisies, ainsi qu'un des maillages utilisés.

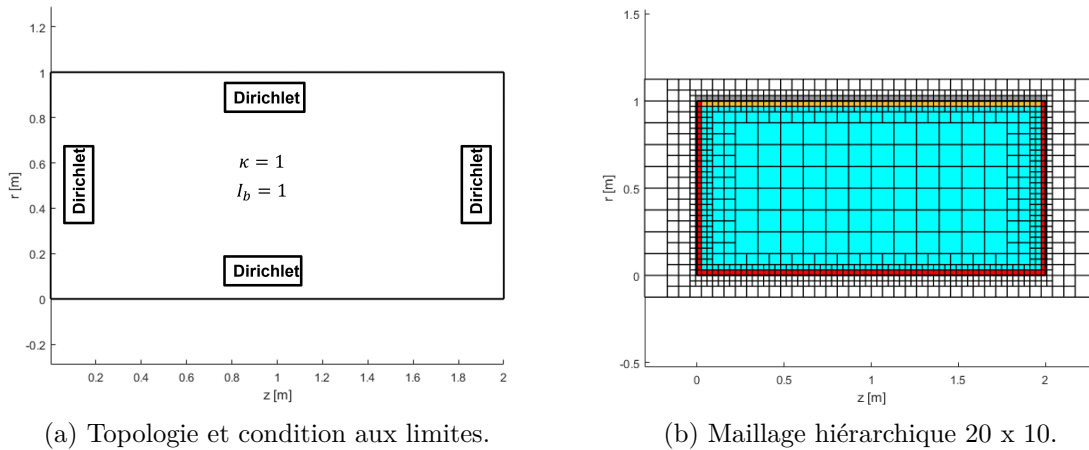


Figure 6.13 Configuration et maillage : Cylindre.

Le cylindre a un rayon de 1 m et une longueur de 2 m. Tel qu'illustré à la Fig. 6.13a, la face topologique est représentée par un rectangle délimitant la zone à l'intérieur du cylindre. Par rapport aux conditions limites, on applique celles du type Dirichlet partout (Eq. 6.9) (Fig. 6.13a). Pour la discrétisation du domaine de calcul, on a utilisé le maillage IBM hiérarchique 20 x 10 avec un niveau de raffinement maximal 3 au niveau des courbes, comme celui de départ pour l'analyse de l'erreur (Fig. 6.13b). Afin de présenter graphiquement l'approche IBM du maillage, la Fig. 6.14 illustre avec une loupe une portion du maillage non adapté à la frontière topologique.

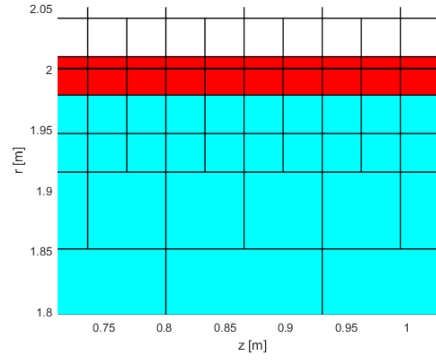


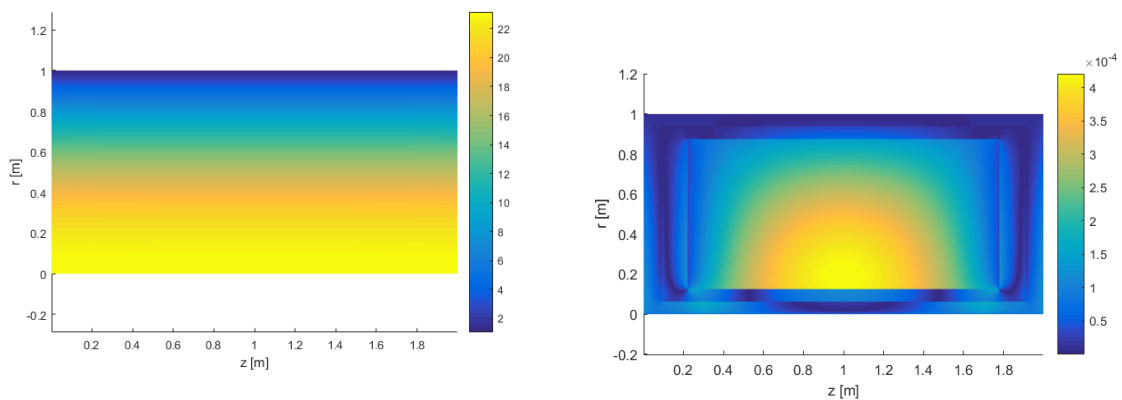
Figure 6.14 Loupe - Maillage hiérarchique 20 x 10 : Cylindre.

Sachant que la solution est en fonction de  $r$ , l'équation du modèle P1 devient une équation différentielle ordinaire (Eq. 6.8), dont la solution analytique est calculée en prenant en compte les valeurs des propriétés (i.e.,  $\kappa = 1$  et  $I_b = 1$ ) et des conditions aux limites précédemment posés.

$$\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{\kappa} \frac{dG}{dr}\right) - 3\kappa G = -12\pi\kappa I_b \quad (6.8)$$

$$G(r) = (1 + 4\pi) \frac{J_0(\sqrt{3} r)}{J_0(\sqrt{3})} - 4\pi \quad (6.9)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel de la première espèce d'ordre 0.



(a) Solution.

(b) Erreur.

Figure 6.15 Résultat numérique du cas-test pour le maillage 320 x 160 : Cylindre.

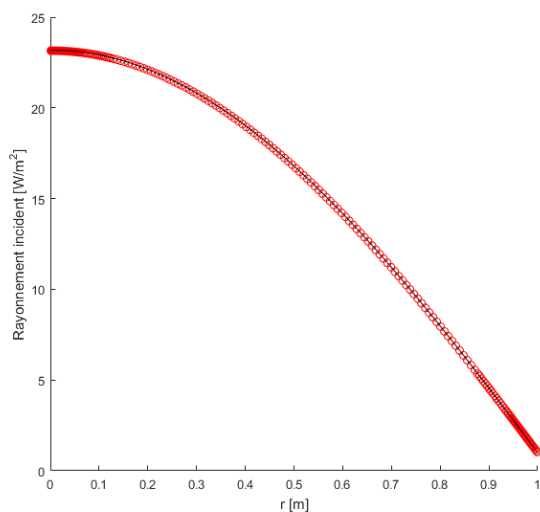


Figure 6.16 Solution à la section médiane du cas test pour le maillage 320 x 160 : Cylindre.

Les Figs. 6.15a et 6.15b illustrent la solution numérique et l'erreur du rayonnement incident pour le maillage 320 x 160. On remarque que la solution numérique atteint un maximum à l'axe de révolution et décroît avec  $r$ , en conformité avec la solution analytique (Fig. 6.16).

On note que l'erreur est plus prononcée et concentrée au centre du domaine de calcul lié au maillage cartésien initial où la taille des éléments est la maximale (Fig. 6.15b). De plus, on observe de discontinués entre les différents niveaux de raffinement hiérarchique avec une réduction de la valeur de l'erreur. Cela permet de vérifier l'extension du schéma de Helmholtz aux maillages hiérarchiques.

La valeur de la norme  $L_2$  de l'erreur est 6,780021E-05 pour le maillage 320 x 160, le plus fin. L'ordre établi est approximativement 2, précisément  $p = 1,9707$  avec le raffinement uniforme des maillages (Fig. 6.17). Ceci permet de démontrer l'ordre deux du schéma de discrétisation du solveur de Helmholtz et de la prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet, et de mettre en évidence la dégradation de l'ordre avec la condition aux limites de type Neumann.

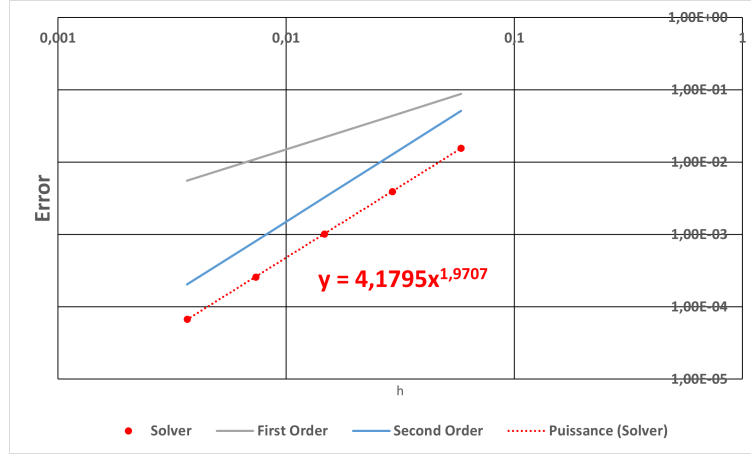


Figure 6.17 Étude de l'erreur : Cylindre.

### 6.2.2.2 Sphères concentriques

Le calcul du rayonnement incident  $G$  est calculé pour la configuration de deux sphères concentriques où le champ dépend de  $r$  et  $z$  selon l'axe radial en coordonnées sphériques. Le domaine de calcul, tel qu'illustré à la Fig. 6.18a, est représenté par une topologie délimitant un quart d'anneau grâce à la symétrie selon les axes azimutal et polaire. De plus, les sphères interne et externe sont de rayon de 1 m et 2 m, respectivement.

On impose des conditions aux limites du type Dirichlet au rayon interne ( $G = 1$ ), de type Marshak (i.e., Robin) au rayon externe (Section 5.2), et de type Neumann nul permettant d'imposer et respecter les symétries sur les autres frontières (Fig. 6.18a). Pour le maillage de départ, illustré à la Fig. 6.18b, on utilise un maillage hiérarchique de 16 x 16 avec un niveau de raffinement maximal de 3 au niveau des courbes, permettant de bien représenter la géométrie curviligne des sphères.

En utilisant la même approche prise dans le cas test précédant pour le calcul de la solution analytique, l'équation du modèle P1 en coordonnées sphériques et en fonction uniquement de  $\rho(r, z)$  devient la suivante :

$$\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho^2}{\kappa} \frac{dG}{d\rho}\right) - 3\kappa G = -12\pi\kappa I_b \quad (6.10)$$

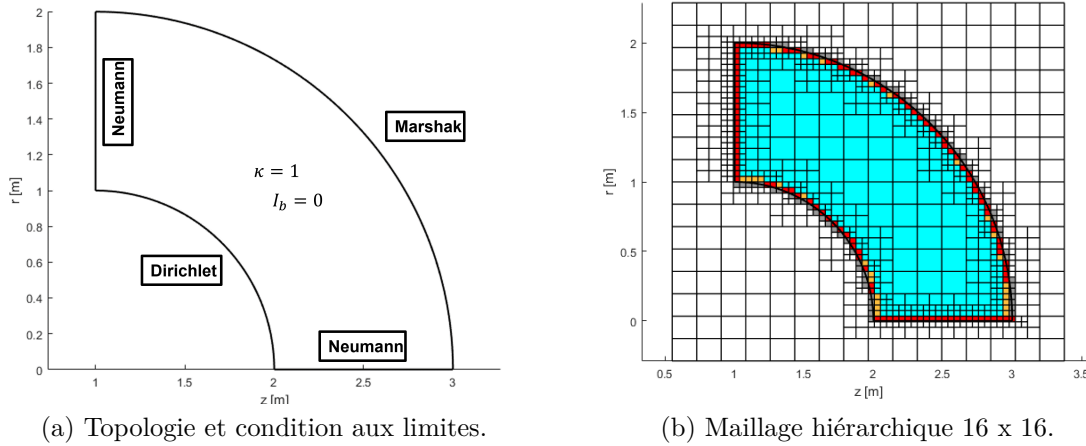


Figure 6.18 Configuration et maillage : Sphères concentriques.

En posant les valeurs des propriétés  $\kappa = 1$  et  $I_b = 0$  et des conditions aux limites, la solution analytique est alors :

$$G(\rho) = \frac{e^{-\sqrt{3}(\rho+1)} \left( (3 + \sqrt{3})e^{4\sqrt{3}} - (\sqrt{3} - 3)e^{2\sqrt{3}\rho} \right)}{(3 - \sqrt{3} + (3 + \sqrt{3})e^{2\sqrt{3}})\rho} \quad (6.11)$$

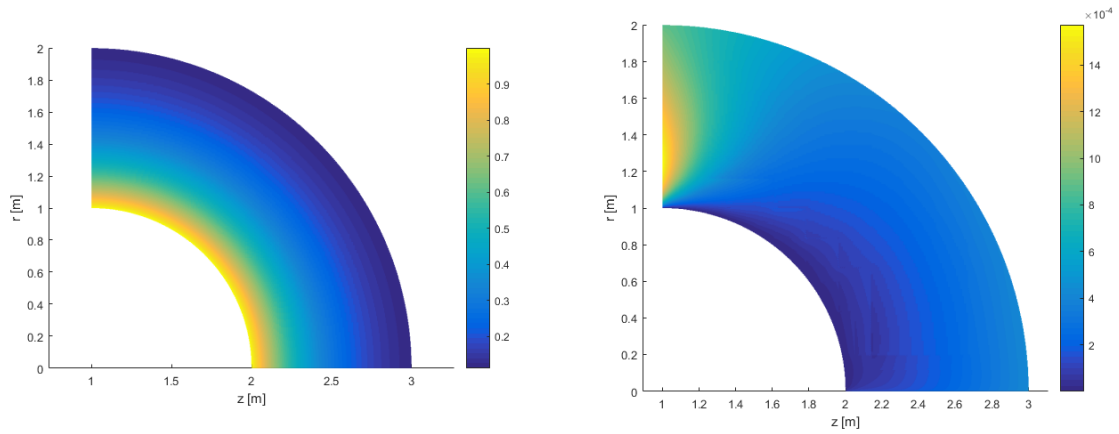
où :

$$\rho(r, z) = \sqrt{(z - 1)^2 + r^2} \quad (6.12)$$

Le calcul du rayonnement incident, tel qu'illustré à la Fig. 6.19a, pour le maillage hiérarchique de  $320 \times 160$  montre une bonne concordance avec le profil analytique donné par l'Eq. 6.11 où la valeur de la solution dépend uniquement du rayon  $\rho$ .

Globalement, on observe à la Fig. 6.19b une erreur accentuée, bornée par la valeur  $1.5727E-3$  ( $L_2$ ), uniquement sur la frontière verticale où une des conditions aux limite du type Neumann est imposée. Cependant, à la frontière horizontale, l'erreur demeure petite, et cela est relié à un effet du rayon  $r$  proche de zéro à l'axe de révolution azimutale. De plus, il n'y a pas de discontinuité de l'erreur entre les niveaux de raffinement hiérarchique. Finalement, on établit l'ordre du schéma qui est d'ordre 1 ( $p = 1,0556$ ), tel qu'illustré à la Fig.6.20.





(a) Solution.

(b) Erreur.

Figure 6.19 Résultat numérique du cas test pour le maillage 256 x 256 : Sphères concentriques.

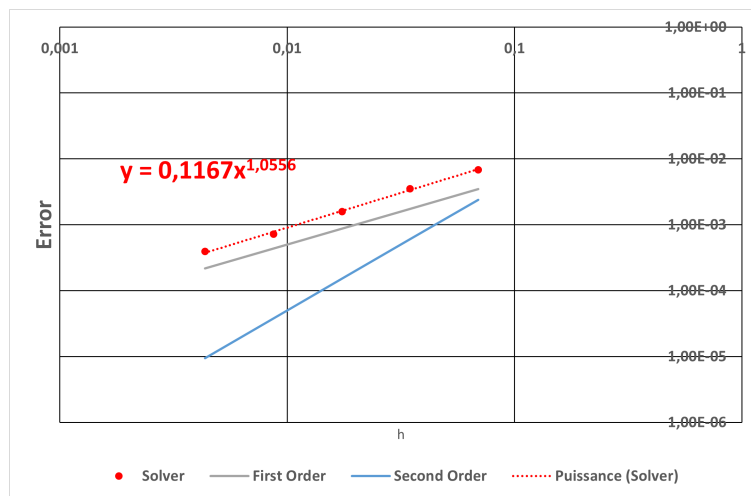


Figure 6.20 Étude de l'erreur : Sphères concentriques.

### 6.2.3 Vérification - Écoulement Fluide - FLU

Dans cette section, l'étape de vérification du solveur de l'écoulement fluide étendu aux configurations 2D axisymétrique est réalisée. D'abord, on valide l'implémentation du calcul des aires surfaciques des flux échangé et le terme source de pression ajouté à l'équation du bilan de la quantité de mouvement en considérant la symétrie azimutale [1].

A cet égard, l'écoulement radial subsonique a été choisi comme le premier cas test de vérification pour comparer avec le profil de l'écoulement quasi-1D isentropique (i.e., la solution analytique) ainsi que d'établir l'ordre du schéma numérique implémenté. On s'attend à obtenir un ordre de précision semblable à celui obtenu par [11] car le solveur de base est le même. Finalement, avec le cas test piston, on vise en plus à vérifier l'application du solveur fluide aux maillages superposés. Pour cela, on démontre la capacité de la méthodologie à traiter les situations de proximité avec ou sans la superposition des frontières et de capturer des entrefers (i.e., les fuites) avec la résolution/échelle spatiale des maillages.

#### 6.2.3.1 Écoulement radial subsonique

On calcule un écoulement radial subsonique entre deux cylindres, illustré à la Fig. 6.21a.

Ceci diffère de l'application 2D plan réalisée par [11] où la tuyère est représentée par la topologie d'un quart de cercle (Fig. 6.18a), on utilise désormais un rectangle de dimension 1 x 1 m, comme la représentation topologique grâce à la symétrie azimutale en 2D axisymétrique.

La Fig. 6.21a illustre la configuration du cas test. L'écoulement est de l'air ( $R = 287$  et  $\gamma = 1,4$ ) à  $P_0 = 1.20E+5$  Pa,  $T_0 = 300$  K et à vitesse nulle. De plus, il est vertical et orienté vers le bas (i.e., la direction  $-r$ ), c'est-à-dire que le fluide entre par le rayon externe ( $r = 2$  m) et sort par le rayon interne ( $r = 1$  m).

On applique des conditions d'entrée et de sortie subsoniques aux frontières en haut et en bas, respectivement. Les frontières verticales à gauche et à droite ont été considérées comme des parois glissantes [11]. Au niveau de l'entrée subsonique, on reconstruit toutes les propriétés du fluide selon la direction normale à la frontière. Pour la sortie subsonique, le rapport de pression (i.e.,  $p_{out}/P_0$ , où  $P_0 = 1.20E+5$  Pa est la pression totale) est imposé à  $p_{out}/P_0 = 0,8$ . Pour la réalisation de l'étude de l'erreur, on a été utilisé les maillages cartésiens suivants : 24 x 24, 48 x 48 (Fig. 6.21b), 96 x 96 et 192 x 192.

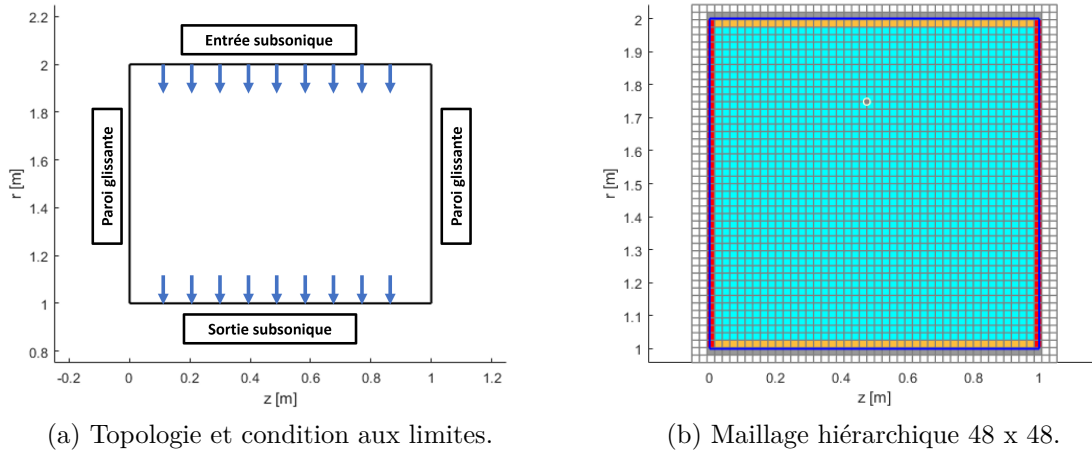


Figure 6.21 Configuration et maillage : Écoulement radial subsonique.

