POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Étude expérimentale des interactions entre deux particules sphériques, relâchées dans l'eau stagnante
Auteur: Author:	Jieyao Deng
Date:	2022
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Deng, J. (2022). Étude expérimentale des interactions entre deux particules sphériques, relâchées dans l'eau stagnante [Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/10269/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/10269/
Directeurs de recherche: Advisors:	Cédric Béguin, Bruno Blais, & Jérôme Vétel
Programme: Program:	Génie énergétique

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Étude expérimentale des interactions entre deux particules sphériques, relâchées dans l'eau stagnante

JIEYAO DENG
Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Génie énergétique

Avril 2022

© Jieyao Deng, 2022.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Étude expérimentale des interactions entre deux particules sphériques, relâchées dans l'eau stagnante

présenté par **Jieyao DENG**
en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Stéphane ÉTIENNE, président
Cédric BÉGUIN, membre et directeur de recherche
Bruno BLAIS, membre et codirecteur de recherche
Jérôme VÉTEL, membre et codirecteur de recherche
Marie-Claude HEUZEY, membre

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire,
À tous les (co-)directeurs de recherche,
Pour leur patience et leur soutien.
Sans oublier tous mes amis du laboratoire,
Pour m'avoir bien aidé à concevoir et établir l'ensemble du dispositif expérimental.

REMERCIEMENTS

En préambule de ce mémoire, je souhaite adresser ici tous mes remerciements :

Aux trois (co-)directeurs de recherche, M. Béguin Cédric, M. Blais Bruno et M. Vétel Jérôme, qui m'ont bien guidé et soutenu, pour leur patience, leur soutien, leurs critiques et leurs encouragements - leur soutien et leurs compétences dans ce domaine m'ont permis d'approfondir et d'élargir mes connaissances ; spécialement à M. Béguin Cédric, qui est mon principal directeur de recherche, pour son implication dans mes recherches, son aide lors de l'élaboration de ma problématique et son suivi durant tout ce projet de recherche ;

Aux amis du laboratoire, M. Biette Guénaël, M. Barbeau Lucka, M. Katz Maxime et M. Normandin Ugo, avec qui j'ai pu concevoir, établir l'ensemble du dispositif expérimental et avec qui j'ai pu lancer toutes les expériences ;

À tous les techniciens, M. Courteau Jean-François, M. Gironne Guy, M. Mayer Vincent, M. Besner Bénédict, M. Danet Fabrice, M. Martel Christian-Charles, M. Anne Florentin et (spécialement) M. Massé Philippe, qui m'ont aidé à fabriquer/fournir les pièces essentielles et résoudre les problèmes pendant la construction de l'ensemble du dispositif expérimental ;

À tout le personnel du PolyFab Normand Brais et à tout le personnel de la menuiserie de Polytechnique Montréal.

Ce projet de recherche est supporté par NSErCC (*Natural Sciences and Engineering research Council of Canada* en anglais) et par le programme CReaTE (*Collaborative Research and Training Experience* en anglais, CReaTE-481695-2016) dans GPS - Génie Par la Simulation. Je souhaite leur remercier sincèrement pour leur support financier.

En fin, je dois dire merci au petit chat roux Orange Wang, qui m'a accompagné tout le temps pendant mes études à Montréal.

RÉSUMÉ

L'interaction entre des particules submergées dans l'eau, un liquide que nous utilisons dans notre vie quotidienne, est un sujet de recherche intéressant, qui a été abordé dans plusieurs domaines – génie chimique, génie industriel, génie énergétique, etc. Dans ce mémoire, nous sommes intéressés et nous nous concentrons sur les interactions entre deux particules sphériques identiques. Les objectifs sont constitués de deux parties : ce qui est spécifique pour ce projet, contribuer à l'élaboration d'un outil de prédiction des trajectoires de deux particules sphériques, rigides, identiques, initialement immobiles, qui sont submergées ; et à long terme, construire un modèle permettant de prédire la trajectoire d'une particule ou d'une bulle dans l'eau, au sein d'un nuage d'autres particules ou bulles.

Ce projet de recherche commence par la conception et la construction du tout nouveau dispositif expérimental, dans lequel une pompe à vide a été utilisée afin de compléter le mécanisme de fixation et de libération de deux particules. Les expériences sont faites en utilisant plusieurs types de particules (de différentes tailles, de 3.175 mm à 9.525 mm, et de différentes masses volumiques, de 670 kg/m^3 à 1410 kg/m^3, dont la plage est approximativement autour de celle de l'eau) et des résultats similaires (les trajectoires, les évolutions des vitesses, etc.) sont obtenus. Pour chaque paire de particules qui sont initialement côte à côte sans vitesse initiale, elles commencent par s'approcher et puis s'éloignent, en accélérant (en montant ou en descendant), mais en restant dans un même plan vertical peu après la libération ; pour chaque paire de particules qui sont initialement devant derrière sans vitesse initiale, elles s'approchent légèrement puis celle qui est derrière accélère d'une façon telle que la ligne reliant leurs centres devient au fur et à mesure horizontale (transversale).

À la fin, une discussion sur l'ensemble des résultats est proposée. Un bilan de tout ce que j'ai pu faire et tout ce que je n'ai pas fait, des améliorations et des travaux futurs sont discutés et présentés, pour que ce projet puisse aller plus loin dans le futur, avant d'atteindre son objectif final.

ABSTRACT

The interaction between particles submerged in water, a liquid that we use in our daily life, is an interesting research topic, which has been addressed in several fields - chemical engineering, industrial engineering, energy engineering, etc. In this thesis, we are interested and we focus on the one between two spherical particles, which are identical. The objectives consist of two parts: what is specific for this project, contributing to the development of a tool for predicting the trajectories of two spherical, rigid, identical, initially immobile particles which are submerged; and in the long term, build a model able to predict the trajectory of a particle or a bubble in water, within a cloud of other particles or bubbles.

This research project begins with the design and construction of the brand new experimental device, in which a vacuum pump was used to complete the mechanism of attachment and release of two particles. The experiments are done using several types of particles (of different sizes, from 3.175 mm to 9.525 mm, and different densities, from 670 kg/m^3 to 1410 kg/m^3, of which the range is around that of the water) and similar results (the trajectories, the evolutions of the speeds, etc.) are obtained. Basically, for each pair of particles that are initially side to side with no initial velocity, they start by approaching and then move away, while accelerating and going up or going down, but staying in the same vertical plane shortly after the liberation ; for each pair of particles that are initially in a vertical line without initial velocity, they approach slightly and then the one behind accelerates in such a way that the line connecting their centers gradually becomes horizontal (transverse).

At the end we discuss the experimental results. A review of all that I have been able to do and all that I have not done, improvements and future work are discussed and presented, so that this project can go further in the future, before reaching its final goal.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iii

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT vi

TABLE DES MATIÈRES vii

LISTE DES TABLEAUX xi

LISTE DES FIGURES xii

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xx

LISTE DES ANNEXES xxii

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
- 1.1 Définitions et concepts de base 1
  - 1.1.1 Mécanique des fluides 1
  - 1.1.2 Trois échelles 2
- 1.2 Éléments de la problématique - Nouveauté de ce projet de recherche 3
- 1.3 Objectifs de recherche 3
- 1.4 Plan du mémoire 4

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE 5
- 2.1 Comportements d'une particule/bulle 5
  - 2.1.1 Pour une particule 5
  - 2.1.2 Pour une bulle 6
  - 2.1.3 Lien entre bulles et particules 6
- 2.2 Equation Boussinesq, Basset et Oseen pour une particule sphérique 7
  - 2.2.1 Force de masse ajoutée 8
  - 2.2.2 Force de traînée 10
  - 2.2.3 Force d'histoire 15

2.3 Généralisation de l'équation Boussinesq, Basset et Oseen pour deux particules sphériques . . . 15
2.3.1 Définitions et notations . . . 16
2.3.2 Force de masse ajoutée pour deux particules sphériques . . . 19
2.3.3 Expression de la force de masse ajoutée dans un repère cartésien . . . 27
2.3.4 Force de Meshchersky pour deux particules sphériques . . . 28
2.3.5 Forces de traînée pour deux particules sphériques . . . 29
2.3.6 Expression de la force de traînée dans un repère cartésien . . . 33
2.3.7 Expression de la force de portance . . . 34
2.3.8 Force d'histoire pour deux particules sphériques . . . 37
2.4 Vitesse finale . . . 38
2.5 Trajectoires de deux particules sphériques identiques . . . 39
2.6 Réflexion de la revue de littérature . . . 40
2.6.1 Chercheurs et leurs découvertes . . . 40
2.6.2 Manque . . . 43
2.6.3 Partie complémentaire . . . 43

CHAPITRE 3 DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL . . . 45
3.1 Conception, construction et tests . . . 45
3.1.1 Cuve . . . 45
3.1.2 Plateforme mobile . . . 46
3.1.3 Mécanisme de positionnement de deux particules sphériques . . . 46
3.1.4 Autres considérations . . . 46
3.1.5 Conception, construction et tests - petit bilan . . . 46
3.2 Cadre métallique . . . 47
3.3 Grande cuve, le réservoir d'eau . . . 48
3.3.1 Tuyauterie d'évacuation de l'eau . . . 48
3.4 Vis sans fin . . . 49
3.5 Plateforme mobile . . . 49
3.6 Caméra haute vitesse . . . 52
3.7 Miroir 50/50 . . . 52
3.8 Deux miroirs optiques . . . 54
3.9 Deux plaques fixes en contreplaqué . . . 55
3.10 Mécanisme de positionnement de deux particules sphériques . . . 56
3.10.1 Bras tubulaires . . . 57
3.10.2 Deux tables de positionnement 1 axe . . . 57

3.11 Pompe à vide et son support 58
3.12 Réservoir d'air comprimé 59
3.13 Mécanisme de fixation et de libération de deux particules sphériques 59
3.14 Sources de lumière 60
3.15 Particules sphériques 60
3.15.1 Traitement d'images, des données et reproduction de trajectoires . . . 61

CHAPITRE 4 RÉSULTATS ET DISCUSSIONS 74
4.1 Une seule particule sphérique 74
4.1.1 Trajectoire 74
4.1.2 Vitesse 78
4.1.3 Comparaisons Simulations & Données expérimentales 91
4.2 Deux particules sphériques - côte à côte 93
4.2.1 Trajectoire 94
4.2.2 Rotations de deux particules sphériques* 102
4.2.3 Comparaisons Simulations & Données expérimentales 102
4.3 Deux particules sphériques – devant derrière 106
4.3.1 Trajectoire 106
4.3.2 Vitesse 109
4.3.3 Phénomène intéressant 111
4.3.4 Simulations numériques 111
4.4 Deux particules sphériques – d'autres cas 112
4.4.1 Trajectoire 113
4.4.2 Dépassement 114
4.5 Discussions 116
4.5.1 Erreurs de mesure 116
4.6 Résumé des résultats principaux 117

CHAPITRE 5 BILAN DES TRAVAUX, AMÉLIORATIONS ET TRAVAUX FUTURS 119
5.1 Bilan des travaux 119
5.1.1 Ce que j'ai pu faire 119
5.1.2 Ce que je n'ai pas pu faire 120
5.2 Améliorations 120
5.3 Travaux futurs 121

CHAPITRE 6 CONCLUSION 122

RÉFÉRENCES 124

ANNEXES 128

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Quelques corrélations de coefficients de traînée pour une particule sphérique 11
Tableau 3.1 Particules sphériques utilisées pendant mes expériences . . . 61
Tableau 4.1 Tableau récapitulatif des valeurs des paramètres z_0, t_0, C_1 et C_2 83

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 Lignes de courant pour un flux passant par une particule sphérique (le sens de l'écoulement est de droite à gauche), dans les différents cas de Re ; les valeurs présentées sont celles du potentiel de l'écoulement, en supposant le modèle d'écoulement potentiel [1]. 7

Figure 2.2 Longueur adimensionnée du sillage d'une particule sphérique dans un écoulement dont Re varie dans la plage de 20 à 130 [1–3]. . . 8

Figure 2.3 C_m par rapport au nombre de Reynolds Re pour une seule particule sphérique ; l'équation au-dessus correspond à l'équation (2.2) [4]. 9

Figure 2.4 Comparaison de différents modèles de C_D pour une particule sphérique avec les résultats expérimentaux de Clift *et al.* [1]. 12

Figure 2.5 Lignes de courant (avec un plan de symétrie en bas) autour d'une bulle sphérique dans un fluide newtonien immobile, la valeur du Re est basse ; on voit qu'il y a une circulation interne dans la bulle pour satisfaire la condition de la continuité de la vitesse sur l'interface [1]. 14

Figure 2.6 Lignes de courant (avec un plan de symétrie en bas) autour d'une particule sphérique dans un fluide newtonien immobile, la valeur du Re est basse ; on voit qu'il n'y a pas de circulation interne dans la particule sphérique. Si le diamètre d'une bulle sphérique est assez petit, alors cette dernière peut être assimilée à une particule sphérique [1]. . 14

Figure 2.7 Schéma présentant deux particules sphériques qui sont côte à côte à un instant, et qui ont une même accélération perpendiculaire à la ligne reliant leurs centres à cet instant. 21

Figure 2.8 Schéma d'une bulle sphérique avec la présence d'une paroi verticale, l'accélération de cette bulle est parallèle à la paroi [5]. 22

Figure 2.9 Schéma présentant deux particules sphériques qui sont devant derrière à un instant, et qui ont une même accélération colinéaire à la ligne reliant leurs centres à cet instant. 23

Figure 2.10 Schéma présentant deux bulles sphériques dans un milieu non borné, qui ont une même accélération. Il y a un angle α entre le sens de leur accélération et le sens de la ligne les reliant [5]. 25

Figure 2.11 Coefficient de masse ajoutée par rapport à D/d et à α (respectivement), dans le cas où il y a deux bulles sphériques dans un milieu non borné. Ici on peut facilement voir l'effet de ces deux paramètres sur le coefficient de masse ajoutée [5]. 26
Figure 2.12 Schéma présentant deux particules sphériques - côte à côte, qui ont une même vitesse instantanée, perpendiculaire à la ligne les reliant à un instant. 29
Figure 2.13 Schéma présentant deux particules sphériques - devant derrière, qui ont une même vitesse instantanée colinéaire à la ligne les reliant à un instant. 31
Figure 2.14 Schéma présentant le cas général de deux particules sphériques. Il y a deux angles nommés α_1 et α_2, qui se situent (respectivement) entre le sens de la vitesse instantanée de la particule $i = 1$, $i = 2$ et $\vec{D_{12}}$. 32
Figure 2.15 Schéma présentant comment mesurer l'angle α. 35
Figure 2.16 Vitesse finale d'une particule sphérique dans l'air et dans l'eau à 20 degrés Celsius, en fonction de la masse volumique [1]. 38
Figure 2.17 Schéma présentant deux particules sphériques identiques, côte à côte, dont la vitesse initiale est nulle. Ici l'écart initial $S(t = t_0) = D(t = t_0) - d$. 39
Figure 2.18 Trajectoires des deux particules sphériques dans l'eau immobile - obtenues par des simulations numériques et par des expériences ; l'écart initial $S(t = t_0) = D(t = t_0) - d = d/4 = 10$ mm ; on observe qu'elles s'approchent un peu et puis s'éloignent [6]. 40
Figure 2.19 Écart $S = D - d$ entre les deux particules sphériques par rapport au temps [6]. 41
Figure 3.1 Vue d'en haut du cadre métallique. Le petit carré est réservé à la grande cuve. Les profils de toutes les barres sont tous 40×40 mm. 47
Figure 3.2 La grande cuve, le réservoir d'eau se situant sur le cadre métallique mentionné au-dessus. Les deux lignes noires épaisses représentent deux barres en aluminium rajoutées au cadre métallique. 48
Figure 3.3 Tuyauterie d'évacuation de l'eau, attachée en bas de la grande cuve. 49
Figure 3.4 La verticalité de la vis sans fin est mesurée et vérifiée (ceci se fait plusieurs fois). 49
Figure 3.5 Plateforme mobile. 50
Figure 3.6 Vis sans fin traversant la plateforme via ces deux pièces. . . . 51

Figure 3.7 Plateforme mobile avec tous les objets (une caméra et trois miroirs) mis au-dessus. 51
Figure 3.8 Caméra rapide utilisée, qui prend une forme cube et qui est compacte. Source : Mikrotron @Cube 52
Figure 3.9 Schéma montrant comment le miroir 50/50 superpose deux images d'une façon optiquement équilibrée, vu d'en haut. 53
Figure 3.10 Avec le support du miroir, la lentille de la caméra et le miroir 50/50 sont sur une même hauteur. 54
Figure 3.11 Support d'un miroir optique. La pièce blanche est taraudée afin que l'on puisse faire des ajustements mineurs d'angle. 55
Figure 3.12 56
Figure 3.13 Deux paires de tubes en acier inoxydable. 57
Figure 3.14 Deux tables de positionnement à 1 axe, équipées chacune d'un micromètre dont la course maximale vaut 25 mm (voir les deux rectangles rouges). 58
Figure 3.15 Pompe à vide utilisée. Le débit volumique maximal vaut 3.8 m^3/h et la pression créée peut atteindre jusqu'à 2.0 mbar. Elle se situe sur deux barres en bois afin d'éliminer l'effet de la vibration. 58
Figure 3.16 Schéma présentant toutes les composantes nécessaires pour « attirer » et pour « libérer » deux particules sphériques sous l'eau. . . 59
Figure 3.17 Plateforme mobile ainsi que tous les objets mis au-dessus, vus d'en haut. Le premier système de coordonnées est déjà établi, dont l'axe z est vers le bas. 62
Figure 3.18 Un exemple d'images prises. 63
Figure 3.19 Système de coordonnées vu dans des images. 64
Figure 3.20 Système de coordonnées vu dans des images. 65
Figure 3.21 Cercles détectés à partir d'une série d'images, qui sont (tous) affichés dans une image. 66
Figure 3.22 Positions des cercles détectés à partir d'une série d'images, en fonction de l'index (chaque index correspond à un cercle détecté). Les points bleus représentent le premier numéro des positions et les points rouges le deuxième numéro. 68

Figure 3.23 Trajectoire de la première/deuxième particule, mesurée en pixel, en fonction du temps, exprimée dans le système de coordonnées à la figure 3.19 ou 3.17. La correction est faite. Ici la ligne verte correspond aux valeurs x, la ligne bleue correspond aux valeurs y, la ligne rouge correspond aux valeurs z(gauche) et celle rouge et pointillée z(droite). 70

Figure 3.24 Le rayon mesuré en pixel, de la première particule sphérique, en fonction du temps. Ici l'axe x est le temps (pour l'instant on ne sait pas encore l'instant de la libération t_0). On peut ainsi trouver l'expression du rayon par la méthode d'interpolation linéaire à l'aide de ces trois points. 71

Figure 3.25 Trajectoires d'une paire de particules sous l'eau (mesurée). Ceci est en fait une capture d'écran d'une vidéo. 73

Figure 4.1 Vue principale & vue de gauche de la trajectoire d'une particule sphérique DA-0.3125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=7.9375 mm) relâchée dans l'eau. Deux sphères (jaune, bleue), indiquant respectivement sa position initiale et finale (avant d'être hors de la vue de la caméra), sont rajoutées. 76

Figure 4.2 Trajectoire de la particule DA-0.3125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=7.9375 mm) vue d'en haut. Deux sphères (jaune, bleue), indiquant respectivement sa position initiale et finale (avant d'être hors de la vue de la caméra), sont rajoutées à la sous-figure à gauche. 77

Figure 4.3 Composante « horizontale » des trajectoires pour les cinq types de particules divisée par leurs diamètres (respectivement), en fonction du temps sans dimension. *DA* représente que la masse volumique vaut 1410 kg/m^3, *HDPE* 950 kg/m^3 et *Bois* 670 kg/m^3 ; 0.25, 0.3125, 0.374 et 0.4 représentent respectivement leurs diamètres, exprimés en pouce. 77

Figure 4.4 Composantes de vitesse et Re d'une particule DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) en fonction du temps. Dans la première figure la ligne verte correspond à la composante x, la ligne bleue la composante y, la ligne rouge la composante z(gauche) et celle rouge et pointillée la composante z(droite). Dans la deuxième figure, les deux courbes bleues correspondent au nombre de Reynolds Re, calculé à l'aide des composantes (x y et z(gauche)) et (x y et z(droite)). 79

Figure 4.5 Composantes de la vitesse de la particule DA-0.3125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=7.9375 mm) en fonction du temps. La ligne verte correspond à la composante x, la ligne bleue la composante y, la ligne rouge la composante z(gauche) et celle rouge et pointillée la composante z(droite). 81

Figure 4.6 Ajustement de courbe en prenant les positions z mesurées (à différents instants, $t \leq 0.10$s) dans la phase d'accélération d'une particule sphérique du type DA-0.25 ($\rho_P = 1410$ kg/m^3 et d=6.35 mm) ; une courbe supplémentaire (celle qui est rouge et pointillée, qui correspond au cas où $C_m = 0.5$ et $C_D = 24/\mathrm{Re}$) est rajoutée afin de faire des comparaisons. 84

Figure 4.7 Ajustement de courbe en prenant les positions z mesurées (à différents instants, $t \leq 0.15$s) dans la phase d'accélération d'une particule sphérique du type DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) ; une courbe supplémentaire (celle qui est rouge et pointillée, qui correspond au cas où $C_m = 0.5$ et $C_D = 24/\mathrm{Re}$) est rajoutée afin de faire des comparaisons. 85

Figure 4.8 Ajustement de courbe en prenant les positions z mesurées (à différents instants, $t \leq 0.20$s) dans la phase d'accélération d'une particule sphérique du type DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) ; une courbe supplémentaire (celle qui est rouge et pointillée, qui correspond au cas où $C_m = 0.5$ et $C_D = 24/\mathrm{Re}$) est rajoutée afin de faire des comparaisons. 86

Figure 4.9 Composantes z des vitesses des cinq types de particules sans dimension (façon 1) en fonction du temps sans dimension. *DA* représente que la masse volumique vaut 1410 kg/m^3, *HDPE* 950 kg/m^3 et *Bois* 670 kg/m^3 ; 0.25, 0.3125, 0.374 et 0.4 représentent respectivement leurs diamètres, exprimés en pouce. 87

Figure 4.10 Composantes z des vitesses des cinq types de particules sans dimension (façon 2) en fonction du temps sans dimension. *DA* représente que la masse volumique vaut 1410 kg/m^3, *HDPE* 950 kg/m^3 et *Bois* 670 kg/m^3 ; 0.25, 0.3125, 0.374 et 0.4 représentent respectivement leurs diamètres, exprimés en pouce. 88

Figure 4.11 Amplitude & Composante z de la vitesse d'une particule Polystyrène-0.13 (ρ_P=20 kg/m^3(approxi) et d=3.3 mm) sans dimension (façon 2) en fonction du temps sans dimension. 89

Figure 4.12 Deux évolutions en fonction du temps sans dimension. Ici *DA* représente que la masse volumique vaut 1410 kg/m^3, *HDPE* 950 kg/m^3 et *Bois* 670 kg/m^3 ; 0.25, 0.3125, 0.374 et 0.4 représentent respectivement leurs diamètres, exprimés en pouce. 90

Figure 4.13 Quelques comparaisons entre les résultats expérimentaux et ceux venant des simulations numériques. (a) et (b) : la vitesse de la particule DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) en fonction du temps (t_0 exclus) et sa trajectoire en fonction du temps (t_0 exclus) ; (c) et (d) la particule DA-0.3125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=7.9375 mm). On observe que dans chaque figure ils se superposent bien peu après la libération, puis au fur et à mesure s'éloignent. 92

Figure 4.14 Schéma de deux particules sphériques identiques, qui sont initialement immobiles sur une ligne horizontale ; elles sont libérées en même temps et leurs vitesses initiales sont nulles. 93

Figure 4.15 Schéma présentant l'impulsion (d'une façon indirecte) sur une particule sphérique à l'instant où elle est libérée. 93

Figure 4.16 Trajectoires d'une paire de particules sphériques DA-0.374 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=9.5 mm), dont la distance centre-centre initiale $D(t = t_0) = d$ (donc en contact). Aux premiers instants leurs positions n'ont pas pu être identifiées. 94

Figure 4.17 Trajectoires d'une paire de particules sphériques DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=3.175 mm), dont la distance centre-centre initiale $D(t = t_0) = d$. Aux premiers instants leurs positions n'ont pas pu être identifiées. 96

Figure 4.18 Variations de la distance centre-centre D d'une paire de particules DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm, $D(t = t_0) = d + 4$ mm). La ligne violette correspond à la distance D, la ligne bleu foncé correspond à la projection dans un plan horizontal et la ligne cyan la projection dans le sens vertical. 98

Figure 4.19 Évolution de la distance centre-centre minimale en fonction de celle qui est initiale, toutes les valeurs sont sans dimension (divisées par le diamètre correspondant). 99

Figure 4.20 Évolution de la position z du col (qui commence par 0) en fonction de celle qui est initiale, toutes les valeurs sont sans dimension (divisées par le diamètre correspondant). 100

Figure 4.21 Évolution de l'instant où le col est atteint (t_0 exclus) en fonction de la distance centre-centre initiale, toutes les valeurs sont sans dimension (divisées par le diamètre correspondant et adimensionné à l'aide de la formule (4.7)). 101

Figure 4.22 Schéma présentant la rotation des deux particules sphériques. Les deux lignes pointillées représentent leurs trajectoires. 102

Figure 4.23 Trajectoires d'une paire de particules DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=3.175 mm), qui sont initialement côte à côte (sans vitesse initiale). Initialement $D(t = t_0) = d$ (donc en contact). t est dans la plage t_0 et $t_0 + 0.2s$. 103

Figure 4.24 Comparaison de D (figure b) et de la vitesse (figure a) (simulations numériques et expériences) si nous traitons le cas d'une paire de particules DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=3.175 mm), qui sont initialement côte à côte (sans vitesse initiale). Initialement $D(t = t_0) = d$ (donc en contact). t est dans la plage t_0 et $t_0 + 0.2$ s. On voit que, comme dans le cas d'une seule particule, la simulation numérique a « sur-estimé » la vitesse des particules, mais « sous-estimé » la distance centre-centre D. 104

Figure 4.25 $D(t = t_0 + 0.2 \text{ s})/d$ (donc sans dimension) en fonction du diamètre (avec dimension) pour 4 types de particules (du même matériau DA, dont ρ_P=1410 kg/m^3, de différents diamètres). Une courbe présentant la tendance est rajoutée. 105

Figure 4.26 En prenant le type de particule DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=3.175 mm, on constate que le « profil » de la vitesse de chacune d'une paire de particules (initialement côte à côte - CàC) est légèrement différent de celui de la vitesse d'une seule particule (pendant la phase d'accélération). La ligne rouge pointillée est « cachée » par la ligne bleue. 106

Figure 4.27 Trajectoires d'une paire de particules sphériques DA-0.374 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=9.5 mm) qui sont devant derrière initialement. Une fois qu'elles sont libérées, la particule derrière S2 accélère d'une façon telle que la ligne les reliant devient un vecteur (proche d'être) horizontal rapidement. 107

Figure 4.28 Trajectoire de la particule derrière, qui est impactée par le sillage de celle devant elle, peut être décrite en deux catégories. 108

Figure 4.29 Distance centre-centre D entre deux particules DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm), en fonction du temps. Ici S1 est la particule devant et S2 derrière. 109

Figure 4.30 Amplitude des vitesses d'une paire de particules DA-0.374 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=9.5 mm). S1 est celle qui est devant et S2 qui est derrière. 110

Figure 4.31 Images présentant la tombée d'une paire de particules sphériques Nylon-0.125 (ρ_P=1150 kg/m^3 et d=3.175 mm), qui est sur une ligne verticale et qui se touchent initialement. Une fois que la ligne les reliant devient horizontale et qu'ainsi leur vitesse finale est atteinte, elles continuent à tomber, mais tout en gardant le contact. L'écart du temps entre deux images consécutives vaut environ 20.0 ms. 111

Figure 4.32 (a) : distance centre-centre D en fonction du temps ; (b) : vitesses d'une paire de particules DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm), qui sont initialement devant derrière (sans vitesse initiale). $D(t = t_0) = d + 1.5$ mm. 112

Figure 4.33 Schéma présentant deux particules sphériques identiques. Initialement elles ne sont ni sur une ligne horizontale ni sur une ligne verticale. 112

Figure 4.34 Schéma présentant la trajectoire de la particule S2 (celle derrière). Les deux lignes pointillées présentent deux catégories de « chemin » possibles. 114

Figure 4.35 Tableau avec des points ou des étoiles nous disant si la particule S2 (derrière) peut-elle dépasser celle devant elle - S1. Deux courbes y sont rajoutées afin de montrer la tendance. 115

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Nombres dimensionnels et adimensionnels

g	Valeur absolue de l'accélération gravitationnelle (m/s^2)
σ	Tension superficielle (N/m)
r, d	Rayon et diamètre d'une particule (solide ou fluide) (m)
D, D_x, D_z	Distance centre-centre entre deux centres de particules (solides ou fluides) et sa projection (m)
$\vec{D_{12}}$, $\|\|\vec{D_{12}}\|\| \equiv D$	Vecteur du centre de la particule 1 à celui de la particule 2 et son module (m)
$S = D - d$	Écart entre deux particules (solides ou fluides) (m)
h	Distance entre le centre d'une particule (solide ou fluide) et une paroi rigide (m)
z	Composante de la position ou de la trajectoire dans le sens vertical (m)
z_0	Composante de la position dans le sens vertical quand la particule est libérée (m)
t_0	Instant où une particule est libérée (s)
μ_L	Viscosité dynamique du fluide environnant (Pa.s)
μ_P	Viscosité dynamique d'une particule fluide (Pa.s)
ρ_L	Masse volumique du fluide environnant (kg/m^3)
ρ_P	Masse volumique d'une particule (solide ou fluide) (kg/m^3)
$\Delta\rho$	Différence de deux masses volumiques (kg/m^3)
$\vec{u}$, u	Vitesse (instantanée) d'une particule (solide ou fluide) et son module (m/s)
$\vec{V_T}$, V_T	Vitesse finale d'une particule (solide ou fluide) et son module (m/s)
a, b, c	Longueurs des trois demi-axes d'une ellipsoïde (m) (dans le 2ème chapitre)
$\vec{F}$	Une force (N)
$\vec{F_D}$, F_D	Force de traînée et son module (N)
$\vec{F_m}$, F_m	Force de masse ajoutée et son module (N)
$\vec{F_M}$, F_M	Force de Meshchersky et son module (N)
$\vec{X_i}$	Position du centre de masse de la particule i (m)

—	—
$\overline{t}$	Temps adimensionné $(-)$
$\overline{u}^1$, $\overline{u}^2$	Vitesse adimensionnée (deux façons) $(-)$
E	Rapport d'aspect d'un sphéroïde $(-)$
$\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$	Tenseur identité $(-)$
$\hat{C_D}$, $C_D\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$	Tenseur et coefficient de traînée $(-)$
$\hat{C_m}$, $C_m\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$	Tenseur et coefficient de masse ajoutée $(-)$
C_H Coefficient d'histoire$(-)$ —	—
$*_{pa}$	Composante d'une grandeur physique qui est parallèle à la ligne reliant deux particules
$*_{pe}$	Composante d'une grandeur physique qui est perpendiculaire à la ligne reliant deux particules
$*^{ind}$	Une grandeur physique induite*
—	—
$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho_L u d}{\mu_L}$	Nombre de Reynolds
$\mathrm{Eo} = \dfrac{\lvert\rho_L - \rho_P\rvert g d^2}{\sigma}$	Nombre de Eötvös
$\mathrm{We} = \dfrac{\rho_L u^2 d}{\sigma}$	Nombre de Weber
$\mathrm{Mo} = \dfrac{g\mu_L^4\lvert\rho_L - \rho_P\rvert}{\rho_L^2\sigma^3}$	Nombre de Morton
$\mathrm{Ac} = \dfrac{u^2}{d\frac{du}{dt}}$	Nombre d'accélération
$\mathrm{Ar} = \dfrac{g d^3\rho_L\lvert\rho_L - \rho_P\rvert}{\mu_L^2} = \mathrm{Ga}^2$	Nombre d'Archimède
$\mathrm{Ga} = \dfrac{\sqrt{g d^3\rho_L\lvert\rho_L - \rho_P\rvert}}{\mu_L}$	Nombre de Galilée
$\mathrm{Fr} = \dfrac{u^2}{gd}$	Nombre de Froude

LISTE DES ANNEXES

Annexe A Coefficients de masse ajoutée et de traînée - Solution analytique . . . 128

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

L'interaction entre des particules submergées dans un fluide est un thème qui a été abordé dans plusieurs domaines. En général, l'interaction entre un fluide et des structures solides est au cœur d'une large gamme de procédés.

En génie chimique, une partie importante des activités de recherche se concentre sur des procédés impliquant des particules, plus précisément sur ceux impliquant des particules en interaction avec un fluide, autrement dit, des particules submergées qui ne se touchent pas tout le temps [7]. On peut citer quelques exemples : les opérations de séparation (séparateur de type cyclone par exemple) ; les réactions à l'aide de lit fluidisé ; les opérations de transport de particules par un liquide (*slurry transport* en anglais) ou par un gaz (*pneumatic transport* en anglais). Souvent, les dimensions caractéristiques d'un tel système peuvent être supérieures à 1 mètre voire 10 mètres alors que les particules ont une dimension caractéristique de 1 mm, voire plus petite [8].

En génie mécanique, il y a aussi un nombre important d'activités de recherche sur les comportements de plusieurs particules/bulles, submergées dans un fluide et passant par une structure - le grenaillage d'une pièce, les écoulements dans une turbine à vapeur ou hydroélectrique, par exemple.

L'étude de l'interaction entre des bulles dans un fluide devient un thème de plus en plus nécessaire dans le contexte d'une demande croissante d'énergie aujourd'hui. L'industrie minière a également des fluides chargés de particules.

En général, en revenant sur des particules, on peut dire que comprendre les phénomènes propres aux régimes d'écoulement (de fluide) autour de particules de différentes tailles et les effets des interactions hydrodynamiques des particules nous permet non seulement une meilleure capacité de modélisation d'une façon macroscopique de systèmes industriels, mais aussi une meilleure compréhension de plusieurs phénomènes observés dans la nature.

1.1 Définitions et concepts de base

1.1.1 Mécanique des fluides

La mécanique des fluides est le domaine de la physique consacré à l'étude du comportement des fluides (liquides, gaz et plasmas) et des forces internes consacrées (des forces qui y sont appliquées).

Dans le contexte du développement rapide de différentes méthodes numériques, beaucoup d'activités de recherche sont effectuées sur la Mécanique des Fluides Numérique (*Computational Fluid Dynamics* en anglais) au cours des dernières décennies – en utilisant différentes méthodes comme celle des éléments finis, des volumes finis, de Lattice-Boltzmann, des éléments discrets (pour simuler de petites particules) *etc.*, des résultats fructueux ont été obtenus à partir de différentes simulations numériques. Quand on recherche des articles sur la base de données – *google scholar* – avec les mots-clés « interaction* », « particle* », « fluid* », on trouve qu'il y a relativement moins d'articles qui présentent à la fois des résultats numériques et expérimentaux (environ 16000 résultats si on rajoute le mot-clé « numeric* » et seulement environ 2120 si on rajoute « numeric* » et « experi* », si la plage de temps choisie est de 1980 à 2020). Ceci nous a ainsi inspirés. Avec le soutien des résultats numériques et celui des résultats expérimentaux, pour un même sujet de recherche, on pourra mieux faire de comparaisons et avoir des conclusions plus convaincantes.

1.1.2 Trois échelles

En mécanique des fluides, afin d'expliquer un phénomène, nous avons souvent trois échelles à analyser – l'échelle microscopique, l'échelle mésoscopique et celle macroscopique.

À l'échelle microscopique, qui est le niveau le plus bas de la modélisation, le fluide est considéré composé par des « molécules », ainsi décrit par position et vitesse de chaque « molécule » consécutive et le potentiel d'interaction entre elles. Ce niveau est aussi introduit pour des tentatives de construction *ab initio* d'un système formel de description macroscopique du milieu mais ce type d'approche est extrêmement difficile et peu de résultats ont été obtenus [1].

À l'échelle mésoscopique, on définit un VER (Volume Élémentaire Représentatif) : un volume qui est suffisamment petit, dans lequel les propriétés du fluide varient peu spatialement ; un VER est aussi un volume qui est suffisamment grand tel qu'une quantité importante de « molécules » mentionnées au-dessus sont comprises dedans de manière à moyenner les fluctuations statistiques [9]. Un VER est représenté par un point avec masse (la masse totale de toutes les particules dedans) se situant au centre de gravité. En faisant la prise de moyenne volumique (les fluctuations statistiques ne sont pas prises en compte) et l'homogénéisation en regardant chaque VER, nous sommes ainsi capables d'établir les équations le bilan de masse, celui de quantité de mouvement ainsi que celui d'énergie, ensuite les équations de conservation correspondantes. Finalement les fameuses équations de Navier-Stokes sont établies (voir la prochaine sous-partie) [1].

À l'échelle macroscopique, un problème dans notre vie quotidienne est simplifié sans avoir tous les détails. On définit un VER plus grand incluant de nombreuses particules ou bulles

afin de pouvoir établir des équations de Navier-Stokes qui sont moyennées. Spécialement pour des bulles, le processus de moyennage fait apparaître le terme « taux de vide » - qui définit le rapport entre le volume total des bulles dans ce grand VER et celui de ce VER - dans les équations.

La compréhension de phénomènes hydrodynamiques à une petite échelle est un facteur clé afin d'obtenir une meilleure compréhension de ce qui se passe à une échelle plus grande. L'établissement de la modélisation d'interactions entre les particules et le fluide à l'échelle macroscopique est basé sur les interactions à l'échelle microscopique et les éléments qui y contribuent.

1.2 Éléments de la problématique - Nouveauté de ce projet de recherche

Des chercheurs (Clift *et al.* [1], Leichtberg *et al.* [10], Tsuji [11], Lee [12], Zhu *et al.* [13], etc.) ont fait leurs expériences en fixant la/les position(s) d'une/de deux particule(s) sphérique(s) pour différentes propriétés de l'écoulement entourant la/les particule(s). Pendant une telle expérience, la position relative d'une particule sphérique par rapport à l'autre n'évolue pas et ainsi ils peuvent mesurer des forces appliquées et les paramètres correspondants, qui pourront sûrement changer de valeur si la position relative d'une particule sphérique par rapport à l'autre évolue. Il serait ainsi intéressant de prévoir les trajectoires des particules sphériques submergées à partir de la connaissance de leurs positions relatives et des corrélations obtenues avec des particules fixes - dans le cadre de ce travail, je décide d'étudier expérimentalement deux particules sphériques rigides, identiques, comme le premier pas vers des cas plus complexes à l'avenir.

Clift a fait des expériences dans les années 80 et a utilisé trois mots pour décrire les comportements de deux particules sphériques rigides submergées dans l'eau – « drafting », « kissing » and « tumbling » [1].

Due à la complexité de cet axe de recherche, j'ai ainsi décidé de prendre la partie expérimentale et un autre étudiant Lucka Barbeau a fait son choix d'inclure la partie numérique dans ses activités de recherche étant un étudiant au doctorat.

1.3 Objectifs de recherche

Mon projet de recherche s'inscrit dans un projet plus ambitieux dont l'objectif final est de construire un modèle permettant de prédire la trajectoire d'une particule ou d'une bulle de gaz dans l'eau, au sein d'un nuage d'autres particules ou bulles. Les résultats de ce projet

pourront aider à modéliser les problèmes qui ont été mentionnés au-dessus dans les premiers paragraphes.

Pour mon projet, plus précisément, j'ai un objectif spécifique :

— Contribuer à l'élaboration d'un outil de prédiction des trajectoires de deux particules sphériques rigides identiques, initialement immobiles, qui sont submergées dans l'eau ;
— Contribuer à créer une base de données des trajectoires à partir des expériences.

Nous pouvons utiliser, vérifier ou modifier des formules existantes, qui ont été développées par les chercheurs dans ce domaine et qui nous ont aidés à établir des équations décrivant leurs trajectoires, surtout celles concernant le coefficient de traînée et le coefficient de masse ajoutée. Ces formules vont être introduites dans le prochain chapitre – revue de littérature.

1.4 Plan du mémoire

Dans ce mémoire, le deuxième chapitre propose une revue de littérature, qui nous permet de montrer les découvertes récentes dans ce domaine ; le troisième chapitre est consacré à la description détaillée du protocole et de l'ensemble du dispositif expérimental ; dans le quatrième chapitre, tous les résultats sont présentés et discutés. Enfin les derniers chapitres donnent un bilan de la campagne de mesure et proposent des travaux futurs envisagés pour aller plus loin.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Dans le cadre de mes travaux, nous étudions un fluide newtonien (l'eau) au repos contenant uniquement deux particules sphériques rigides indéformables en interaction. La présence de la deuxième particule va perturber l'écoulement autour de la première et cette perturbation sera d'autant plus importante que les particules sont proches.

Ce chapitre est découpé en trois parties :

— La partie 1 étudie les comportements d'une particule/d'une bulle dans un fluide newtonien ;
— Les parties 2 et 3 présentent des corrélations concernant les forces appliquées sur une particule sphérique/bulle ainsi que leurs coefficients (spécialement, le coefficient de masse ajoutée et le coefficient de traînée), en règle générale et dans des cas spéciaux ;
— La partie 4 aborde la trajectoire et la vitesse finale d'une particule sphérique/bulle dans un fluide newtonien.

Dans ce chapitre, parmi les expressions et les conclusions qui sont explicitement présentées dans les articles, il y a quelques (sous-)sections dans lesquelles des hypothèses (des expressions proposées par moi-même) sont faites. Ces (sous-)sections y sont rajoutées et insérées dans le but de pouvoir établir et compléter un modèle – le modèle prenant en compte toutes les forces appliquées sur une particule sphérique (avec la présence d'une autre à côté). Je fais mes propositions à partir :

— des expressions se trouvant dans plusieurs articles et ayant une structure similaire (voire identique) ;
— des résultats numériques qui sont initialement présentés sous forme de tableau ou de figure dans certains articles, mais là, il n'y a pas d'expression explicitement donnée.

Dans la suite, on prend le mot « particule » pour indiquer une particule sphérique, qui est rigide, indéformable, dont la rugosité est assez petite pour que celle-ci puisse être considérée comme lisse ; le mot « bulle » pour indiquer une bulle, qui n'est pas sphérique *a priori*.

2.1 Comportements d'une particule/bulle

2.1.1 Pour une particule

Pour une particule sphérique dans un fluide newtonien, Clift *et al.* [1] ont divisé la plage de nombres de Reynolds (Re) en plusieurs parties :

- $1 < \mathrm{Re} < 20$ - sillage non séparé ;
- vers $\mathrm{Re} \approx 20$ - le sillage commence à se séparer et la séparation est indiquée par un changement du signe de la vorticité et se produit d'abord au point de stagnation derrière ;
- $20 < \mathrm{Re} < 130$ - sillage stationnaire : un anneau de séparation se déplace vers l'avant de sorte que le sillage de recirculation attaché s'élargit et s'allonge ;
- $130 < \mathrm{Re} < 400$ - sillage instationnaire mais peu turbulent : la diffusion et la convection de la vorticité ne suivent plus le rythme de la génération de tourbillons, au lieu de cela, des « poches » discrètes de tourbillon commencent à se dégager du sillage ;
- $400 < \mathrm{Re} < 3.5 \times 10^5$ - écoulement sous-critiques ;
- $\mathrm{Re} \geq 3.5 \times 10^5$ - écoulement super-critique.

La figure 2.1 montre les lignes de courant devant/derrière une particule sphérique pour différents nombres de Reynolds Re [1]. On observe que le sillage apparaît dès que Re devient supérieur à une certaine valeur entre 10 et 50.

La figure 2.2 décrit la longueur adimensionnée du sillage d'une particule sphérique dans un écoulement dont $20 \leq \mathrm{Re} \leq 130$ [1–3].

2.1.2 Pour une bulle

Le comportement d'une bulle dans un liquide newtonien diffère de celui d'une particule – la forme d'une bulle varie pendant le mouvement tandis que la particule est rigide donc indéformable. Il est quand même très intéressant d'étudier le comportement d'une bulle et à la fois celui d'une particule dans un liquide newtonien parce qu'il y a des similitudes.

2.1.3 Lien entre bulles et particules

Les expériences de Kok [14] ont montré que les interactions hydrodynamiques entre bulles dépendent de la qualité de l'eau - généralement, si du tensioactif (*surfactant* en anglais) est rajouté dans l'eau, de petites bulles se comportent comme des particules sphériques. Ces observations expérimentales de Kok sont en accord avec les résultats analytiques de Biesheuvel et Van Wijngaarden [15].

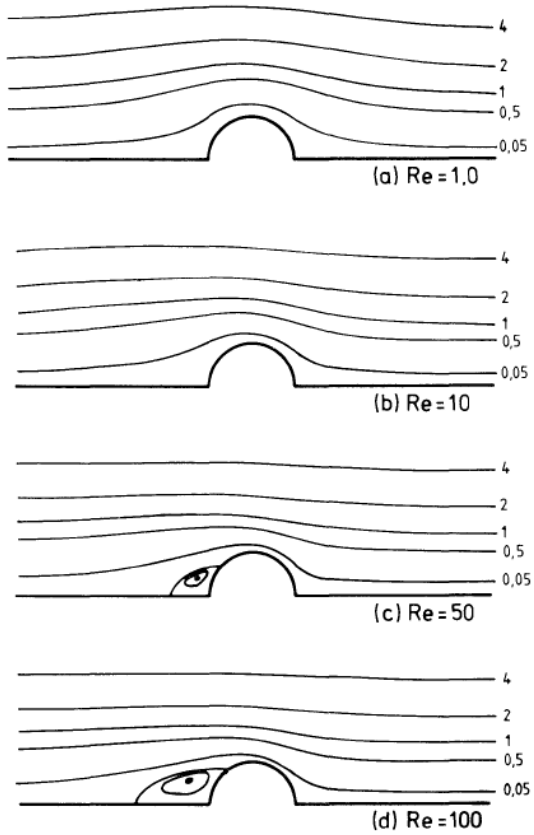


Figure 2.1 Lignes de courant pour un flux passant par une particule sphérique (le sens de l'écoulement est de droite à gauche), dans les différents cas de Re ; les valeurs présentées sont celles du potentiel de l'écoulement, en supposant le modèle d'écoulement potentiel [1].

2.2 Equation Boussinesq, Basset et Oseen pour une particule sphérique

Oseen a étudié le mouvement d'une particule sphérique dans un fluide newtonien ; avec Boussinesq et Basset, il a développé une équation du mouvement pour une particule sphérique [4], on la nomme l'équation Boussinesq, Basset et Oseen :

$$\begin{aligned}\rho_P \frac{\pi d^3}{6}\frac{d\vec{u}}{dt} = & \underbrace{-\rho_L \frac{\pi d^3}{6}\frac{d}{dt}\left[\hat{C_m}\vec{u}\right]}_{\text{Force de masse ajoutée}} \underbrace{-\frac{1}{2}\rho_L \frac{\pi d^2}{4}\hat{C_D}||\vec{u}||\vec{u}}_{\text{Force de traînée}} \\ & + \underbrace{(\rho_P - \rho_L)\frac{\pi d^3}{6}\vec{g}}_{\text{Force de flottabilité}} \underbrace{-C_H \frac{d^2}{4}(\pi \mu_L \rho_L)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{d\vec{u}}{d\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}}_{\text{Force d'histoire}}\end{aligned} \tag{2.1}$$

avec d le diamètre de la particule, $\vec{u}$ sa vitesse instantanée, ρ_P sa masse volumique, ρ_L

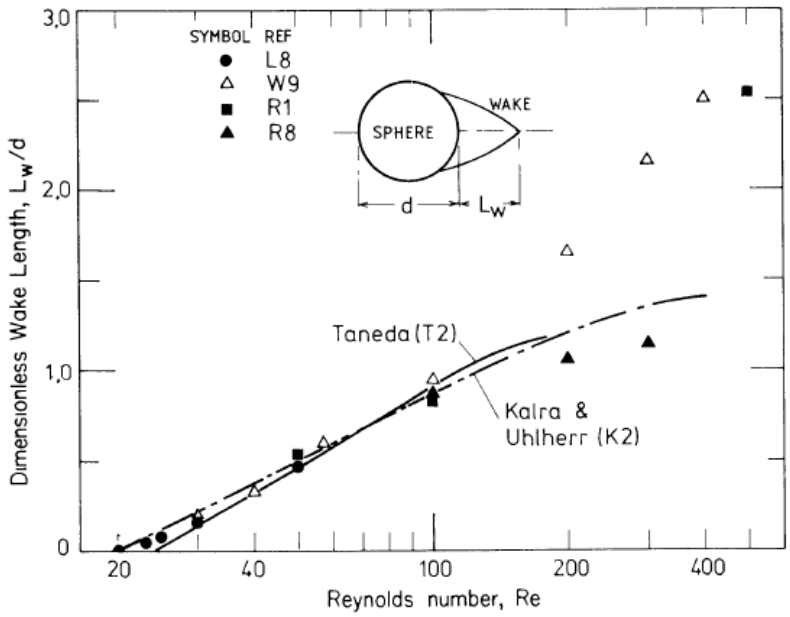


Figure 2.2 Longueur adimensionnée du sillage d'une particule sphérique dans un écoulement dont Re varie dans la plage de 20 à 130 [1–3].

et μ_L respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide environnant. $\hat{C_m}$,$\hat{C_D}$,C_H sont respectivement le tenseur de masse ajoutée, le tenseur de traînée et le coefficient d'histoire. Les sections suivantes sont consacrées à décrire les corrélations trouvées dans la littérature pour ces forces.

2.2.1 Force de masse ajoutée

Quand une particule accélère ou décélère dans un fluide, du fluide accélère ou décélère aussi. Autrement dit, s'il y a une force qui est appliquée sur la particule et qui la fait accélérer ou décélérer, alors cette force est partiellement utilisée pour communiquer une accélération aux « molécules » fluides. Ainsi, la force de masse ajoutée est une force qui n'existe que dans le cas où une particule accélère ou décélère.

Batchelor [16] a proposé une définition tensorielle du coefficient de masse ajoutée $\hat{C_m}$. Ici celui de traînée est aussi noté de la même façon.

Pour un corps en mouvement, la force de masse ajoutée $\vec{F_m}$ et $d\vec{u}/dt$ (vitesse relative) sont alignés en général, mais il y a aussi principalement deux facteurs ayant un impact : la forme du corps et la présence d'autres corps ou parois [17].

$\hat{C_m}$ est un tenseur non diagonal *a priori*.

Pour une particule sphérique

Une particule sphérique dans un fluide newtonien immobile, qui accélère ou décélère, subit une force de masse ajoutée qui est colinéaire à son accélération, on note ainsi $\hat{C_m} = C_m \bar{\bar{\boldsymbol{I}}}$.

Discussion-1

Le coefficient de masse ajoutée pour une particule sphérique dans un milieu infini vaut 0.5, si le nombre de Reynolds est faible (Re $<$ 130, le sillage est stationnaire) [1].

Discussion-2

Dans un autre article, Kendoush *et al.* constatent après des mesures que C_m décroît légèrement avec Re (voir la figure 2.3), de 0.55 à 0.50 [4, 17].

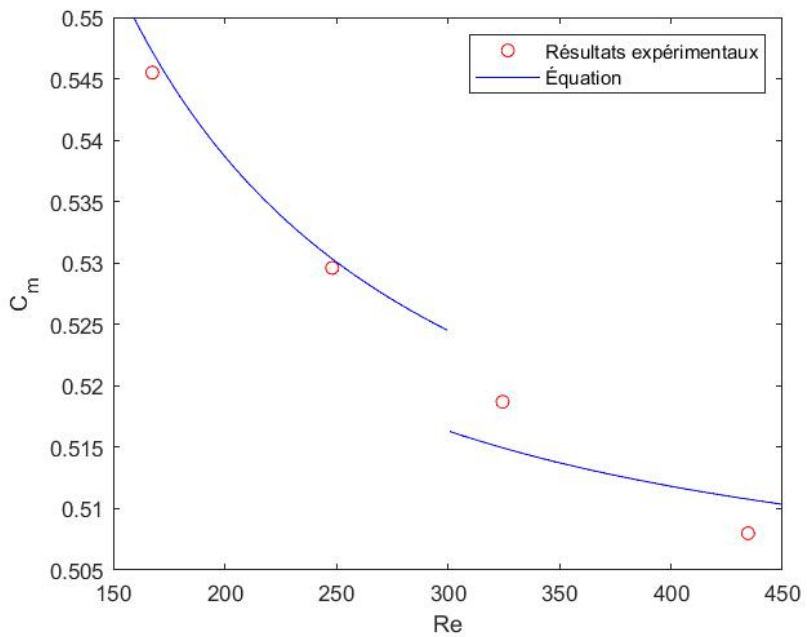


Figure 2.3 C_m par rapport au nombre de Reynolds Re pour une seule particule sphérique ; l'équation au-dessus correspond à l'équation (2.2) [4].

L'expression (2.2) correspond à l'équation dans la figure 2.3 [4] :

$$C_m = 0.5 + C_1 \mathrm{Re}^{-1.125} \tag{2.2}$$

Ici C_1 est un paramètre qui dépend de Re :

- $C_1 = 15$ si $100 \leq \mathrm{Re} \leq 300$
- $C_1 = 10$ si $300 \leq \mathrm{Re} \leq 500$

— $C_1 = 5$ si Re ≥ 500

En observant l'équation (2.2), on constate que quand Re tend vers 0, C_m tend vers l'infini, ce qui n'est pas possible. Une raison possible est que les chercheurs aient fait une erreur dans leur modélisation des autres forces.

En fait, la corrélation $C_m = 0.5$ est celle qui est largement adoptée.

Pour une bulle sphérique

Pour une bulle sphérique (dont le diamètre est environ 2 mm) se déplaçant dans un fluide newtonien non borné, Simcik *et al.* [5] trouvent, grâce à un calcul numérique $C_m = 0.5$. Cette valeur a aussi été obtenue analytiquement à partir de l'approche d'écoulement potentiel [18].

En plus, Kendoush a trouvé analytiquement que le coefficient de masse ajoutée pour une bulle sphérique en croissance ou en effondrement est une fonction inverse de Re [19].

2.2.2 Force de traînée

La force de traînée est une force agissant à l'opposé du mouvement relatif de tout objet se déplaçant par rapport à un fluide environnant. Le coefficient de cette force est étroitement lié au nombre de Reynolds Re.

La force de traînée dont on parle ici se limite à celle qui ne dépend que de la vitesse du centre de masse [1]. Autrement dit, on ne prend pas en compte la rotation d'une particule/bulle et on est seulement intéressé par le déplacement de son centre de masse.

Pour une particule sphérique

Si l'on a une seule particule sphérique de diamètre d dans un fluide newtonien, on peut faire une simplification telle que $\hat{C_D} = C_D \bar{\bar{\boldsymbol{I}}}$. Voici un tableau récapitulatif d'expressions de coefficient de traînée (Tableau 2.1). La première expression correspond au régime de Stokes.

On peut remarquer que dans le tableau 2.1 les quatre premières expressions ont une structure similaire.

La comparaison de différents modèles de C_D avec des résultats expérimentaux de Clift *et al.* [1] se trouve à la figure 2.4.