La solution analytique correspond à la solution d'un écoulement quasi-1D isentropique dans une tuyère convergente car l'aire de la section de passage du fluide décroît linéairement avec la diminution de  $r$  [130]. Globalement, toutes les quantités de l'écoulement (e.g., la densité, les vitesses et la pression) varient uniquement avec  $r$ .

Pour la discussion sur les résultats et l'étude de l'erreur, on se concentrera à analyser les champs de pression et du nombre de  $Mach$ . Les Figs.6.23 et 6.24 illustrent les solutions et les erreurs pour le maillage le plus fin :  $192 \times 192$ . De plus, au niveau de la solution temporelle, les quantités de fluide ont été convergées avec un résidu à la précision machine, c'est-à-dire l'écoulement est en régime permanent.

Globalement, on observe que le comportement de la solution numérique est en conformité avec la solution analytique. Le fluide est accéléré progressivement, et la vitesse de l'écoulement passe de  $Mach \approx 0,25$  à l'entrée à environ  $0,6$  à la sortie (Fig.6.24a). En parallèle, la pression décroît, entre la pression à l'entrée et la pression de sortie imposée  $p_{out} = 9.6E+4$  Pa (Fig.6.23a).

Au niveau de l'erreur, tel qu'illustré aux Figs. 6.23b et 6.24b, la valeur maximale est retrouvée dans la zone de la sortie subsonique avec une erreur relative d'environ  $0.73\%$  par rapport à la pression de sortie. Comme il a été observé et analysé par [11], on reconstruit les vitesses et la densité à la sortie subsonique en imposant une condition aux limites du type Neumann nulle. Par conséquent, ces variables deviennent constantes. Toutefois, la solution analytique prédit que l'écoulement à la sortie varie ainsi selon  $r$ . Donc, l'erreur plus prononcée à cet endroit vient de l'incompatibilité entre le type de condition aux limites imposé et le comportement physique de l'écoulement.

Pour régler cette problématique, l'imposition d'une condition aux limites du type *libre* est envisagée, car l'on imposerait alors la dérivée seconde de ces variables est nulle. Cela demanderait par contre de revoir le polynôme de base de reconstruction qui doit être désormais quadratique permettant d'écrire correctement la formulation de la deuxième dérivée.

Permettant de valider les implémentations de l'extension à des configurations 2D axisymétrique, d'établir l'ordre du schéma et d'examiner l'influence de l'erreur à la sortie, on a réalisé l'étude de convergence de l'erreur avec le raffinement uniforme du maillage. Les Figs.6.22a et 6.22b illustrent l'évolution de l'erreur ainsi que l'ordre de précision par rapport aux champs de pression et de nombre de *Mach*, respectivement. Le schéma est d'ordre 1 ( $p = 0,9433$  et  $0,991$ ), en conformité avec le schéma de discrétisation employé [11].

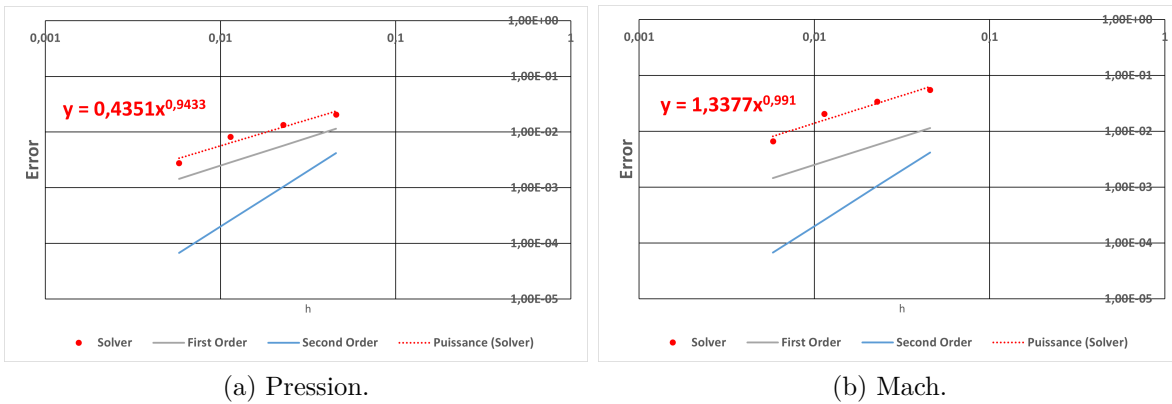


Figure 6.22 Étude de l'erreur : Écoulement radial subsonique.

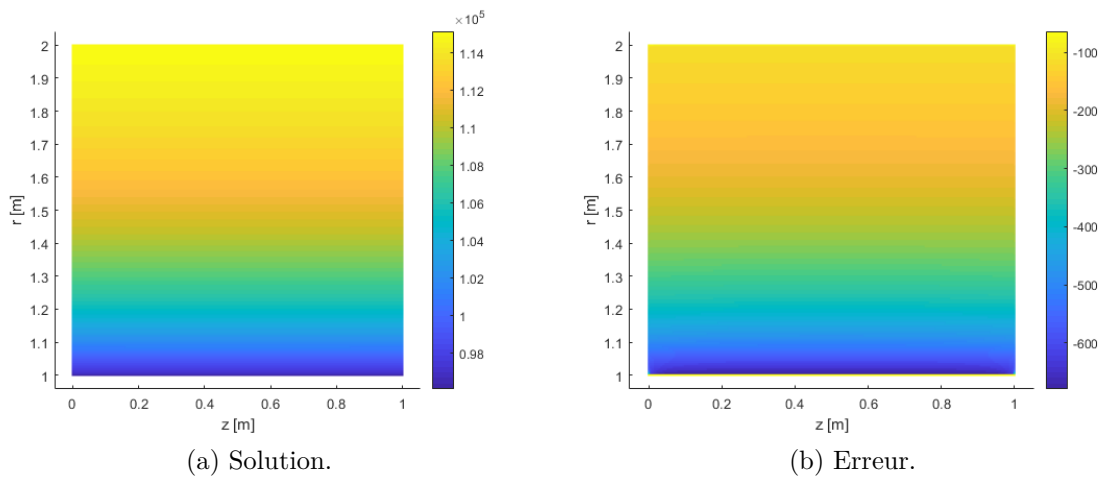


Figure 6.23 Champ de pression du cas-test pour le maillage  $192 \times 192$  : Écoulement radial subsonique.

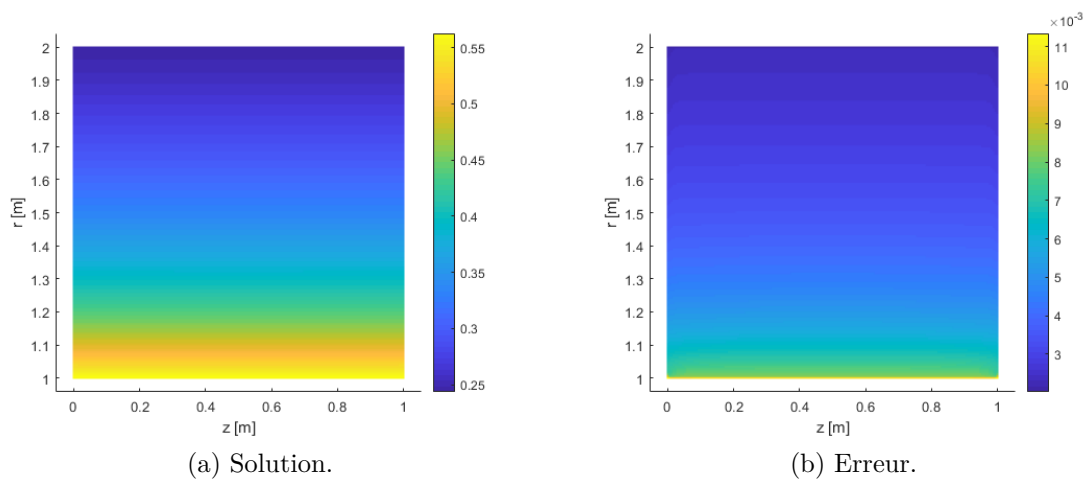


Figure 6.24 Champ du nombre de *Mach* du cas-test pour le maillage 192 x 192 : Écoulement radial subsonique.

### 6.2.3.2 Piston

Le solveur fluide est désormais appliqué au calcul d'un écoulement déclenché par le déplacement impulsif d'un piston à l'intérieur d'un canal fermé. Ici, on intègre l'approche des maillages superposés permettant la prise en compte des géométries mobiles.

La réalisation de ce cas test est divisée en deux étapes. Dans la première étape, on ne considère pas un entrefer entre le piston et le canal, c'est-à-dire les parois horizontales du piston sont alignées et superposées avec les parois du canal. Cependant, pour la deuxième étape, un entrefer sera pris en compte permettant de capturer le phénomène d'une fuite.

#### Sans entrefer

Les Figs. 6.25a et 6.25b illustrent les topologies discrètes fixe et mobile et les conditions aux limites.

On représente le canal et le piston par des rectangles de dimensions 30 x 5 m et 1 x 5 m (Fig. 6.25a). Topologiquement, le domaine de calcul fixe est la face délimitée par le rectangle du canal. Cependant, pour la topologie mobile, le domaine de calcul est la région entre le trou rectangulaire (i.e., piston) et la boucle externe, ainsi représentée par un rectangle de dimension 5 x 10 m.

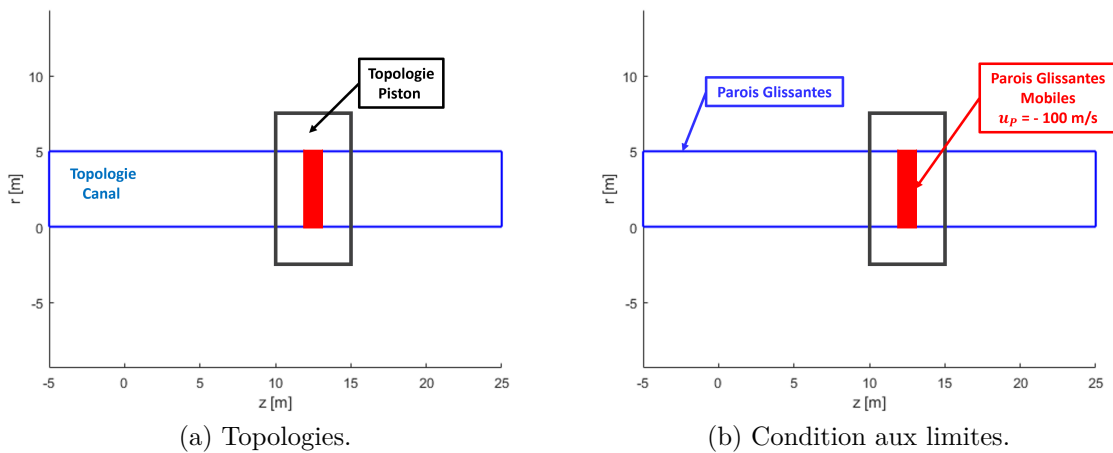
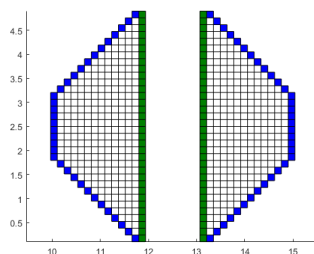
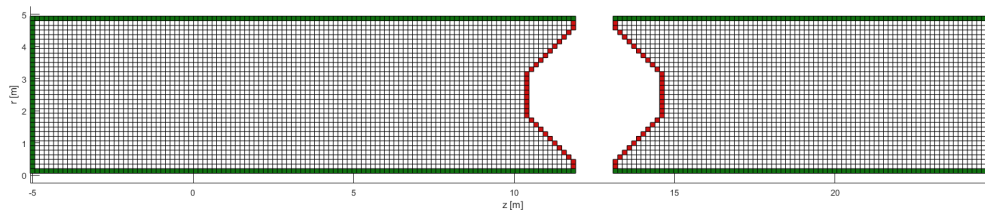


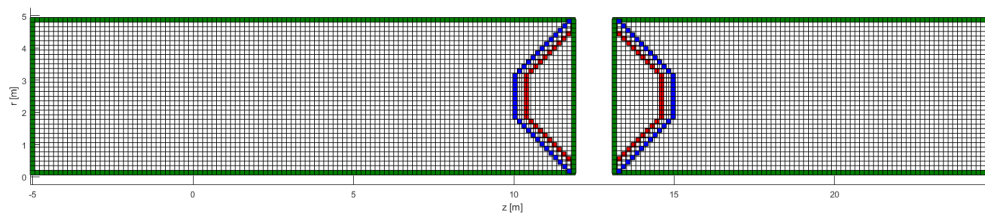
Figure 6.25 Configuration : Piston sans entrefer.



(a) Maillage Mobile : 40 x 80.



(b) Maillage Fixe : 240 x 40.



(c) Maillages superposés.

Figure 6.26 Exemple des maillages : Piston sans entrefer.

On a choisi pour la discrétisation spatiale des maillages cartésiens uniformes : 360 x 60 (i.e., fixe) et 60 x 120 (i.e., mobile). La Fig. 6.26 illustre un exemple de maillage moins raffiné permettant de visualiser les régions de découpage superposées. Par rapport aux conditions aux limites (Fig. 6.22b), on impose aux frontières du canal la condition de paroi glissante et aux frontières du piston la condition de paroi glissante mobile à la vitesse  $u_P$ .

Le fluide de l'écoulement est de l'air ( $R = 287$  et  $\gamma = 1,4$ ) à  $P_0 = 1.0E+5$  Pa,  $T_0 = 300$  K et à vitesse nulle. A  $t > 0$ , un mouvement impulsif à vitesse constante ( $u_P = 100$  m/s) est appliqué au piston. Cela entraîne par conséquent l'apparition d'ondes de choc et d'une détente, respectivement, à gauche et à droite du piston dans le canal. Les zones de l'écoulement fluide est affiché à la Fig. 6.27 et comprend quatre zones différentes :

1. Zone stagnante : la région de l'écoulement à la condition initiale.
2. Zone du choc : la région entre le choc et le piston.
3. Zone de la détente : la région entre l'onde d'expansion et le piston.

4. Zone de l'onde d'expansion : la région d'expansion de la détente.

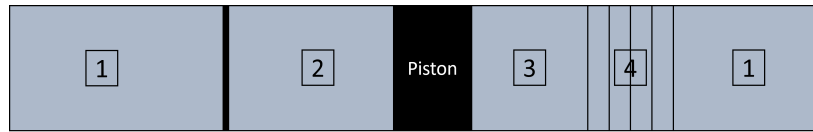


Figure 6.27 Zones de l'écoulement : Piston, inspiré de [11].

La densité, les vitesses et la pression à  $t = 15$  ms sont illustrées aux Figs.6.28 à 6.31. De plus, les profils de la pression et de la vitesse  $u$  à  $r = 2,5$  m à  $t = 15$  ms sont aussi affichés pour la région du choc et de la détente aux Figs. 6.32 et 6.33.

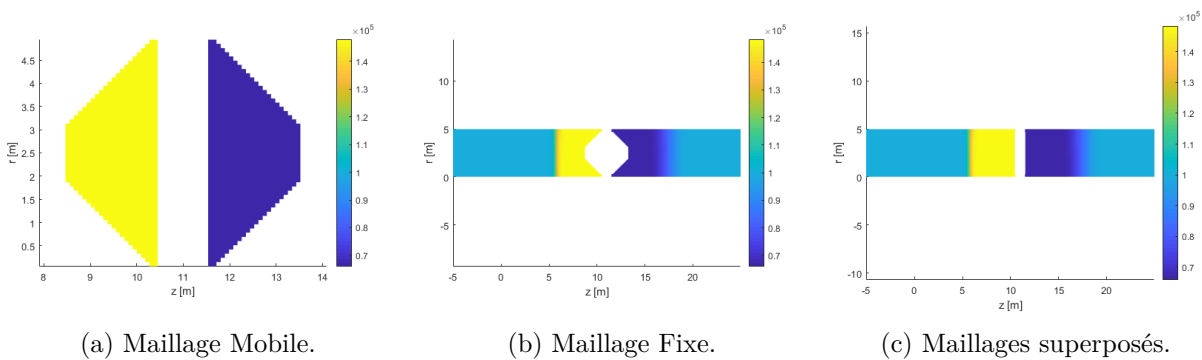


Figure 6.28 Distribution de la pression à  $t = 15$  ms : Piston sans entrefer.

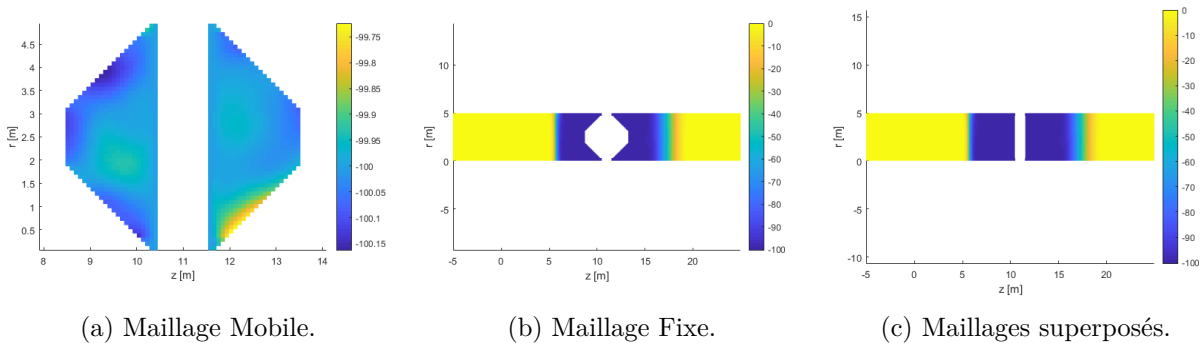
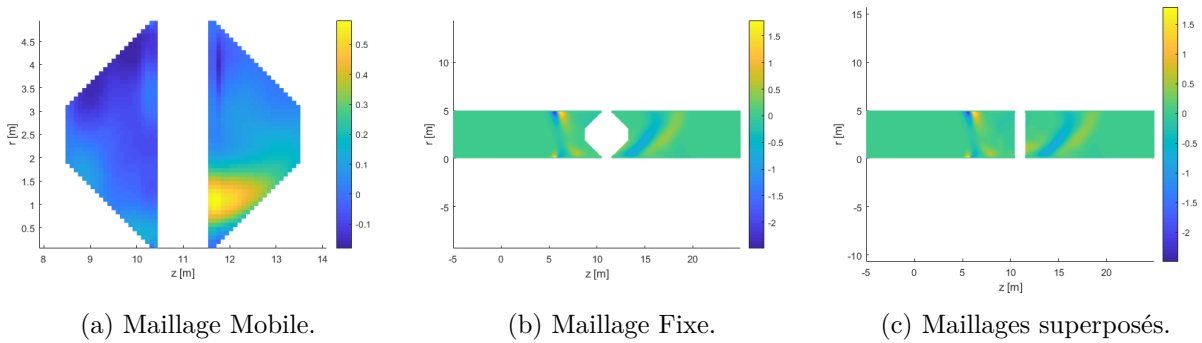
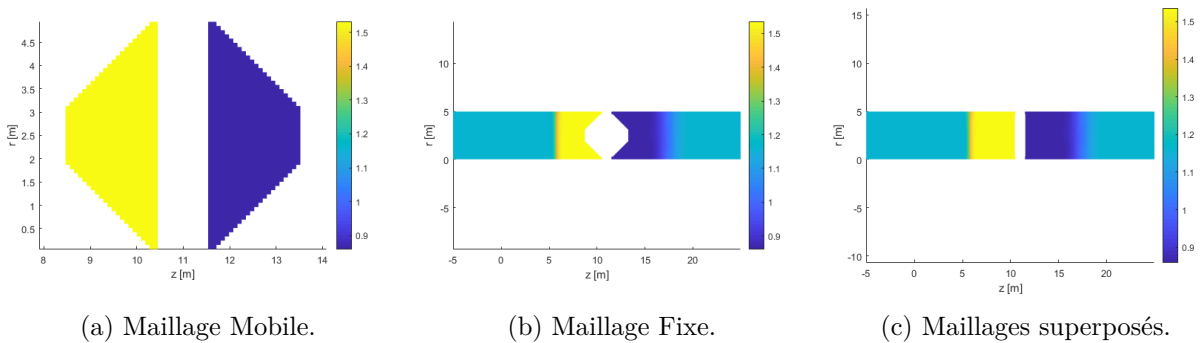
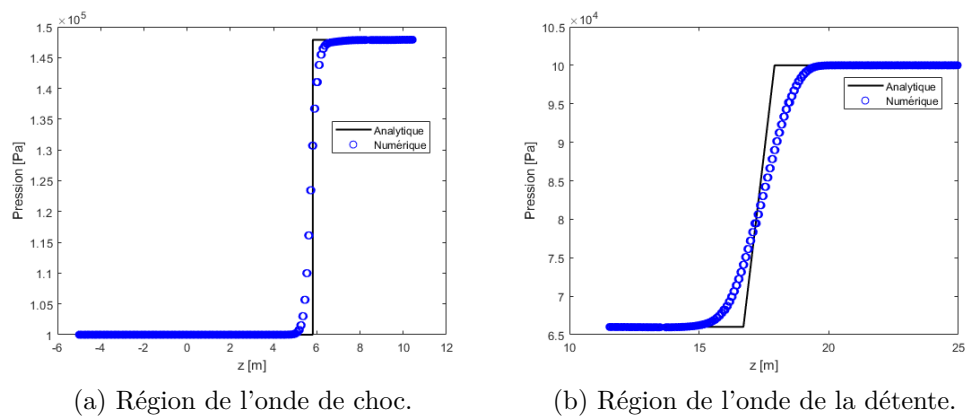


Figure 6.29 Distribution de la vitesse  $u$  à  $t = 15$  ms : Piston sans entrefer.