Tableau 2.1 Quelques corrélations de coefficients de traînée pour une particule sphérique

Auteur(s)	Intervalle de validité de Re	Expression de C_D
Clift *et al.* [1]	$0-130$	$\frac{24}{\mathrm{Re}}$
Schiller et Naumann [20]	$0-800$	$\frac{24}{\mathrm{Re}}(1+0.15\mathrm{Re}^{0.687})$
Schiller et Naumann [1]	$10-10^3$	$\frac{24}{\mathrm{Re}}(1+\frac{1}{6}\mathrm{Re}^{2/3})$
Lapple [21]	$0-1000$	$\frac{24}{\mathrm{Re}}(1+0.125\mathrm{Re}^{0.72})$
Langmuir et Blodgett [22]	$1-100$	$\frac{24}{\mathrm{Re}}(1+0.197\mathrm{Re}^{0.63}+2.6\times10^{-4}\mathrm{Re}^{1.38})$
Allen [23]	$2-500$	$10\mathrm{Re}^{-0.5}$
Allen [23]	$1-1000$	$30\mathrm{Re}^{-0.625}$
Gilbert *et al.* [24]	$0.2-2000$	$0.48+28\mathrm{Re}^{-0.85}$
Kurten *et al.* [25]	$0.1-4000$	$0.28+\frac{6}{\mathrm{Re}^{0.5}}+\frac{21}{Re}$
Abraham [26]	$0-6000$	$0.2924\left(1+9.06\mathrm{Re}^{-0.5}\right)^2$
Clift et Gauvin [27]	$\mathrm{Re} < 3\times10^5$	$\frac{24}{\mathrm{Re}}(1+0.15\mathrm{Re}^{0.687})+\frac{0.42}{1+4.25\times10^4\mathrm{Re}^{-1.16}}$
Brauer [28]	$\mathrm{Re} < 3\times10^5$	$0.40+\frac{4}{\mathrm{Re}^{0.5}}+\frac{24}{\mathrm{Re}}$
Inme *et al.* [29]	$\mathrm{Re} < 10^4$	$0.36+\frac{5.48}{\mathrm{Re}^{0.573}}+\frac{24}{\mathrm{Re}}$
–	–	–
Oseen [30]	$\mathrm{Re} < 0.01$	$\frac{24}{\mathrm{Re}}+\frac{3}{16}$
Clift [1]	$0.01-20$	$\frac{24}{\mathrm{Re}}\left[1+0.1315\mathrm{Re}^{0.82-0.05w}\right]$
Clift [1]	$20-200$	$\frac{24}{\mathrm{Re}}\left[1+0.1935\mathrm{Re}^{0.6305}\right]$
Tanaka et Iinoya [31] ($w=log_{10}\mathrm{Re}$)	2.6×10^2-1.5×10^3	$10^{0.1558w^2-1.1242w+1.6435}$
	1.5×10^3-1.2×10^4	$10^{0.1049w^3-0.9295w^2+2.5558w}$
	1.2×10^4-4.4×10^4	$10^{-0.0636w^2+0.6370w-1.9181}$
	4.4×10^4-3.38×10^5	$10^{-0.1546w^2+1.5809w-4.3390}$
	3.38×10^5-4×10^5	$10^{-2.4571}$
	$4\times10^5-10^6$	$-5.3w+29.78$
		$0.1w-0.49$

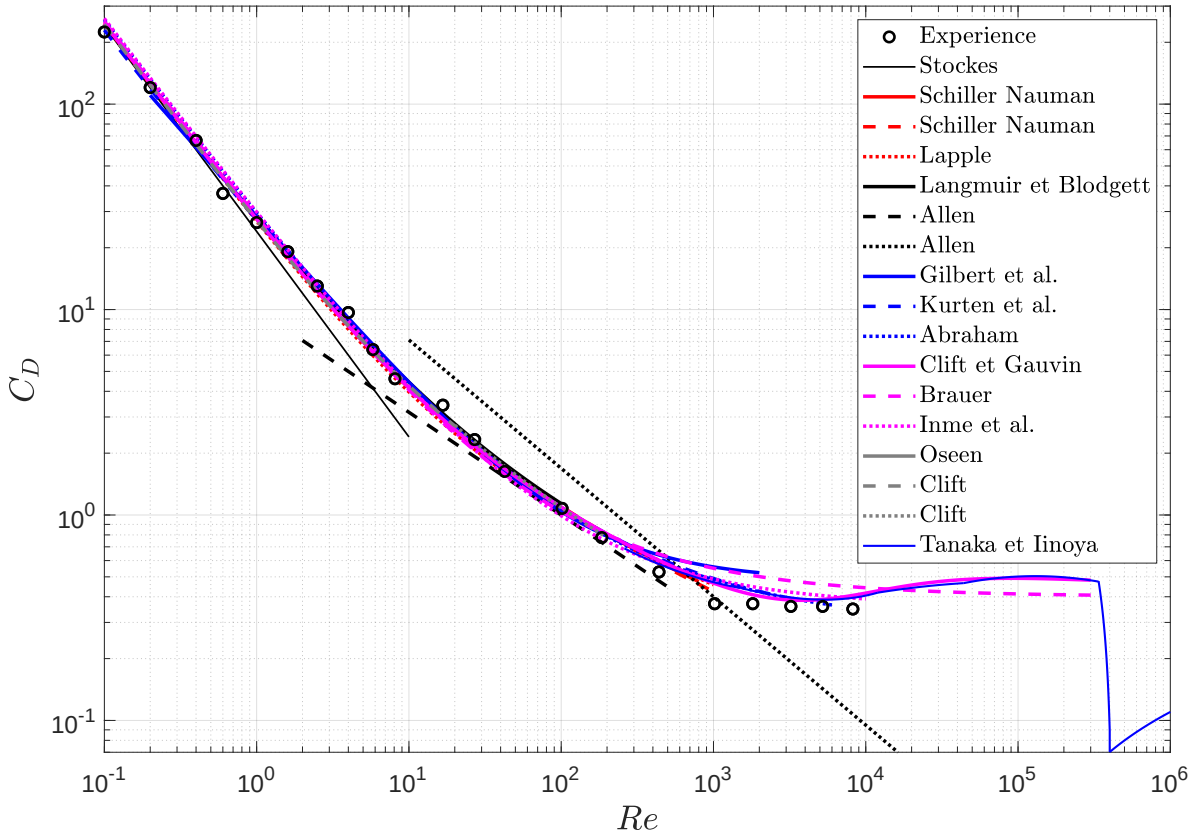


Figure 2.4 Comparaison de différents modèles de C_D pour une particule sphérique avec les résultats expérimentaux de Clift *et al.* [1].

Pour une bulle sphérique

Pour une bulle sphérique (dont le diamètre vaut 2 mm ou moins) dans l'eau, une fois sa vitesse finale obtenue, voici les 5 corrélations de coefficient de traînée les plus connues (donc largement adoptées), qui ressemblent beaucoup à celles dans le tableau 2.1 :

Corrélation de Schiller et Naumann [32]

$$C_D = \max\{\frac{24}{\mathrm{Re}}(1 + 0.15\mathrm{Re}^{0.687}), 0.44\} \tag{2.3}$$

Corrélation d'Ishii et Zuber [33]

$$C_D = \max\{\frac{24}{\mathrm{Re}}(1 + 0.1\mathrm{Re}^{0.75}), \min\{\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{Eo}}, \frac{8}{3}\}\} \tag{2.4}$$

Corrélation de Peebles et Garber [34]

$$C_D = \max\{\max\{\frac{24}{\mathrm{Re}}, \frac{18.7}{\mathrm{Re}^{0.68}}\}, \min\{0.0275\mathrm{EoWe}^2, 0.82\mathrm{Eo}^{0.25}\mathrm{We}^{0.5}\}\} \tag{2.5}$$

Corrélation de Wallis [35]

$$C_D = \max\{\min\{\max\{\frac{16}{\mathrm{Re}}, \frac{13.6}{\mathrm{Re}^{0.8}}\}, \frac{48}{\mathrm{Re}}\}, \min\{\frac{\mathrm{Eo}}{3}, 0.47\mathrm{Eo}^{0.25}\mathrm{We}^{0.5}, \frac{8}{3}\}\} \tag{2.6}$$

Corrélations de Tomiyama *et al.* [36, 37]

- dans l'eau pure

$$C_D = \max\{\min\{\frac{16}{\mathrm{Re}}(1 + 0.15\mathrm{Re}^{0.687}), \frac{48}{\mathrm{Re}}\}, \frac{8}{3}\frac{\mathrm{Eo}}{\mathrm{Eo}+4}\} \tag{2.7}$$

- dans l'eau légèrement contaminée

$$C_D = \max\{\min\{\frac{24}{\mathrm{Re}}(1 + 0.15\mathrm{Re}^{0.687}), \frac{72}{\mathrm{Re}}\}, \frac{8}{3}\frac{\mathrm{Eo}}{\mathrm{Eo}+4}\} \tag{2.8}$$

- dans l'eau totalement contaminée

$$C_D = \max\{\frac{24}{\mathrm{Re}}(1 + 0.15\mathrm{Re}^{0.687}), \frac{8}{3}\frac{\mathrm{Eo}}{\mathrm{Eo}+4}\} \tag{2.9}$$

Les trois nombres sans dimension apparaissant dans les équations (2.3) à (2.9) sont ci-dessous :

Nombre de Reynolds

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_L u d}{\mu_L} \longrightarrow \frac{\rho_L V_T d}{\mu_L} \tag{2.10}$$

ici V_T est la vitesse finale de la bulle sphérique.

Nombre de Eötvös

$$\mathrm{Eo} = \frac{\Delta\rho g d^2}{\sigma} \tag{2.11}$$

Nombre de Weber

$$\mathrm{We} = \frac{\rho_L u^2 d}{\sigma} \longrightarrow \frac{\rho_L V_T^2 d}{\sigma} \tag{2.12}$$

16 ou 24, circulation interne

On peut remarquer que les trois dernières expressions de C_D pour une seule bulle sphérique

ont une structure similaire. On a soit 16, soit 24 comme le numérateur dans les expressions (2.7), (2.8) et (2.9). Cette différence peut être expliquée - l'existence d'une circulation interne.

D'abord on a deux schémas représentant des lignes de courant : 1. il y a une circulation interne au sein d'une bulle se déplaçant dans un fluide newtonien ; 2. il n'y en a pas (figures 2.5 et 2.6 avec un plan de symétrie appliqué en bas) [1].

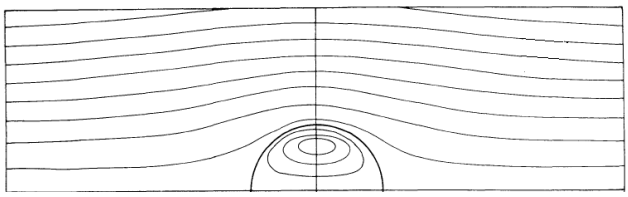


Figure 2.5 Lignes de courant (avec un plan de symétrie en bas) autour d'une bulle sphérique dans un fluide newtonien immobile, la valeur du Re est basse ; on voit qu'il y a une circulation interne dans la bulle pour satisfaire la condition de la continuité de la vitesse sur l'interface [1].

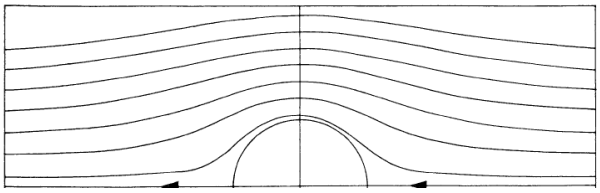


Figure 2.6 Lignes de courant (avec un plan de symétrie en bas) autour d'une particule sphérique dans un fluide newtonien immobile, la valeur du Re est basse ; on voit qu'il n'y a pas de circulation interne dans la particule sphérique. Si le diamètre d'une bulle sphérique est assez petit, alors cette dernière peut être assimilée à une particule sphérique [1].

L'explication la plus raisonnable de l'absence de circulation interne dans de petites bulles a été fournie par Frumkin et Levich ([38, 39]). Des substances tensioactives (*surface-active* en anglais) ont tendance à s'accumuler à l'interface entre deux fluides, réduisant ainsi la tension superficielle. Lorsqu'une bulle se déplace dans un milieu infini et continu, les substances tensioactives absorbées sont balayées vers l'arrière, laissant la région frontale moins contaminée. Le gradient de concentration se traduit par un gradient tangentiel de la tension superficielle, qui à son tour crée une contrainte tangentielle, donc retarde le mouvement de surface [1].

Cette théorie de la contamination de l'interface implique que toutes les bulles, aussi petites soient-elles, montreront une circulation interne si le système est suffisamment exempt de contaminants tensioactifs [1].

En conclusion, un contaminant peut éliminer la circulation interne, augmenter ainsi considérablement la traînée [1]. La bulle se comporte alors comme une particule sphérique.

2.2.3 Force d'histoire

La force d'histoire est aussi présentée dans l'équation BBO par Clift *et al.* [1]. La force d'histoire est, en général, moins importante que la force de masse ajoutée [1].

Pour une particule sphérique

Pour une particule sphérique de diamètre d dans un fluide newtonien immobile - dans un milieu infini, Odar et Hamilton ont proposé une expression empirique du coefficient d'histoire, qui est applicable si $Re < 130$ [4] :

C_H le coefficient d'histoire

$$C_H = 2.88 + \frac{3.12}{(\mathrm{Ac}+1)^3} \tag{2.13}$$

avec Ac le nombre d'accélération ($u = ||\vec{u}||$)

$$\mathrm{Ac} = \frac{u^2}{d\frac{du}{dt}} \tag{2.14}$$

2.3 Généralisation de l'équation Boussinesq, Basset et Oseen pour deux particules sphériques

Dans le cas de deux particules sphériques, à partir de l'équation (2.1), il faut y ajouter les forces induites, ainsi pour la particule $i = 1$ l'équation du mouvement s'écrira :

$$\begin{aligned}\rho_P \frac{\pi d^3}{6}\frac{d\vec{u_1}}{dt} = & \underbrace{-\rho_L \frac{\pi d^3}{6}\frac{d}{dt}\left[\hat{C_m}\vec{u_1}\right]}_{\text{Force de masse ajoutée*}} \underbrace{-\rho_L \frac{\pi d^3}{6}\frac{d}{dt}\left[\hat{C_m^{ind}}\vec{u_2}\right]}_{\text{Force de masse ajoutée* induite}} \\ & \underbrace{-\frac{1}{2}\rho_L \frac{\pi d^2}{4}\hat{C_D}||\vec{u_1}||\vec{u_1}}_{\text{Force de traînée}} \underbrace{-\frac{1}{2}\rho_L \frac{\pi d^2}{4}\hat{C_D^{ind}}||\vec{u_2}||\vec{u_2}}_{\text{Force de traînée induite}} \\ & + \underbrace{(\rho_P - \rho_L)\frac{\pi d^3}{6}\vec{g}}_{\text{Force de flottabilité}} \underbrace{-C_H r^2 (\pi \mu_L \rho_L)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{d\vec{u_1}}{d\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}}_{\text{force d'histoire}}\end{aligned} \tag{2.15}$$

On supposera l'absence de force d'histoire induite (voir la sous-section 2.3.8).

Avant d'aller plus loin et d'étudier des cas spéciaux, la partie suivante - *Définitions et nota-*

tions - nous donne des notations, des formules ou des expressions qui vont être utilisées dans la formulation de l'équation généralisée BBO pour chacune de deux particules sphériques.

2.3.1 Définitions et notations

Si l'on considère deux particules sphériques (diamètres identiques d) se déplaçant aléatoirement, notons $\vec{X_1}$ et $\vec{X_2}$ les positions des centres de masse de ces deux particules sphériques (dans un système de coordonnées fixe) à un instant, d'abord on définit le vecteur du point $\vec{X_1}$ au point $\vec{X_2}$ [17] :

$$\vec{D_{12}} = \vec{X_2} - \vec{X_1} \tag{2.16}$$

avec son module

$$D = ||\vec{D_{12}}|| = ||\vec{X_2} - \vec{X_1}|| \tag{2.17}$$

Vitesse

On note $\dot{\vec{X_{i,pa}}}$ la composante de la vitesse de la particule i ($i = 1$ ou 2) colinéaire à la ligne reliant les centres de masse des deux particules :

$$\dot{\vec{X_{i,pa}}} = \frac{1}{D^2}[\dot{\vec{X}}_i \cdot \vec{D_{12}}]\vec{D_{12}} \tag{2.18}$$

Et $\dot{\vec{X_{i,pe}}}$ celle perpendiculaire à la ligne les reliant

$$\dot{\vec{X_{i,pe}}} = \dot{\vec{X}}_i - \dot{\vec{X_{i,pa}}} \tag{2.19}$$

Accélération

Voici les deux composantes de l'accélération de la particule i ($i = 1$ ou 2). D'abord la composante de l'accélération colinéaire à la ligne reliant les centres de masse des deux particules

$$\ddot{\vec{X_{i,pa}}} = \frac{1}{D^2}[\ddot{\vec{X}}_i \cdot \vec{D_{12}}]\vec{D_{12}} \tag{2.20}$$

Et celle perpendiculaire à la ligne les reliant

$$\ddot{\vec{X}}_{i,pe} = \ddot{\vec{X}}_i - \ddot{\vec{X}}_{i,pa} \tag{2.21}$$

Discussion

A priori, les accélérations de la particule $i = 1$ et de la particule $i = 2$ ne sont pas nécessairement sur un même plan (même pour les vitesses instantanées).

En observant l'équation (2.15), on peut constater que si ces deux particules commencent leurs mouvements en même temps (donc au premier instant elles ont leurs vitesses initiales qui valent nulles), à l'aide des points $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$ à un instant donné, un plan vertical peut être défini tel que leurs accélérations et leurs vitesses instantanées sont toutes dans ce plan-ci, si l'on ne prend pas en compte la rotation de chacune de ces deux particules sphériques (si $\vec{X}_1$ et $\vec{X}_2$ à cet instant sont sur une ligne verticale, alors ce plan vertical peut être défini par leurs vitesses instantanées). On peut ainsi simplifier ce problème en divisant leurs vitesses et accélérations en deux composantes ($*_{pa}$, $*_{pe}$) au lieu de trois. Par conséquent, $\hat{C_D}$ et $\hat{C_m}$ peuvent être écrits sous forme de tenseurs d'ordre 2 (2*2).

Il faut remarquer que cette simplification est faite sous l'hypothèse qu'il n'y ait pas de rotation, ce qui n'est pas vrai dans la plupart des cas. Les dernières phrases peuvent ainsi être modifiées :

...un plan vertical peut être défini tel que leurs accélérations et leurs vitesses instantanées ont chacune une projection dominante sur ce plan (l'autre composante aide à faire tourner ce plan autour d'un axe vertical).

En définissant deux vecteurs unitaires orthonormés dans le plan - $\vec{D_{12}}/D$ et $\dot{\vec{X}}_{1,pe}/||\dot{\vec{X}}_{1,pe}||$ - on obtient une base, sur laquelle on peut exprimer le tenseur de coefficient de traînée $\hat{C_D}$:

$$\begin{pmatrix} C_{D,pa,pa} & C_{D,pa,pe} \\ C_{D,pe,pa} & C_{D,pe,pe} \end{pmatrix}$$

Sur une base similaire - $\vec{D_{12}}/D$ et $\ddot{\vec{X}}_{1,pe}/||\ddot{\vec{X}}_{1,pe}||$, le tenseur de coefficient de masse ajoutée $\hat{C_m}$ s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} C_{m,pa,pa} & C_{m,pa,pe} \\ C_{m,pe,pa} & C_{m,pe,pe} \end{pmatrix}$$

On a aussi besoin de définir $\hat{C_D^{ind}}$ et de $\hat{C_m^{ind}}$ afin de pouvoir établir les expressions des forces

appliquées sur la particule $i = 1$. Ces deux coefficients sont liés à la variation du coefficient de traînée et de masse ajoutée due à la présence de la particule sphérique $i = 2$.

$$\begin{pmatrix} C^{ind}_{D,pa,pa} & C^{ind}_{D,pa,pe} \\ C^{ind}_{D,pe,pa} & C^{ind}_{D,pe,pe} \end{pmatrix}$$

sur la base - $\vec{D_{12}}/D$ et $\dot{\vec{X}}_{2,pe}/||\dot{\vec{X}}_{2,pe}||$

et

$$\begin{pmatrix} C^{ind}_{m,pa,pa} & C^{ind}_{m,pa,pe} \\ C^{ind}_{m,pe,pa} & C^{ind}_{m,pe,pe} \end{pmatrix}$$

sur la base - $\vec{D_{12}}/D$ et $\ddot{\vec{X}}_{2,pe}/||\ddot{\vec{X}}_{2,pe}||$

À partir des équations (2.18) - (2.21), on peut exprimer $\dot{\vec{X}}_{i,pa}$, $\dot{\vec{X}}_{i,pe}$, $\ddot{\vec{X}}_{i,pa}$ et $\ddot{\vec{X}}_{i,pe}$ sous forme de vecteur ($i = 1$ ou $i = 2$) :

$$\dot{\vec{X}}_{i,pa} = \begin{pmatrix} \dot{X}_{i,pa} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

$$\dot{\vec{X}}_{i,pe} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{X}_{i,pe} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

$$\ddot{\vec{X}}_{i,pa} = \begin{pmatrix} \ddot{X}_{i,pa} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

$$\ddot{\vec{X}}_{i,pe} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{X}_{i,pe} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Il faut faire attention aux signes (valeurs positives ou négatives) des composantes non nulles dans ces vecteurs - ici on peut seulement dire que $\dot{X}_{i=1,pe}$ a une valeur supérieure ou égale à zéro.

Finalement, une autre expression pour chaque force participant à l'équation (2.15) est donnée afin de pouvoir correspondre aux cas généraux.

2.3.2 Force de masse ajoutée pour deux particules sphériques

Discussions globales

Formule générale

Nous proposons d'adopter la formulation de Béguin *et al.* [17] pour la force de masse ajoutée de la particule sphérique $i = 1$:

$$\vec{F_{m,1}} = -\rho_L(\frac{\pi d^3}{6})[\begin{pmatrix} C_{m,pa,pa} & C_{m,pa,pe} \\ C_{m,pe,pa} & C_{m,pe,pe} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_{1,pa} \\ \ddot{X}_{1,pe} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C^{ind}_{m,pa,pa} & C^{ind}_{m,pa,pe} \\ C^{ind}_{m,pe,pa} & C^{ind}_{m,pe,pe} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_{2,pa} \\ \ddot{X}_{2,pe} \end{pmatrix}] \tag{2.26}$$

Pour deux particules sphériques de diamètres identiques d séparées d'une distance centre-centre D, ils ont proposé les relations suivantes [17] :

$$C_{m,pa,pe} = C_{m,pe,pa} = 0 \tag{2.27}$$

$$C_{m,pe,pe} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{3}{256}\left(\frac{d}{D}\right)^6 + \frac{3}{256}\left(\frac{d}{D}\right)^8 + \frac{27}{4096}\left(\frac{d}{D}\right)^{10} + \cdots\right] \tag{2.28}$$

$$C_{m,pa,pa} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{3}{64}\left(\frac{d}{D}\right)^6 + \frac{9}{256}\left(\frac{d}{D}\right)^8 + \frac{9}{512}\left(\frac{d}{D}\right)^{10} + \cdots\right] \tag{2.29}$$

$$C^{ind}_{m,pa,pe} = C^{ind}_{m,pe,pa} = 0 \tag{2.30}$$

$$C^{ind}_{m,pe,pe} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{16}\left(\frac{d}{D}\right)^3 + \frac{3}{4096}\left(\frac{d}{D}\right)^9 + \frac{3}{2048}\left(\frac{d}{D}\right)^{11} + \cdots\right] \tag{2.31}$$

$$C^{ind}_{m,pa,pa} = \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{8}\left(\frac{d}{D}\right)^3 - \frac{3}{512}\left(\frac{d}{D}\right)^9 - \frac{9}{1024}\left(\frac{d}{D}\right)^{11} + \cdots\right] \tag{2.32}$$

Coefficient de masse ajoutée et Re

Comme dans le cas d'une particule sphérique, Kendoush *et al.* [4] proposent une dépendance des coefficients de masse ajoutée (pour chacune de deux particules sphériques) par rapport au nombre Re : en fixant les positions (relatives) de deux particules sphériques (elles se déplacent côte à côte ou devant derrière) et en fixant leur distance centre-centre D, ce coefficient varie inversement avec Re.

Coefficient de masse ajoutée et D

De nombreux auteurs proposent une variation du coefficient de masse ajoutée par rapport à la distance centre-centre D. Globalement, on peut constater que :

— Si deux particules se déplacent côte à côte et si elles se touchent, ce coefficient est supérieur à 0.5 (pour chacune des particules) ; à mesure que D augmente, ce coefficient diminue et se rapproche asymptotiquement de 0.5 [4] ;

— Si deux particules se déplacent devant derrière et si elles touchent, pour la particule <u>derrière</u> ce coefficient est inférieur à 0.5 ; à mesure que la distance entre ces deux particules augmente, ce coefficient augmente et se rapproche asymptotiquement de 0.5 ; pour la particule devant, ce coefficient ne change pas beaucoup [4].

Plus de détails se trouvent dans les sous-sections suivantes.

Une nouvelle force

D'abord, dans un cas où il y a deux ou plus de deux particules submergées dans un même fluide et où leur(s) distance(s) centre-centre n'est/ne sont pas infiniment loin(s), le fait que $\hat{C_m}$ d'une particule entre/parmi eux dépend du temps nous indique qu'une nouvelle force apparaît dans l'équation (2.15) : on la nomme la force de Meshchersky [17, 40]. Plus de détails sont donnés dans la partie – 2.3.4.

Deux particules sphériques - côte à côte, deux accélérations identiques

Considérons deux particules sphériques qui sont côte à côte à un instant.

Si ces deux particules ont une même accélération qui est perpendiculaire à la ligne reliant leurs centres à cet instant (voir le schéma 2.7), à partir de l'équation (2.26), on a :

$$\vec{F_{m,1}} = -\rho_L(\frac{1}{6}\pi d^3)[\begin{pmatrix} C_{m,pa,pa} + C^{ind}_{m,pa,pa} & 0 \\ 0 & C_{m,pe,pe} + C^{ind}_{m,pe,pe} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{X}_{1,pe} \end{pmatrix}] \tag{2.33}$$

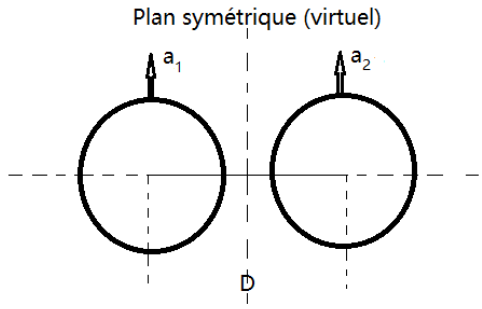


Figure 2.7 Schéma présentant deux particules sphériques qui sont côte à côte à un instant, et qui ont une même accélération perpendiculaire à la ligne reliant leurs centres à cet instant.

Van et Wijngaarden [41] trouve :

$$C_{m,pe,pe} + C^{ind}_{m,pe,pe} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{16}\left(\frac{d}{D}\right)^3 + \frac{3}{256}\left(\frac{d}{D}\right)^6 + \frac{3}{256}\left(\frac{d}{D}\right)^8 + \frac{3}{2048}\left(\frac{d}{D}\right)^9 + \cdots\right) \tag{2.34}$$

La corrélation de Van et Wijngaarden est en accord avec les corrélations de Béguin *et al.* - (2.28) & (2.31).

Kendoush *et al.* [4] ajoutent un terme contenant Re et l'expression suivante est proposée - équation (2.35) :

$$C_{m,pe,pe} + C^{ind}_{m,pe,pe} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{16}\left(\frac{d}{D}\right)^3\right) + C_1 \mathrm{Re}^{-1.125} \tag{2.35}$$

avec C_1 le paramètre déjà défini dans l'équation (2.2).

- $C_1 = 15$ si $100 \leq \mathrm{Re} \leq 300$
- $C_1 = 10$ si $300 \leq \mathrm{Re} \leq 500$
- $C_1 = 5$ si $\mathrm{Re} \geq 500$

On y retrouve le premier terme de Van et Wijngaarden en $(d/D)^3$.

On trouve que l'équation (2.35) n'est pas applicable si Re varie entre 0 et 100, parce que si Re tend vers zéro, $C_{m,pe,pe} + C^{ind}_{m,pe,pe}$ tend vers l'infini positif et le terme contenant Re domine.

En plus, comparée avec l'équation (2.2) (celle pour une particule sphérique), (2.35) a un terme supplémentaire $3/32(d/D)^3$, qui est une fonction de d/D ; on observe aussi que ce terme correspond bien au deuxième terme entre les parenthèses dans l'équation (2.34).

Il est possible que le chercheur ait fait une modification sur l'équation du coefficient de masse ajoutée pour une particule seule (2.2) afin d'obtenir cette nouvelle expression - équation (2.35).

Globalement, on peut dire que les différentes expressions trouvées dans la littérature sont en accord, l'une avec l'autre.

Deux bulles sphériques - côte à côte, deux accélérations identiques

Pour deux bulles sphériques (dont le diamètre est environ 2 mm), dans le cas où elles ont une même accélération et où leur accélération est perpendiculaire à la ligne les reliant, qui est horizontale (voir le même schéma 2.7), l'expression (2.36) [5] est proposée par Simcik *et al.* à partir des simulations numériques VOF.

$$0.5 + \frac{0.01518}{\frac{D}{d} - 0.862} \tag{2.36}$$

En comparant cette expression avec les deux autres expressions (2.34) et (2.35), on constate qu'il n'y a pas de terme contenant Re dans cette expression (Re est positif et très proche de zéro à l'instant zéro). Le terme contenant D/d prend une forme différente, mais la tendance par rapport à D/d est la même - plus D/d est grand, moins ce terme est important, en gardant une valeur positive.

Un cas similaire

Considérons ici une bulle sphérique qui accélère parallèlement à une paroi verticale à un instant (voir le schéma 2.8).

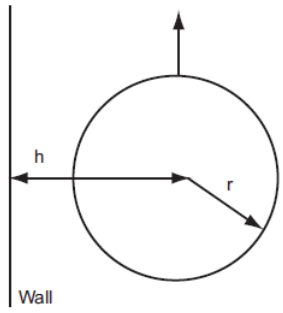


Figure 2.8 Schéma d'une bulle sphérique avec la présence d'une paroi verticale, l'accélération de cette bulle est parallèle à la paroi [5].

Milne-Thompson *et al.* [42] ont donné une expression de C_m :

$$C_m = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^3\right) \tag{2.37}$$

Simcik *et al.* [5] ont aussi fait des simulations numériques et ils trouvent que $C_m = 0.558$ si $h/r = 1.1$ et que C_m décroît rapidement si h/r augmente.

Comparaison et discussion

Dans le premier cas, le plan virtuel entre les deux bulles devient un plan de symétrie, qui peut être remplacé par une paroi rigide infinie [17]. On a donc $D = 2h$, $d = 2r$, alors $D/d = h/r$.

On revient ainsi au cas où il y a deux bulles sphériques et où leurs accélérations sont symétriques par rapport au plan de symétrie.

Deux particules sphériques - devant derrière, deux accélérations identiques

Considérons deux particules sphériques qui sont devant derrière à un instant.

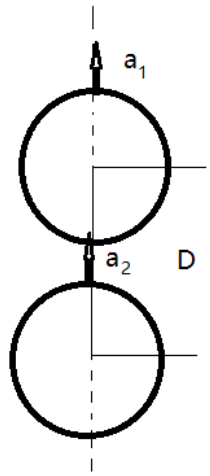


Figure 2.9 Schéma présentant deux particules sphériques qui sont devant derrière à un instant, et qui ont une même accélération colinéaire à la ligne reliant leurs centres à cet instant.

Si ces deux particules ont une même accélération, qui est colinéaire à la ligne reliant leurs centres à cet instant (voir le schéma 2.9), à partir de l'équation (2.26), on a :

$$\vec{F_{m,1}} = -\rho_L(\frac{4}{3}\pi r^3)[\begin{pmatrix} C_{m,pa,pa} + C^{ind}_{m,pa,pa} & 0 \\ 0 & C_{m,pe,pe} + C^{ind}_{m,pe,pe} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_{1,pa} \\ 0 \end{pmatrix}] \tag{2.38}$$

Van et Wijngaarden [41] trouve :

$$C_{m,pa,pa}+C^{ind}_{m,pa,pa} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{8}\left(\frac{d}{D}\right)^3+\frac{3}{64}\left(\frac{d}{D}\right)^6+\frac{9}{256}\left(\frac{d}{D}\right)^8-\frac{3}{512}\left(\frac{d}{D}\right)^9+\cdots\right) \quad (2.39)$$

La corrélation de Van et Wijngaarden est en accord avec les corrélations de Béguin *et al.* - (2.29) & (2.32).

Encore une fois, si l'on prend Re et la distance centre-centre D en considération, l'expression suivante est proposée par Kendoush *et al.* [4] - équation (2.40) :

$$C_{m,pa,pa}+C^{ind}_{m,pa,pa} = \frac{1}{2}-\frac{3}{16}\left(\frac{d}{D}\right)^3+C_1\mathrm{Re}^{-1.125} \quad (2.40)$$

avec C_1 le paramètre déjà défini dans l'équation (2.2).

- $C_1 = 15$ si $100 \leq \mathrm{Re} \leq 300$
- $C_1 = 10$ si $300 \leq \mathrm{Re} \leq 500$
- $C_1 = 5$ si $\mathrm{Re} \geq 500$

Comparée avec l'équation (2.2), (2.40) a un terme supplémentaire $-3/16(d/D)^3$, qui est une fonction de d/D. On observe que ce terme correspond bien au deuxième terme entre les parenthèses dans l'équation (2.39).

Là encore, il est possible que le chercheur ait fait une modification sur l'équation pour une particule (équation (2.2)) afin d'obtenir cette nouvelle expression (équation (2.40)).

De nouveau, les différentes sources trouvées dans la littérature sont en accord.

Deux bulles sphériques - devant derrière, deux accélérations identiques

Pour deux bulles sphériques (dont le diamètre est environ 2 mm), dans le cas où elles ont une même accélération et où leur accélération est parallèle à la ligne les reliant, qui est verticale (voir le schéma 2.9), l'expression (2.41) est proposée par Simcik *et al.* [5].

$$0.50-\frac{0.0681}{\frac{D}{d}-0.546} \quad (2.41)$$

En comparant cette expression avec les deux autres expressions (2.39) et (2.40), on constate

qu'il n'y a pas de terme contenant Re dans cette expression (Re est positif et très proche de zéro à l'instant zéro). Le terme contenant D/d prend une forme différente, mais la tendance par rapport à D/d est la même - plus D/d est grand, moins ce terme est important, en gardant une valeur négative.

Deux bulles sphériques avec un angle, deux accélérations identiques

Pour deux bulles sphériques (dont le diamètre est environ 2 mm), dans le cas où elles ont une même accélération, on a $\ddot{X}_{1,pa} = \ddot{X}_{2,pa}$ et $\ddot{X}_{1,pe} = \ddot{X}_{2,pe}$.

S'il y a un angle α entre le sens de leur accélération et le sens de la ligne les reliant $\vec{D_{12}}$, c.-à-d., $\ddot{X}_{i,pa} = ||\ddot{\vec{X}}_i|| \cos\alpha$ et $\ddot{X}_{i,pe} = ||\ddot{\vec{X}}_i|| \sin\alpha$, avec $i = 1$ ou $i = 2$ (voir le schéma à la figure 2.10), à partir de l'équation (2.26), on a :

$$\vec{F_{m,1}} = -\rho_L(\frac{1}{6}\pi d^3)||\ddot{\vec{X}}_1|| \left[\begin{pmatrix} C_{m,pa,pa} + C^{ind}_{m,pa,pa} & 0 \\ 0 & C_{m,pe,pe} + C^{ind}_{m,pe,pe} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right] \tag{2.42}$$

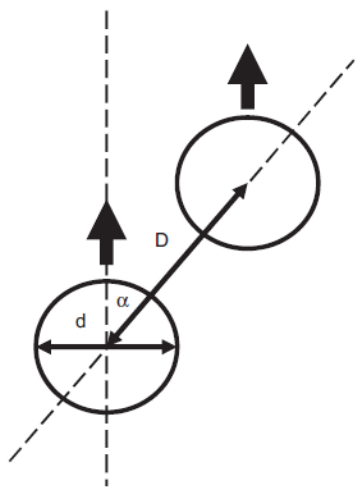


Figure 2.10 Schéma présentant deux bulles sphériques dans un milieu non borné, qui ont une même accélération. Il y a un angle α entre le sens de leur accélération et le sens de la ligne les reliant [5].

Une expression empirique est donnée par Simcik *et al.* [5], qui décrit le coefficient de masse ajoutée « mesuré » dans la direction de l'accélération :

$$\frac{1}{2}\left((C_{m,pe,pe}+C^{ind}_{m,pe,pe})-(C_{m,pa,pa}+C^{ind}_{m,pa,pa})\right)\sin\left(2\left(\alpha-45^\circ\right)\right)+ \\ \frac{1}{2}\left((C_{m,pe,pe}+C^{ind}_{m,pe,pe})+(C_{m,pa,pa}+C^{ind}_{m,pa,pa})\right) \tag{2.43}$$

Il y a deux combinaisons des composantes :

$$\frac{1}{2}\left((C_{m,pe,pe}+C^{ind}_{m,pe,pe})-(C_{m,pa,pa}+C^{ind}_{m,pa,pa})\right) \tag{2.44}$$

et

$$\frac{1}{2}\left((C_{m,pe,pe}+C^{ind}_{m,pe,pe})+(C_{m,pa,pa}+C^{ind}_{m,pa,pa})\right) \tag{2.45}$$

Ici $(C_{m,pa,pa}+C^{ind}_{m,pa,pa})$ et $(C_{m,pe,pe}+C^{ind}_{m,pe,pe})$ sont exprimés respectivement dans l'équation (2.41) et (2.36).

Les résultats de Simcik *et al.* [5] sont présentés à la figure 2.11.

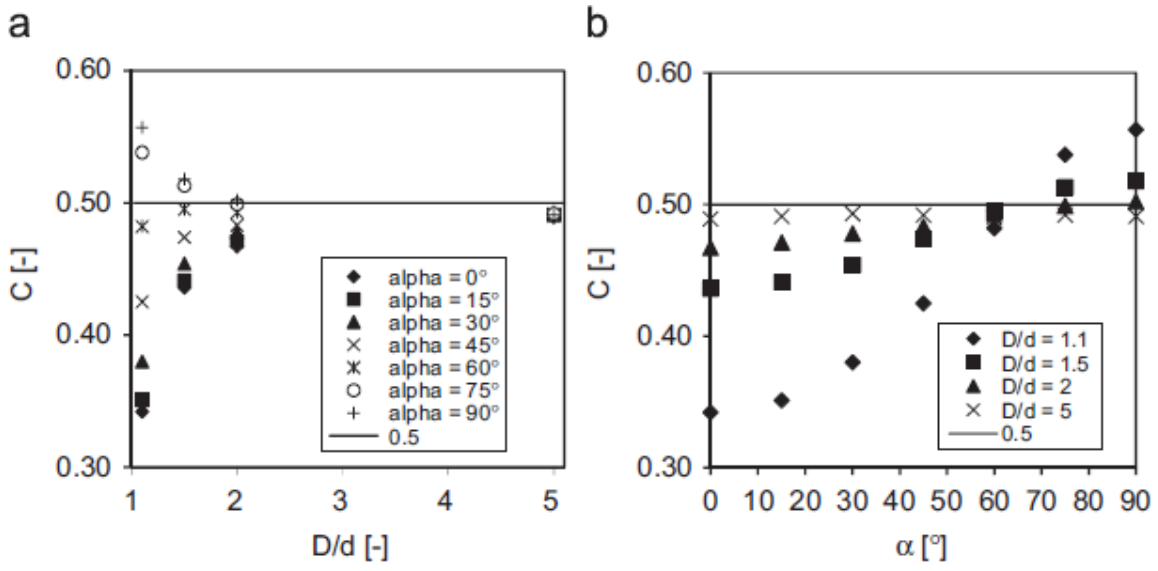


Figure 2.11 Coefficient de masse ajoutée par rapport à D/d et à α (respectivement), dans le cas où il y a deux bulles sphériques dans un milieu non borné. Ici on peut facilement voir l'effet de ces deux paramètres sur le coefficient de masse ajoutée [5].

Leurs résultats sont en accord avec la conclusion de Kendouch *et al.* : deux bulles identiques accélérant côte à côte conduisent à $C_m > 0.5$; deux bulles identiques accélérant devant derrière conduisent à $C_m < 0.5$ [4, 17].

2.3.3 Expression de la force de masse ajoutée dans un repère cartésien

En regardant toutes les expressions concernant le coefficient de masse ajoutée au-dessus, on fait ainsi l'hypothèse telle que la force de masse ajoutée pour la particule sphérique $i = 1$ peut aussi s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{F_{m,1}} = -\rho_L \frac{\pi d^3}{6} [& (C_{m,pa,pa} - C_{m,pe,pe}) \ddot{\vec{X}}_{1,pa} + C_{m,pe,pe} \ddot{\vec{X}}_1 \\ & + \left(C^{ind}_{m,pa,pa} - C^{ind}_{m,pe,pe} \right) \ddot{\vec{X}}_{2,pa} + C^{ind}_{m,pe,pe} \ddot{\vec{X}}_2] \end{aligned} \tag{2.46}$$

avec $\ddot{\vec{X}}_{i,pa}$ ($i = 1$ ou 2) définis précédemment :

$$\ddot{\vec{X}}_{i,pa} = \frac{1}{D^2} \left(\ddot{\vec{X}}_i \cdot \left(\vec{X_2} - \vec{X_1} \right) \right) \left(\vec{X_2} - \vec{X_1} \right) \tag{2.47}$$

Nous obtenons :

$$\vec{F_{m,1}} = [M] \cdot \ddot{\vec{X}}_1 + [M^{ind}] \cdot \ddot{\vec{X}}_2 \tag{2.48}$$

avec $[M]$ et $[M^{ind}]$ exprimés dans un repère cartésien :

$$[M] = -\rho_L \frac{\pi d^3}{6} (C_{m,pa,pa} - C_{m,pe,pe}) \begin{bmatrix} \Delta x^2 & \Delta x \Delta y & \Delta x \Delta z \\ \Delta x \Delta y & \Delta y^2 & \Delta y \Delta z \\ \Delta x \Delta z & \Delta y \Delta z & \Delta z^2 \end{bmatrix} - \left(\rho_L \frac{\pi d^3}{6} C_{m,pe,pe} \right) \bar{\bar{\boldsymbol{I}}} \tag{2.49}$$

$$[M^{ind}] = -\rho_L \frac{\pi d^3}{6} (C^{ind}_{m,pa,pa} - C^{ind}_{m,pe,pe}) \begin{bmatrix} \Delta x^2 & \Delta x \Delta y & \Delta x \Delta z \\ \Delta x \Delta y & \Delta y^2 & \Delta y \Delta z \\ \Delta x \Delta z & \Delta y \Delta z & \Delta z^2 \end{bmatrix} - \left(\rho_L \frac{\pi d^3}{6} C^{ind}_{m,pe,pe} \right) \bar{\bar{\boldsymbol{I}}} \tag{2.50}$$

Ici en notant $\vec{X_i}$ un vecteur $(x_i, y_i, z_i)^T$, on a $\Delta x = (x_2 - x_1)/D^2, \Delta y = (y_2 - y_1)/D^2$ et

$\Delta z = (z_2 - z_1)/D^2$. $\bar{\bar{\boldsymbol{I}}}$ est le tenseur identité.

On reprend les expressions des coefficients (2.28), (2.29), (2.31), (2.32), vues précédemment :

$$C_{m,pe,pe} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{3}{256}\left(\frac{d}{D}\right)^6 + \frac{3}{256}\left(\frac{d}{D}\right)^8 + \frac{27}{4096}\left(\frac{d}{D}\right)^{10} + \cdots\right] \tag{2.51}$$

$$C_{m,pa,pa} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{3}{64}\left(\frac{d}{D}\right)^6 + \frac{9}{256}\left(\frac{d}{D}\right)^8 + \frac{9}{512}\left(\frac{d}{D}\right)^{10} + \cdots\right] \tag{2.52}$$

$$C^{ind}_{m,pe,pe} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{16}\left(\frac{d}{D}\right)^3 + \frac{3}{4096}\left(\frac{d}{D}\right)^9 + \frac{3}{2048}\left(\frac{d}{D}\right)^{11} + \cdots\right] \tag{2.53}$$

$$C^{ind}_{m,pa,pa} = \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{8}\left(\frac{d}{D}\right)^3 - \frac{3}{512}\left(\frac{d}{D}\right)^9 - \frac{9}{1024}\left(\frac{d}{D}\right)^{11} + \cdots\right] \tag{2.54}$$

2.3.4 Force de Meshchersky pour deux particules sphériques

La force de Meshchersky $\vec{F_M}$ est fortement liée à la variation de la masse ajoutée due à la présence de particules ou de parois voisines. En effet, Meshchersky était le premier à analyser l'influence de la variation de la masse sur le comportement d'un système et a proposé une modification de la deuxième loi de Newton afin d'inclure cet effet dans les équations du mouvement [40]. Malgré diverses applications dans différents domaines (par exemple une fusée en aéronautique, dont la masse diminue au cours du temps), la prise en compte de cet effet dans un tel sujet (interaction entre particules dans un fluide newtonien) s'avère moins étudiée.

Le concept de cette force est assez « nouveau » comparé à celui de la force de traînée et celui de la masse ajoutée.

Finalement, dans ce projet de recherche, la force de Meshchersky est définie comme une force qui quantifie l'effet de la variation de la masse ajoutée sur l'interaction hydrodynamique entre particules.

Où et quand doit-on considérer cette force ?

Cette force devrait être considérée dans les cas où il y a plus d'une particule dans un fluide. Par exemple :

— Deux particules, dont la position relative d'une par rapport à celle de l'autre évolue ;

— Deux particules et leurs accélérations (deux vecteurs) à un instant sont différentes.

Cette force devrait aussi être considérée dans des cas où il y a une paroi et où l'impact de la présence de cette paroi n'est pas négligeable.

Cas de deux particules sphériques

Dans un cas où il y a deux particules sphériques submergées dans un même fluide, à partir de l'équation (2.15) - la nouvelle équation BBO pour décrire le mouvement de chacune de deux particules - on y rajoutera un nouveau terme : le terme la force de Meshchersky F_M.

L'expression générale de la force de Meshchersky s'écrira :

$$\vec{F_{M,1}} = -\rho_L \frac{\pi d^3}{6} \left[\vec{u_1} \frac{d\hat{C_m}}{dt} + \vec{u_2} \frac{d\hat{C_m}}{dt} \right] \tag{2.55}$$

On fait ainsi l'hypothèse telle que la force de Meshchersky de la particule sphérique $i = 1$ peut être exprimée de la façon suivante :

$$\vec{F_{M,1}} = \left(\frac{d}{dt}[M] \right) \cdot \dot{\vec{X}}_1 + \left(\frac{d}{dt}[M^{ind}] \right) \cdot \dot{\vec{X}}_2 \tag{2.56}$$

avec $[M]$ et $[M^{ind}]$ définis dans la section précédente.

2.3.5 Forces de traînée pour deux particules sphériques

Pour deux particules sphériques - côte à côte, deux vitesses identiques

Considérons deux particules sphériques qui sont côte à côte à un instant.

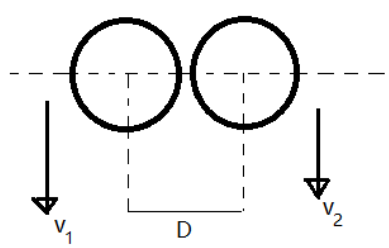


Figure 2.12 Schéma présentant deux particules sphériques - côte à côte, qui ont une même vitesse instantanée, perpendiculaire à la ligne les reliant à un instant.

Si leurs vitesses instantanées sont identiques et perpendiculaires à la ligne les reliant à cet instant (le schéma est à la figure 2.12), alors $\dot{X}_{1,pa}$ et $\dot{X}_{2,pa}$ valent zéro ; $\dot{X}_{1,pe} = \dot{X}_{2,pe}$. La force

de traînée subie par la particule sphérique $i = 1$ pourra être exprimée de la façon suivante :

$$\vec{F_{D,1}} = -\frac{1}{2}\rho_L(\pi r^2)\left[\begin{pmatrix} C_{D,pa,pa} + C^{ind}_{D,pa,pa} & C_{D,pa,pe} + C^{ind}_{D,pa,pe} \\ C_{D,pe,pa} + C^{ind}_{D,pe,pa} & C_{D,pe,pe} + C^{ind}_{D,pe,pe} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{X}_{1,pe} \end{pmatrix}||\dot{X}_{1,pe}||\right] \tag{2.57}$$

En observant l'expression (2.57), on constate que cette force est en fait la somme de deux composantes (deux vecteurs) : une composante parallèle au sens de leur vitesse – donc la force de traînée ; une composante perpendiculaire – donc la force de portance (plus de détails concernant la force de portance se trouvent dans la sous-section 2.3.7).

À partir de l'équation (2.57), Legendre *et al.* [43] ont proposé l'expression suivante (applicable dans le cas où Re varie entre 10^2 et 10^3) :

$$\frac{C_{D,pe,pe} + C^{ind}_{D,pe,pe}}{C_D} = \left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{d}{D}\right)^3\right] \tag{2.58}$$

Dans l'équation (2.58) C_D est le coefficient pour une seule particule sphérique (la même taille, le même matériau, la même vitesse instantanée dans le même fluide).

On peut ainsi supposer que lorsque $\alpha = \pi/2$:

$$C_{D,pe,pe}/C_D = 1 \tag{2.59}$$

$$C^{ind}_{D,pe,pe}/C_D = \frac{1}{8}\left(\frac{d}{D}\right)^3 \tag{2.60}$$

De la même façon, on peut aussi supposer que $C_{D,pa,pe} + C^{ind}_{D,pa,pe}$ est aussi une fonction de d/D et que cette dernière a une forme semblable à celle de l'équation (2.58).

Pour deux particules sphériques - devant derrière, deux vitesses identiques

Considérons ici deux particules sphériques qui sont devant derrière à un instant.

Si leurs vitesses instantanées sont identiques et colinéaires à la ligne les reliant à cet instant (le schéma est à la figure 2.13), alors $\dot{X}_{1,pe}$ et $\dot{X}_{2,pe}$ valent zéro ; $\dot{X}_{1,pa} = \dot{X}_{2,pa}$. La force de traînée subie par la particule sphérique $i = 1$ pourra être exprimée de la façon suivante :

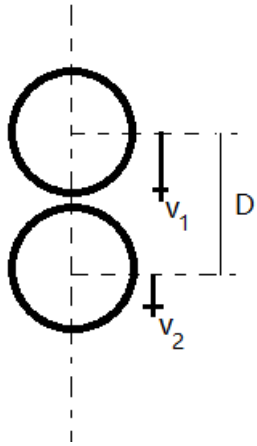


Figure 2.13 Schéma présentant deux particules sphériques - devant derrière, qui ont une même vitesse instantanée colinéaire à la ligne les reliant à un instant.

$$\vec{F_{D,1}} = -\frac{1}{2}\rho_L(\pi r^2)\left[\begin{pmatrix} C_{D,pa,pa} + C^{ind}_{D,pa,pa} & C_{D,pa,pe} + C^{ind}_{D,pa,pe} \\ C_{D,pe,pa} + C^{ind}_{D,pe,pa} & C_{D,pe,pe} + C^{ind}_{D,pe,pe} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_{1,pa} \\ 0 \end{pmatrix} ||\dot{\vec{X}}_{1,pa}||\right] \tag{2.61}$$

Zhu *et al.* [13] ont proposé l'expression suivante <u>pour la particule de derrière</u>, qui est applicable dans la plage $20 \leq \mathrm{Re} \leq 130$:

$$\frac{C_{D,pa,pa} + C^{ind}_{D,pa,pa}}{C_D} = \left[1 - (1 - f_1(\mathrm{Re}))\ \exp\left(f_2(\mathrm{Re})\frac{D}{d}\right)\right] \tag{2.62}$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions de Re telles que

$$f_1(\mathrm{Re}) = 1 - \exp\left(-0.483 + 3.45 \times 10^{-3}\mathrm{Re} - 1.07 \times 10^{-5}\mathrm{Re}^2\right) \tag{2.63}$$

et

$$f_2(\mathrm{Re}) = -0.115 - 8.75 \times 10^{-4}\mathrm{Re} + 5.61 \times 10^{-7}\mathrm{Re}^2 \tag{2.64}$$

Ici dans l'équation (2.62) C_D est le coefficient pour une seule particule sphérique (la même taille, le même matériau, la même vitesse instantanée dans le même fluide).

Tsuji *et al.* [11] ont proposé l'expression suivante - équation (2.65), qui prend une forme

exponentielle :

$$\frac{C_{D,pa,pa} + C^{ind}_{D,pa,pa}}{C_D} = \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{D}{d}\right)\right] \tag{2.65}$$

On peut faire l'hypothèse que $C_{D,pa,pa}/C_D$ vaut 1 et que $C^{ind}_{D,pa,pa}/C_D$ a la forme exponentielle.

On observe que la force de traînée de la particule devant est presque inchangée par l'approche de la particule derrière [13]. Les résultats de Tsuji *et al.* [11] ont aussi prouvé ceci.

Nous pouvons aussi affirmer que l'influence de la particule devant sur la force de traînée de la particule derrière est significativement plus grande que celle de la particule derrière sur la force de traînée de la particule devant [13].

On pourra aussi supposer que $C_{D,pa,pa} + C^{ind}_{D,pa,pa}$ est une fonction de Re (et de d/D) et que $C^{ind}_{D,pa,pa}$ prend deux valeurs différentes (pour la particule devant et celle derrière), même si leur distance centre-centre sans dimension d/D ne change pas.

Pour deux particules sphériques - d'autres formes, cas général

Maintenant on revient au cas général : deux particules sphériques qui ont chacune une vitesse instantanée (*a priori* différentes) et ces deux vitesses instantanées forment un angle à cet instant (voir le schéma 2.14).

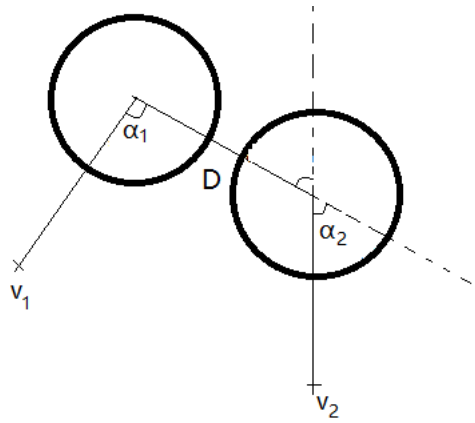


Figure 2.14 Schéma présentant le cas général de deux particules sphériques. Il y a deux angles nommés α_1 et α_2, qui se situent (respectivement) entre le sens de la vitesse instantanée de la particule $i = 1$, $i = 2$ et $\vec{D_{12}}$.

En observant la forme du sillage de la particule devant (si sans interaction avec celle derrière), l'expression suivante pour calculer le coefficient de traînée de la particule sphérique derrière est proposée - ceci est une fonction de D/d, de α et possiblement de Re :

$$\frac{\text{Coefficient de traînée}}{C_D} = 1 - \exp\left(-[\text{Constante 1}] * \frac{D}{d}\right) * \exp\left(-[\text{Constante 2}] * (\alpha)^2\right) * \cos\left([\text{Constante 3}]\alpha\right) \tag{2.66}$$

Plus de détails se trouvent dans la prochaine sous-section 2.3.6.

2.3.6 Expression de la force de traînée dans un repère cartésien

Inspiré par les résultats dans les articles parlant du coefficient de traînée (qui sont présentés au-dessus), et afin de pouvoir inclure tous ces résultats, on fait la proposition que la force de traînée de la particule sphérique $i = 1$ pourra être exprimée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{F_{D,1}} = &-\frac{1}{8}\rho_L \pi d^2 \begin{pmatrix} C_{Dxx} & C_{Dxy} & C_{Dxz} \\ C_{Dyx} & C_{Dyy} & C_{Dyz} \\ C_{Dzx} & C_{Dzy} & C_{Dzz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{y_1} \\ \dot{z_1} \end{pmatrix} ||\dot{\vec{X}}_1|| \\ &-\frac{1}{8}\rho_L \pi d^2 \begin{pmatrix} C^{ind}_{Dxx} & C^{ind}_{Dxy} & C^{ind}_{Dxz} \\ C^{ind}_{Dyx} & C^{ind}_{Dyy} & C^{ind}_{Dyz} \\ C^{ind}_{Dzx} & C^{ind}_{Dzy} & C^{ind}_{Dzz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x_2} \\ \dot{y_2} \\ \dot{z_2} \end{pmatrix} ||\dot{\vec{X}}_2|| \end{aligned} \tag{2.67}$$

avec $\hat{C_D}$ et $\hat{C_D^{ind}}$ les deux matrices carrées dans l'équation (2.67).

À partir des résultats numériques de L. Prahl *et al.* [44], on propose les corrélations suivantes :

$$\frac{\hat{C_D}}{C_D} = \bar{\bar{\boldsymbol{I}}} \tag{2.68}$$

Si l'angle $\alpha \in [-45^o, 45^o]$,

$$\frac{\hat{C_D^{ind}}}{C_D} = -\exp\left[-0.3607\exp(-\text{Re}/250)\frac{D}{d}\right] \exp\left[-(\text{Re}/10)\alpha^2\right] \cos\left(1.4550\alpha\right) \bar{\bar{\boldsymbol{I}}} \tag{2.69}$$

Si l'angle $\alpha \notin [-45^o, 45^o]$,

$$\frac{C_D^{\hat{ind}}}{C_D} = -\exp\left[-\left(1 - 1.007\exp(-\mathrm{Re}/60)\right)\frac{D}{d}\right]\exp\left[-\left(0.7602\exp(-\mathrm{Re}/150)\right)\alpha^2\right]\cos\left(1.4550\alpha\right)\bar{\bar{\boldsymbol{I}}} \tag{2.70}$$

Ici l'angle $\alpha \in [-180^o, 180^o]$ est celui entre $\vec{D_{12}}$ et la vitesse instantanée de l'autre particule sphérique ($i = 2$).

Plus pratique, l'angle α peut aussi être défini comme l'angle entre $\vec{D_{12}}$ et le vecteur $\vec{X_1} + \vec{X_2}$, si le point d'origine du repère cartésien est loin de ces deux particules et est bien choisi - $||\vec{D_{12}}|| \ll ||\vec{X_i}||$, pour $i = 1$ et 2. Dans ce cas, on n'a plus besoin de définir la position d'une particule sphérique - devant ou derrière.

Discussion

Il faut remarquer que si Re est environ supérieur à 130, comme ce qui est décrit précédemment dans la sous-section 2.1, le sillage derrière une particule sphérique est instationnaire. Ainsi, le coefficient de traînée devrait être une fonction du temps. Malheureusement à notre connaissance, il n'y a pas d'article mesurant ce coefficient et donnant une expression incluant le temps t. Finalement, on peut dire que la corrélation obtenue est celle moyennée (par rapport au temps).