Figure 6.30 Distribution de la vitesse  $v$  à  $t = 15$  ms : Piston sans entrefer.Figure 6.31 Distribution de la densité à  $t = 15$  ms : Piston sans entrefer.Figure 6.32 Profil de la pression à  $r = 2, 5$  m à  $t = 15$  ms : Piston sans entrefer.

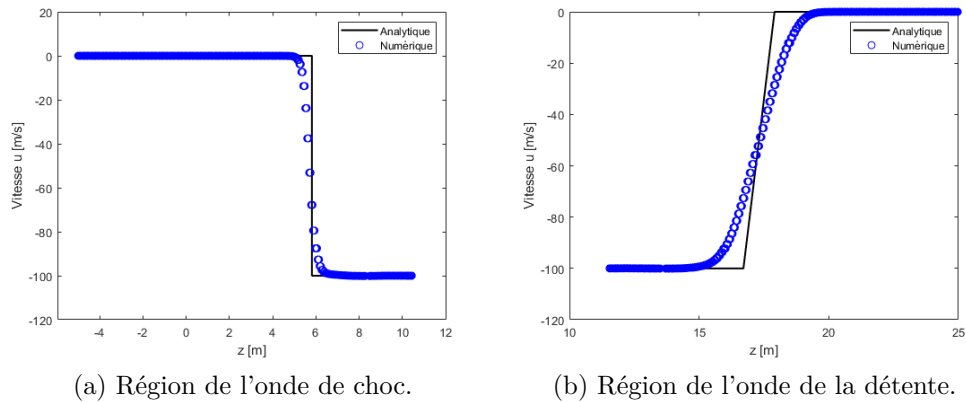


Figure 6.33 Profil de la vitesse  $u$  à  $r = 2,5$  m à  $t = 15$  ms : Piston sans entrefer.

Par rapport aux solutions numériques (Figs.6.28 à 6.31), on observe que le choc et la détente sont correctement capturés. En effet, ils sont à la bonne position : le choc à gauche du piston ( $z = 6$  m, environ) et la détente à droite du piston ( $z$  entre 16 et 18 m), comme prévu théoriquement (Figs. 6.32 et 6.33). Cependant, les discontinuités sont lissées à cause du schéma d'ordre 1. Pour cela, il faudrait augmenter l'ordre du schéma de discrétisation spatiale (e.g., MUSCL - Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) ainsi que de la reconstruction.

On observe également dans certaines parties de l'écoulement 2D dans la solution numérique une vitesse  $v$  non nulle. Cela vient de la diffusion supplémentaire entraînée par le processus de reconstruction implicite et à deux étapes pour la prise en compte des conditions de paroi glissantes mobiles où l'on doit imposer la vitesse des frontières. En effet, comme il y a de la discontinuité dans solution numérique, le fait de coupler les éléments **Interface** (IC) pour la reconstruction, c'est-à-dire l'approche implicite, introduit de la diffusion numérique qui lisse malheureusement la solution du choc et de la détente au niveau de la paroi.

### Avec entrefer

Dans une deuxième étape, la topologie du piston est uniquement modifiée en réduisant sa hauteur pour modéliser un entrefer ( $\delta = 0,3$  m), tel qu'illustré à la Fig. 6.34. La configuration des conditions aux limites est la même qu'au cas test sans l'entrefer.

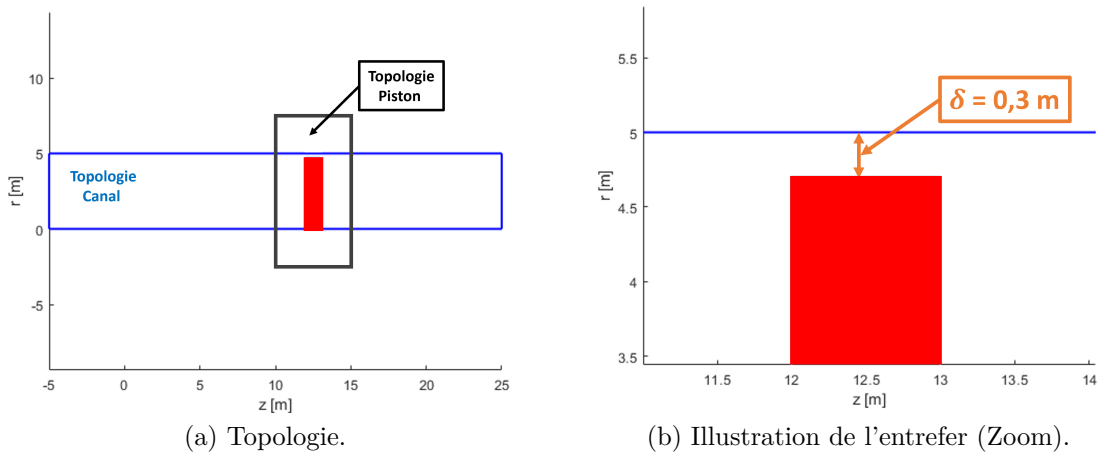


Figure 6.34 Topologie : Piston avec entrefer.

D'abord, afin de démontrer la capacité de la méthode à capturer ou non une fuite selon la résolution spatiale des maillages superposés, on réalise le calcul avec des maillages suffisamment grossiers pour avoir une solution sans fuite en comparant à celle obtenue avec la topologie sans entrefer de la première étape. Pour cela, les maillages suivants ont été choisis :  $72 \times 12$  (i.e., fixe) et  $14 \times 28$  (i.e., mobile), illustrés aux Figs. 6.35a et 6.35b.

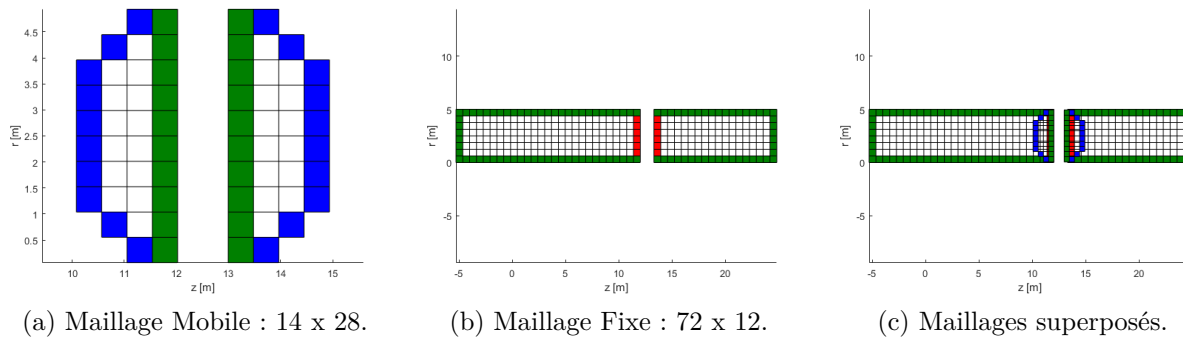


Figure 6.35 Exemple des maillages : Piston sans entrefer.

On illustre et compare la distribution des quantités du fluide pour les simulations avec et sans l'entrefer à  $t = 15$  ms uniquement pour le maillage superposé aux Figs.6.36 à 6.39. Afin de réaliser une étude précise de l'impact du changement topologique, on compare ainsi les profils de la pression et de la vitesse  $u$  à  $r = 2,5$  m et à  $t = 15$  ms sont pour les deux simulations (Figs. 6.40 et 6.41).

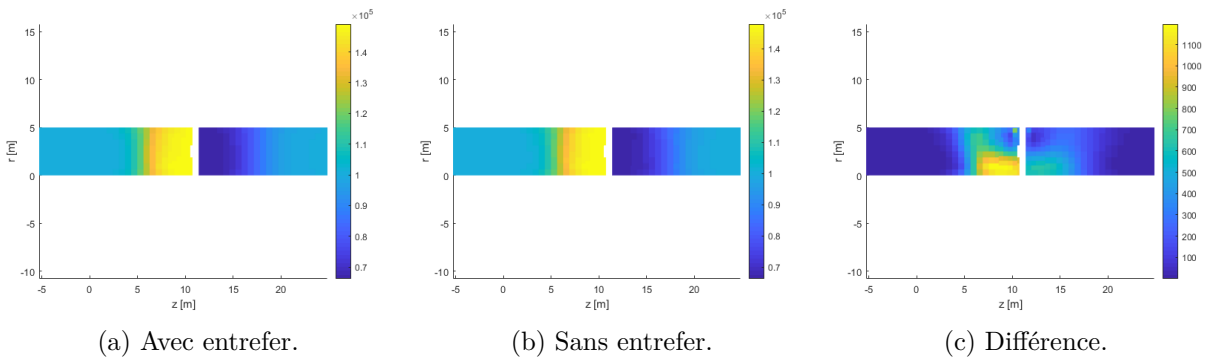


Figure 6.36 Distribution de la pression à  $t = 15$  ms : Piston avec l'entrefer non détecté.

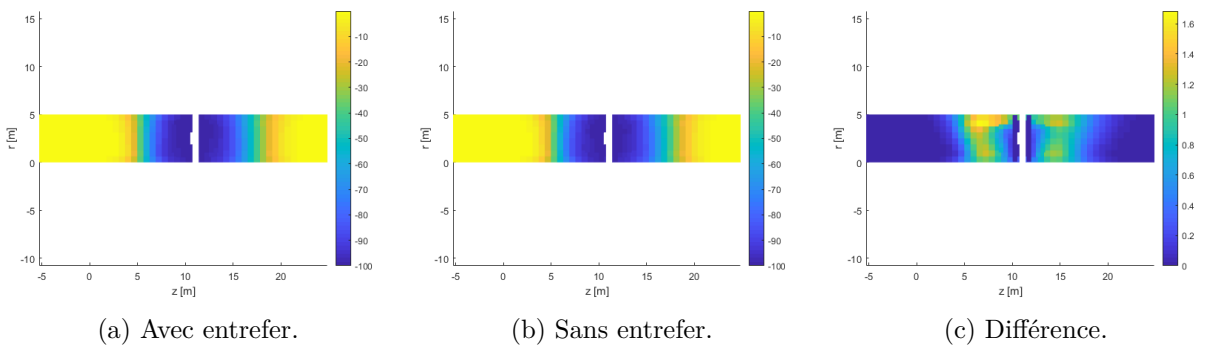


Figure 6.37 Distribution de la vitesse  $u$  à  $t = 15$  ms : Piston avec l'entrefer non détecté.

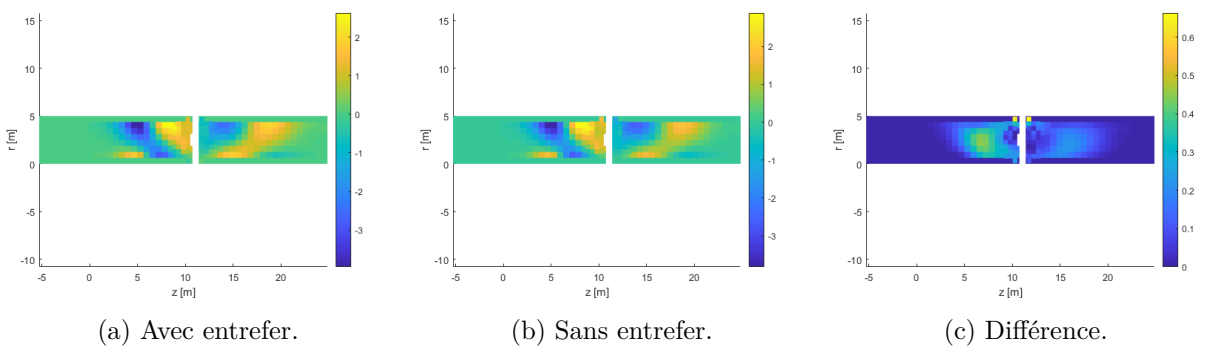


Figure 6.38 Distribution de la vitesse  $v$  à  $t = 15$  ms : Piston avec l'entrefer non détecté.

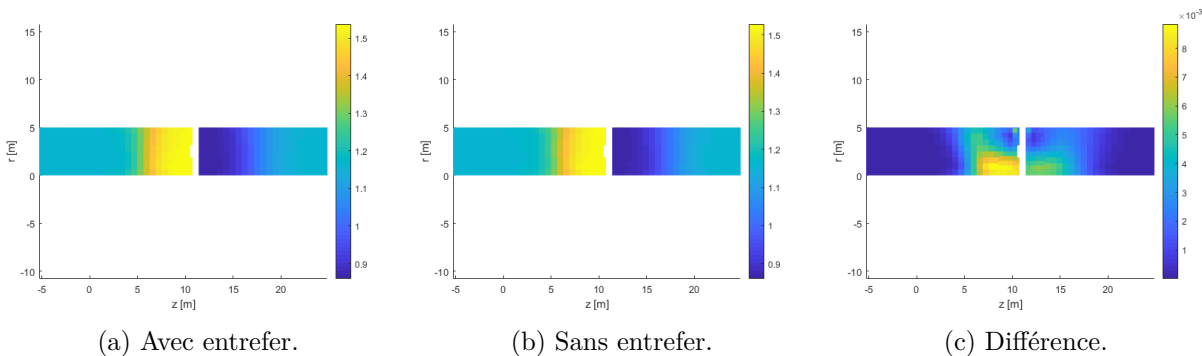


Figure 6.39 Distribution de la densité à  $t = 15$  ms : Piston avec l'entrefer non détecté.

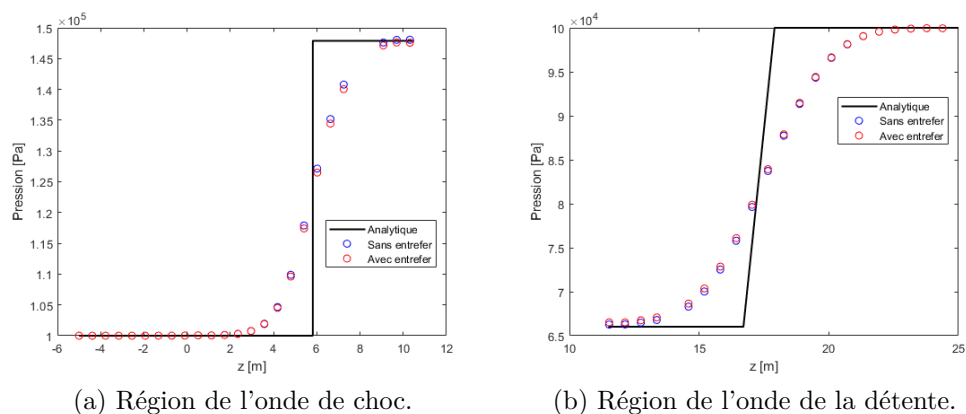


Figure 6.40 Profil de la pression à  $r = 2,5$  m et à  $t = 15$  ms : Piston avec l'entrefer non détecté.

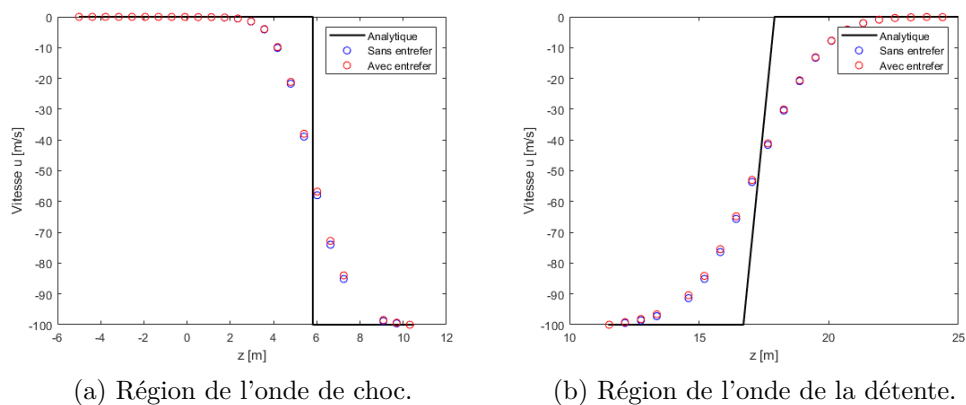


Figure 6.41 Profil de la vitesse  $u$  à  $r = 2,5$  m et à  $t = 15$  ms : Piston avec l'entrefer non détecté.

On s'attend à avoir une différence entre les deux simulations à cause du changement de la topologie qui modifie le comportement de la solution de l'écoulement. De plus, à cause de la reconstruction des parois mobiles à deux étapes, la différence observée entre les solutions est la plus prononcée au niveau des vitesses  $u$  et  $v$ . En effet, on observe un effet 2D (i.e., la composante de la vitesse  $v$ ) surtout à la zone de l'entrefer, et cela est relié à la différence topologique qui entraîne une modification de la localisation des points d'intersection géométrie-grille et l'orientation du vecteur vitesse reconstruit à la paroi. Comme le maillage est assez grossier, la diffusion numérique impacte également la solution car le choc et la détente sont maintenant très lisses. La différence maximale en pourcentage pour chaque quantité du fluide a été calculée permettant d'illustrer l'impact du changement topologique : 0,73% (Pression), 1,6% (Vitesse  $u$ ), 10% (Vitesse  $v$ ) et 0,5625% (Densité).

Enfin, le calcul du piston avec un entrefer détecté a été réalisé permettant de simuler le phénomène d'une fuite. Donc, l'échelle du maillage utilisé doit être compatible à celle de l'entrefer ( $\delta = 0,3$  m). De plus, on doit garantir un nombre suffisant d'éléments Face (FC) reliés au calcul du solveur de Euler (Section 3.2.3.1) dans la zone de l'entrefer pour bien capturer la fuite.

Vis-à-vis de ces contraintes, on a d'abord réalisé une étude de convergence de la solution avec le raffinement du maillage afin de choisir un maillage suffisamment adapté. Cependant, à cause des contraintes dues aux capacités informatiques du code développé, le choix de maillages (i.e., les niveaux de raffinement uniforme) a été ainsi restreint par le temps de calcul requis pour le maillage plus fin.

Les maillages testés sont :

- Maillage I : 360 x 60 (i.e., fixe) et 60 x 120 (i.e., mobile).
- Maillage II : 720 x 120 (i.e., fixe) et 120 x 240 (i.e., mobile).
- Maillage III : 1440 x 240 (i.e., fixe) et 240 x 480 (i.e., mobile).

Pour l'étude de la convergence de la solution, un débit massique au milieu de la zone de l'entrefer ( $z = 11$  m) à  $t = 15$  ms a été choisi comme une métrique permettant d'analyser correctement le comportement de la solution avec le raffinement du maillage.

Le calcul du débit a été réalisé en employant l'expression la suivant :

$$D = 2\pi \int_{r=4,7}^{r=5} r \rho(r) u(r) dr \quad (6.13)$$

où  $\rho$  la densité et  $u$  la composante de la vitesse selon l'axe  $z$ .

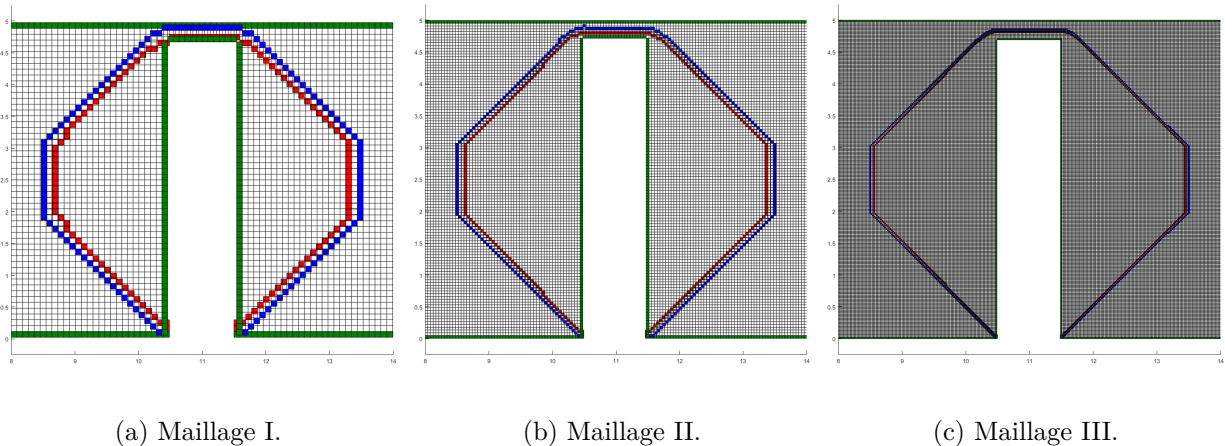


Figure 6.42 Maillages : Piston avec entrefer.

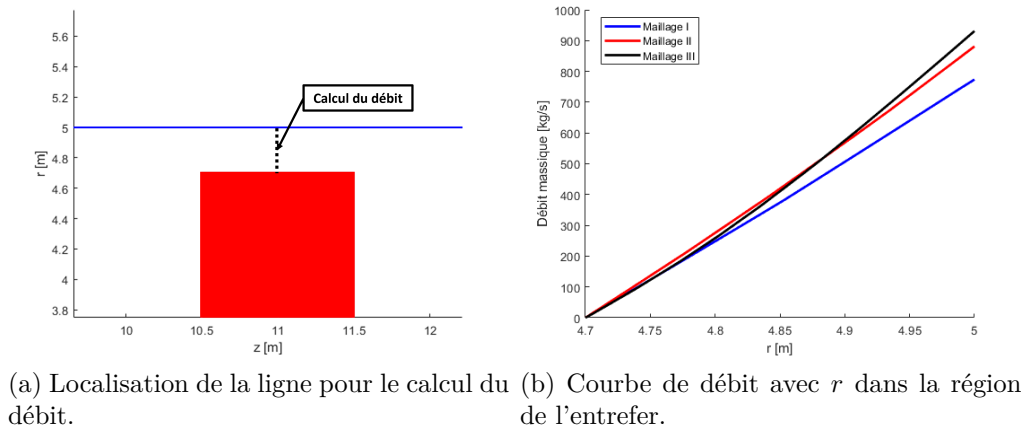
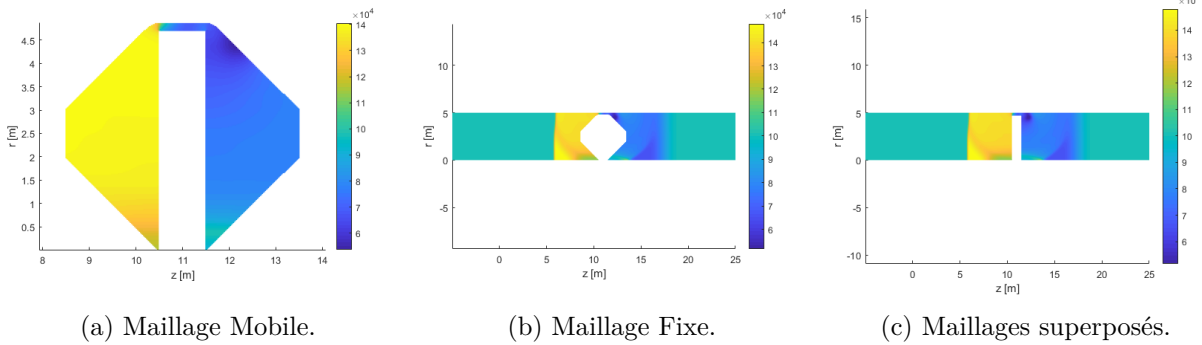
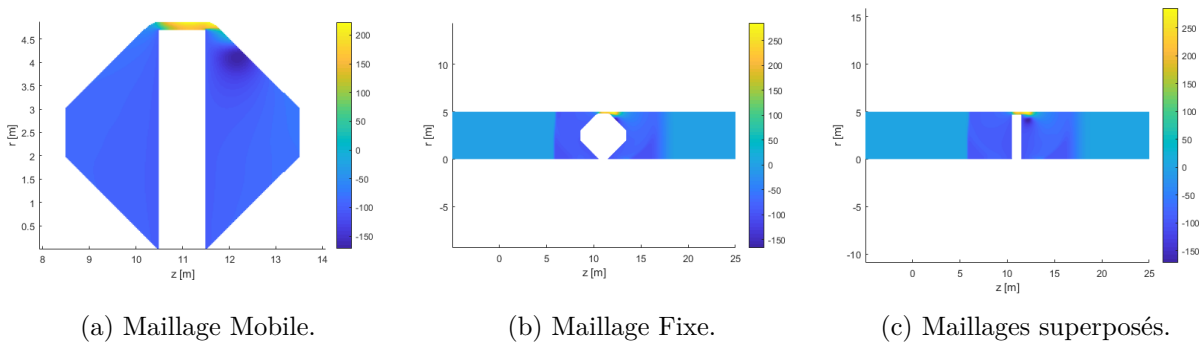
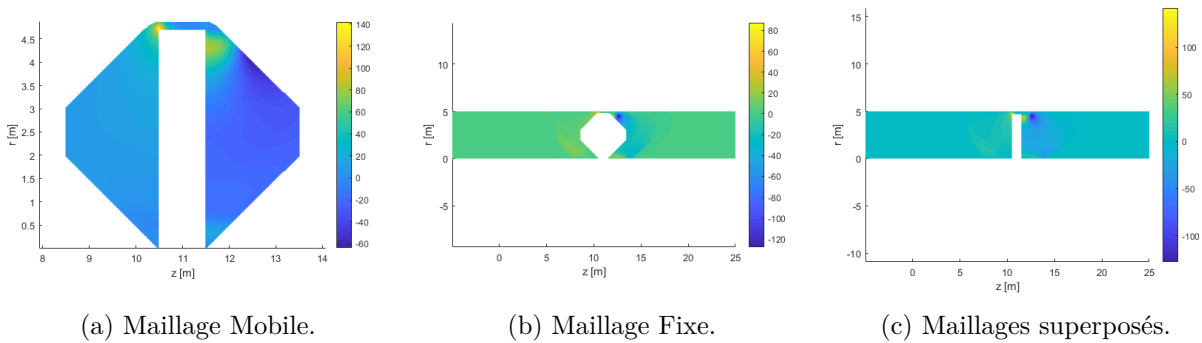


Figure 6.43 Étude de convergence de la solution avec le raffinement du maillage.

Les Fig. 6.43a et 6.43b illustrent, respectivement, l'emplacement de la ligne pour le calcul du débit massique et la courbe de débit pour les maillages utilisés. Globalement, on prévoit une différence numérique entre les valeurs du débit à cause de l'évolution de la solution avec le maillage, principalement dans le cas de l'approche IBM où le maillage n'est pas adapté aux frontières. Avec le raffinement du maillage, on améliore la représentation de la région de l'entrefer en ajoutant des couches d'éléments FC pour le calcul de l'écoulement en justifiant la convergence entre les courbes. Afin d'illustrer le phénomène d'une fuite, les champs de pression, de vitesse et de densité sont affichés aux Fig. 6.44 à 6.47 pour le maillage le plus fin (Maillage III). En outre, les profils de la pression et la vitesse à la section médiane du canal sont ainsi illustrés et comparés à la solution sans fuite (Fig. 6.48 et 6.49).

Figure 6.44 Distribution de la pression à  $t = 15$  ms : Piston avec entrefer.Figure 6.45 Distribution de la vitesse  $u$  à  $t = 15$  ms : Piston avec entrefer.Figure 6.46 Distribution de la vitesse  $v$  à  $t = 15$  ms : Piston avec entrefer.



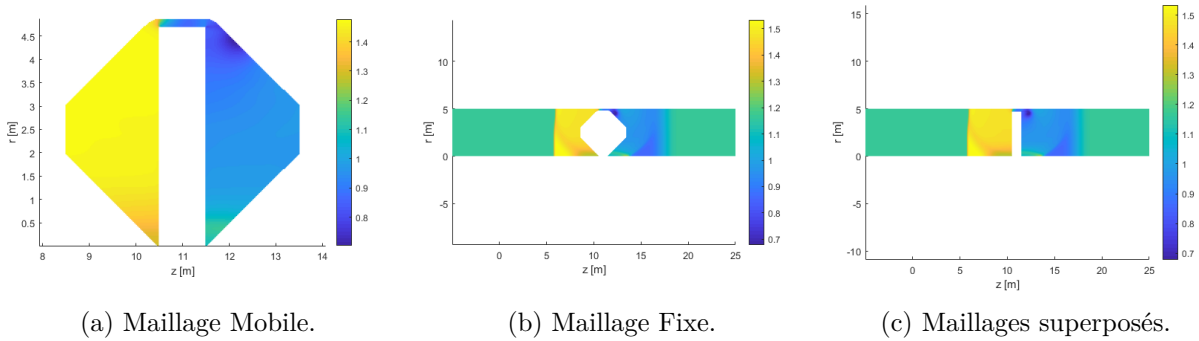


Figure 6.47 Distribution de la densité à  $t = 15$  ms : Piston avec entrefer.

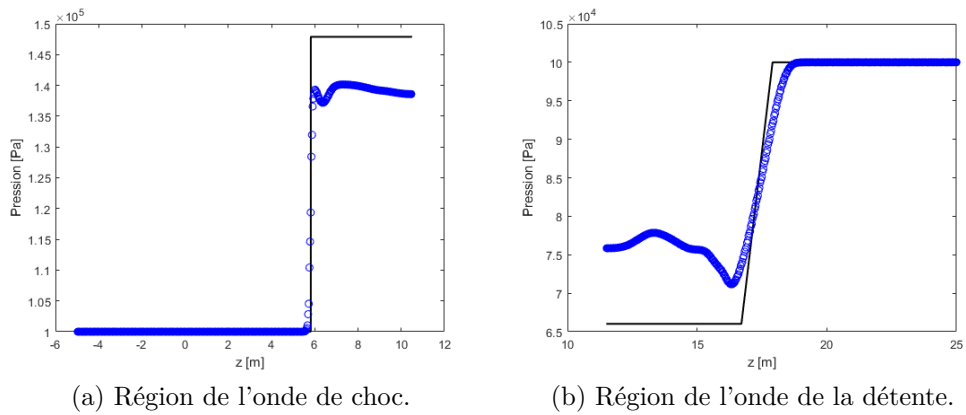


Figure 6.48 Profil de la pression à  $r = 2,5$  m et à  $t = 15$  ms : Piston avec entrefer.

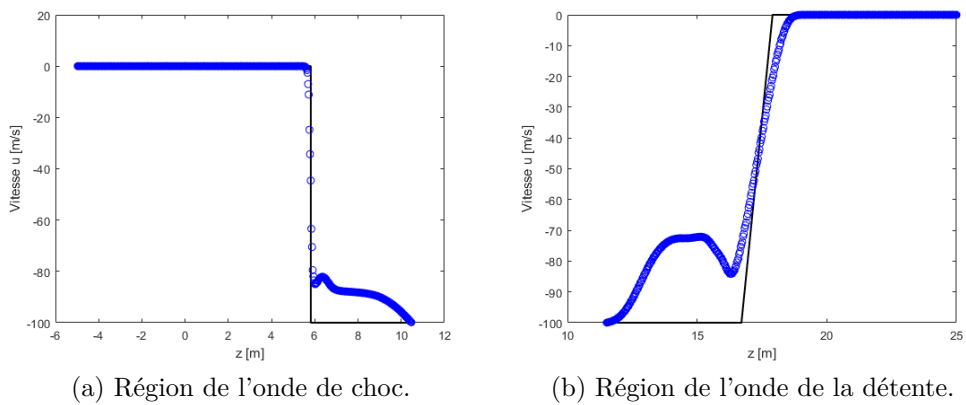


Figure 6.49 Profil de la vitesse  $u$  à  $r = 2,5$  m et à  $t = 15$  ms : Piston avec entrefer.

On constate un écoulement qui traverse l'entrefer, c'est-à-dire une fuite reliant les deux portions du canal (Figs. 6.45 et 6.46). Comme la configuration de la simulation est la même pour le scénario sans entrefer, un choc et une détente se forment également (Figs. 6.44 et 6.47). Cependant, à cause de la fuite, on a une perte et un ajout de masse, respectivement, pour les régions du choc (i.e., à gauche du piston) et de la détente (i.e., à droite du piston) à proximité de l'entrefer, en conformité avec le profil des courbes de pression et de vitesse, tel qu'illustré aux Figs.6.48 et 6.49.

En outre, comme il a été aussi observé par [11] pour le cas test du coin (de l'anglais, *wedge*), une région de sillage à base pression se développe derrière le piston (i.e., la zone à droite du canal) instationnaire et qui complexifie la structure de l'écoulement.

## 6.2.4 Vérification - Multiphysique - MUL

Suite à la vérification du solveur de chaque physique, on vérifie l'implémentation d'une première version du couplage multiphysique. Pour cela, l'étude d'un modèle simplifié d'un arc électrique a été choisie comme cas test de vérification.

### 6.2.4.1 Zone d'arc électrique

Dans ce cas test, on calcule un écoulement fluide avec un arc électrique entre deux électrodes. Les physiques de l'écoulement fluide et du potentiel électrique sont couplés permettant d'avoir une version simplifiée d'un arc.

L'arc électrique est modélisé par l'effet Joule qui apporte de l'énergie à l'écoulement fluide comme l'on observe physiquement dans un disjoncteur à haute tension. La configuration du cas test est semblable à celui de l'écoulement radial subsonique dans une tuyère convergente. Ici, le domaine correspond physiquement à une version réduite de la zone de l'arc entre les électrodes topologiquement représentée par un rectangle de dimensions 1 mm x 0,3 mm (Fig. 6.50).

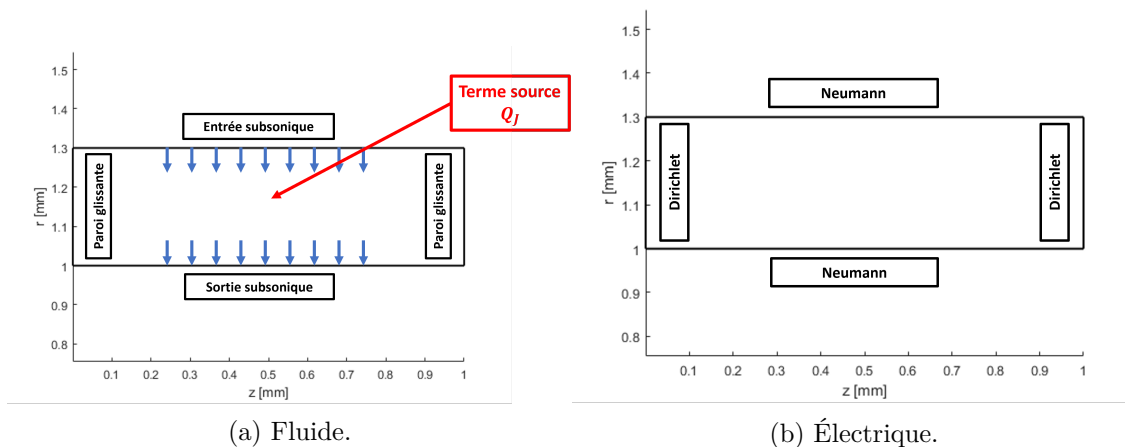


Figure 6.50 Topologie et conditions aux limites : Zone d'arc électrique.

Pour le solveur fluide, le gaz est de l'air ( $R = 287$  et  $\gamma = 1,4$ ) à  $P_0 = 5.5E+5$  Pa,  $T_0 = 3600$  K et à vitesse nulle. L'écoulement est vertical, rentrant par la frontière du haut (i.e., une condition d'entrée subsonique) et sortant par celle du bas (i.e., une condition de sortie subsonique à  $p_{out} = 4.4E+5$ ). On considère également comme des parois glissantes les frontières à gauche et à droite. Pour le couplage, on ajoute à l'équation de l'énergie un terme source, effet Joule (Section 5.3), et qui vaut  $Q_J = 8.1E+8$  W.

Toutefois, vis-à-vis du solveur électrique, on applique un potentiel à chaque électrode qui sont les frontières à gauche ( $\varphi = 9 \text{ V}$ ) et à droite ( $\varphi = 0 \text{ V}$ ). Pour les autres frontières, la condition aux limites du type Neumann nulle a été imposée. La conductivité a été posée constante et égale à  $100 \text{ S/m}$  en considérant que la température est assez uniforme à l'intérieur de l'arc. Tout cela permet d'obtenir un terme source ohmique constant.

Pour ce cas test, les maillages suivants ont été utilisés :  $20 \times 60$ ,  $40 \times 120$  (Fig. 6.51) et  $80 \times 240$ .

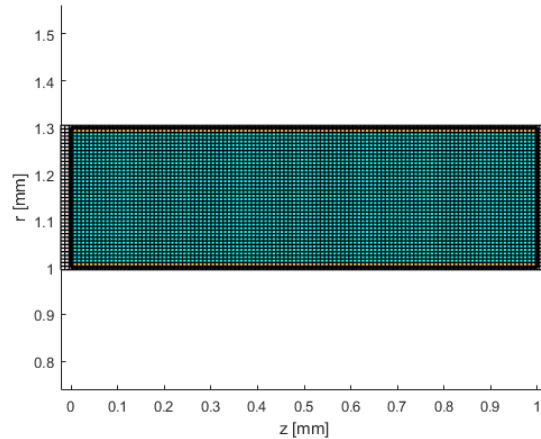


Figure 6.51 Maillage  $40 \times 120$  : Zone d'arc électrique.

Pour la vérification de la solution, on applique une étude de convergence de la grille permettant d'établir numériquement l'ordre de précision du modèle fluide [131]. Pour cela, le calcul d'un débit massique en traversant la surface  $r = 1,15 \text{ mm}$  a été réalisé et pris comme la métrique pour la vérification. Cependant, pour le solveur électrique, la solution analytique est linéaire est donné par les expressions suivantes :

$$\varphi(z) = 9000(0,001 - z) \quad (6.14)$$

$$\vec{E}(z) = 9000 \quad (6.15)$$

Pour la discussion des résultats et l'étude de l'erreur, comme pour le cas test FLU 1 : l'écoulement radial subsonique (6.2.3.1), les champs de pression et du nombre de *Mach* sont analysés. Les Figs.6.52 et 6.53 illustrent les solutions numériques et l'erreur uniquement pour le potentiel électrique pour le maillage plus fin :  $80 \times 240$ . Pour la convergence de la solution, les résidus sont à la précision machine, c'est-à-dire l'écoulement est en régime permanent.

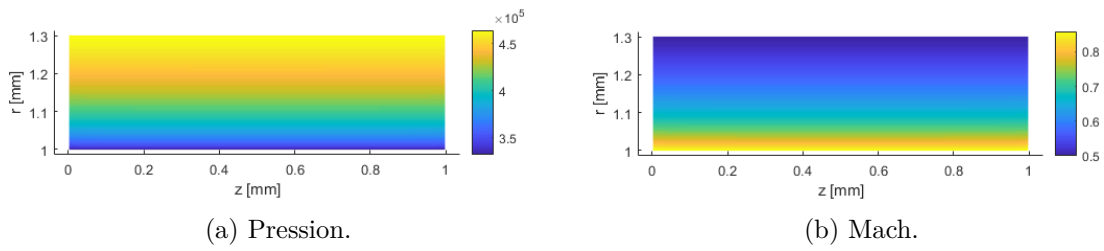


Figure 6.52 Résultats - Fluide pour le maillage 80 x 240 : Zone d'arc électrique.