2.3.7 Expression de la force de portance

Pour la force de portance, on reprend les résultats numériques dans l'article de L. Prahl *et al.* [44] et on propose la façon suivante afin de calculer le coefficient.

Définition de l'angle α

Pour calculer le coefficient de portance, α se mesure à partir du vecteur la vitesse instantanée de l'autre particule sphérique ($\vec{u_2}$) jusqu'au vecteur $\vec{D_{12}}$, dans le sens antihorloge dans le plan défini par ces deux vecteurs (voir le schéma 2.15).

L'angle α pourrait aussi être défini comme l'angle du vecteur $\vec{X_1} + \vec{X_2}$ au vecteur $\vec{D_{12}}$, si le point d'origine est loin de ces deux particules et est bien choisi.

Dans le cas où $\alpha \geq 180^o$, le coefficient de portance se calcule de la façon suivante : on change le signe (positif ou négatif) de celui de l'angle $360^o - \alpha$, sachant que ces deux valeurs sont antisymétriques par rapport à l'angle 180°.

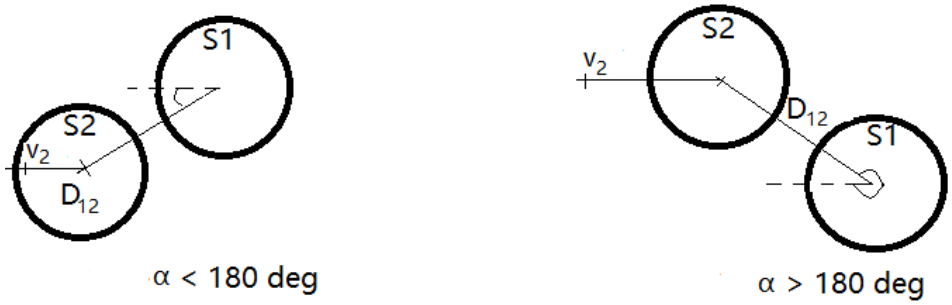


Figure 2.15 Schéma présentant comment mesurer l'angle α.

Partition de la plage d'angles

D'abord, on divise la plage d'angles (de zéro degré à 180 degrés, de zéro radiant à π radiant) en 2 ou 3 parties.

Dans le cas où $20 \leq \text{Re} \leq 50$, on la divise en deux parties – de 0 à α_0 et de α_0 à π.

Dans la première partie, l'expression suivante est proposée :

$$C_1 \exp\left(-C_2 \frac{D}{d}\right)\left[-\sin\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\alpha\right)\right] \tag{2.71}$$

Et dans la deuxième partie,

$$C_1 \exp\left(-C_2 \frac{D}{d}\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{\pi-\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)\right)\right] \tag{2.72}$$

Si $\text{Re} \geq 50$, alors on la divise en 3 parties – de 0 à α_0, de α_0 à α_1 et de α_1 à π.

Pour la première partie, on a la même expression que ce qui est au-dessus.

Pour la deuxième partie, on a l'expression suivante :

$$C_1 \exp\left(-C_2 \frac{D}{d}\right)\left[\sin\left(\frac{\pi}{\alpha_1-\alpha_0}(\alpha-\alpha_0)\right)\right] \tag{2.73}$$

Pour la troisième partie, on prend l'expression suivante :

$$C_1 \exp\left(-C_2 \frac{D}{d}\right)\left[-\sin\left(\frac{\pi}{\pi-\alpha_1}(\alpha-\alpha_1)\right)\right] \tag{2.74}$$

Évolutions de α_0 et de α_1

Pour l'angle α_0

— Si $\mathrm{Re} \leq 20$, α_0 est considéré très proche de zéro degré ;

— Si $20 \leq \mathrm{Re} \leq 50$, α_0 varie à partir de 0 degré jusqu'à 45 degrés. Plus précisément, on a :

$$\alpha_0 = 1.5(\mathrm{Re} - 20) \tag{2.75}$$

Où α_0 est exprimé en degrés ;

— Si $50 \leq \mathrm{Re} \leq 100$, on a :

$$\alpha_0 = 0.15(\mathrm{Re} - 50) + 45^o \tag{2.76}$$

— Si $100 \leq \mathrm{Re} \leq 200$, la variation de α_0 devient beaucoup plus lente, on a :

$$\alpha_0 = -0.025(\mathrm{Re} - 100) + 52.5^o \tag{2.77}$$

— Si $\mathrm{Re} \geq 200$, l'angle α_0 peut être considéré comme immobile.

Pour l'angle α_1

— Si $\mathrm{Re} \leq 50$, α_1 est proche de 180° ;

— Si $50 \leq \mathrm{Re} \leq 100$, on a :

$$\alpha_1 = -0.75(\mathrm{Re} - 50) + 180^o \tag{2.78}$$

Où α_1 est aussi exprimé en degrés ;

— Si $100 \leq \mathrm{Re} \leq 200$, on a :

$$\alpha_1 = -0.3(\mathrm{Re} - 100) + 142.5^o \tag{2.79}$$

— Si $\mathrm{Re} \geq 200$, l'angle α_1 peut être considéré comme immobile.

Évolutions de C_1 et de C_2

— Si $\mathrm{Re} \leq 20$, sachant que α_0 est très proche de zéro degré, C_1 et C_2 peuvent être considérés comme nulles ;

— Si $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ (donc il faut que $\mathrm{Re} \geq 20$),

$$C_1 = 0.0681 \ln(\mathrm{Re}) - 0.1377 \tag{2.80}$$

et

$$C_2 = 14.265\mathrm{Re}^{-0.69} \tag{2.81}$$

— Si $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ ou $\alpha_0 \leq \alpha \leq 180^o$ (c.-à-d. dans le cas où $\alpha_1 = 180^o$),

$$C_1 = 627.61\mathrm{Re}^{-1.446} \tag{2.82}$$

et

$$C_2 = 2.5041\exp(-0.007\mathrm{Re}) \tag{2.83}$$

— Si $\alpha_1 \leq \alpha \leq 180^o$,

$$C_1 = 2.0988\exp(-0.01\mathrm{Re}) \tag{2.84}$$

et

$$C_2 = 0.0478\ln(\mathrm{Re}) - 0.18 \tag{2.85}$$

Discussion sur le coefficient de traînée et de portance

Les expressions dans les (sous-)sections 2.3.6 - *Force de traînée* et 2.3.7 - *Force de portance* sont obtenues à partir du vecteur la vitesse instantanée de l'autre particule $i = 2$. Sachant que la force de traînée est dans le sens inverse de ce vecteur et que la force de portance perpendiculaire au vecteur - la force de traînée et la force de portance sont toutes les deux dans le plan défini par les vecteurs $\vec{u_2}$ et $\vec{D_{12}}$ - on peut ainsi les exprimer dans le repère cartésien.

On fait le rappel que $\vec{u_2} \equiv \dot{\vec{X}}_2$ est le vecteur la vitesse instantanée de l'autre particule ($i = 2$), alors le vecteur $\vec{D_{12}}/||\vec{D_{12}}||$ et le vecteur $\vec{D_{12}} \times \left(\vec{u_2} \times \vec{D_{12}}\right)/||\vec{D_{12}} \times \left(\vec{u_2} \times \vec{D_{12}}\right)||$ forment le nouveau repère pour tout vecteur non nul dans le plan défini par les vecteurs $\vec{u_2}$ et $\vec{D_{12}}$.

Il faut faire attention aux cas où l'angle entre le vecteur $\vec{u_2}$ et le vecteur $\vec{D_{12}}$ vaut 0° ou 180° parce que dans ces deux cas $\vec{u_2} \times \vec{D_{12}}$ est nulle. Dans ces deux cas, le coefficient de portance vaut zéro, donc sans importance.

2.3.8 Force d'histoire pour deux particules sphériques

Les résultats de Leichtberg *et al.* [10] indiquent que le terme historique ne peut pas être significativement altéré par les effets de l'interaction multiparticules. Par conséquent, dans un cas de deux particules, ce terme pourra être évalué à l'aide de celui d'une seule particule sphérique [1].

2.4 Vitesse finale

Pour une particule se déplaçant en ayant une vitesse finale constante dans un champ gravitationnel, l'équation (2.86) décrit l'équilibre de forces [37, 45] :

$$C_D \frac{1}{2} \rho_L V_T^2 \frac{\pi d^2}{4} = \Delta\rho g \frac{\pi d^3}{6} \tag{2.86}$$

En 1968, Clift *et al.* [1] ont présenté la figure suivante : la vitesse finale d'une particule sphérique dans l'air et dans l'eau, en fonction de la masse volumique (Fig. 2.16) [1].

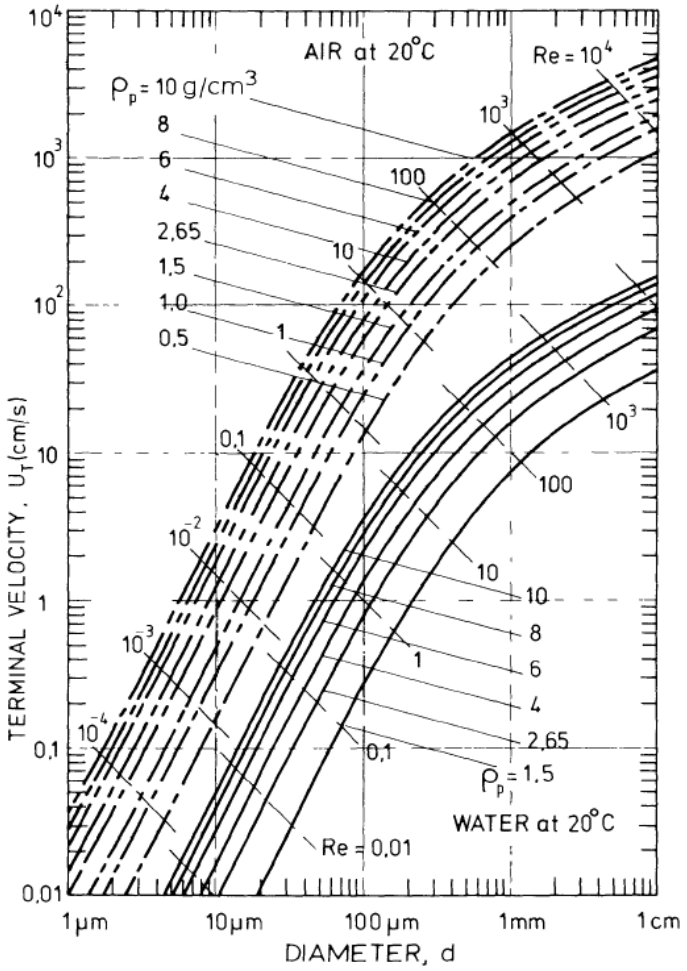


Figure 2.16 Vitesse finale d'une particule sphérique dans l'air et dans l'eau à 20 degrés Celsius, en fonction de la masse volumique [1].

2.5 Trajectoires de deux particules sphériques identiques

D'abord, Clift *et al.* [1] & Fortes *et al.* [46] ont fait des études sur les trajectoires de deux particules ou bulles sphériques (petites, considérées indéformables). Ils ont évalué expérimentalement les interactions entre deux particules sphériques en chute libre dans une colonne d'eau stagnante. On trouve que les mouvements des deux particules sphériques - qui sont alignées verticalement initialement - sont instables. Plus précisément, elles s'attirent, entrent en collision et s'organisent dans une direction transverse ; ensuite, elles se repoussent jusqu'à ce que leur distance soit suffisamment large et que l'interaction puisse être négligée. Ils décrivaient ce type d'interaction : *Drafting, kissing and tumbling rearrangement mechanisms.*

Récemment Zhu-Ren Chu *et al.* [6] ont fait des expériences et des simulations numériques afin de faire des études sur les trajectoires de deux particules sphériques dans l'eau immobile. Deux particules sphériques identiques sont utilisées pendant leurs expériences - $d = 40$ mm et ρ_P est légèrement plus grande que celle de l'eau. Ces deux particules sphériques étaient libérées simultanément, côte à côte. Leurs vitesses initiales étaient nulles.

Le schéma se trouve à la figure 2.17 [6].

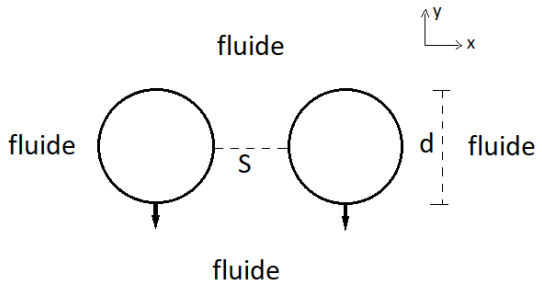


Figure 2.17 Schéma présentant deux particules sphériques identiques, côte à côte, dont la vitesse initiale est nulle. Ici l'écart initial $S(t = t_0) = D(t = t_0) - d$.

En fixant un écart initial $S(t = t_0) = D(t = t_0) - d)$, leurs trajectoires se trouvent à la figure 2.18 [6]. On observe que ces deux particules sphériques s'approchent un peu et puis s'éloignent (à partir de leurs simulations numériques et expériences).

La figure 2.19 présente ainsi l'écart $S = D - d$ entre les deux particules sphériques par rapport au temps [6].

En faisant des simulations numériques du champ de pression, on peut constater que dans ces figures (2.18 et 2.19), la variation de l'écart $S = D - d$ est le résultat de la différence de pression sur le côté gauche/droite de chaque particule sphérique.

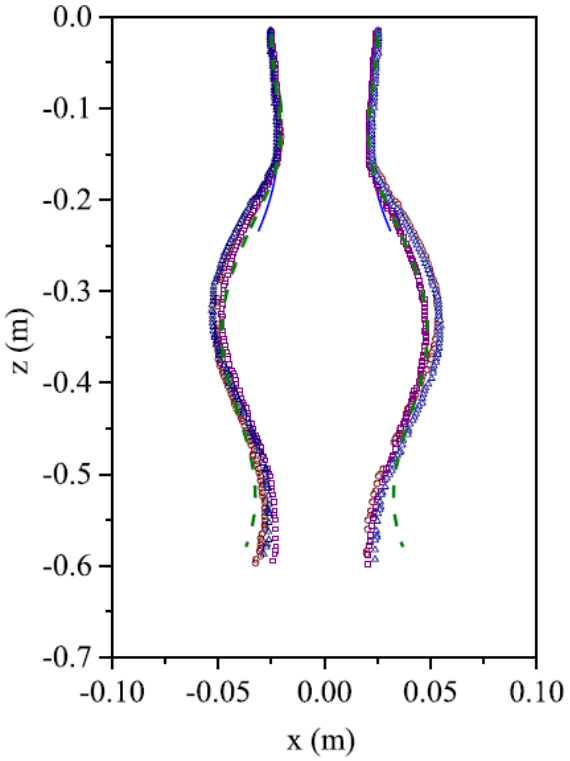


Figure 2.18 Trajectoires des deux particules sphériques dans l'eau immobile - obtenues par des simulations numériques et par des expériences ; l'écart initial $S(t = t_0) = D(t = t_0) - d = d/4 = 10$ mm ; on observe qu'elles s'approchent un peu et puis s'éloignent [6].

En plus, On observe que :

— Les particules sphériques affectent le fluide devant eux jusqu'à environ une distance de 2 diamètres [6] ;

— L'effet de l'interaction entre deux particules sphériques sur la trajectoire n'est pas négligeable dans le cas où l'écart $S = D - d$ est inférieur à 0.75 d [6].

2.6 Réflexion de la revue de littérature

Dans cette section on revoit tout ce chapitre et ainsi donne une réflexion.

2.6.1 Chercheurs et leurs découvertes

Équation de Boussinesq, Basset et Oseen

Oseen, avec Boussinesq et Basset, a développé une équation du mouvement pour une particule sphérique [4] – l'équation Boussinesq, Basset et Oseen. Dans cette équation, la force de masse ajoutée,

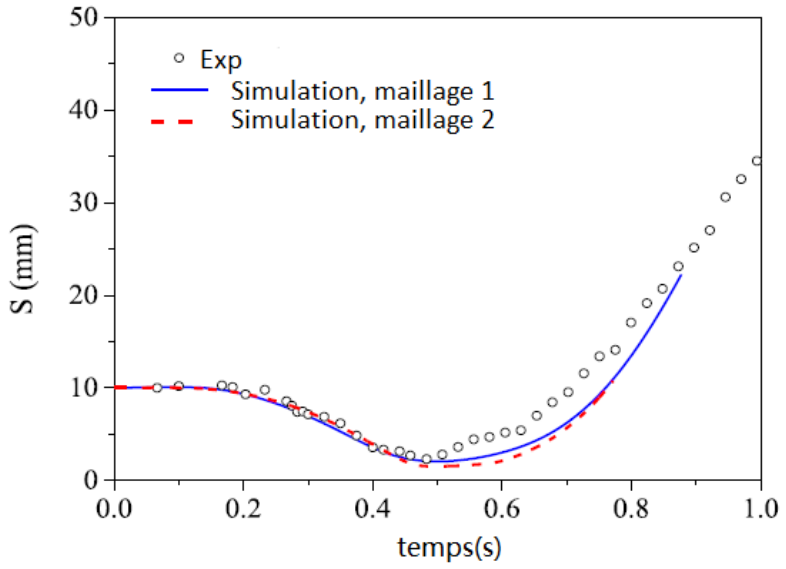


Figure 2.19 Écart $S = D - d$ entre les deux particules sphériques par rapport au temps [6].

la force de traînée, la force de flottabilité (la force de gravité et la poussée d'Archimède) et la force d'histoire sont les forces qui y participent.

Cas d'une particule sphérique dans un milieu infini

D'abord Clift *et al.* [1] ont étudié le sillage derrière une particule sphérique en mouvement (relative) dans un fluide newtonien, selon la valeur du nombre de Reynolds Re.

Pour la force de masse ajoutée, Clift *et al.* [1], Kendoush *et al.* [4, 17] ont proposé leurs corrélations.

Pour la force de traînée, Clift *et al.* [1], Schiller et Naumann [20] et les autres ont proposé leurs corrélations, selon les différents intervalles de validité pour Re.

Pour la force d'histoire, Odar et Hamilton [4] ont proposé une expression empirique du coefficient d'histoire ($Re < 130$).

Finalement, la vitesse finale d'une particule sphérique dans l'air et dans l'eau, en fonction de la masse volumique, peut être trouvée dans la figure proposée par Clift *et al.* [1].

Cas de deux particules sphériques

Pour la force de masse ajoutée, d'abord, Batchelor [16] a proposé une définition tensorielle du coefficient de masse ajoutée $\hat{C}_m$. Béguin *et al.* [17] ont refait la formulation. Ils ont aussi

proposé les relations pour calculer les différents éléments dans les tenseurs représentant les coefficients de masse ajoutée dans cette formulation. Encore une fois, Kendoush *et al.* [4] proposent une dépendance des coefficients de masse ajoutée (pour chacune de deux particules sphériques) par rapport au nombre Re et par rapport à la distance centre-centre D.

Spécialement, dans le cas de deux particules sphériques qui sont côte à côte et qui ont une même accélération perpendiculaire à la ligne horizontale les reliant, Van et Wijngaarden [41] ont proposé une expression pour calculer le coefficient. Cette corrélation est en accord avec celles de Béguin *et al.*. Kendoush *et al.* [4] ont proposé une autre expression contenant Re et D. En plus, si la particule sphérique est remplacée par la bulle dont d est environ 2 mm, Simcik *et al.* [5] ont proposé une expression basée sur les résultats de leurs simulations numériques et un cas similaire est étudié par Milne-Thompson *et al.* [42] et après par Béguin *et al.* [17].

Dans le cas de deux particules sphériques qui sont devant derrière et qui ont une même accélération colinéaire à la ligne verticale les reliant, Van et Wijngaarden [41] ont proposé une expression pour calculer le coefficient. Cette corrélation est en accord avec celles de Béguin *et al.*. Kendoush *et al.* [4] ont proposé une autre expression contenant Re et D. En plus, encore une fois, si la particule sphérique est remplacée par la bulle dont d est environ 2 mm, Simcik *et al.* [5] ont proposé une expression basée sur les résultats de leurs simulations numériques.

Afin de décrire le mouvement d'une particule sphérique (avec la présence d'une autre à côté) dans un milieu infini, la nouvelle force – force de Meshchersky est aussi proposée [17, 40].

Pour la force de traînée, dans le cas de deux particules sphériques qui sont côte à côte et qui ont une même vitesse instantanée (relative) perpendiculaire à la ligne horizontale les reliant, Legendre *et al.* [43] ont proposé une expression, qui est applicable dans le régime où Re varie entre 10^2 et 10^3 ; dans le cas de deux particules sphériques qui sont devant derrière et qui ont une même vitesse instantanée (relative) colinéaire à la ligne verticale les reliant, Zhu *et al.* [13] ont proposé une expression, qui est applicable dans la plage $20 \leq \mathrm{Re} \leq 130$ pour la particule derrière, en supposant que le coefficient de traînée pour la particule devant n'est guère impacté par la présence de la particule derrière. Tsuji *et al.* [11] ont proposé une autre, et ont vérifié cette dernière conclusion.

Pour la force de traînée et pour la force de portance, dans le cas de deux particules sphériques (on revient au cas général), L. Prahl *et al.* [44] ont fait leurs simulations numériques (CFD) et ont présenté les courbes – coefficient de traînée ou coefficient de portance en fonction de D et de α.

Pour la force d'histoire, Leichtberg *et al.* [10] indiquent que le coefficient ne peut pas être significativement altéré par les effets de l'interaction multi-particules.

Concernant les trajectoires de deux particules sphériques, Clift *et al.* [1] & Fortes *et al.* [46] ont fait des études expérimentalement et ont pris les trois mots afin de donner une description : *Drafting, kissing and tumbling.* Récemment Zhu-Ren Chu *et al.* [6] ont fait leurs expériences et leurs simulations numériques afin d'étudier les trajectoires de deux particules sphériques, qui sont libérées simultanément, côte à côte et sans vitesse initiale.

2.6.2 Manque

Ici on fait un bilan de la sous-section précédente :

— On dispose d'une équation pour décrire le mouvement d'une particule sphérique dans un fluide newtonien (un milieu infini) – l'équation de BBO, mais il n'y a pas d'équation décrivant le mouvement d'une particule au sein d'un groupe de particules (2 ou plus) dans le même fluide newtonien – cette équation doit prendre en compte les interactions entre particules ;

— Pour la force de masse ajoutée, dans le cas de deux particules sphériques, seulement 2 cas spéciaux (côte à côte, devant derrière, l'accélération identique) sont étudiés et puis les expressions sont explicitement proposées. Quand on revient au cas général, Béguin *et al.* [17] font une formulation en écrivant les coefficients sous forme de tenseur ;

— Pour la force de traînée, dans le cas de deux particules sphériques, aussi, seulement 2 cas spéciaux (côte à côte, devant derrière, la vitesse instantanée identique) sont étudiés et puis les expressions sont explicitement proposées ;

— Pour la force de portance, il n'y a pas d'expression proposée explicitement ;

— Pour la force d'histoire, qui est en général moins importante (comparée avec les autres forces), il n'y a pas de grande différence si l'on prend en compte les interactions entre particules ou pas.

2.6.3 Partie complémentaire

En faisant un rappel de l'objectif général et de celui spécifique de ce projet de recherche, on trouve qu'il est nécessaire de :

— Proposer l'équation de BBO généralisée afin de pouvoir décrire le mouvement de chacune d'une paire de particules sphériques ;

— Trouver une expression pour chaque force qui participe à l'équation de BBO généralisée mentionnée au-dessus – cette expression devra être applicable dans n'importe cas de

deux particules sphériques ;

— Lancer des expériences, faire des simulations numériques et après faire des comparaisons.

Dans le prochain chapitre, on va discuter la conception, la construction et les tests de l'ensemble du dispositif expérimental.

CHAPITRE 3 DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Ce projet de recherche commence par la conception, la construction et le test d'un tout nouveau dispositif expérimental. Dans ce chapitre, d'abord une description générale de cette étape est donnée. Ensuite, une description globale de l'ensemble du dispositif expérimental ainsi que celle pour chaque sous-système sont données séparément. Je constate qu'à cause de la pandémie, une grande portion du temps a été consacrée à cette étape.

À la fin de ce chapitre, le processus du traitement des données est présenté en prenant un exemple.

3.1 Conception, construction et tests

Sachant que nous devions créer notre propre dispositif expérimental à partir de zéro, quelques propositions qui devraient être satisfaites sont données par rapport aux points suivants :

- Une cuve
- Une plateforme mobile
- Un mécanisme de positionnement de deux particules sphériques

3.1.1 Cuve

Une grande cuve est préférée dans le but de minimiser l'impact des parois sur la trajectoire des particule(s) submergée(s), qui doit aussi être transparente et avoir une forme de cube – éviter d'avoir toute surface courbe parce que cette dernière pourra entraîner une distorsion d'image et rendre le traitement des données plus compliqué.

La hauteur de cette grande cuve doit être d'au moins 50 centimètres parce que la paroi horizontale en bas peut aussi avoir un impact sur le comportement des particules submergées qui descendent ; d'autre part, il faut éviter d'avoir une cuve dont la hauteur est supérieure à celle d'un adulte afin d'éviter des opérations trop difficiles et d'éviter une pression trop haute au fond de la cuve.

La largeur (interne) de cette grande cuve peut prendre une valeur appropriée en prenant le volume d'eau consommée pour chaque expérience en considération ; une plage de valeurs entre 20 centimètres et 40 centimètres est proposée.

3.1.2 Plateforme mobile

Afin de filmer tout le processus de la descente ou de la montée de deux particules submergées, une plateforme mobile au-dessus de laquelle une caméra se situe est proposée au lieu d'un support immobile de la caméra. Cette plateforme mobile doit rester horizontale quand elle monte ou descend et les vibrations doivent être minimisées.

3.1.3 Mécanisme de positionnement de deux particules sphériques

Il faut établir un mécanisme de positionnement afin que l'on puisse fixer les positions de deux particules sphériques avant de les libérer en même temps, c'est-à-dire, leurs vitesses initiales doivent être nulles. Due à l'importance de la force de masse ajoutée au tout premier moment d'accélération à partir d'une vitesse initiale nulle, afin de pouvoir faire des mesures avec une haute précision, la pièce touchant des particules sphériques doit être la plus petite possible.

3.1.4 Autres considérations

Finalement, l'aspect budgétaire doit aussi être pris en compte et l'ensemble du dispositif expérimental doit être le plus compact possible, c'est-à-dire, l'espace occupé ne peut pas être trop grand.

3.1.5 Conception, construction et tests - petit bilan

Après des réflexions et des discussions, une première conception est finalement faite. Elle consiste en un cadre métallique qui prend une forme d'un carré d'environ 70 cm $\times$ 70 cm (vue d'en haut). Un autre carré d'environ 32 cm $\times$ 32 cm se situe dans un coin, qui est réservé pour y mettre la cuve, le reste est pour la plateforme mobile et ses accessoires. Le mécanisme de positionnement de deux particules sphériques se situe au-dessus de la cuve, grâce à une barre reliant deux côtés adjacents du petit carré, formant deux angles de 45 degrés.

Après avoir fini la conception, je continuais et entrais dans la phase construction. Une grande portion des objets sont achetés directement en ligne (sur le site McMaster-Carr par exemple), et le reste (surtout de petites pièces) est fait dans un atelier appelé PolyFab Normand Brais, qui se situe dans le pavillon Lassonde de Polytechnique Montréal.

Dans la phase test, j'ai fait des tests (partie par partie, et après de l'ensemble du dispositif expérimental) avant de vraiment commencer la planification de mes expériences. Il est observé que le moteur acheté n'est pas suffisamment puissant afin de faire monter la plateforme mobile avec tous les objets mis au-dessus. Il faut aussi constater que la vibration qui se produit à

l'instant où la plateforme commence à monter/descendre s'évanouit mais demeure observable par la caméra. Finalement une décision est faite : le moteur est enlevé en bas de la vis sans fin et il sera utilisé ultérieurement par d'autres projets de recherche.

Malgré l'absence de ce moteur, c'est-à-dire, l'absence d'une alimentation pour faire monter ou descendre la plateforme mobile d'une façon automatique, je peux toujours tourner la vis sans fin afin de changer la hauteur de cette dernière manuellement.

Dans les prochaines sections, l'ensemble du dispositif expérimental est « divisé » en quelques parties et chaque partie est présentée séparément en détail.

3.2 Cadre métallique

Le cadre métallique dont les trois dimensions valent respectivement 682.9 mm, 682.9 mm et 1691.0 mm est conçu (voir les images 3.1 et 3.2 au-dessous). Le profil 40 × 40 (donc la section transversale de barres en aluminium est un carré de 40 mm × 40 mm) est choisi.

La conception a été faite à l'aide du logiciel May-CAD, avec lequel on peut aussi mesurer le poids de toute structure et voir le prix approximatif.