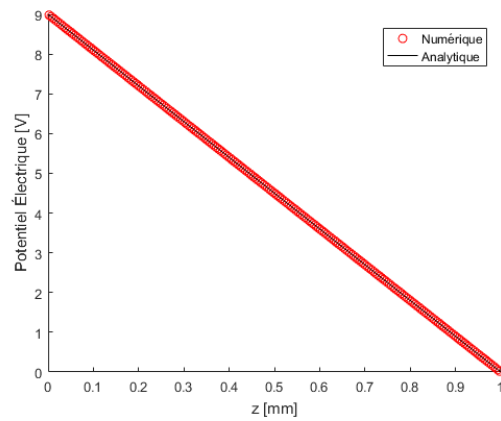
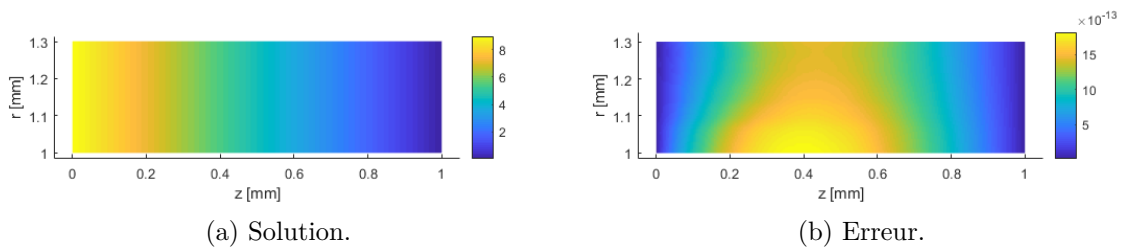


Figure 6.53 Résultats - Électrique pour le maillage 80 x 240 : Zone d'arc électrique.

Pour le solveur fluide, le comportement de la solution numérique semble cohérent car, en injectant de l'énergie à l'écoulement, le fluide accélère. Effectivement, le nombre de *Mach* passe de 0,6 à 0,8. De plus, on observe que la pression décroît, ce qui est physiquement réaliste.

Pour l'analyse plus approfondie de la solution, une étude de convergence réalisée avec le raffinement du maillage permet d'établir l'ordre de précision apparente. Pour cela, on applique l'expression suivante, tel qu'indiqué par [131] :

$$\hat{p} = \frac{\ln \left| \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{21}} \right|}{\ln r_{21}} \quad (6.16)$$

où  $\epsilon_{32}$  et  $\epsilon_{21}$  la différence entre les solutions (i.e., la métrique) du maillage III (i.e., le plus fin), II et I (i.e., le plus grossier), et  $r_{21}$  le ratio entre les tailles du maillage II et I. Pour le raffinement uniforme, on a divisé l'échelle par 2 selon les axes  $r$  et  $z$ . Donc,  $r_{21} = 2$ .

Les valeurs du débit massique pour les maillages testés sont affichées au Tableau 6.6.

Tableau 6.6 Débit massique en kg/s : Zone d'arc électrique.

Maillage	Débit massique
<b>20 x 60</b>	-2,0801
<b>40 x 120</b>	-2,0914
<b>80 x 240</b>	-2,0952

La valeur de  $\hat{p}$  est 1.57225. En effet, on s'attend à capter l'ordre 1 reliée à la discrétisation base du schéma de discrétisation du solveur fluide ainsi que celui de la reconstruction des conditions aux limites du type Neumann. Afin d'établir une valeur de  $\hat{p}$  plus adéquate, des maillages raffinés seraient nécessaires.

Pour le solveur électrique, le comportement est linéaire et exact à la solution analytique (Eq. 6.14), comme obtenu pour les cas tests électriques : ELE1 et ELE3 (Section 6.2.1).

## 6.2.5 Faisabilité - FAI

On calcule d'un écoulement fluide à l'intérieur de la chambre de coupure d'un disjoncteur simplifié. Ce cas test représente une première évaluation du couplage IBM et des maillages superposés dans ce travail. Ceci démontre la faisabilité de la méthodologie vis-à-vis des caractéristiques retrouvées dans l'application disjoncteur haute-tension (i.e., la dynamique, de multiples échelles d'espace et des géométries mobiles). Pour cela, on compare la solution numérique du solveur fluide développé et basé sur le couplage proposé à celle du solveur MC<sup>3</sup> basé sur le maillage ALE adaptatif et non-structuré [1].

### 6.2.5.1 Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié

Tel qu'illustré à la Fig. 6.54, le domaine de calcul comprend les faces topologiques fixe et mobile délimitant les régions du fluide à l'intérieur de la chambre de coupure simplifiée. Pour la topologie fixe, la zone fluide correspond à la région externe aux faces associées à la buse, au capot et à la tulipe. Cependant, pour les topologies mobiles de la tige et du piston, la zone fluide est bornée par le rectangle (i.e., la boucle externe) et la géométrie des pièces.

Pour la discrétisation du domaine de calcul composé des maillages superposés, les grilles associés aux géométries fixe, tige et piston testées sont les suivantes :

- Maillage I : 216 x 60 , 196 x 70, et 40 x 80 ( $\Delta z = \Delta r = 0,9$  mm).
- Maillage II : 432 x 120 , 392 x 140, et 80 x 160 ( $\Delta z = \Delta r = 0,45$  mm) (Fig. 6.55).

La performance de calcul limitée du code développé entraîne un temps de calcul très long, le Maillage II est le plus raffiné pour ce comparatif.

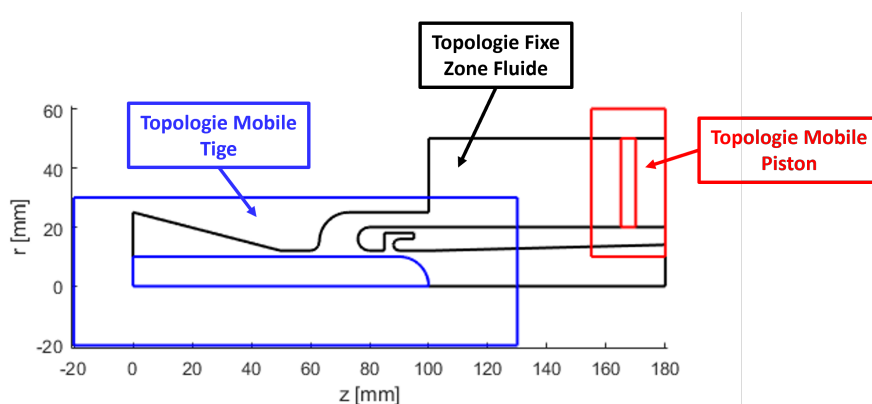


Figure 6.54 Topologie : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié.

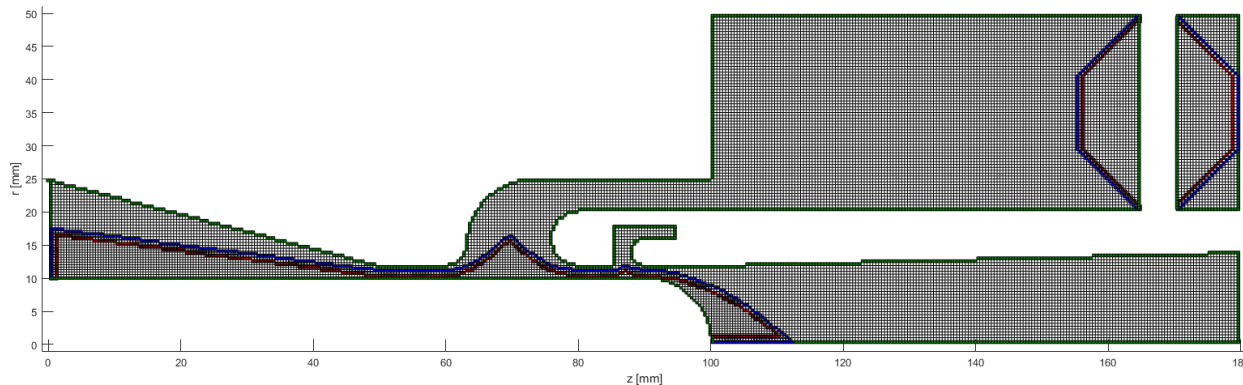


Figure 6.55 Maillage II : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié.

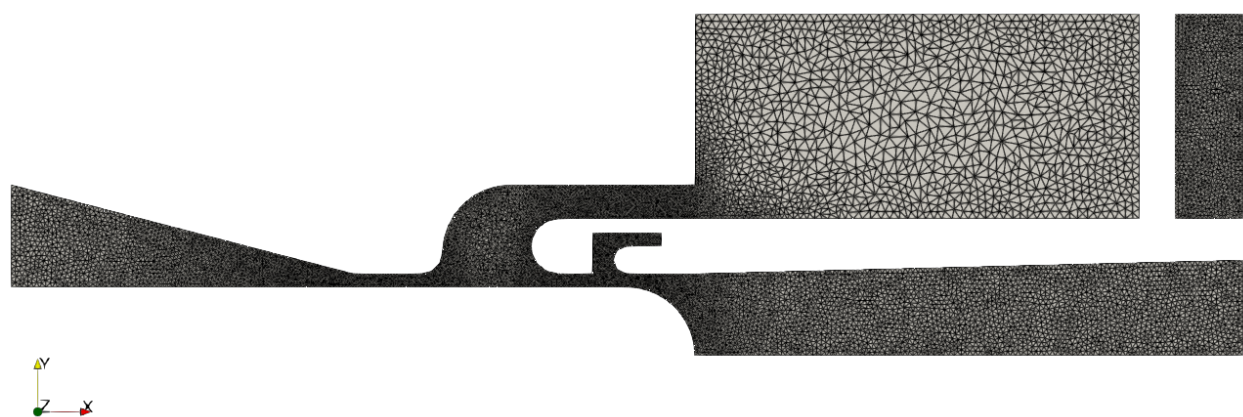


Figure 6.56 Maillage non-structuré adaptatif de MC<sup>3</sup> équivalent au Maillage II IBM.

Afin de garantir une comparaison cohérente de ces deux solutions numériques, les maillages non-structurés adaptatifs basés sur la discrétisation en triangles ont été conçus en prévoyant une taille des éléments approximativement à la même échelle/dimension que celle du maillage IBM correspondant tout au long de la simulation, malgré le mouvement des pièces mobiles.

Par rapport à la configuration des conditions initiales et aux limites, le gaz de l'écoulement est le CO<sub>2</sub> ( $R = 188,92$  et  $\gamma = 1,2876$ ) à 7,0 bar (7,0E+5 Pa), 300 K, et à vitesse nulle. De plus, on considère le domaine fermé, c'est-à-dire la condition aux limites du type paroi glissante appliquée à toutes les frontières.



Un mouvement de translation vers la gauche est appliqué aux géométries mobiles. L'expression de la position et la vitesse des topologies mobiles ( $z_{TM}$  et  $u_{TM}$ ) au cours du temps est analytique et donnée par :

$$z_{TM}(t) = z_0 - 2\left(\frac{u_M}{t_F}\right)t^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{u_M}{t_F}\right)^2 t^3 \quad (6.17)$$

$$u_{TM}(t) = -4\left(\frac{u_M}{t_F}\right)t + 4\left(\frac{u_M}{t_F}\right)^2 t^2 \quad (6.18)$$

où  $z_0$  est la position initiale de la topologie (i.e., le  $z$  du point à gauche et en bas du rectangle de la boucle externe),  $u_M$  est la vitesse maximale (i.e., 10 m/s), et  $t_F$  est le temps final de la simulation (i.e., 9 ms). Pour les topologies de la tige et du piston,  $z_0$  est, respectivement, 155 mm et -20 mm.

Les Fig. 6.58a et 6.58b illustrent le profil de la vitesse de translation et les positions des pièces mobiles au cours du temps.

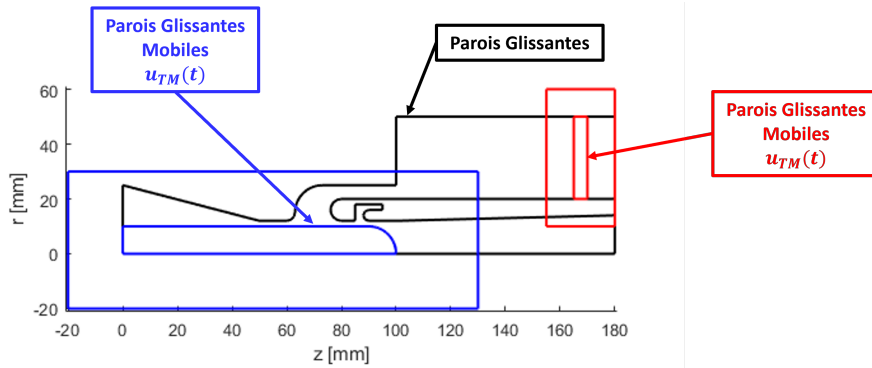
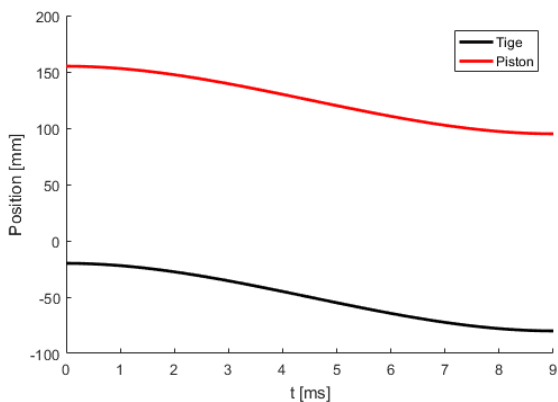
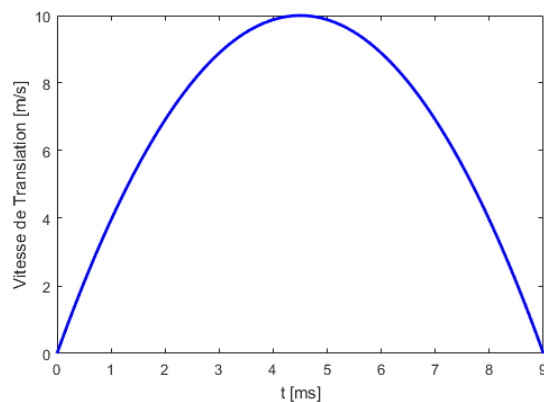


Figure 6.57 Conditions aux limites : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié.



(a) Position des pièces mobiles.



(b) Profil de la vitesse de translation des pièces mobiles.

Figure 6.58 Mouvement de translation des pièces mobiles (i.e., la tige et le piston) : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié.

Tel qu'illustré aux Figs.6.59a, 6.59b et 6.59c, les maillages IBM superposés évoluent au cours du temps en fonction du déplacement des frontières mobiles qui modifie le profil des différentes lignes médiatrices, c'est-à-dire les zones de découpage superposées.

Les Figs. 6.60, 6.61 et 6.62 illustrent les solutions numériques des codes IBM et MC<sup>3</sup> pour les champs de pression, de vitesses ( $u$  et  $v$ ) et de densité aux temps :  $t = 1$  ms, 4,5 ms et 8 ms. Le Maillage II a été choisi pour la visualisation des résultats numériques.

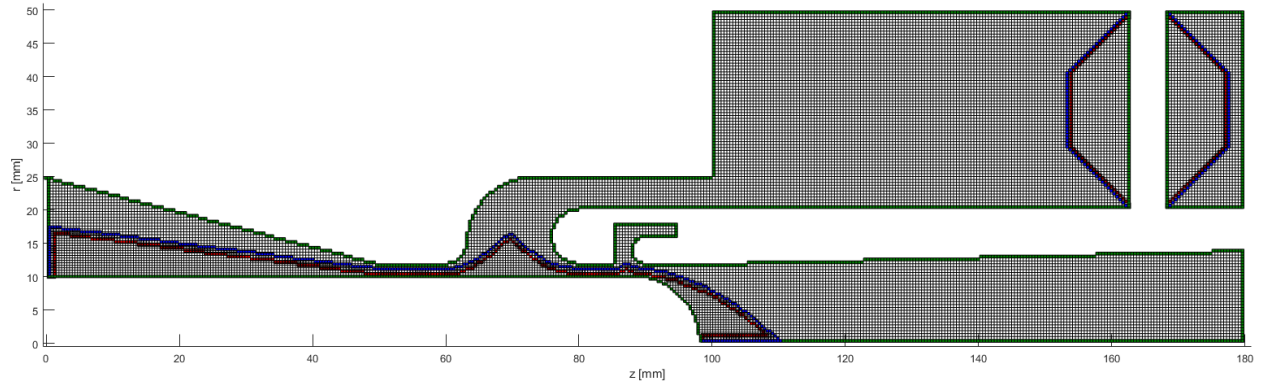
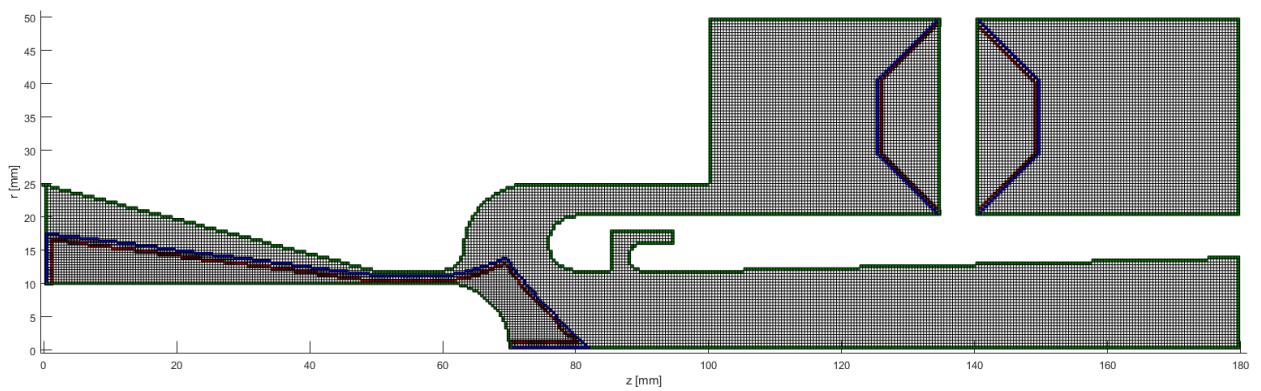
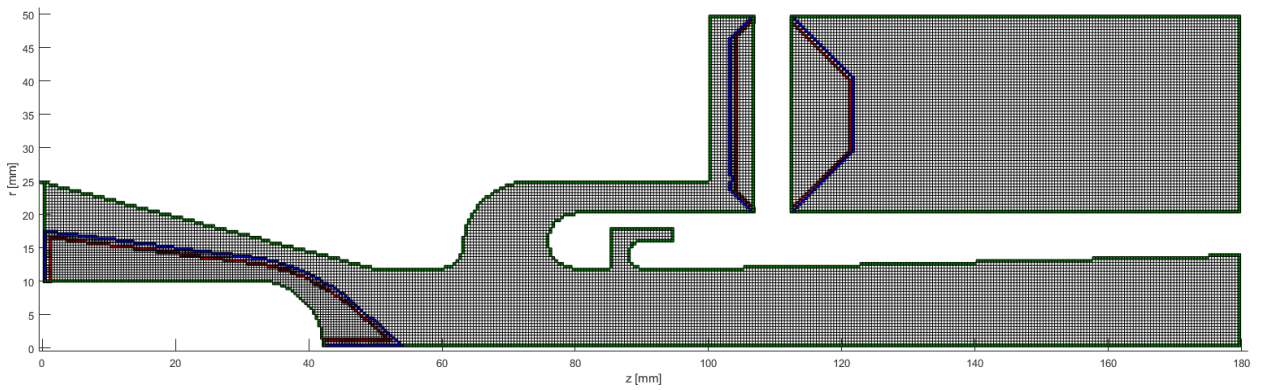
(a)  $t = 1$  ms.(b)  $t = 4,5$  ms.(c)  $t = 8$  ms.

Figure 6.59 Maillage II au cours du temps : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié.

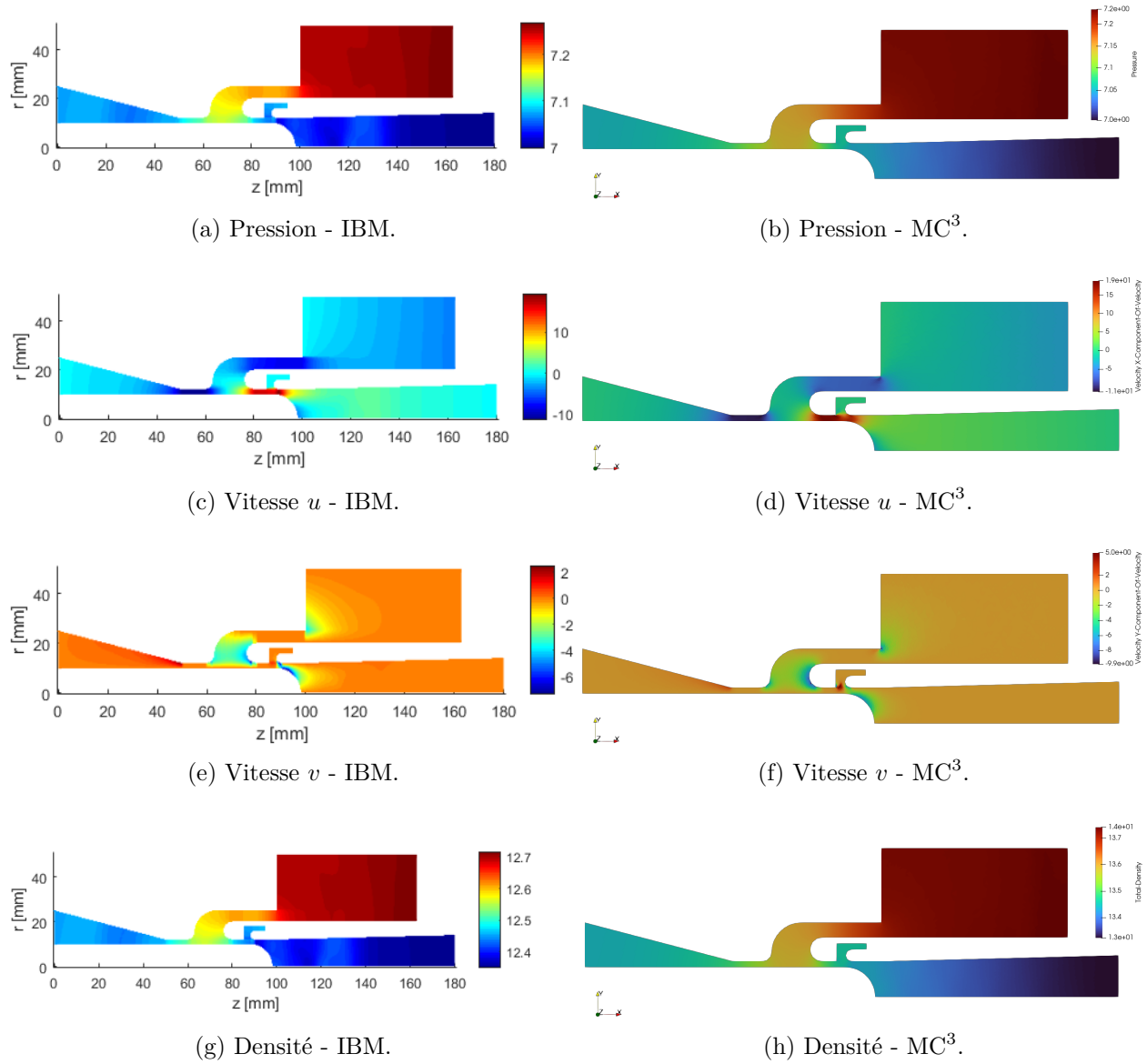


Figure 6.60 Résultats numériques à  $t = 1$  ms : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié.

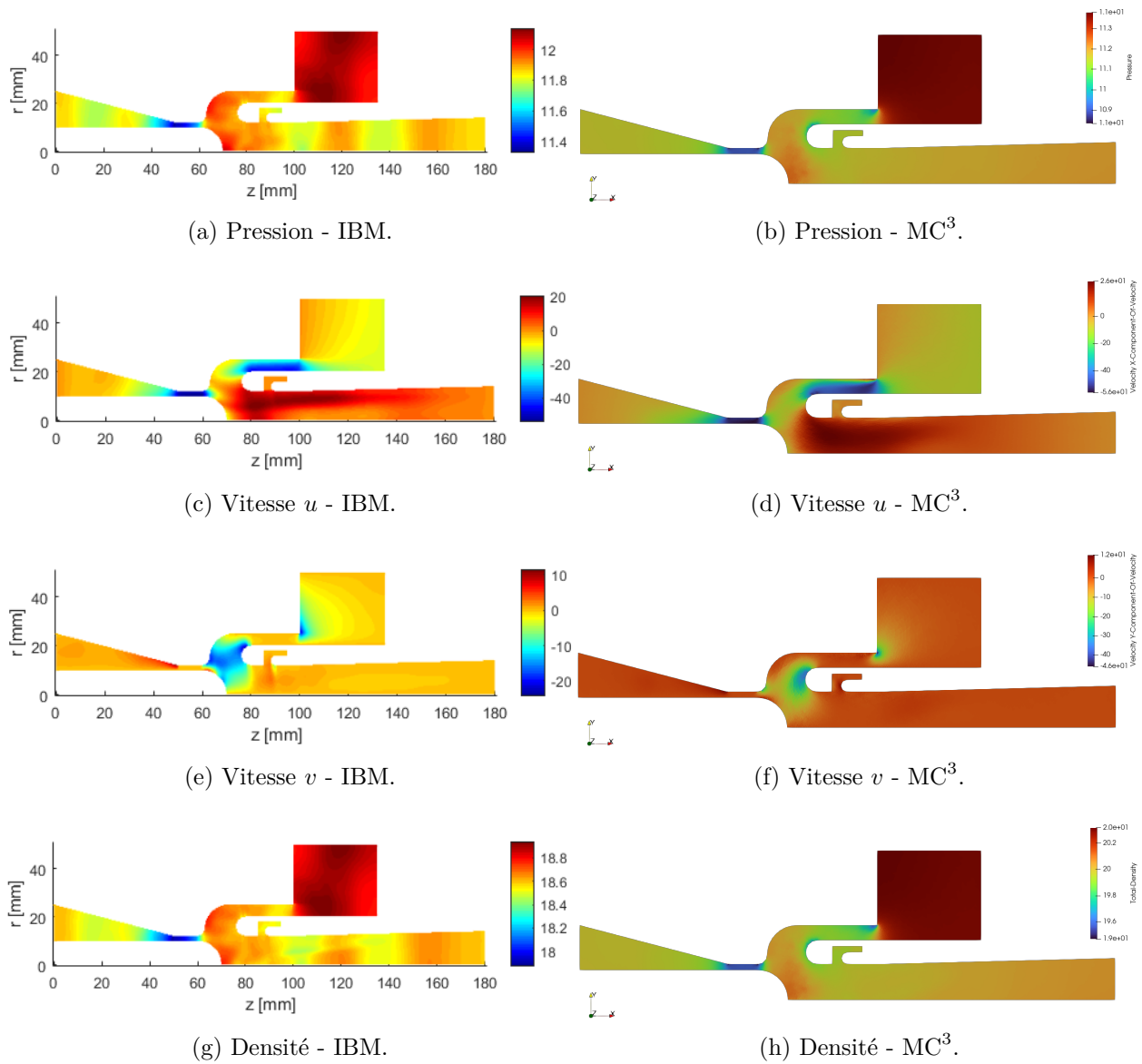


Figure 6.61 Résultats numériques à  $t = 4,5$  ms : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié.

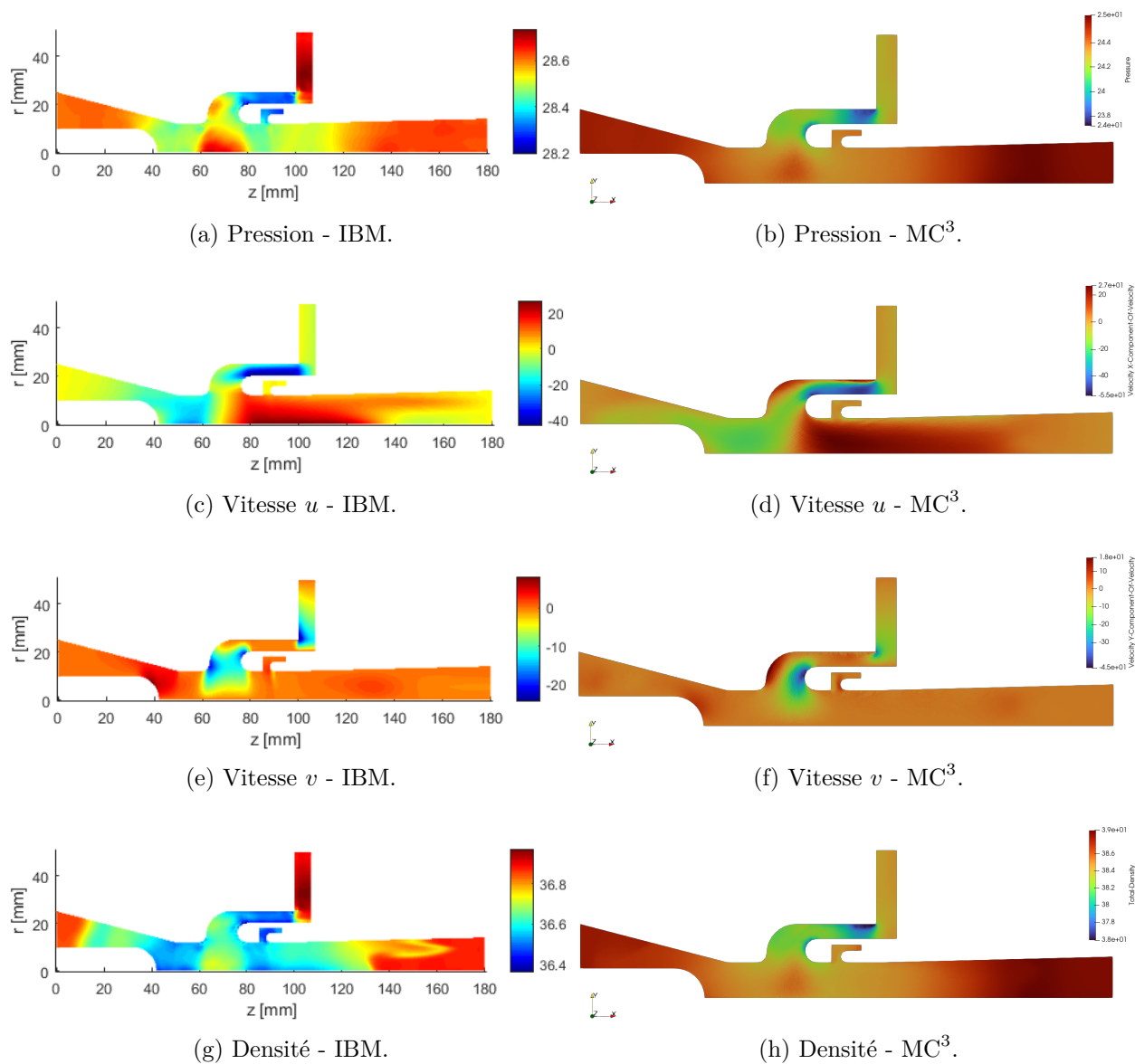


Figure 6.62 Résultats numériques à  $t = 8$  ms : Écoulement fluide dans disjuncteur simplifié.

On a réalisé également une étude comparative IBM vs MC<sup>3</sup> en traçant la courbe de pression dans le volume thermique au cours du temps, en calculant le débit massique traversant le canal thermique aux temps :  $t = 1$  ms, 4,5 ms et 8 ms, et en évaluant le volume et la masse de gaz totaux dans la chambre de coupure au cours du temps.

Pour la courbe de pression, une sonde a été placée au coin à gauche du volume thermique permettant de capturer la pression totale, c'est-à-dire sans l'influence de la vitesse de l'écoulement. La position en  $r$  et  $z$  est : 49 mm et 100 mm (Fig. 6.63).

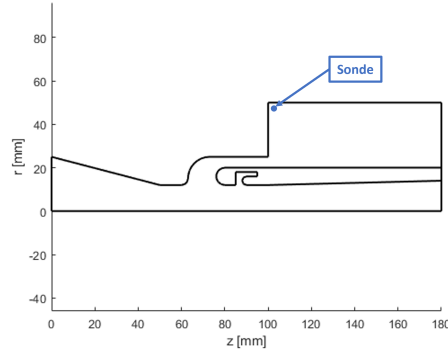


Figure 6.63 Emplacement de la sonde de pression.

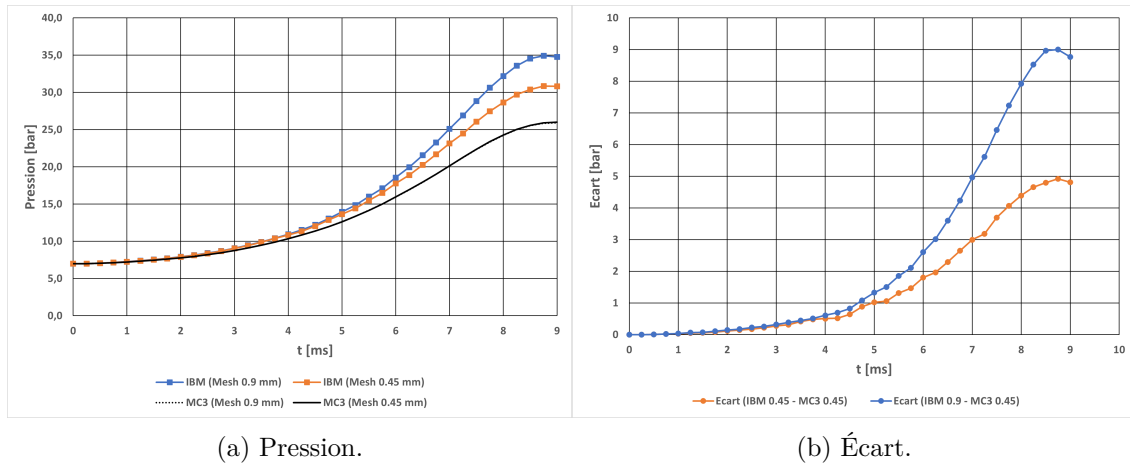


Figure 6.64 Courbe de pression au volume thermique au cours du temps.

Un débit massique au milieu de la zone du canal thermique ( $z = 90$  mm) (Fig. 6.65) a été choisi comme une métrique permettant d'analyser plus en détail la différence entre les deux solutions. Le calcul du débit a été réalisé en employant l'expression le suivant :

$$D = 2\pi \int_{r=19 \text{ mm}}^{r=25 \text{ mm}} r \rho(r) u(r) dr \quad (6.19)$$

où  $\rho$  la densité et  $u$  la composante de la vitesse selon l'axe  $z$ .

Les valeurs et les écarts de débit massique à partir des solutions IBM et MC<sup>3</sup> sont affichés aux Tableaux 6.7 et 6.8.

Tableau 6.7 Débit massique en kg/s dans le canal thermique.

Code - Maillage	$t = 1 \text{ ms}$	$t = 4,5 \text{ ms}$	$t = 8 \text{ ms}$
IBM - I	-1,1879E+1	-8,4471E+1	-1,6974E+2
IBM - II	-1,1558E+1	-8,1668E+1	-1,3042E+2
MC <sup>3</sup> - I	-1,1010E+1	-8,5979E+1	-1,2694E+2
MC <sup>3</sup> - II	-1,1055E+1	-8,7380E+1	-1,2703E+2

Tableau 6.8 Différence entre les valeurs de débit massique en %.

Maillage	$t = 1 \text{ ms}$	$t = 4,5 \text{ ms}$	$t = 8 \text{ ms}$
IBM vs MC <sup>3</sup> - I	7,8867 %	1,7852 %	33,7178 %
IBM vs MC <sup>3</sup> - II	4,5495 %	6,9934 %	2,6689 %

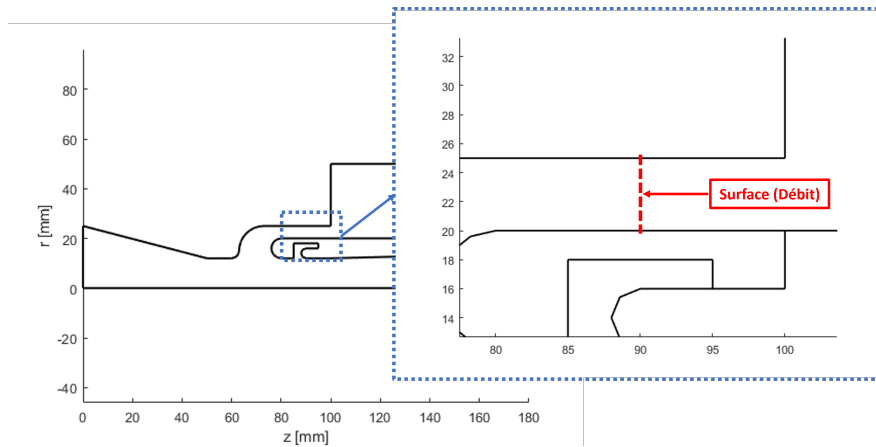


Figure 6.65 Emplacement de la surface (ligne) pour le calcul du débit massique : Écoulement fluide dans disjoncteur simplifié.

Finalement, pour l'évaluation du volume et de la masse de gaz totaux dans la chambre de coupure au cours du temps, on calcule la somme du volume et de la masse des tous éléments du domaine de calcul à un temps donné, étant donné que la solution est constante par élément avec un schéma de premier ordre (Eqs. 6.20 et 6.21). Comme la méthodologie est IBM avec des maillages superposés, le calcul de cette intégrale n'est pas triviale à cause d'une non-adaptation de la grille à la géométrie (i.e., l'approche purement IBM) et de d'une redondance de la solution numérique dans la zone de superposition entre les maillages superposés.



Les expressions utilisées pour le calcul de la masse et le volume totaux sont données par :

$$M_T(t) = \sum_{n=1}^N 2\pi r_n \rho_n(t) \Delta z_n \Delta r_n \quad (6.20)$$

$$V_T(t) = \sum_{n=1}^N 2\pi r_n(t) \Delta z_n \Delta r_n \quad (6.21)$$

En effet, dans l'approche IBM implémentée, la forme des éléments à l'interface intersectés par les courbes géométriques demeure cartésienne, et la représentation physique de l'interface est par conséquent en escalier. Dans le calcul de l'intégrale, en prenant tout la dimension des éléments **Interface** (IC), on s'éloigne de la valeur réelle et précise du volume et par conséquent de la masse.

Toutefois, on s'intéressera à approcher la valeur de l'intégrale sans y tenir en compte de ces contraintes susmentionnées. Cela permet de faciliter l'évaluation des métriques (i.e., le volume et la masse) et d'avoir une borne supérieure de l'écart entre les solutions des codes. En faisant cela, on vise également à réaliser une première version d'une étude de la conservation des quantités (i.e., la masse) de l'approche IBM et des maillages superposés employée.

Les Figs. 6.66a et 6.66b illustrent l'évolution de la masse et du volume totaux du fluide dans la chambre de coupure au cours du temps.

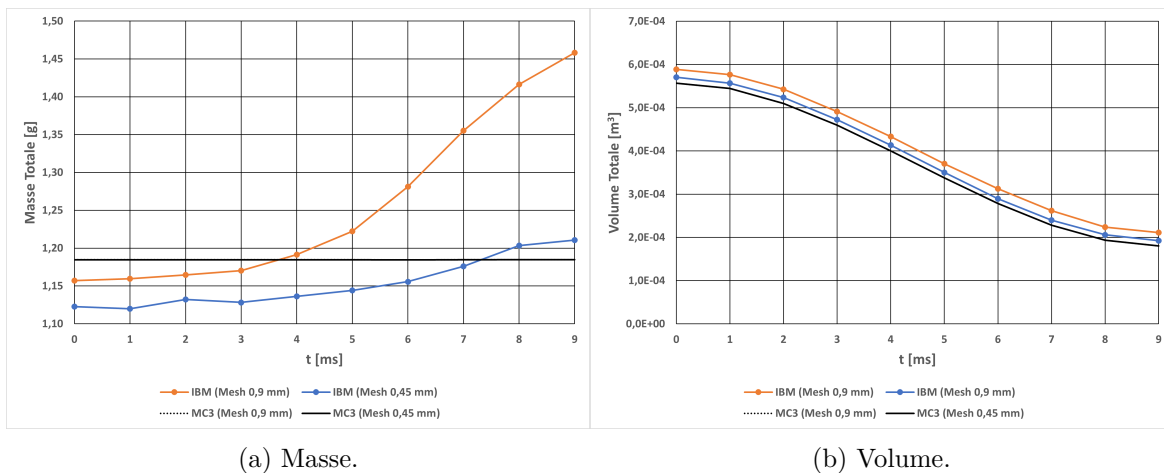


Figure 6.66 Courbe de masse et de volume de gaz à l'intérieur de la chambre de coupure au cours du temps.