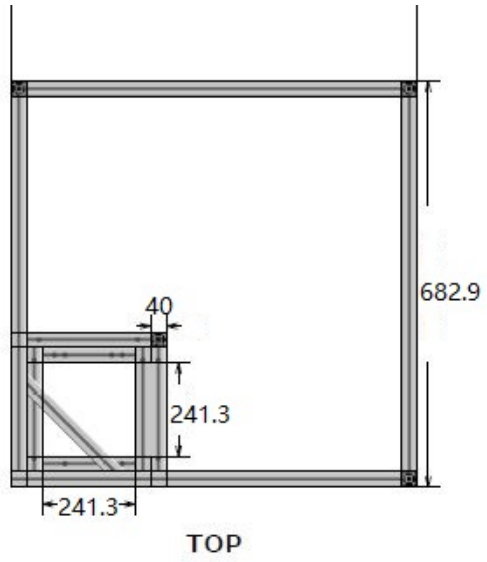


Figure 3.1 Vue d'en haut du cadre métallique. Le petit carré est réservé à la grande cuve. Les profils de toutes les barres sont tous 40 × 40 mm.

3.3 Grande cuve, le réservoir d'eau

La grande cuve transparente prend une forme de cuboïde. La section transversale est fixée : un carré de 29.21 cm de côté (dimension intérieure). La hauteur (intérieure) est environ 102 cm. L'épaisseur uniforme de la paroi est 1.27 cm. Cette grande cuve est fabriquée en acrylique.

La cuve reposant sur le cadre métallique décrit au-dessus. Ils forment le banc d'essai (voir la figure 3.2 ci-dessous).

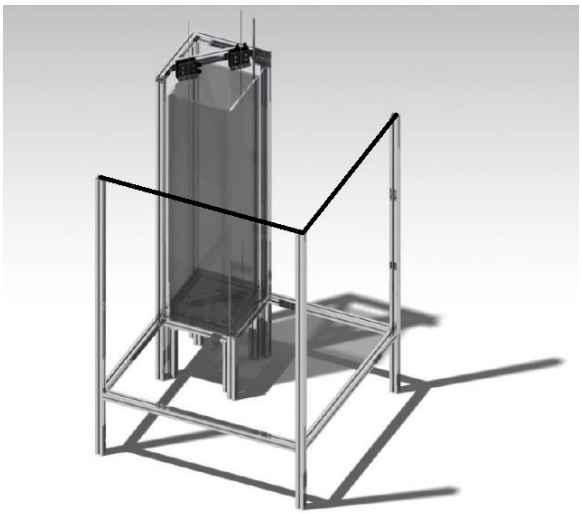


Figure 3.2 La grande cuve, le réservoir d'eau se situant sur le cadre métallique mentionné au-dessus. Les deux lignes noires épaisses représentent deux barres en aluminium rajoutées au cadre métallique.

3.3.1 Tuyauterie d'évacuation de l'eau

L'évacuation de l'eau de la cuve se fait par un assemblage de tuyauterie relié à la cuve au centre de sa base par un trou taraudé 3/4 NPT.

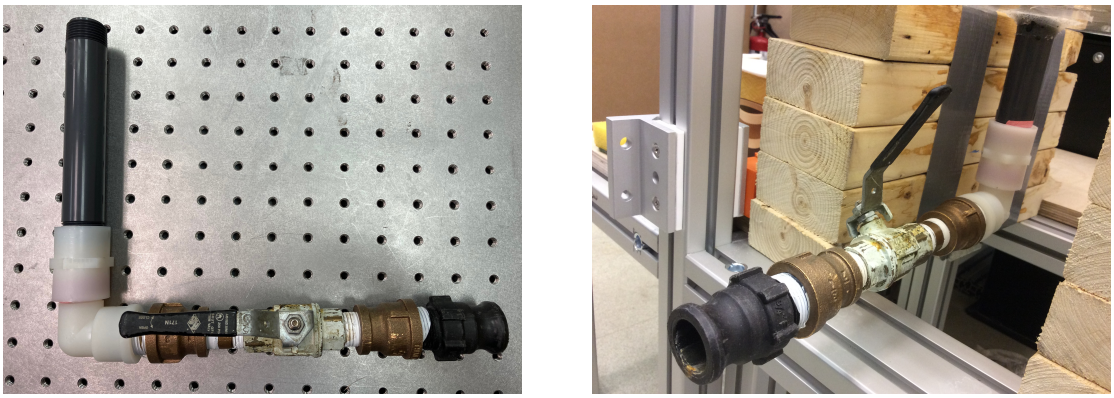


Figure 3.3 Tuyauterie d'évacuation de l'eau, attachée en bas de la grande cuve.

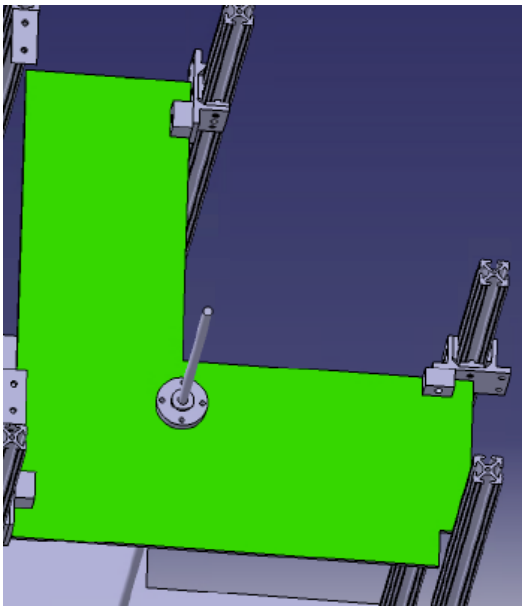
3.4 Vis sans fin

La vis sans fin a été choisie en fonction de la vitesse (la composante verticale) du déplacement de la plateforme. D'abord, une estimation de la vitesse finale de différentes particules a été faite. Finalement, une tige filetée à 8 filets qui a un rapport de vitesse d'un pouce par tour a été choisie (voir la figure 3.4). Ce grand rapport de vitesse permet aussi d'utiliser un moteur moins rapide, mais ayant un plus grand couple.

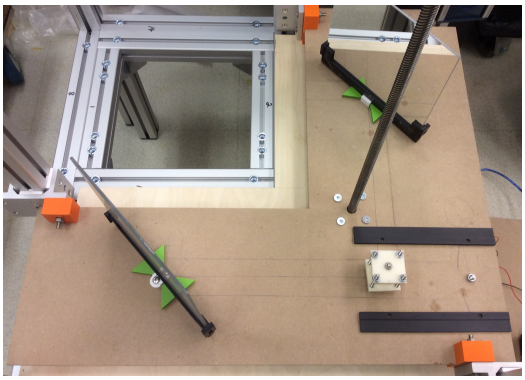
Figure 3.4 La verticalité de la vis sans fin est mesurée et vérifiée (ceci se fait plusieurs fois).

3.5 Plateforme mobile

La plateforme mobile prend une forme en « L » (voir les figures 3.5a et 3.5b) et elle est fabriquée en coupant une feuille de panneaux de fibres de bois de moyenne densité (*Medium Density Fiberboard Sheet* en anglais). L'épaisseur de la plateforme vaut 6.35 mm.



(a) Forme en « L ».



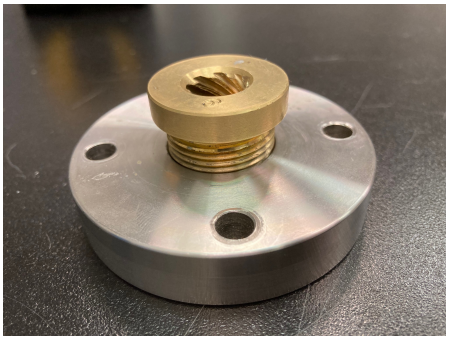
(b) Vue d'en haut.

Figure 3.5 Plateforme mobile.

Une fois installée, la plateforme mobile reste dans le cadre métallique et il y a trois « chariots » reliant cette première aux trois barres verticales en aluminium de ce dernier.

Il y a un trou circulaire dont le diamètre est légèrement supérieur à celui de la vis sans fin, par lequel cette dernière traverse la plateforme. Quand la vis sans fin tourne continûment en gardant une vitesse angulaire constante, la plateforme mobile monte ou descend en gardant une vitesse constante, à l'aide de deux pièces taraudées les reliant (voir les figures 3.6a et 3.6b).

(a)



(b)

Figure 3.6 Vis sans fin traversant la plateforme via ces deux pièces.

Cette plateforme mobile a une capacité de soutenir une caméra et trois miroirs : deux miroirs optiques et un miroir 50/50, qui vont être présentés dans les prochaines parties (voir la figure 3.7).

Figure 3.7 Plateforme mobile avec tous les objets (une caméra et trois miroirs) mis au-dessus.

3.6 Caméra haute vitesse

Nous disposons d'une caméra rapide qui prend une forme cube et qui est relativement légère dans le laboratoire : MotionBLITZ @Cube4. La dimension de cette caméra est de 69 mm × 93 mm × 92 mm et avec la lentille 69 mm × 93 mm × 128 mm. Sans la lentille elle pèse environ 900 g (voir la figure 3.8).

Avec cette caméra, nous pouvons prendre des images dont la résolution vaudra 1696 × 1710 pixels et avec une fréquence d'images élevée, qui pourra atteindre 1000 images par seconde.

Figure 3.8 Caméra rapide utilisée, qui prend une forme cube et qui est compacte. Source : Mikrotron @Cube

Une fois que la caméra est connectée à l'ordinateur, le logiciel nommé *MIKROTRON* peut être ouvert afin de visualiser et ainsi pouvoir faire des ajustements avant de filmer. Des images sont stockées sous forme de bitmap (.bmp), donc j'ai pu les ouvrir et faire le traitement (en utilisant Matlab).

Sur la plateforme mobile, un support de la caméra est fait à partir de morceaux en bois (voir l'image 3.7).

3.7 Miroir 50/50

Le laboratoire LADYF dispose d'un miroir 50/50, qui peut superposer deux images venant de deux directions orthogonales d'une façon optiquement équilibrée. (voir le schéma 3.9).

Le miroir 50/50 prend une forme de cube de dimensions 25 mm × 25 mm × 25 mm.

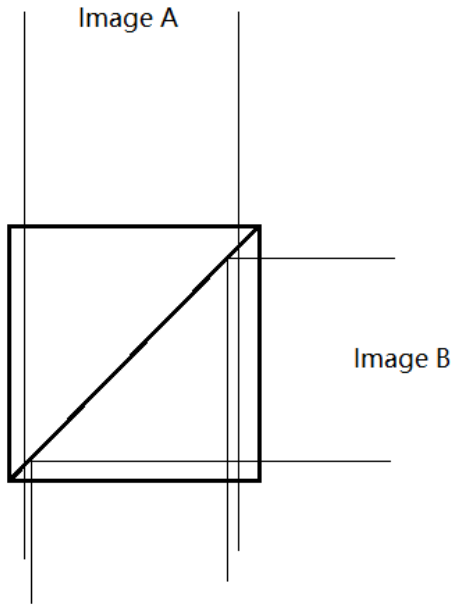
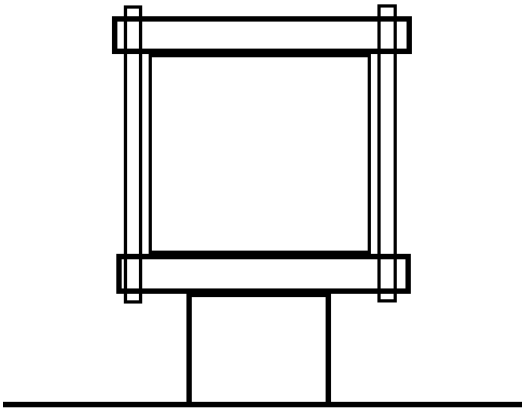


Figure 3.9 Schéma montrant comment le miroir 50/50 superpose deux images d'une façon optiquement équilibrée, vu d'en haut.

Sur la plateforme mobile, le support du miroir 50/50 est bien conçu pour que la lentille de la caméra et le miroir 50/50 soient sur une même hauteur (les deux centres, voir la figure 3.10a). Afin de pouvoir réutiliser ce miroir 50/50 dans d'autres projets de recherche, deux petites feuilles carrées en plastique et quatre vis sont utilisées pour « presser » le miroir 50/50 au lieu de le coller sur son support (voir la figure 3.10b).

(a) Caméra & miroir 50/50.



(b) Schéma montrant le support du miroir 50/50.

Figure 3.10 Avec le support du miroir, la lentille de la caméra et le miroir 50/50 sont sur une même hauteur.

3.8 Deux miroirs optiques

Deux miroirs optiques ont été achetés sur le site *ThorLab* (Numéro du produit : ME85-G01), qui sont deux carrés de 8 pouces × 8 pouces et dont l'épaisseur vaut 3.2 mm. Les deux surfaces réfléchissantes sont deux couches très fines d'aluminium.

Ces deux miroirs optiques sont installés, mais pas fixés sur la plateforme mobile. Afin de protéger ces deux miroirs optiques et de minimiser les vibrations, j'ai conçu un support pour chacun, avec lequel le miroir correspondant peut être tourné horizontalement autour du point au centre et ainsi je suis capable de faire un ajustement mineur d'angle afin d'observer mieux ce qui se passe dans la grande cuve. Les deux supports de ces deux miroirs optiques sont fabriqués dans l'atelier PolyFab, à l'aide d'une imprimante 3D (voir la figure 3.11).

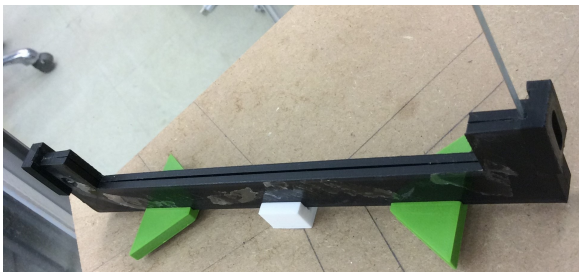
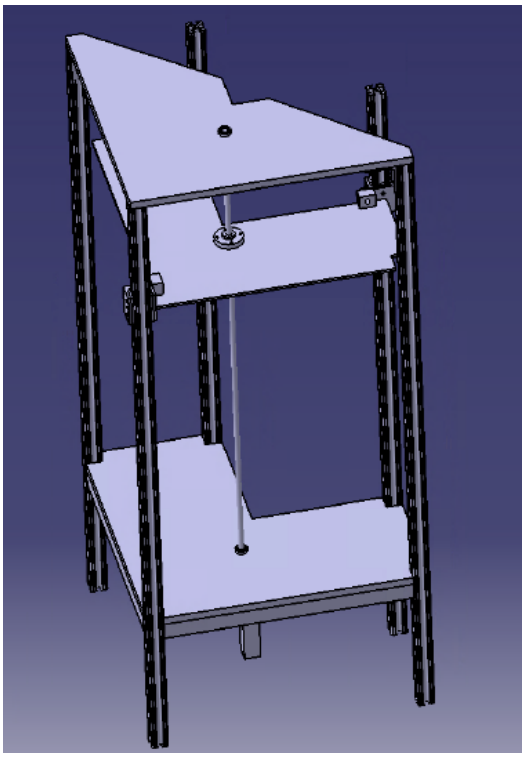


Figure 3.11 Support d'un miroir optique. La pièce blanche est taraudée afin que l'on puisse faire des ajustements mineurs d'angle.

3.9 Deux plaques fixes en contreplaqué

À part la plateforme mobile, deux plaques fixes en contreplaqué sont aussi rajoutées : une au-dessus du cadre métallique et l'autre en bas, au même niveau que le fond de la cuve. L'épaisseur de ces deux plaques fixes est plus grande que celle de la plateforme, 17.4625 cm (voir la figure 3.12a).

La vis sans fin traverse aussi ces deux plaques. Plus précisément, quand la vis sans fin tourne, seulement la plateforme mobile peut monter/descendre et les frottements entre la vis sans fin et ces deux plaques fixes sont minimisés par l'application de deux roulements à billes (*ball bearing* en anglais, voir la figure 3.12b).



(a) Positions de la plaque fixe en bas, de la plateforme mobile et de la plaque fixe en haut.

(b) La vis sans fin traverse les deux plaques fixes de la même façon – à l'aide d'un roulement à billes.

Figure 3.12

3.10 Mécanisme de positionnement de deux particules sphériques

Le système de positionnement de deux particules sphériques est composé de plusieurs parties. Ce système est conçu dans le but de tenir les deux bras tubulaires ainsi que deux particules sphériques avant de les libérer, d'une manière stable.

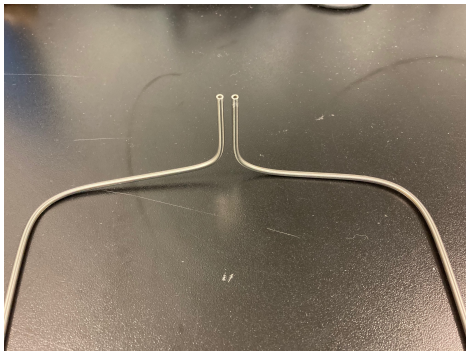
À partir de deux tuyaux en PVC, souples et transparents, dont le diamètre externe est 3.175 mm et dont l'épaisseur est 0.79375 mm, il y a deux tubes en acier inoxydable du même diamètre externe, dont chacun est relié à un tuyau plastique. Ces deux tubes en acier inoxydable sont fixés sur deux tables de positionnement 1 axe, à l'aide des pièces faites sur mesure en acrylique.

Aux extrémités de ces deux tubes en acier inoxydable, des adaptateurs du type Yok-Lok peuvent être rajoutés si nécessaire, afin de mieux « attirer » des particules sphériques.

3.10.1 Bras tubulaires

Voici deux paires de bras tubulaires, appelés respectivement type A et type B dans la suite de ce mémoire (voir les figures 3.13a et 3.13b). Pour le type A, les deux extrémités (submergées, où des particules peuvent être attirées) sont face à face ; pour le type B, elles sont parallèles, l'une à l'autre et elles ont la même orientation. L'utilisation de ces deux types de bras tubulaires nous aide à étudier l'effet de l'impulsion sur les particules quand on les libère, ce qui est détaillé dans le prochain chapitre.

(a) Bras tubulaire du type A.



(b) Bras tubulaire du type B.

Figure 3.13 Deux paires de tubes en acier inoxydable.

3.10.2 Deux tables de positionnement 1 axe

Nous disposons de deux tables de positionnement identiques dans le laboratoire. Ils sont à 1 axe – c'est-à-dire, une planche ne peut se déplacer que dans une direction par rapport à l'autre. Elles sont chacune équipées d'un micromètre SM-25 de la même marque. Ici 25 nous dit la course maximale – 25 millimètres. Le pas de chaque tour vaut 0.5 mm.

Ces deux tables de positionnement sont fixées sur la barre en haut à 45 degrés du cadre métallique de la façon suivante telle qu'une peut se déplacer horizontalement et l'autre verticalement (voir la figure suivante). Ceci nous permet de créer différentes positions initiales de deux particules sphériques (voir la figure 3.14).

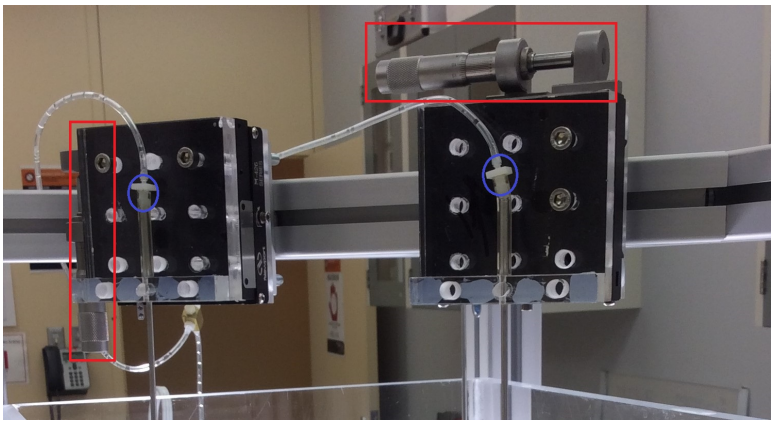


Figure 3.14 Deux tables de positionnement à 1 axe, équipées chacune d'un micromètre dont la course maximale vaut 25 mm (voir les deux rectangles rouges).

3.11 Pompe à vide et son support

Une pompe à vide pouvant procurer un vide de 2.0 mbar a été utilisée. Cette pompe est compacte, relativement légère et suffisante pour nous (voir la figure 3.15).

Figure 3.15 Pompe à vide utilisée. Le débit volumique maximal vaut 3.8 m^3/h et la pression créée peut atteindre jusqu'à 2.0 mbar. Elle se situe sur deux barres en bois afin d'éliminer l'effet de la vibration.

Cette pompe est posée sur la grande table à côté du cadre métallique. Afin d'éliminer l'influence de la vibration de cette première sur le cadre métallique, deux barres carrées en bois sont rajoutées entre les quatre pieds de la pompe et la table.

3.12 Réservoir d'air comprimé

À partir de la pompe à vide, un gros tuyau sort et relie cette première au réservoir d'air comprimé, qui est en fait une bouteille en verre donc indéformable et semi-transparente. Il y a une vanne se situant proche de la pompe à vide.

Un bouchon de liège avec quatre trous est utilisé pour bien fermer le réservoir d'air comprimé et l'étanchéité est vérifiée avec ces quatre trous fermés. De l'air passe par le premier trou et va jusqu'à la pompe à vide quand cette dernière fonctionne ; de l'air ou éventuellement du mélange (de l'air et de l'eau) entre au réservoir d'air comprimé en passant par les deux tuyaux souples en PVC mentionnés au-dessus et ainsi par le deuxième et le troisième trous ; le quatrième trou est réservé pour une deuxième vanne.

Deux tubes courts fins en acier inoxydable ont été insérés dans le deuxième et le troisième trous à l'intérieur du réservoir pour qu'il n'y ait pas d'eau pouvant entrer dans le gros tuyau et éventuellement abîmer la membrane filtre de la pompe à vide.

Le schéma est présenté à la figure 3.16.

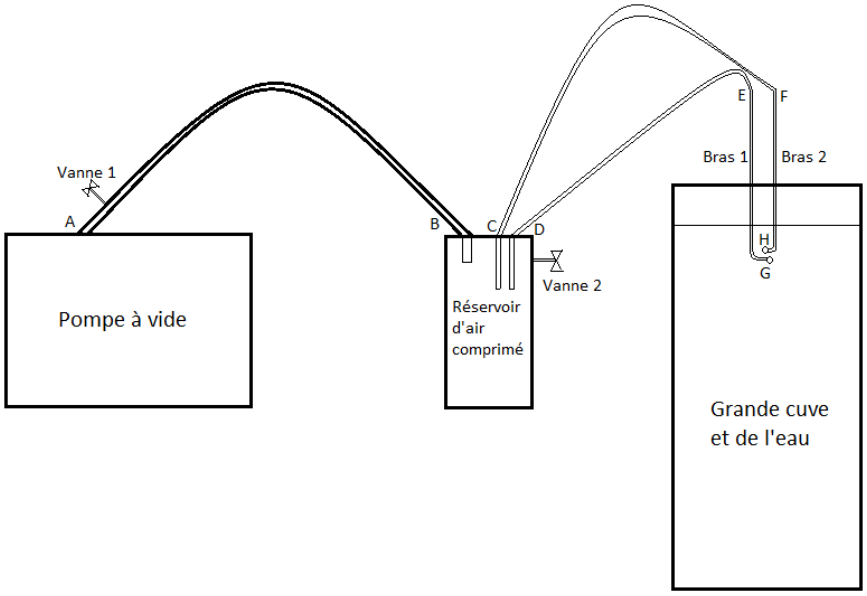


Figure 3.16 Schéma présentant toutes les composantes nécessaires pour « attirer » et pour « libérer » deux particules sphériques sous l'eau.

3.13 Mécanisme de fixation et de libération de deux particules sphériques

En démarrant la pompe à vide et en ouvrant ou fermant les deux vannes, j'ai découvert de bonnes façons d'abord de « attirer » deux particules sphériques identiques sous l'eau

et puis de les libérer (quasiment) en même temps – après plusieurs essais. Je constate que la condition initiale est cruciale pour les comportements des deux particules venant d'être lancées – c'est-à-dire, même si un petit décalage du temps (moins d'une seconde) peut mener à d'autres résultats. L'impulsion appliquée sur une particule à l'instant d'être libérée est un autre facteur crucial, dont on parle dans le prochain chapitre.

3.14 Sources de lumière

La source de lumière utilisée est constituée de deux sources de lumière froide, 35 W, 14.4 cm $\times$ 121 cm. La luminosité est 3200 lumens. La couleur est blanc brillant.

Avec deux couches de tissu de diffusion de lumière rajoutées entre chaque source de lumière et la grande cuve, j'ai pu obtenu des images dont le fond est blanc presque partout, autrement dit, la lumière est distribuée presque uniformément après deux couches de tissu de diffusion.

Les positions de ces deux sources de lumière froide peuvent être ajustées.

3.15 Particules sphériques

Nous avons eu de nombreuses discussions sur les choix de particules à utiliser. Afin d'éliminer l'impact de la rugosité, des particules lisses (les plus lisses possibles) sont demandées. Aussi, leurs masses volumiques doivent être près de celle de l'eau.

Finalement, nous avons utilisé neuf types de particules. Un tableau récapitulatif se trouve ci-dessous (Tableau 3.1). Il faut remarquer que le diamètre de la particule le plus petit que nous pouvions trouver est 3.175 mm.

* : Le diamètre indiqué de ce type de particules est bien 3/8, soit 0.375, mais après mes mesures, je le trouve plutôt 0.374.

** : La masse volumique de ce type de particules est difficile à mesurer, étant très légère. Après des mesures, je pense que sa valeur est entre 13 et 27 kg/m^3, qui est environ de 10 à 20 fois plus grande que celle de l'air.

*** : Le diamètre indiqué de ce type de particules est bien 1/8, soit 0.125, mais après mes mesures, je le trouve plutôt 0.13. En fait, le produit acheté est un gros paquet et chacune des particules dedans a son propre diamètre, qui se situe dans une plage de valeurs. J'en ai ainsi sélectionné deux dont la taille est presque identique.

En regardant ce tableau (Tableau 3.1), on peut trouver qu'il y a 6 types de particules dont la masse volumique est supérieure à celle de l'eau, et 3 inférieure à celle de l'eau. Parmi

Tableau 3.1 Particules sphériques utilisées pendant mes expériences

Indice (Nom)	Matériau	Masse volumique (mesurée, kg/m^3)	Diamètre (pouce) [1]
Nylon-0.125	Nylon	1150	1/8, 0.125
Nylon-0.375	Nylon	1150	3/8, 0.375
DA-0.125	Delrin Acétal	1410	1/8, 0.125
DA-0.25	Delrin Acétal	1410	1/4, 0.25
DA-0.3125	Delrin Acétal	1410	5/16, 0.3125
DA-0.374	Delrin Acétal	1410	3/8, 0.374*
Polystyrene-0.13	Polystyrène	13-27**	1/8, 0.13***
Bois-0.4	Bois	670	0.4
HDPE-0.25	HDPE	950	1/4, 0.25

ces 9 types de particules, les deux types – Polystyrene-0.13 et Bois-0.4 – ne sont pas « bons » parce qu'elles ne sont pas parfaitement sphériques et qu'elles ne peuvent pas être considérées comme lisses au sens strict. Ainsi, les résultats obtenus en utilisant ces deux types de particules servent seulement à faire des comparaisons avec ceux en utilisant les autres types de particules.

3.15.1 Traitement d'images, des données et reproduction de trajectoires

Dans cette sous-partie, le processus complet de traitement des données est présenté.

D'abord, la figure 3.17 fait un rappel de tous les objets sur la plateforme mobile (vue d'en haut). Dans cette figure-là, les deux points noirs représentent deux particules sphériques en mouvement dans l'eau. On peut aussi trouver à la figure 3.17 qu'un système de coordonnées est déjà établi, dont l'axe z est vers le bas.

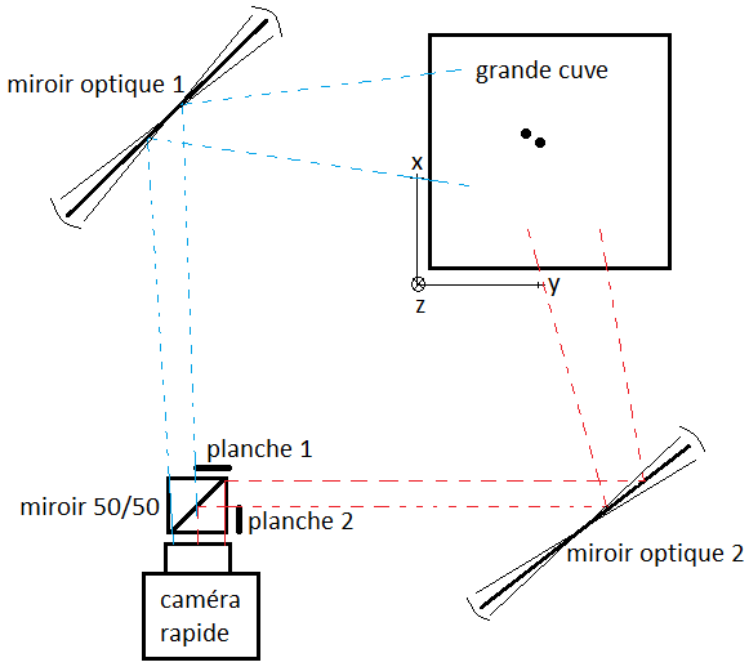


Figure 3.17 Plateforme mobile ainsi que tous les objets mis au-dessus, vus d'en haut. Le premier système de coordonnées est déjà établi, dont l'axe z est vers le bas.

Avec la caméra de haute vitesse, les mouvements de deux particules sphériques sont filmés et peuvent être stockés sous forme d'une vidéo ou d'une série d'images de format bitmap (.bmp).

La figure 3.18 nous donne un exemple d'images prises par la caméra haute vitesse. Nous pouvons voir qu'il y a 4 sphères (cercles) dans cette image, qui est en fait composée de deux parties – la partie à gauche et celle à droite. La figure 3.19 montre ces deux parties avec des axes x, y, z(gauche) et z(droite).

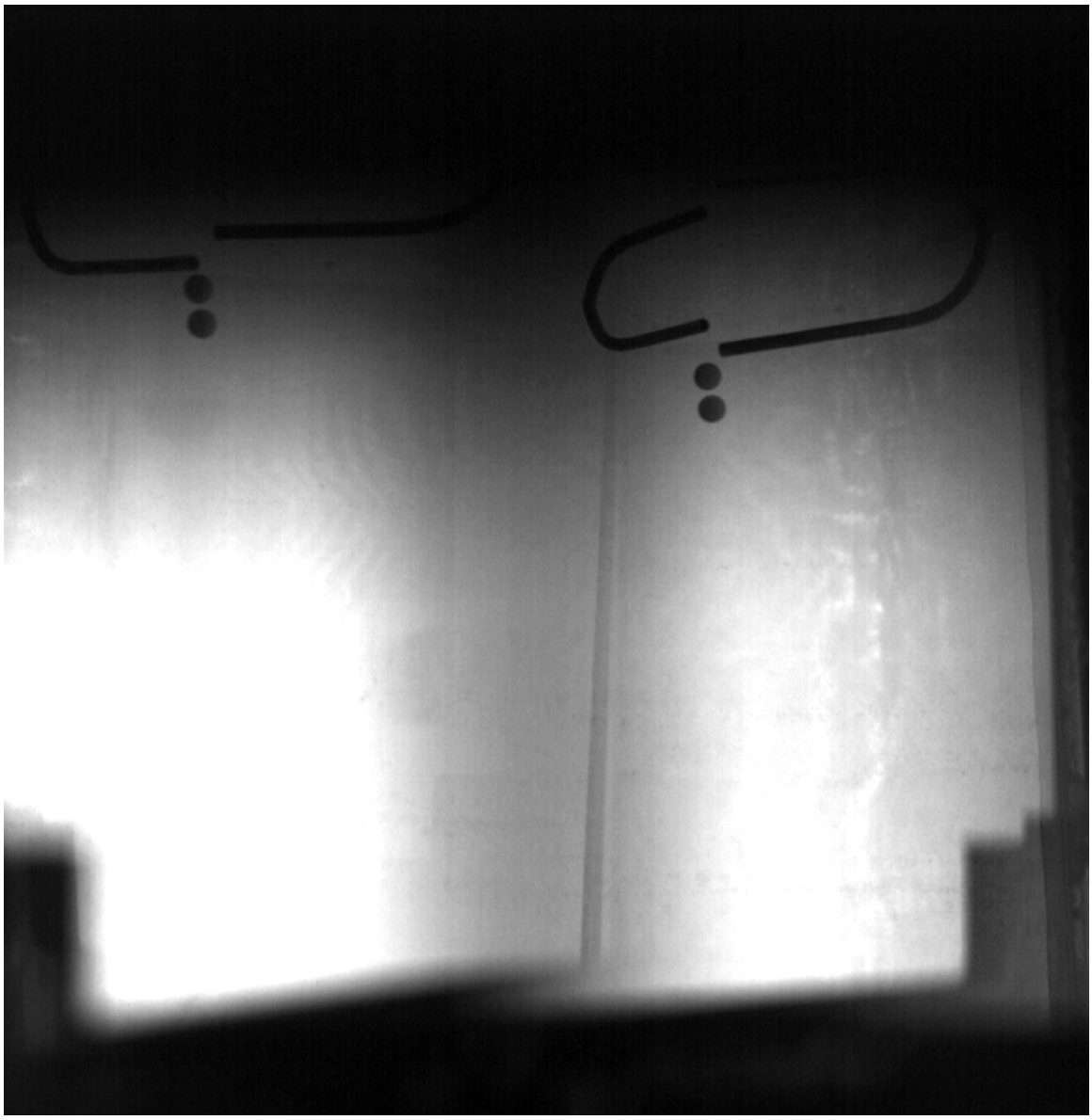


Figure 3.18 Un exemple d'images prises.

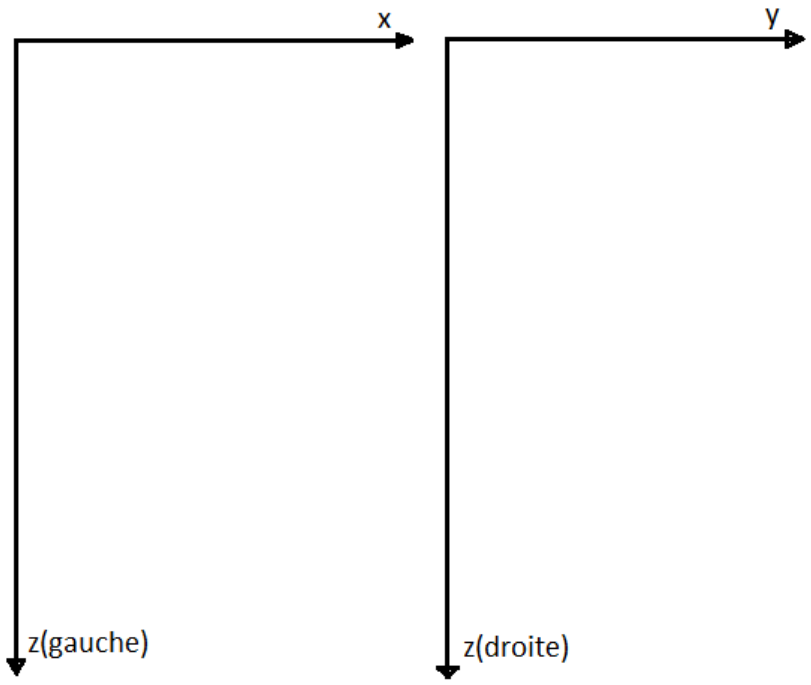


Figure 3.19 Système de coordonnées vu dans des images.

Il faut aussi remarquer que les deux parties (à gauche et à droite) d'une image ne sont pas toujours strictement verticales, donc avant de lancer une expérience et de commencer l'enregistrement, après avoir mis tous les objets sur la plateforme mobile, j'utilisais une règle transparente, qui est très mince, dans le but d'indiquer le sens de la gravité dans chaque partie. Je pouvais donc faire des modifications des données (la position de chaque particule à chaque instant) plus tard (voir la figure 3.20).

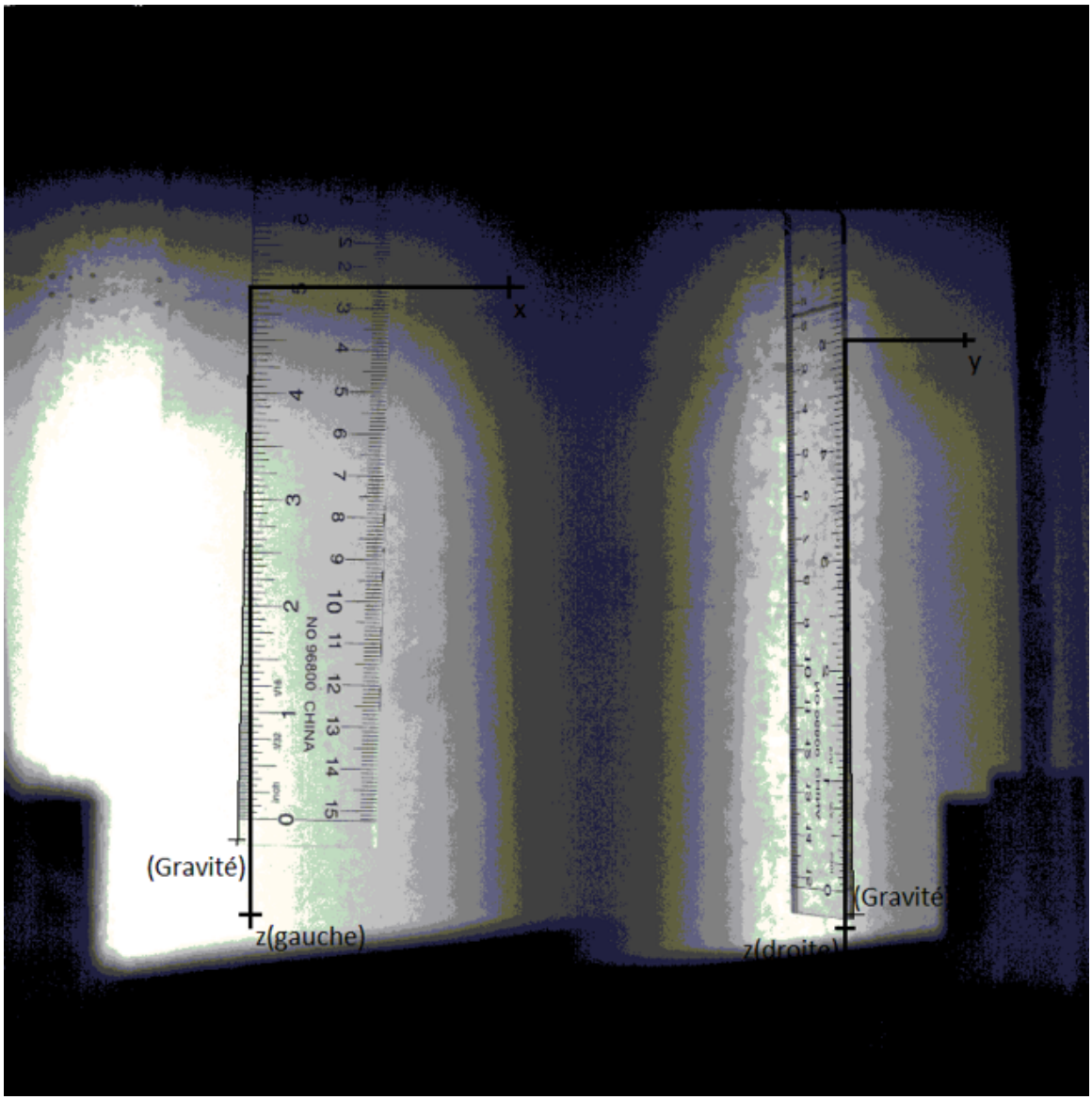


Figure 3.20 Système de coordonnées vu dans des images.

Étape 1 - Collecte

Avec MATLAB, en profitant de l'algorithme permettant de détecter des cercles dans une image, on scanne la partie à gauche et celle à droite de chaque image (.bmp) – une série d'images est stockée dans un même dossier – et on peut, dans la plupart des cas, trouver la position et le rayon de chaque cercle dans chaque partie, exprimés en pixel. Chaque cercle est indexé tel que chaque numéro entier à partir de 1 (inclus) correspond à un cercle (sa position et son rayon).

On dispose de deux numéros pour définir une position : le premier numéro correspond à la

projection de la position en axe x, qui est horizontal et vers la droite ; le deuxième en axe y, qui est vertical et vers le bas. Autrement dit, dans la partie à gauche, le premier numéro correspond à l'axe x dans le système de coordonnées (voir la figure 3.17 ou 3.19), le deuxième correspond à l'axe z(gauche) ; dans la partie à droite, le premier numéro l'axe y et le deuxième l'axe z(droite).

Après avoir scanné toutes les images, on peut visualiser tous les cercles détectés en prenant une image comme le fond. Voici un exemple (voir la figure 3.21).

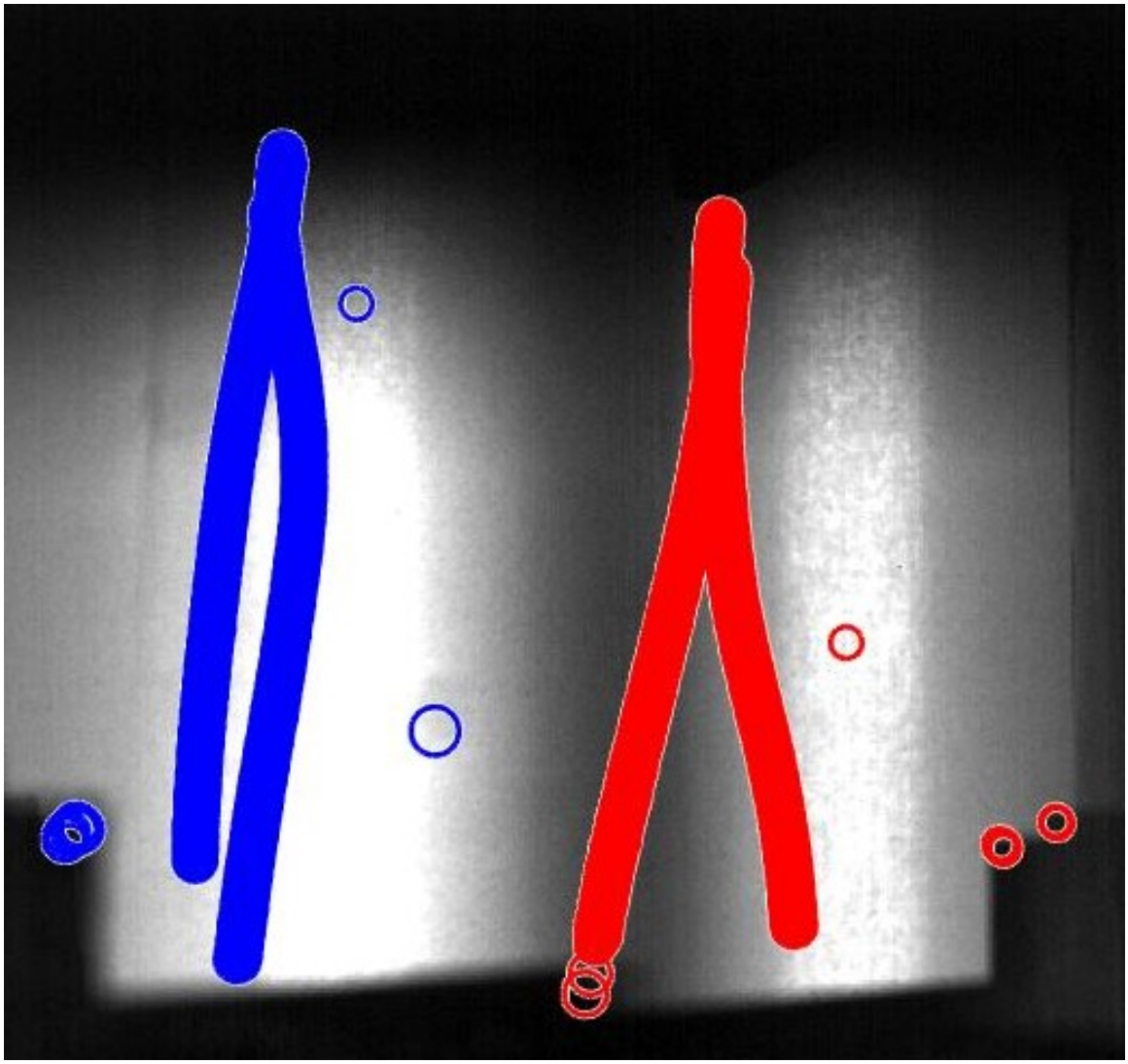
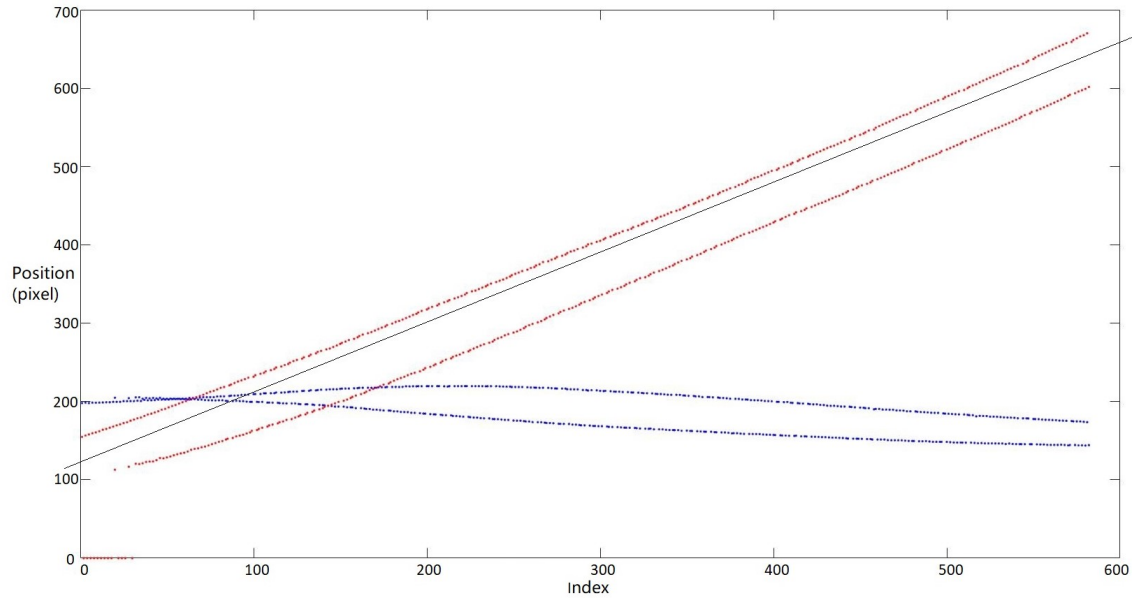


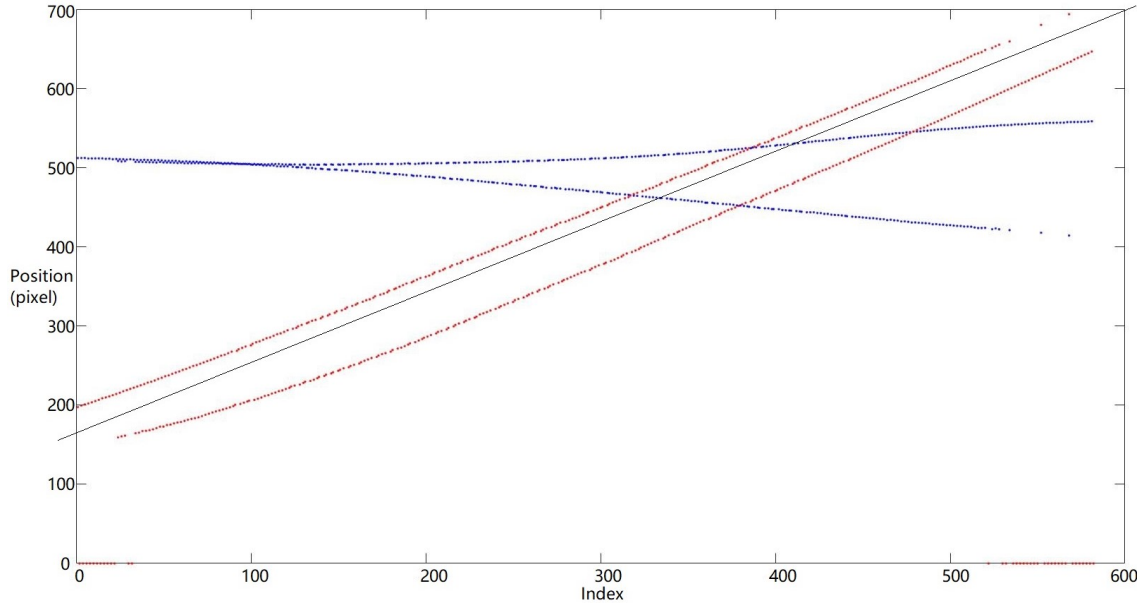
Figure 3.21 Cercles détectés à partir d'une série d'images, qui sont (tous) affichés dans une image.

Étape 2 - Sélection et division

On peut voir dans la figure 3.21 que le programme a fait quelques erreurs parce qu'il a « détecté » quelques cercles qui n'existent pas. Ainsi il faut les supprimer. En même temps, on divise les positions trouvées en deux groupes : un groupe pour la première particule sphérique et l'autre pour la deuxième. Ceci peut se faire en regardant les figures suivantes (3.22a et 3.22b) et en rajoutant quelques lignes droites au-dessus.



(a) Pour la partie à gauche.



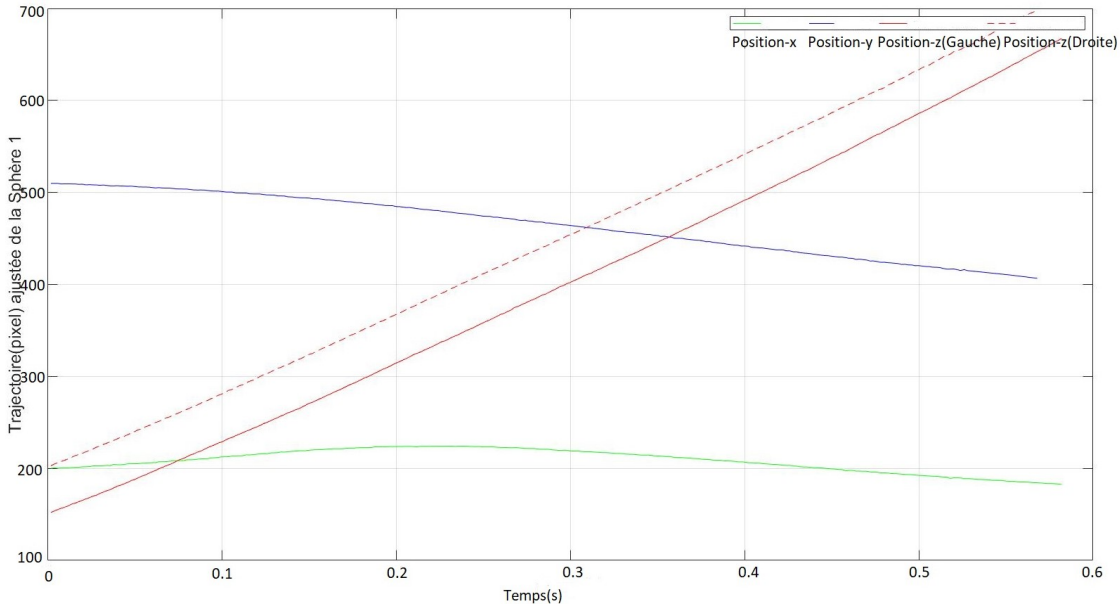
(b) Pour la partie à droite.

Figure 3.22 Positions des cercles détectés à partir d'une série d'images, en fonction de l'index (chaque index correspond à un cercle détecté). Les points bleus représentent le premier numéro des positions et les points rouges le deuxième numéro.

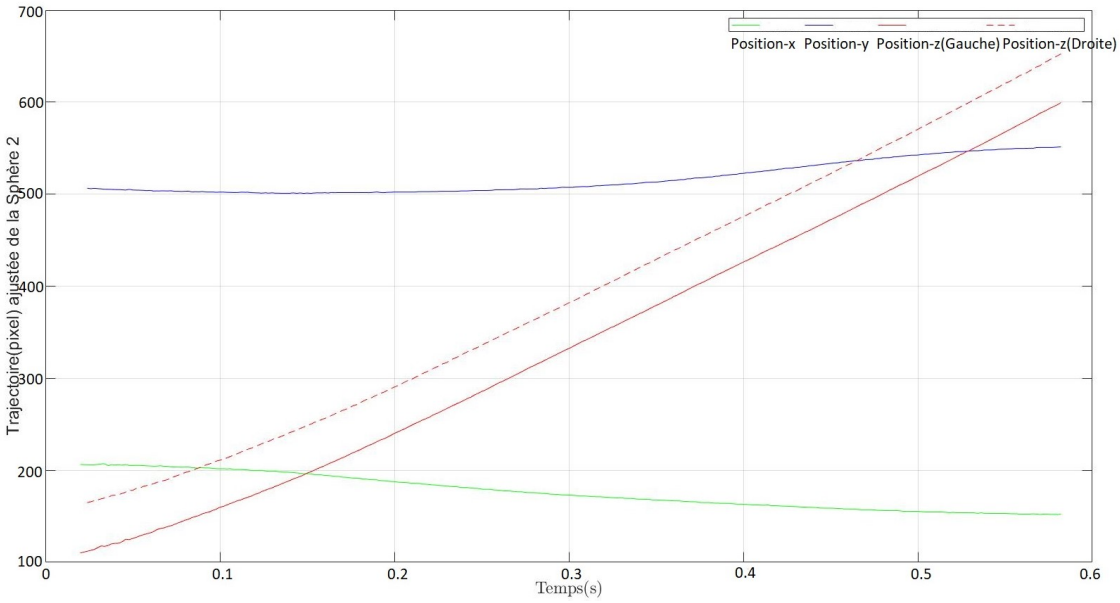
Les points bleus représentent le premier numéro des positions et les points rouges le deuxième numéro. Si on note la particule qui est devant en tombant la première particule sphérique, alors tous les points rouges sur la ligne droite correspondent à la première particule (pour la

partie à gauche et la partie à droite, séparément) ; les points bleus correspondants peuvent aussi être retrouvés ; la position de la première particule à chaque instant est ainsi trouvée – plus précisément x, y, z à gauche et z à droite. Le même processus est effectué pour la deuxième particule.

On doit faire des modifications des données (la position à chaque instant) si nécessaire. Finalement, la position de la première particule à chaque instant est trouvée – plus précisément x, y, z à gauche et z à droite (voir la figure 3.23a). Le même processus est effectué pour la deuxième particule (voir la figure 3.23b).



(a) Trajectoire de la première particule.



(b) Trajectoire de la deuxième particule.

Figure 3.23 Trajectoire de la première/deuxième particule, mesurée en pixel, en fonction du temps, exprimée dans le système de coordonnées à la figure 3.19 ou 3.17. La correction est faite. Ici la ligne verte correspond aux valeurs x, la ligne bleue correspond aux valeurs y, la ligne rouge correspond aux valeurs z(gauche) et celle rouge et pointillée z(droite).

Étape 3 - Calculs de positions en 3D

En observant la figure le rayon de la première particule (mesuré en pixel) de la partie à gauche en fonction du temps (voir la figure 3.24), on peut constater que la particule tombe en s'éloignant (très légèrement) de la caméra.

En sachant son vrai diamètre, on peut ainsi calculer la vraie distance que chaque pixel présente dans chaque image (donc à chaque instant). Par conséquent, la position mesurée en millimètre (en fonction du temps) peut être calculée et sa trajectoire peut être tracée.