La dynamique de l'écoulement est globalement un processus d'un soufflage du gaz de la région du volume thermique vers la zone de d'arc. Une étude des résultats montre une similarité des solutions IBM et MC<sup>3</sup> et avec une dynamique de l'écoulement semblable, principalement entre  $t = 1$  ms et  $t = 4,5$  ms. Cependant, à  $t > 4,5$  ms, une petite recirculation sur la partie au haut du canal thermique apparaît pour la solution MC<sup>3</sup>. Cela vient de l'effet diffusif numériquement introduit par le schéma du solveur. Cependant, pour la solution IBM, l'écoulement demeure orienté vers la région de l'arc, mais avec une vitesse faible sur cette partie du canal. A  $t > 4,5$  ms, pendant la zone de décélération du piston, on observe des écarts importants entre les deux solutions numériques, comme illustré par car les contours et les échelles qui sont assez différents, notamment à la sortie du canal. Par exemple, à  $t = 8$  ms, la pression maximale captée par le solveur IBM est localisée au volume thermique tandis que, pour le solveur MC<sup>3</sup>, elle est aux zones à l'extrémité de la chambre.

Par rapport à la courbe de pression, comme il a été prévu, la valeur augmente au cours du temps et atteint un maximum à  $t = 9$  ms, c'est-à-dire à la fin du déplacement des pièces mobiles. Cependant on note des les écarts IBM et MC<sup>3</sup> entre 9 et 5 bar de différence pour le Maillage I et II, respectivement (Fig. 6.64b). Avec le raffinement, le volume capté par le solveur IBM s'approche plus fidèlement de la représentation réelle de la géométrie, déjà respectée par l'approche adaptatif du maillage de MC<sup>3</sup>. Donc, on s'attend à réduire les écarts en raffinement le maillage, principalement sur les frontières géométriques avec l'approche hiérarchique. De plus, différemment du solveur IBM basé à date sur le modèle d'un gaz parfait, le solveur MC<sup>3</sup> utilise des tables thermodynamiques du gaz (i.e., un gaz réel). Cela peut être également un point important à retenir car, pour les valeurs de pression de l'application (environ, 10 - 25 bar) (Fig. 6.64a), la dynamique du gaz peut être différente en comparant les deux solveurs.

Pour le calcul du débit massique, les écarts entre le solveurs IBM et MC<sup>3</sup> sont tout à fait acceptable pour le maillage II (entre 3 % à 7 %) (Tableau. 6.8). Cela est en conformité avec le profil et l'échelle de la vitesse  $u$  et de la densité qui sont assez similaires (Figs.6.60c, 6.60d, 6.61c, 6.61d, 6.62c et 6.62d). Cependant, à cause d'un écart plus conséquent au niveau de la pression (entre 2 a 9 bar) (Fig. 6.64b), on s'attend à avoir une différence importante, comme celui obtenu à 34 %, au temps  $t = 8$  ms pour le Maillage I.

Finalement, pour l'étude de la conservation de la masse, on observe que, différemment de l'approche à maillage adapté du code MC<sup>3</sup>, la méthodologie proposée n'est pas malheureusement conservative. En effet, il y a un ajout de masse tout au long de la simulation, et assez conséquent entre les temps  $t = 4,5$  ms et  $t = 9$  ms (Fig. 6.66a). Cela justifie les valeurs de pression significatives car l'on a plus de masse avec un volume total réduit (Fig. 6.66b).

Cependant, avec le raffinement uniforme du maillage, les écarts ont diminués : pour le maillage I (-2,33 % à 23,08 %) et pour le maillage II (-5,23 % à 2,18 %). Pour l'évolution du volume, comme l'on a sus-estimé la valeur, on remarque que le volume de gaz calculé est supérieur au volume du code MC<sup>3</sup>, mais son écart est presque constant et réduit avec le raffinement du maillage. Donc, la méthode proposée devient de mieux en mieux conservative avec le raffinement du maillage. Un autre point à retenir est qu'à temps  $t = 0$ , la simulation MC<sup>3</sup> présente déjà plus de masse de gaz, même avec un volume total inférieur au volume de la simulation IBM. Cela vient peut-être de la différence entre les modèles de gaz utilisés : gaz réel (i.e., MC<sup>3</sup>) et gaz parfait (i.e., IBM) lors de l'initialisation de l'écoulement.

## CHAPITRE 7 CONCLUSION

Ce chapitre comprend une synthèse de l'ensemble du travail dans la réalisation de thèse, une analyse des limitations de la méthodologie proposée ainsi qu'une discussion sur les travaux futurs.

### 7.1 Synthèse des travaux

Ce travail a proposé et développé une première version d'un code multiphysique 2D axisymétrique basé sur le couplage des méthodes des frontières immergées et des maillages superposés en visant la modélisation et simulation des disjoncteur à haute tension. Pour la réalisation de ce code multiphysique, l'implémentation et le couplage des différentes modules numériques composant la méthodologie proposée ont été réalisés et présentés.

La définition rigoureuse des multiples zones de calcul a été faite par la notion de la topologie discrète dans le module **Géométrie et topologie discrète**. Afin de capter et représenter correctement les différentes échelles spatiales des géométries complexes de l'appareil, le module **Maillage hiérarchique** responsable pour la génération ainsi que le raffinement hiérarchique (i.e., des arbres quaternaires) des maillages IB cartésiens a été intégré. A l'intérieur du module **Marquage d'éléments IBM**, le lien entre la géométrie et les maillages IB hiérarchiques a été réalisé par la classification (i.e., le rôle spécifique vis-à-vis des solveurs) des éléments a été fait à l'aide de l'approche du *Parcours Géométrique* (PG).

Pour la prise en compte des géométries mobiles, la gestion des maillages IB hiérarchiques indépendants par le module **Maillages superposés** a été réalisée par la méthodologie de traitement et de couplage des maillages superposés. En effet, basée sur l'approche de *Découpage en Trou Implicite* et le critère de la ligne médiatrice (i.e., la distance à la paroi), la méthodologie proposée a démontré, en respectant l'hypothèse que les maillages mobiles ne se chevauchent pas, la capacité de traiter correctement les situations de proximité, voire de contact, entre les courbes géométriques alignés/superposées. De plus, pour d'obtenir le champ de la distance à la paroi, une version hiérarchique du solveur d'Eikonal avec la méthode de Balayage Rapide a été implémentée et présentée.

Pour la modélisation des physiques reliées au fonctionnement de l'appareil : le champ électrique statique, le rayonnement thermique et l'écoulement fluide en régime compressible, le module **Solveur multiphysique** a été implémenté et basé sur l'approche de discrétisation spatiale en Volume Fini 2D axisymétrique hiérarchique d'ordre 2 (i.e., Helmholtz) et d'ordre 1 (i.e., Euler ALE avec le schéma de Roe [11]).

De plus, la prise en compte des conditions aux limites (i.e., du type Dirichlet, Neumann et Robin), le transfert de la solution entre les maillages superposés et la gestion des interfaces matérielles a été fait par le processus de reconstruction basé sur la méthode de Moindres Carrés implicite en couplant les éléments **Face** (FC), **Interface** (IC), **Interpolés** dans un système matriciel global.

Suite à l'implémentation du code multiphysique, l'étape de vérification a été réalisée. Pour cela, on a formulé l'ensemble des cas test pour démontrer la capacité et la faisabilité du couplage IBM et des maillages superposés vis-à-vis des géométries complexes et mobiles, et de vérifier les méthodologies des modules numériques, principalement les schémas de discrétisation et de reconstruction associés aux solveurs physiques. Les cas tests comprennent la résolution du champ électrique, du rayonnement thermique et de l'écoulement fluide. L'ensemble des résultats numériques ont démontré une bonne concordance avec les solutions analytiques disponibles ainsi qu'avec celles obtenues par le solveur MC<sup>3</sup>. L'ordre de précision établi est en conformité avec la formulation mathématique du schéma de discrétisation et du processus de reconstruction.

## 7.2 Limitations de la méthodologie proposée

La méthodologie proposée pour le code multiphysique présente des limitations, listées ci-dessous :

Les géométries sont non-déformables et symétriques selon l'axe azimutale. De plus l'aspect non-déformable des géométries. L'inclusion d'un modèle d'ablation demanderait une adaptation du modèle topologique et de la tâche de marquage d'éléments IB afin de prendre en compte les déformations géométriques.

Le modèle de l'écoulement est un gaz parfait qui n'est pas adapté à la modélisation d'un fonctionnement réel d'un disjoncteur à haute tension. Pour cela, le développement d'un modèle de gaz réel basé sur les tables thermodynamiques serait une extension importante et nécessaire [1].

Le modèle magnétique basé sur la formulation à équation elliptique (i.e., Helmholtz) n'a pas été considéré pour le module multiphysique. Pour cela, en prévoyant une extension de la méthodologie en 3D, une formulation basée sur le vecteur potentiel magnétique (i.e.,  $\vec{A}$ ) devra être envisagée en vue d'avoir un modèle, le phénomène de l'ablation n'a pas été pris en compte permettant de conserver magnétique complet [132].

La reconstruction des conditions aux limites du type Neumann et Robin à ordre 1, inférieure à celle du type Dirichlet, est non compatible avec celle du schéma de discrétisation de l'équation Helmholtz (i.e., l'ordre 2). A cet égard, la formulation mathématique linéaire du processus de reconstruction doit être revue. Le choix d'un polynôme de degré deux permettrait de résoudre à cette problématique. Pour le solveur d'Euler, les schémas de reconstruction ne sont pas assez convulsifs.

Pour le solveur fluide, le schéma de discrétisation spatiale et temporelle est à l'ordre 1. A cet égard, l'utilisation des schémas d'ordre élevé, comme MUSCL et ENO, sont tout à fait possibles [11].

Le couplage multiphysique n'a pas été entièrement développé et vérifié permettant de modéliser un arc électrique. Le développement d'une structure de couplage s'avère nécessaire permettant le transfert bi-directionnel de la solution numérique entre les solveurs d'une façon robuste et performante.

Pour la prise en compte des scénarios de proximité et de contact, la méthodologie du traitement des maillages superposés n'est pas adaptée aux maillages hiérarchiques où la variation entre les échelles des mailles peuvent entraîner l'apparition des éléments **Interpolés** sans un correspondant pour le transfert de l'information. Pour cela, suite à la réalisation du marquage des maillages superposés, l'inclusion d'une sous-routine pour la détection, la désactivation de ces éléments, nommés *orphelin*, et le transfert du rôle *interpolé* à leur voisins serait une solution simple et performante.

Le schéma d'imposition de la condition d'interfaces matérielles est fonctionnel pour les maillages cartésiens. Cependant, pour l'extension aux maillages hiérarchiques, il faut revoir le calcul des points liés à l'interface matérielle ainsi que la reconstruction double pour l'imposition de la continuité de la solution et du flux entre les voisins à différents niveaux de raffinement.

Le choix du langage MATLAB a été limitant pour la performance computationnel et, par conséquent, pour la réalisation d'études de vérification plus approfondies (i.e., le choix des maillages plus raffinés).

### 7.3 Travaux futurs

Globalement, les travaux futurs sont orientés dans la perspective de compléter les tâches de développement et de vérification/validation permettant l'obtention d'une modélisation multiphysique des tous phénomènes retrouvés dans l'application disjoncteur à haute tension par le couplage proposé :

- La prise en compte de l'ablation ainsi que l'extension des modèles de la topologie discrète et du marquage d'éléments IB en considérant désormais la déformation géométriques.
- L'ajout d'un modèle de gaz réel au module de l'écoulement fluide [1].
- Le modèle magnétique basé sur la formulation du vecteur potentiel magnétique [132].
- La structuration et la validation du couplage multiphysique pour la modélisation d'un arc électrique à l'intérieur d'une chambre de coupure d'un disjoncteur à haute tension [1].
- Des études de vérification plus approfondies permettant d'analyser la conservation des quantités fluides pour la méthodologie proposée. De plus, le développement des outils de pos-traitement adapté à l'approche IBM et de maillages superposés pour l'évaluation des métriques de l'étude, comme la masse et le volume totaux par exemple.
- L'amélioration des schémas de reconstruction en assurant une meilleure conservation des quantités de l'écoulement.
- L'extension du couplage proposé pour les applications en 3D, en visant la prise en compte des géométries mobiles de plus en plus complexes.
- L'implémentation de la plate-forme de simulation dans un langage compilé, comme C++, en augmentant la performance numérique du code ainsi que, par conséquent, en approfondissant les étapes de vérification et de validation des algorithmes.

## RÉFÉRENCES

- [1] G. Pernaumat, “Une approche multi-physiques et multi-échelles pour l’amélioration de l’efficacité de la modélisation et de la simulation des disjoncteurs haute-tension,” Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2017.
- [2] P. Robin-Jouan, “Peut-on faire confiance à la simulation numérique de la coupure haute-tension pour développer les disjoncteurs du futur,” dans *Revue de l’Électricité et de l’Électronique*, vol. 11, 2004, p. 36–40.
- [3] F. Sotiropoulos et X. Yang, “Immersed boundary methods for simulating fluid–structure interaction,” *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 65, p. 1–21, févr. 2014.
- [4] L. Monasse *et al.*, “A conservative coupling algorithm between a compressible flow and a rigid body using an Embedded Boundary method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 231, n<sup>o</sup>. 7, p. 2977–2994, avr. 2012.
- [5] D. Kim et H. Choi, “Immersed boundary method for flow around an arbitrarily moving body,” *Journal of Computational Physics*, vol. 212, n<sup>o</sup>. 2, p. 662–680, mars 2006.
- [6] J. Yang et E. Balaras, “An embedded-boundary formulation for large-eddy simulation of turbulent flows interacting with moving boundaries,” *Journal of Computational Physics*, vol. 215, n<sup>o</sup>. 1, p. 12–40, juin 2006.
- [7] J. R. Aarnes *et al.*, “Treatment of solid objects in the Pencil Code using an immersed boundary method and overset grids,” *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, vol. 114, n<sup>o</sup>. 1-2, p. 35–57, mars 2020.
- [8] B. Landmann et M. Montagnac, “A highly automated parallel Chimera method for overset grids based on the implicit hole cutting technique,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 66, n<sup>o</sup>. 6, p. 778–804, juin 2011.
- [9] L. Ramírez *et al.*, “A Higher-Order Chimera Method for Finite Volume Schemes,” *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 25, n<sup>o</sup>. 3, p. 691–706, juill. 2018.
- [10] K. R. Lee, J. H. Park et K. H. Kim, “High-Order Interpolation Method for Overset Grid Based on Finite Volume Method,” *AIAA Journal*, vol. 49, n<sup>o</sup>. 7, p. 1387–1398, juill. 2011.
- [11] M. Awad, “An immersed boundary method approach using hierarchical and overlapping grids for unsteady aerodynamics,” Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2021.



- [12] O. Homae et A. Gholami, “Prestrike modeling in SF6 circuit breakers,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 114, p. 105385, janv. 2020.
- [13] M. Melot, J.-Y. Trépanier, R. Camarero et E. Petro, “Comparison of Two Models for Radiative Heat Transfer in High Temperature Thermal Plasmas,” *Modelling and Simulation in Engineering*, vol. 2011, p. 1–7, 2011.
- [14] J. Zhang *et al.*, “Modelling of the Interruption Process in SF6 High Voltage Circuit Breaker and Preliminary Study of the Arc Characteristics for Different Gases,” dans *2009 Proceedings of the 55th IEEE Holm Conference on Electrical Contacts*. Vancouver, British Columbia, Canada : IEEE, sept. 2009, p. 240–245.
- [15] F. Reichert, A. Petchanka, P. Freton et J. J. Gonzalez, “Modelling and Simulation of SF6 High-Voltage Circuit-Breakers - an Overview on Basics and Application of CFD Arc Simulation Tools,” *PLASMA PHYSICS AND TECHNOLOGY*, vol. 4, n°. 3, p. 213–224, 2017. [En ligne]. Disponible : <https://ojs.cvut.cz/ojs/index.php/PPT/article/view/6216>
- [16] C. M. Dixon, J. D. Yan et M. T. C. Fang, “A comparison of three radiation models for the calculation of nozzle arcs,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 37, n°. 23, p. 3309–3318, déc. 2004.
- [17] B. Wuthrich et Yongjoong Lee, “Verification and validation studies of OpenFOAM for transonic compressible flow simulations inside high voltage circuit breaker diffusers,” dans *Conference Record of the 2008 IEEE International Symposium on Electrical Insulation*. Vancouver, BC : IEEE, juin 2008, p. 724–727.
- [18] M. T. Dhotre *et al.*, “Multiobjective Optimization and CFD Simulation for a High-Voltage Circuit Breaker,” *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 27, n°. 4, p. 2105–2112, oct. 2012. [En ligne]. Disponible : <http://ieeexplore.ieee.org/document/6268430/>
- [19] M. T. Dhotre, F. Agostini et S. Kotilainen, “CFD Simulation of a High Voltage Circuit Breaker Coupled with a Mechanical Operating Mechanism,” dans *2019 IEEE Electrical Insulation Conference (EIC)*. Calgary, AB, Canada : IEEE, juin 2019, p. 440–443. [En ligne]. Disponible : <https://ieeexplore.ieee.org/document/9046599/>
- [20] X. Ye et M. Dhotre, “CFD Simulation of Transonic Flow in High-Voltage Circuit Breaker,” *International Journal of Chemical Engineering*, vol. 2012, p. 1–9, 2012. [En ligne]. Disponible : <http://www.hindawi.com/journals/ijce/2012/609486/>
- [21] C. M. Franck et M. Seeger, “Application of High Current and Current Zero Simulations of High-Voltage Circuit Breakers,” *Contributions to Plasma Physics*, vol. 46, n°. 10, p. 787–797, déc. 2006. [En ligne]. Disponible : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/ctpp.200610079>

- [22] J. Trépanier, M. Reggio, H. Zhang et R. Camarero, “A finite-volume method for the Euler equations on arbitrary lagrangian-eulerian grids,” *Computers & Fluids*, vol. 20, n° 4, p. 399–409, janv. 1991.
- [23] H. Zhang, M. Reggio, J. Trépanier et R. Camarero, “Discrete form of the GCL for moving meshes and its implementation in CFD schemes,” *Computers & Fluids*, vol. 22, n° 1, p. 9–23, janv. 1993.
- [24] P. Roe, “Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes,” *Journal of Computational Physics*, vol. 43, n° 2, p. 357–372, oct. 1981.
- [25] S. Arabi, J.-Y. Trépanier et R. Camarero, “A simple extension of Roe’s scheme for real gases,” *Journal of Computational Physics*, vol. 329, p. 16–28, janv. 2017.
- [26] X. D. Zhang, J.-Y. Trépanier et R. Camarero, “Modelling and computation of arc-flow interaction in circuit-breakers,” *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 2, n° 1, p. 41–64, janv. 1994.
- [27] X. D. Zhang, J. Y. Trépanier et R. Camarero, “Numerical simulation of a 2 kA convection-stabilized nitrogen arc using CFD tools,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 30, n° 23, p. 3240–3252, déc. 1997.
- [28] H. Pellegrin, J.-Y. Trepanier, R. Camarero et Xu Dong Zhang, “Computation of the self-induced magnetic field in circuit-breaker arcs,” *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 25, n° 5, p. 974–981, oct. 1997.
- [29] S. D. Eby, J. Y. Trépanier et X. D. Zhang, “Modelling radiative transfer in circuit-breaker arcs with the P-1 approximation,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 31, n° 13, p. 1578–1588, juill. 1998.
- [30] M. Melot, “Modelisation numerique du transfert radiatif par la methode des volumes finis dans les disjoncteurs a SF6,” Mémoire de Maitrise - Sciences appliquées, Ecole Polytechnique de Montréal, 2009.
- [31] D. Godin *et al.*, “Modelling and simulation of nozzle ablation in high-voltage circuit-breakers,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 33, n° 20, p. 2583–2590, oct. 2000.
- [32] P. Maruzewski, A. Martin, M. Reggio et J.-Y. Trépanier, “Simulation of arc-electrode interaction using sheath modelling in SF6 circuit-breakers,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 35, n° 9, p. 891–899, mai 2002.
- [33] A. Martin, J.-Y. Trepanier, M. Reggio et G. Xueyan, “Transient Ablation Regime in Circuit Breakers,” *Plasma Science and Technology*, vol. 9, n° 6, p. 653–656, déc. 2007.
- [34] C. S. Peskin, “Flow patterns around heart valves : A numerical method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 10, n° 2, p. 252–271, oct. 1972.

- [35] P. H. Tran et F. Plourde, “Computing compressible internal flows by means of an Immersed Boundary Method,” *Computers & Fluids*, vol. 97, p. 21–30, juin 2014.
- [36] M. E. Khalili, M. Larsson et B. Müller, “High-order ghost-point immersed boundary method for viscous compressible flows based on summation-by-parts operators : High-order immersed boundary method for viscous compressible flows,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 89, n<sup>o</sup>. 7, p. 256–282, mars 2019.
- [37] W.-X. Huang et F.-B. Tian, “Recent trends and progress in the immersed boundary method,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 233, n<sup>o</sup>. 23-24, p. 7617–7636, déc. 2019.
- [38] D. K. Clarke, M. D. Salas et H. A. Hassan, “Euler calculations for multielement airfoils using Cartesian grids,” *AIAA Journal*, vol. 24, n<sup>o</sup>. 3, p. 353–358, mars 1986.
- [39] D. Hartmann, M. Meinke et W. Schröder, “A strictly conservative Cartesian cut-cell method for compressible viscous flows on adaptive grids,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, n<sup>o</sup>. 9-12, p. 1038–1052, févr. 2011.
- [40] M. A. Puscas et L. Monasse, “A Three-Dimensional Conservative Coupling Method Between an Inviscid Compressible Flow and a Moving Rigid Solid,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 37, n<sup>o</sup>. 6, p. B884–B909, janv. 2015.
- [41] B. Muralidharan et S. Menon, “Simulation of moving boundaries interacting with compressible reacting flows using a second-order adaptive Cartesian cut-cell method,” *Journal of Computational Physics*, vol. 357, p. 230–262, mars 2018.
- [42] X. Hu, B. Khoo, N. Adams et F. Huang, “A conservative interface method for compressible flows,” *Journal of Computational Physics*, vol. 219, n<sup>o</sup>. 2, p. 553–578, déc. 2006.
- [43] H. Udaykumar, R. Mittal, P. Rampungoon et A. Khanna, “A Sharp Interface Cartesian Grid Method for Simulating Flows with Complex Moving Boundaries,” *Journal of Computational Physics*, vol. 174, n<sup>o</sup>. 1, p. 345–380, nov. 2001.
- [44] M. Kirkpatrick, S. Armfield et J. Kent, “A representation of curved boundaries for the solution of the Navier–Stokes equations on a staggered three-dimensional Cartesian grid,” *Journal of Computational Physics*, vol. 184, n<sup>o</sup>. 1, p. 1–36, janv. 2003.
- [45] J. Mohd-Yusof, “Combined Immersed-Boundary/B-spline methods for simulations of flow in complex geometries,” dans *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, 1997, p. 317–328.
- [46] R. Boukharfane, F. H. Eugênio Ribeiro, Z. Bouali et A. Mura, “A combined ghost-point-forcing / direct-forcing immersed boundary method (IBM) for compressible flow simulations,” *Computers & Fluids*, vol. 162, p. 91–112, janv. 2018.

- [47] J. R. Edwards *et al.*, “An Immersed Boundary Method for General Flow Applications,” dans *ASME 2010 3rd Joint US-European Fluids Engineering Summer Meeting : Volume 1, Symposia – Parts A, B, and C*. Montreal, Quebec, Canada : ASME, 2010, p. 2461–2469.
- [48] M. Hedayat et I. Borazjani, “A parallel dynamic overset grid framework for immersed boundary methods,” *arXiv :1910.09315 [physics]*, oct. 2019, arXiv : 1910.09315.
- [49] E. Stavropoulos Vasilakis *et al.*, “Cavitation induction by projectile impacting on a water jet,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 114, p. 128–139, mai 2019.
- [50] E. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi et J. Mohd-Yusof, “Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 161, n<sup>o</sup>. 1, p. 35–60, juin 2000.
- [51] S. Brahmachary, G. Natarajan, V. Kulkarni et N. Sahoo, “A sharp-interface immersed boundary framework for simulations of high-speed inviscid compressible flows : Sharp Interface Immersed Boundary Solver for Compressible Flows,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 86, n<sup>o</sup>. 12, p. 770–791, avr. 2018.
- [52] D. De Marinis, M. D. de Tullio, M. Napolitano et G. Pascazio, “Improving a conjugate-heat-transfer immersed-boundary method,” *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 26, n<sup>o</sup>. 3/4, p. 1272–1288, mai 2016.
- [53] P. De Palma, M. de Tullio, G. Pascazio et M. Napolitano, “An immersed-boundary method for compressible viscous flows,” *Computers & Fluids*, vol. 35, n<sup>o</sup>. 7, p. 693–702, août 2006.
- [54] M. de Tullio *et al.*, “An immersed boundary method for compressible flows using local grid refinement,” *Journal of Computational Physics*, vol. 225, n<sup>o</sup>. 2, p. 2098–2117, août 2007.
- [55] Y. Zhang et C. H. Zhou, “An immersed boundary method for simulation of inviscid compressible flows,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 74, n<sup>o</sup>. 11, p. 775–793, avr. 2014.
- [56] M. Al-Marouf et R. Samtaney, “A versatile embedded boundary adaptive mesh method for compressible flow in complex geometry,” *Journal of Computational Physics*, vol. 337, p. 339–378, mai 2017.
- [57] A. Chaudhuri, A. Hadjadj et A. Chinnayya, “On the use of immersed boundary methods for shock/obstacle interactions,” *Journal of Computational Physics*, vol. 230, n<sup>o</sup>. 5, p. 1731–1748, mars 2011.

- [58] C. Chi, B. J. Lee et H. G. Im, “An improved ghost-cell immersed boundary method for compressible flow simulations,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 83, n<sup>o</sup>. 2, p. 132–148, janv. 2017.
- [59] A. Dadone et B. Grossman, “Ghost-cell method for analysis of inviscid three-dimensional flows on Cartesian-grids,” *Computers & Fluids*, vol. 36, n<sup>o</sup>. 10, p. 1513–1528, déc. 2007.
- [60] T. V. Ershova *et al.*, “Numerical Simulation of Heterogeneous Flows and Heat-Mass Transfer in Complex Domains on Rectangular Grids,” dans *2010 14th International Heat Transfer Conference, Volume 1*. Washington, DC, USA : ASME, 2010, p. 837–846.
- [61] R. Ghias, R. Mittal et T. Lund, “A Non-Body Conformal Grid Method for Simulation of Compressible Flows with Complex Immersed Boundaries,” dans *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada : American Institute of Aeronautics and Astronautics, janv. 2004.
- [62] R. Ghias, R. Mittal et H. Dong, “A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows,” *Journal of Computational Physics*, vol. 225, n<sup>o</sup>. 1, p. 528–553, 2007.
- [63] N. E. L. Haugen et S. Kragset, “Particle impaction on a cylinder in a crossflow as function of Stokes and Reynolds numbers,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 661, p. 239–261, oct. 2010.
- [64] O. Hu, N. Zhao et J. Liu, “A Ghost Cell Method for Turbulent Compressible Viscous Flows on Adaptive Cartesian Grids,” *Procedia Engineering*, vol. 67, p. 241–249, 2013.
- [65] A. Kapahi, S. Sambasivan et H. Udaykumar, “A three-dimensional sharp interface Cartesian grid method for solving high speed multi-material impact, penetration and fragmentation problems,” *Journal of Computational Physics*, vol. 241, p. 308–332, mai 2013.
- [66] A. Kapahi, J. Mousel, S. Sambasivan et H. Udaykumar, “Parallel, sharp interface Eulerian approach to high-speed multi-material flows,” *Computers & Fluids*, vol. 83, p. 144–156, août 2013.
- [67] M. Ehsan Khalili, M. Larsson et B. Müller, “Immersed boundary method for viscous compressible flows around moving bodies,” *Computers & Fluids*, vol. 170, p. 77–92, juill. 2018.
- [68] J. Liu *et al.*, “A new immersed boundary method for compressible Navier–Stokes equations,” *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 27, n<sup>o</sup>. 3, p. 151–163, mars 2013.

- [69] C. Liu et C. Hu, “An immersed boundary solver for inviscid compressible flows,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 85, n<sup>o</sup>. 11, p. 619–640, déc. 2017.
- [70] X. Liu *et al.*, “Research on the Turbine Blade Vibration Base on the Immersed Boundary Method,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 140, n<sup>o</sup>. 6, p. 061402, juin 2018.
- [71] K. Luo, Z. Zhuang, J. Fan et N. E. L. Haugen, “A ghost-cell immersed boundary method for simulations of heat transfer in compressible flows under different boundary conditions,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 92, p. 708–717, 2016.
- [72] K. Luo *et al.*, “A ghost-cell immersed boundary method for the simulations of heat transfer in compressible flows under different boundary conditions Part-II : Complex geometries,” *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 104, p. 98–111, 2017.
- [73] Y. Mizuno *et al.*, “A Simple Immersed Boundary Method for Compressible Flow Simulation around a Stationary and Moving Sphere,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, p. 1–17, 2015.
- [74] H. Mo, F.-S. Lien, F. Zhang et D. S. Cronin, “An immersed boundary method for solving compressible flow with arbitrarily irregular and moving geometry : Immersed boundary method for flow with irregular and moving geometry,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 88, n<sup>o</sup>. 5, p. 239–263, oct. 2018.
- [75] J. Nam et F. Lien, “A ghost-cell immersed boundary method for large-eddy simulations of compressible turbulent flows,” *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 28, n<sup>o</sup>. 1-2, p. 41–55, janv. 2014.
- [76] T. M. Pu et C. H. Zhou, “An immersed boundary/wall modeling method for RANS simulation of compressible turbulent flows,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 87, n<sup>o</sup>. 5, p. 217–238, juin 2018.
- [77] Y. Qu et R. C. Batra, “Constrained moving least-squares immersed boundary method for fluid-structure interaction analysis,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 85, n<sup>o</sup>. 12, p. 675–692, déc. 2017.
- [78] Y. Qu, R. Shi et R. C. Batra, “An immersed boundary formulation for simulating high-speed compressible viscous flows with moving solids,” *Journal of Computational Physics*, vol. 354, p. 672–691, févr. 2018.
- [79] S. Takahashi, T. Nonomura et K. Fukuda, “A Numerical Scheme Based on an Immersed Boundary Method for Compressible Turbulent Flows with Shocks : Application to Two-Dimensional Flows around Cylinders,” *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2014, p. 1–21, 2014.

- [80] H. Uddin, R. Kramer et C. Pantano, “A Cartesian-based embedded geometry technique with adaptive high-order finite differences for compressible flow around complex geometries,” *Journal of Computational Physics*, vol. 262, p. 379–407, avr. 2014.
- [81] J. Yang et S. P. Wu, “An Immersed Boundary Method for Compressible Flows with Complex Boundaries,” *Applied Mechanics and Materials*, vol. 477-478, p. 281–284, déc. 2013.
- [82] R. Yuan et C. Zhong, “An immersed-boundary method for compressible viscous flows and its application in the gas-kinetic BGK scheme,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 55, p. 417–446, mars 2018.
- [83] R. Mittal et G. Iaccarino, “Immersed Boundary Methods,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 37, n<sup>o</sup>. 1, p. 239–261, janv. 2005.
- [84] H. Udaykumar, R. Mittal et W. Shyy, “Computation of Solid–Liquid Phase Fronts in the Sharp Interface Limit on Fixed Grids,” *Journal of Computational Physics*, vol. 153, n<sup>o</sup>. 2, p. 535–574, août 1999.
- [85] Y. Cho, J. Chopra et P. Morris, “Immersed Boundary Method for Compressible High-Reynolds Number Viscous Flow around Moving Bodies,” dans *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada : American Institute of Aeronautics and Astronautics, janv. 2007.
- [86] I. Borazjani, L. Ge, T. Le et F. Sotiropoulos, “A parallel overset-curvilinear-immersed boundary framework for simulating complex 3d incompressible flows,” *Computers & Fluids*, vol. 77, p. 76–96, avr. 2013.
- [87] J. L. Steger, F. C. Dougherty et J. A. Benek, “A chimera grid scheme. [multiple overset body-conforming mesh system for finite difference adaptation to complex aircraft configurations],” dans *Proceedings of the Applied Mechanics, Bioengineering, and Fluids Engineering Conference*, janv. 1983.
- [88] J. Benek, P. Buning et J. Steger, “A 3-D chimera grid embedding technique,” dans *7th Computational Physics Conference*. Cincinnati, OH, U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, juill. 1985.
- [89] A. Posa et R. Broglia, “An immersed boundary method coupled with a dynamic overlapping-grids strategy,” *Computers & Fluids*, vol. 191, p. 104250, sept. 2019.
- [90] K. D. Brislawn, D. L. Brown, G. S. Chesshire et J. S. Saltzman, “Adaptively-refined overlapping grids for the numerical solution of systems of hyperbolic conservation laws,” dans *ICASE/LaRC Workshop on Adaptive Grid Methods*, Oct 1995, p. 95–110.

- [91] R. Meakin, “An efficient means of adaptive refinement within systems of overset grids,” dans *12th Computational Fluid Dynamics Conference*. San Diego,CA,U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, juin 1995.
- [92] W. D. Henshaw et D. W. Schwendeman, “An adaptive numerical scheme for high-speed reactive flow on overlapping grids,” *Journal of Computational Physics*, vol. 191, n°. 2, p. 420–447, nov. 2003.
- [93] R. L. Meakin, “Composite Overset Structured Grids,” dans *Handbook of Grid Generation*. CRC Press LLC, 1999, ch. 11, p. 1.
- [94] J. Guerrero, “Overset composite grids for the simulation of complex moving geometries,” dans *Meeting on Applied Scientific Computing and Tools 2006*, 2007.
- [95] G. Chesshire et W. Henshaw, “Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 90, n°. 1, p. 1–64, sept. 1990.
- [96] R. Meakin, “A new method for establishing intergrid communication among systems of overset grids,” dans *10th Computational Fluid Dynamics Conference*. Honolulu,HI,U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, juin 1991.
- [97] J. Bonet et J. Peraire, “An alternating digital tree (ADT) algorithm for 3d geometric searching and intersection problems,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 31, n°. 1, p. 1–17, janv. 1991.
- [98] I.-T. Chiu et R. Meakin, “On automating domain connectivity for overset grids,” dans *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno,NV,U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, janv. 1995.
- [99] Z. Wang, “A Fully Conservative Interface Algorithm for Overlapped Grids,” *Journal of Computational Physics*, vol. 122, n°. 1, p. 96–106, nov. 1995.
- [100] Z. Wang, V. Parthasarathy et N. Hariharan, “A fully automated Chimera methodology for multiple moving body problems,” dans *36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno,NV,U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, janv. 1998.
- [101] N. A. Petersson, “Hole-Cutting for Three-Dimensional Overlapping Grids,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 21, n°. 2, p. 646–665, janv. 1999.
- [102] Z. J. Wang et V. Parthasarathy, “A fully automated chimera methodology for multiple moving body problems,” *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 33, n°. 7, p. 919–938, 2000.



- [103] R. Meakin, “Object X-rays for cutting holes in composite overset structured grids,” dans *15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Anaheim,CA,U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, juin 2001.
- [104] Y. Lee et J. Baeder, “Implicit Hole Cutting - A New Approach to Overset Grid Connectivity,” dans *16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Orlando, Florida : American Institute of Aeronautics and Astronautics, juin 2003.
- [105] S. E. Sherer et J. N. Scott, “High-order compact finite-difference methods on general overset grids,” *Journal of Computational Physics*, vol. 210, n<sup>o</sup>. 2, p. 459–496, déc. 2005.
- [106] J. Cai, H. M. Tsai et F. Liu, “A parallel viscous flow solver on multi-block overset grids,” *Computers & Fluids*, vol. 35, n<sup>o</sup>. 10, p. 1290–1301, déc. 2006.
- [107] R. Noack, “A Direct Cut Approach for Overset Hole Cutting,” dans *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Miami, Florida : American Institute of Aeronautics and Astronautics, juin 2007.
- [108] Q. Liu, K. Qu et J. Cai, “An automated multi-grid Chimera method based on the implicit hole technique,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 231, n<sup>o</sup>. 2, p. 279–293, févr. 2017.
- [109] K. Nakahashi, F. Togashi et D. Sharov, “Intergrid-Boundary Definition Method for Overset Unstructured Grid Approach,” *AIAA Journal*, vol. 38, n<sup>o</sup>. 11, p. 2077–2084, nov. 2000.
- [110] R. Loehner, D. Sharov, H. Luo et R. Ramamurti, “Overlapping unstructured grids,” dans *39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno,NV,U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, janv. 2001.
- [111] J. Sitaraman *et al.*, “Parallel Unsteady Overset Mesh Methodology for a Multi-Solver Paradigm with Adaptive Cartesian Grids,” dans *26th AIAA Applied Aerodynamics Conference*. Honolulu, Hawaii : American Institute of Aeronautics and Astronautics, août 2008.
- [112] R. Noack et D. A. Boger, “Improvements to sugar and dirtlib for overset store separation simulations,” dans *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, 2009.
- [113] W. J. Horne et K. Mahesh, “A massively-parallel, unstructured overset method to simulate moving bodies in turbulent flows,” *Journal of Computational Physics*, vol. 397, p. 108790, nov. 2019.
- [114] S. Peron, “Méthode d’assemblage de maillages recouvrants autour de géométries complexes pour des simulations en aérodynamique compressible,” Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers - ENSAM, 2014.

- [115] Y. Zheng et M.-S. Liou, “A novel approach of three-dimensional hybrid grid methodology : Part 1. Grid generation,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, n<sup>o</sup>. 37-38, p. 4147–4171, sept. 2003.
- [116] J. O’Rourke, *Computational Geometry in C*, 2<sup>e</sup> éd. Cambridge University Press, oct. 1998.
- [117] S. Osher et R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, ser. Applied Mathematical Sciences, S. S. Antman, J. E. Marsden et L. Sirovich, édit. New York, NY : Springer New York, 2003, vol. 153.
- [118] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, 1<sup>er</sup> éd. CRC Press, 2018.
- [119] Z. Li, “A Fast Iterative Algorithm for Elliptic Interface Problems,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 35, p. 230–254, 1998.
- [120] Z. Li et K. Ito, *The Immersed Interface Method : Numerical Solutions of PDEs Involving Interfaces and Irregular Domains*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [121] K. Pan, Y. Tan et H. Hu, “An interpolation matched interface and boundary method for elliptic interface problems,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 234, p. 73–94, 2010.
- [122] J. Xu, J. Cai, Q. Liu et K. Qu, “Flow Simulations by Enhanced Implicit-Hole-Cutting Method on Overset Grids,” *Journal of Aircraft*, vol. 51, n<sup>o</sup>. 5, p. 1401–1409, sept. 2014. [En ligne]. Disponible : <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.C032283>
- [123] A. Pigeon, “Développement d’une méthode d’accélération par grilles virtuelles récursives pour l’assemblage de maillages chimères,” Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 2015.
- [124] H. Zhao, “A fast sweeping method for Eikonal equations,” *Mathematics of Computation*, 2004.
- [125] J. V. Gomez, D. Alvarez, S. Garrido et L. Moreno, “Fast Methods for Eikonal Equations : An Experimental Survey,” *IEEE Access*, 2019.
- [126] T. C. Cecil, S. J. Osher et J. Qian, “Simplex free adaptive tree fast sweeping and evolution methods for solving level set equations in arbitrary dimension,” *Journal of Computational Physics*, 2006.
- [127] M. Bader, *Space-Filling Curves*, ser. Texts in Computational Science and Engineering. Springer Berlin Heidelberg, 2013, vol. 9.
- [128] G. Dahlquist, B. Sjöberg et P. Svensson, “Comparison of the method of averages with the method of least squares.” *Mathematics of Computation*, vol. 22, p. 833–845, 1968.

- [129] F. Franklin, “Chapter IV.6 : Faster Line Segment Intersection,” dans *Graphics Gems III*. Academic Press, Inc., 1992, p. 192–202.
- [130] F. M. White et H. Xue, *Fluid mechanics*, 9<sup>e</sup> éd. McGraw-Hill Education, 2021.
- [131] J. of Fluids Engineering, “Procedure for Estimation and Reporting of Uncertainty Due to Discretization in CFD Applications,” *Journal of Fluids Engineering*, vol. 130, n<sup>o</sup>. 7, p. 078001, 2008.
- [132] M. Saravia, “A finite volume formulation for magnetostatics of discontinuous media within a multi-region OpenFOAM framework,” *Journal of Computational Physics*, vol. 433, p. 110089, 2021.