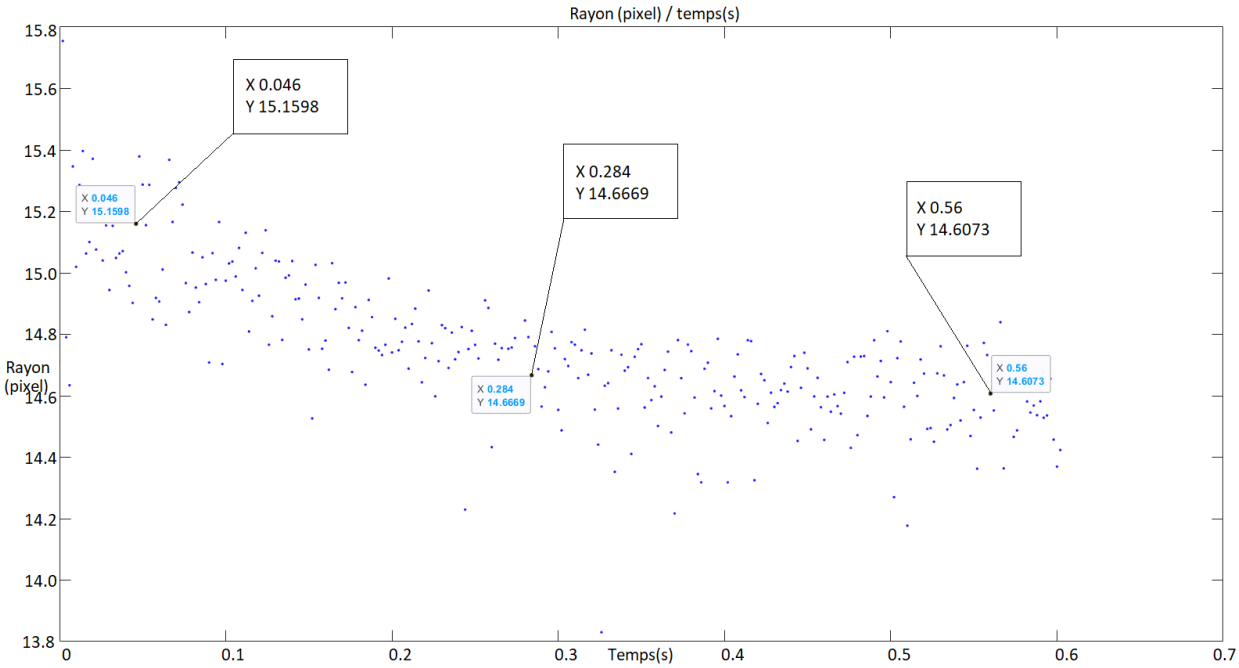


Figure 3.24 Le rayon mesuré en pixel, de la première particule sphérique, en fonction du temps. Ici l'axe x est le temps (pour l'instant on ne sait pas encore l'instant de la libération t_0). On peut ainsi trouver l'expression du rayon par la méthode d'interpolation linéaire à l'aide de ces trois points.

Étape 4 - Calculs de vitesse et plus

En sachant les trajectoires, mesurées en millimètre, de ces deux particules sphériques, nous pouvons continuer à calculer leurs vitesses ainsi que les composantes (x, y et z), la distance centre-centre, etc. en fonction du temps.

Pour calculer la vitesse, j'ai utilisé la formule (3.1) - la moyenne de 5 « composantes » - 5 instants consécutifs - de différence finie centrée. Si avec une seule, la courbe résultante de la vitesse en fonction du temps est trop fluctuante ; avec 4 ou 5 « composantes », la

courbe devient beaucoup plus lisse et peut ainsi montrer une tendance, malgré une fluctuation résiduelle (qui est considérée comme acceptable).

$$v(t) = [\frac{s(t+5\Delta t) - s(t-5\Delta t)}{10\Delta t} + \frac{s(t+4\Delta t) - s(t-4\Delta t)}{8\Delta t} + \frac{s(t+3\Delta t) - s(t-3\Delta t)}{6\Delta t} + \frac{s(t+2\Delta t) - s(t-2\Delta t)}{4\Delta t} + \frac{s(t+1\Delta t) - s(t-1\Delta t)}{2\Delta t}] \times \frac{1}{5} \tag{3.1}$$

Il est aussi très intéressant de calculer les grandeurs sans dimension (Re par exemple).

À la fin, je peux aussi « reproduire » leurs trajectoires sous l'eau pour mieux visualiser leurs comportements (un exemple est montré à la figure 3.25, qui est en fait une capture d'écran d'une vidéo).

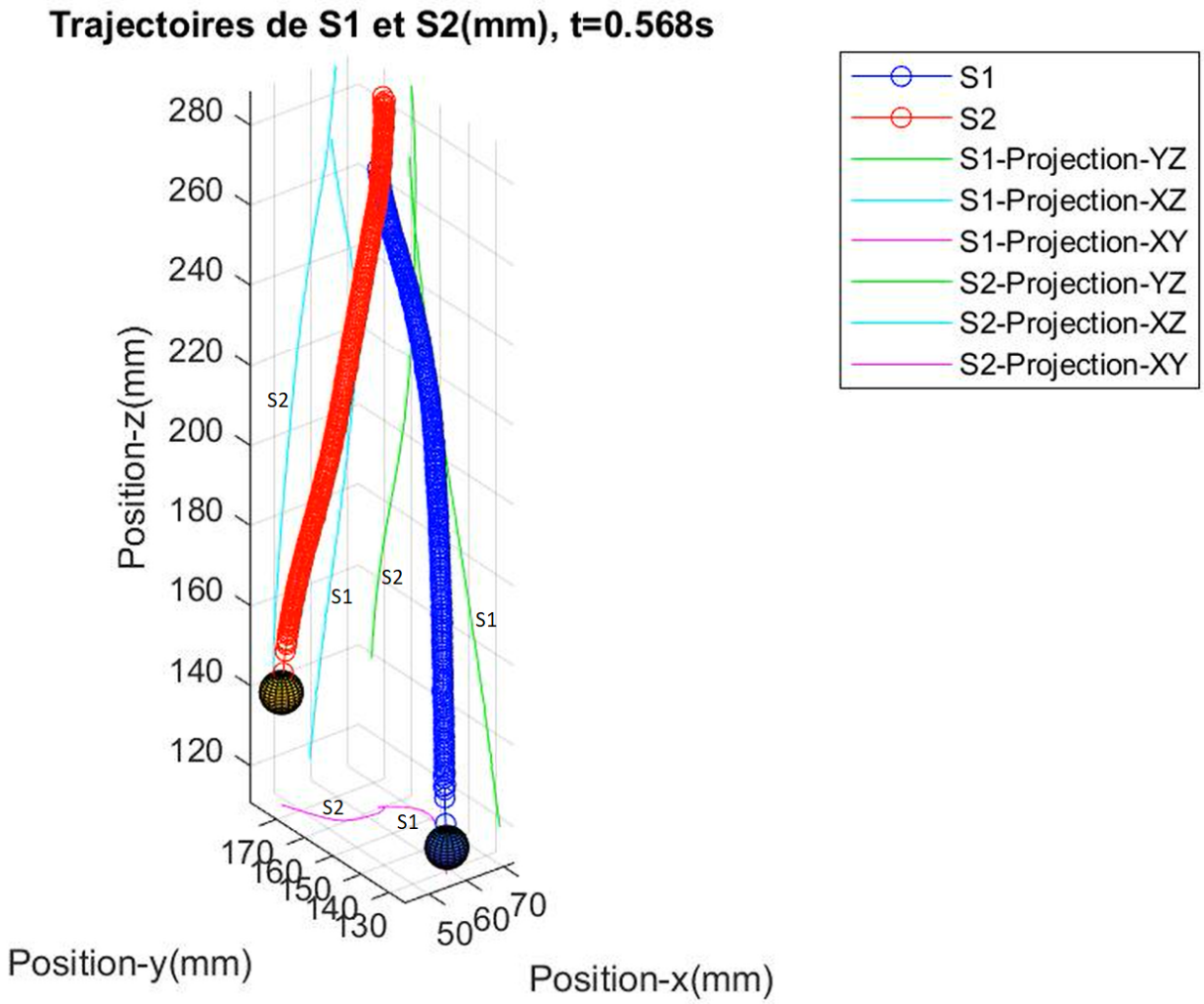


Figure 3.25 Trajectoires d'une paire de particules sous l'eau (mesurée). Ceci est en fait une capture d'écran d'une vidéo.

CHAPITRE 4 RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Après avoir construit et validé l'ensemble du dispositif expérimental, j'ai fait des expériences en utilisant les particules sphériques mentionnées dans le chapitre précédent. D'abord, une seule particule est libérée dans la grande cuve remplie d'eau du robinet ; après une paire de particules identiques sont libérées dans chaque expérience.

Toutes les expériences ont été répétées trois fois afin de vérifier ou tester la répétabilité des trajectoires. Pour faire et refaire les expériences, j'ai fait de mon mieux pour libérer deux particules sphériques d'une façon telle que l'écart du temps soit minime.

Dans ce chapitre, il y a 5 parties :

— La première partie est dédiée aux cas dans lesquels une seule particule sphérique est libérée ;
— Dans la deuxième partie, on traite les cas de deux particules sphériques identiques, qui sont initialement immobiles sur une ligne horizontale – côte à côte ;
— Dans la troisième partie, on continue à traiter les cas de deux particules sphériques identiques, qui sont initialement immobiles sur une ligne verticale – devant derrière ;
— Dans la quatrième partie, on finalise le traitement des cas de deux particules sphériques identiques, qui ne sont ni sur une ligne horizontale ni sur une ligne verticale initialement - d'autres formes ;
— Dans la cinquième partie, il y a des discussions sur les résultats obtenus, y compris celles sur les erreurs.

4.1 Une seule particule sphérique

Avant d'étudier les interactions entre deux particules sphériques, du temps a été consacré à l'étude du comportement d'une seule particule, dont la vitesse initiale est nulle.

4.1.1 Trajectoire

Vue globale

Les figures 4.1 et 4.2 présentent la trajectoire d'une particule sphérique identifiée DA-0.3125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=7.9375 mm).

Spécialement, on est intéressé par la vue d'en haut (voir la figure 4.2).

D'abord, en observant les deux figures 4.1 et 4.2, on constate que la trajectoire de la particule DA-0.3125 est globalement en 3D. En fait, en faisant des expériences en utilisant toutes les particules sphériques dont on dispose, l'aspect 3D des trajectoires a été observé dans toutes les expériences, même quand les particules sphériques les plus légères sont relâchées.

Il est aussi intéressant de noter que la trajectoire de la particule DA-0.3125 au début est rectiligne et verticale (si l'on ignore la fluctuation associée à l'erreur de mesure). Cette « partie » rectiligne et verticale existe dans les trajectoires de toutes les particules sphériques dont on dispose.

Une particule parcourt cette « partie » en accélérant à partir de la vitesse initiale nulle. Pour la suite je l'appelle phase d'accélération. La définition est donnée dans la prochaine sous-section.

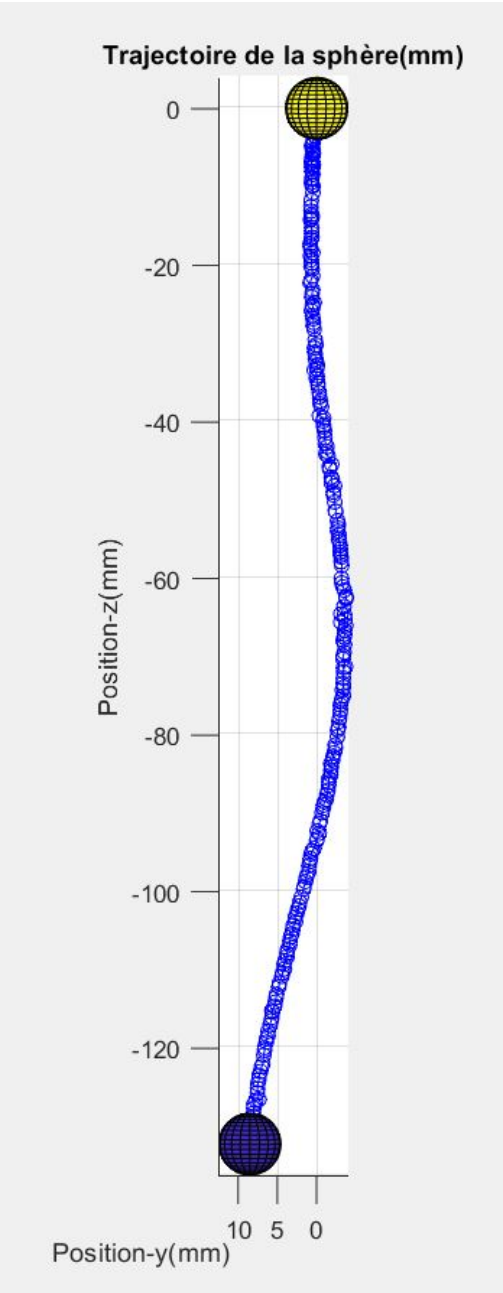
Après, la particule commence à dévier de la ligne droite et ainsi sa trajectoire devient 3D. À partir de ce point-là, malheureusement, on ne peut plus la prédire, mais il est acceptable de la décrire par une spirale (déformée) – la vue d'en haut est une partie d'ellipse.

Spirale et longueur longitudinale d'une période

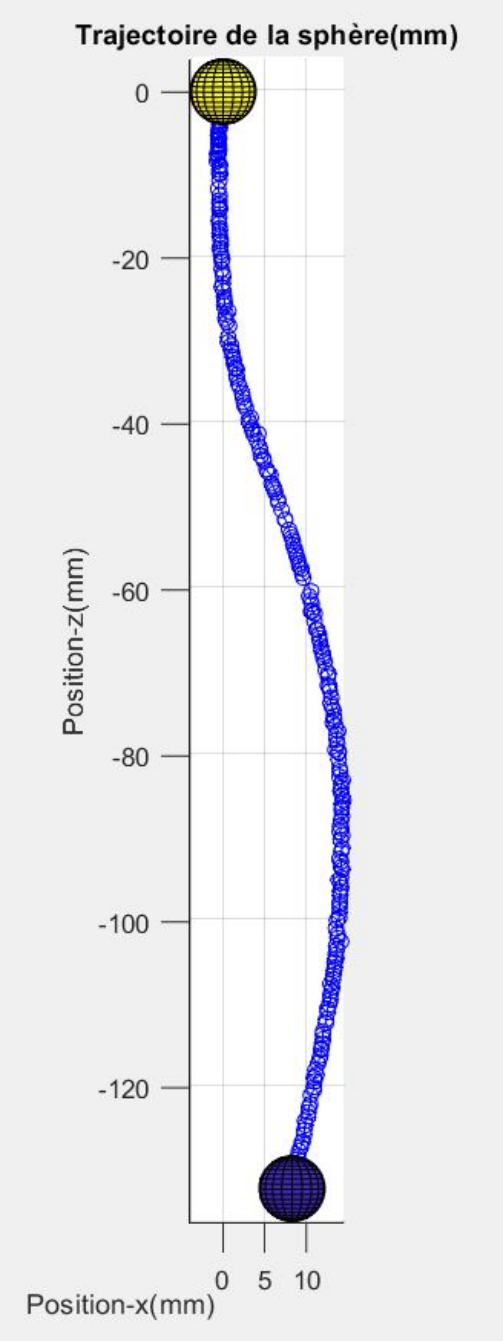
Basé sur cette hypothèse, on peut continuer à calculer la valeur approximative de la longueur longitudinale d'une période pour chaque type de particule sphérique.

En prenant les figures 4.1 et 4.2 et en comparant avec les autres résultats, on trouve que la longueur longitudinale d'une période varie entre 200 et 250 mm, c.-à-d., une particule sphérique tourne 360 degrés en parcourant une telle distance dans le sens vertical, une fois sa vitesse finale atteinte.

La figure 4.3 présente la « largeur » sans dimension des « spirales » pour les cinq types de particules - la composante « horizontale » des trajectoires divisée par leurs diamètres (respectivement). On observe que la « largeur » des « spirales » ne dépasse pas 4 fois le diamètre.

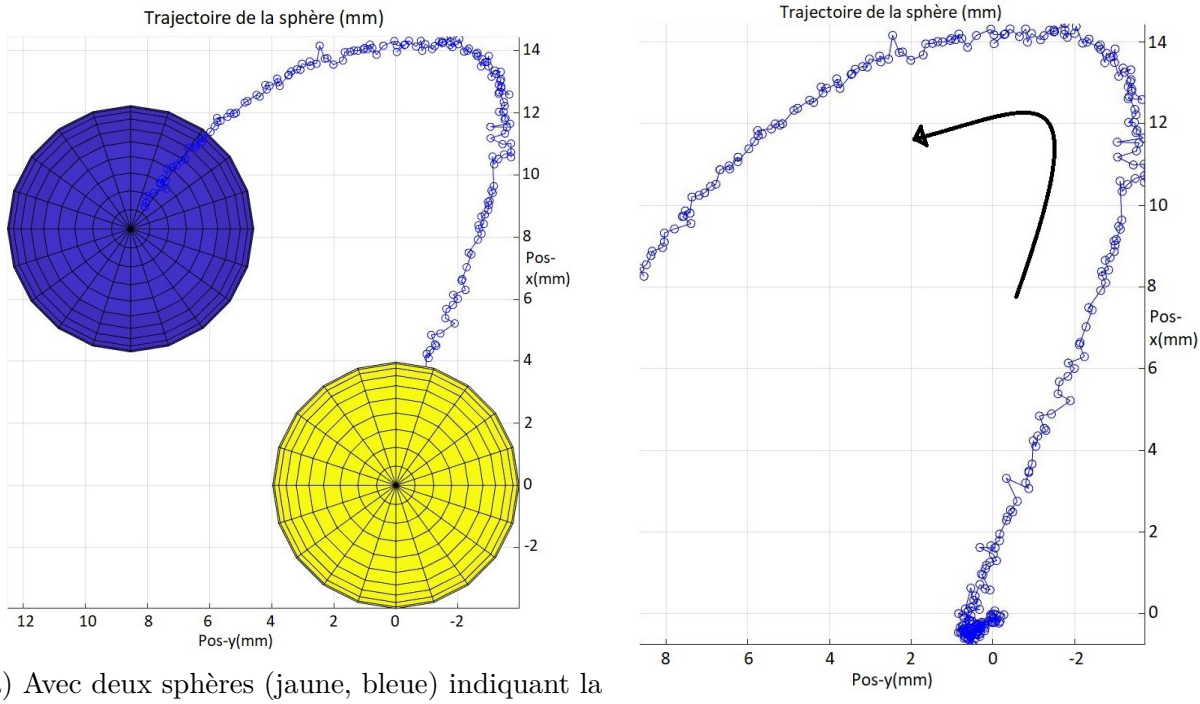


(a) Vue principale



(b) Vue de gauche

Figure 4.1 Vue principale & vue de gauche de la trajectoire d'une particule sphérique DA-0.3125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=7.9375 mm) relâchée dans l'eau. Deux sphères (jaune, bleue), indiquant respectivement sa position initiale et finale (avant d'être hors de la vue de la caméra), sont rajoutées.



(a) Avec deux sphères (jaune, bleue) indiquant la position initiale et celle qui est finale

(b) Sans sphère

Figure 4.2 Trajectoire de la particule DA-0.3125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=7.9375 mm) vue d'en haut. Deux sphères (jaune, bleue), indiquant respectivement sa position initiale et finale (avant d'être hors de la vue de la caméra), sont rajoutées à la sous-figure à gauche.

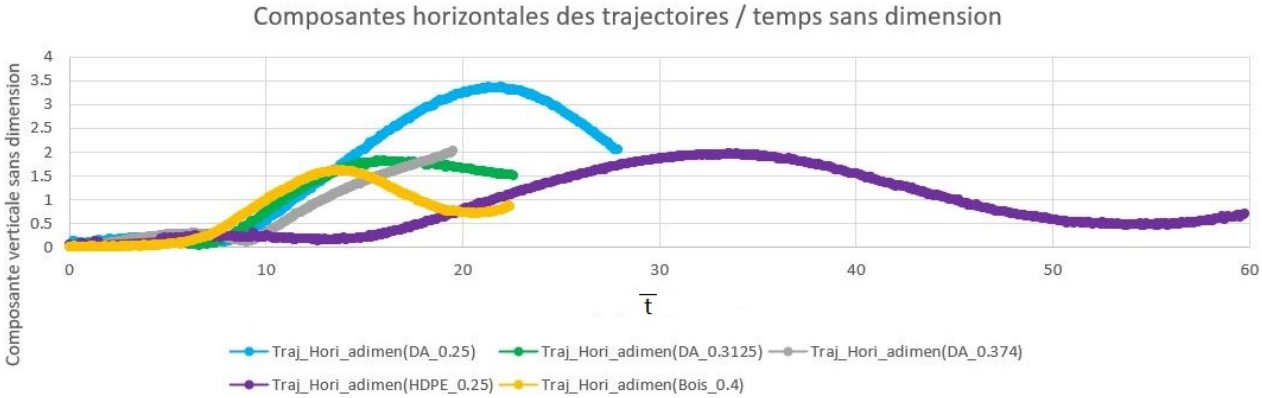


Figure 4.3 Composante « horizontale » des trajectoires pour les cinq types de particules divisée par leurs diamètres (respectivement), en fonction du temps sans dimension. *DA* représente que la masse volumique vaut 1410 kg/m^3, *HDPE* 950 kg/m^3 et *Bois* 670 kg/m^3 ; 0.25, 0.3125, 0.374 et 0.4 représentent respectivement leurs diamètres, exprimés en pouce.

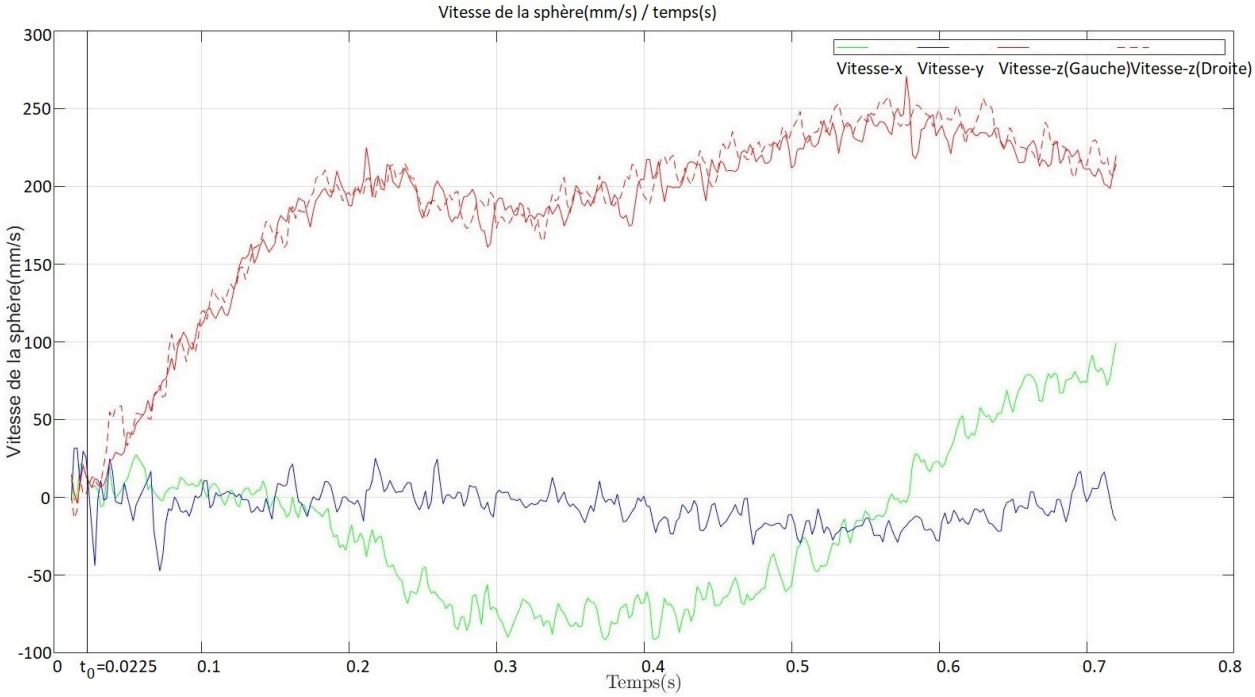
4.1.2 Vitesse

Dans cette section, on se concentre sur l'évolution de la vitesse d'une particule ainsi que sur deux façons de l'adimensionner.

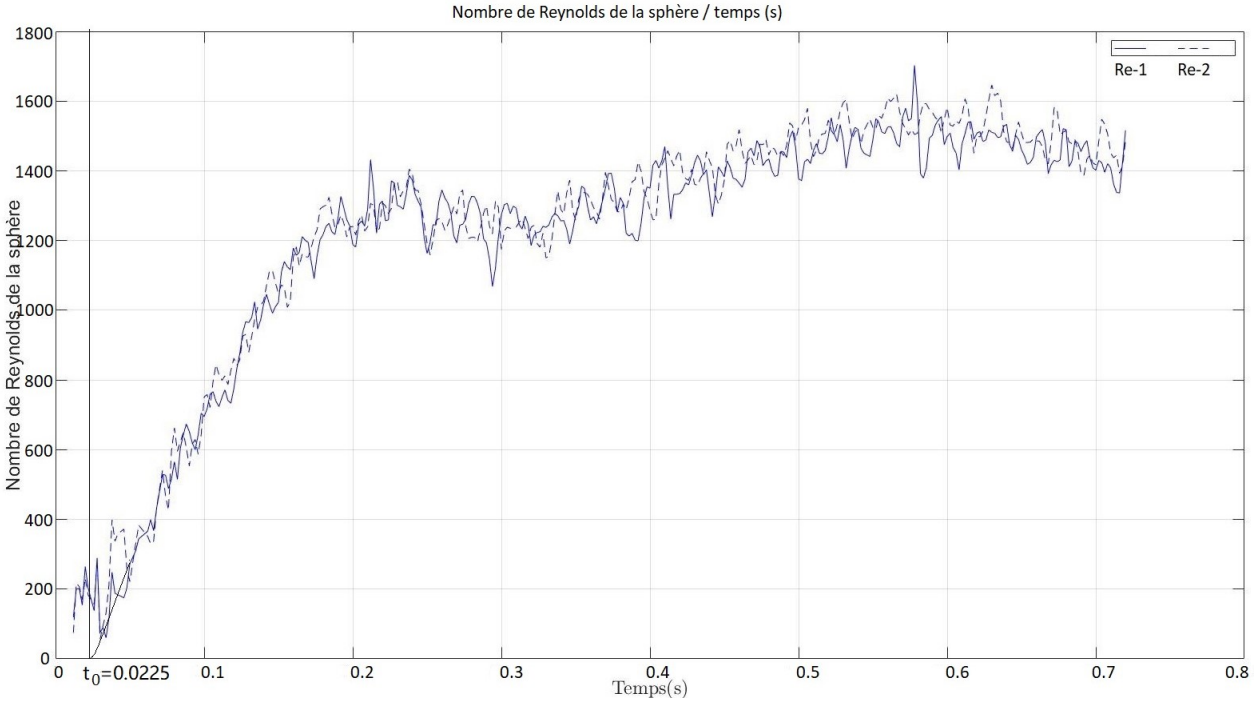
Vue globale

La figure 4.4a présente les composantes de la vitesse d'une particule DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) en fonction du temps (avec dimension).

On dispose aussi d'une figure présentant le nombre de Reynolds Re en fonction du temps - figure 4.4b.



(a) Composantes de la vitesse en fonction du temps. On trouve que les deux courbes rouges - z(gauche) et z(droite) - se superposent bien malgré les fluctuations.



(b) Re en fonction du temps.

Figure 4.4 Composantes de vitesse et Re d'une particule DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) en fonction du temps. Dans la première figure la ligne verte correspond à la composante x, la ligne bleue la composante y, la ligne rouge la composante z(gauche) et celle rouge et pointillée la composante z(droite). Dans la deuxième figure, les deux courbes bleues correspondent au nombre de Reynolds Re, calculé à l'aide des composantes (x y et z(gauche)) et (x y et z(droite)).

Dans les figures 4.4a et 4.4b, on observe que, pour la particule DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm), la vitesse augmente d'une façon constante, après elle continue à augmenter de plus en plus lentement, avant d'atteindre le premier « sommet ». Ensuite, la vitesse descend et monte tout doucement et lentement.

Les résultats pour toutes les autres particules sont similaires.

En reliant l'évolution de la vitesse à celle de la trajectoire, on trouve que :

— dans la phase d'accélération la vitesse augmente d'une façon constante, plus précisément, seulement la composante verticale de la vitesse augmente, ainsi la trajectoire est rectiligne (une ligne droite, verticale) ;
— après la particule commence à dévier de la ligne droite verticale et la trajectoire devient 3D – la/les composante(s) horizontale(s) non nulle(s) apparaît/apparaissent.

Après avoir passé le « sommet », la descente et la montée (d'une façon lente et régulière) de la vitesse peut être expliquée par la rotation de la particule, et due à la rotation de la particule dans le fluide, sa trajectoire n'est plus rectiligne à cause de la différence de pression de ses deux côtés.

Phase d'accélération

Une fois libérée, une particule sphérique accélère à partir de la vitesse initiale nulle, jusqu'à une vitesse proche de la vitesse finale. Elle entre ainsi dans la phase d'accélération (voir la figure 4.5).

En observant les figures - composantes de vitesse par rapport au temps - pour les différentes particules sphériques, on peut dire qu'elles se ressemblent beaucoup.

Je peux ainsi donner une définition de la phase d'accélération, qui est utile pour faciliter la description des mouvements de toutes les particules sphériques :

— Phase d'accélération : la phase entre l'instant où une particule sphérique est libérée - noté t_0, et l'instant où la composante z de sa vitesse (qui est aussi égale à l'amplitude de sa vitesse à cet instant) vaut 3/4 de la première valeur maximale.

Dans cette phase, la particule accélère d'une façon telle que la seule composante de vitesse non nulle est celle dans le sens z. Donc dans la phase d'accélération, la trajectoire est rectiligne et verticale.

Après, la particule commence à dévier de la ligne droite et ainsi sa trajectoire devient 3D.

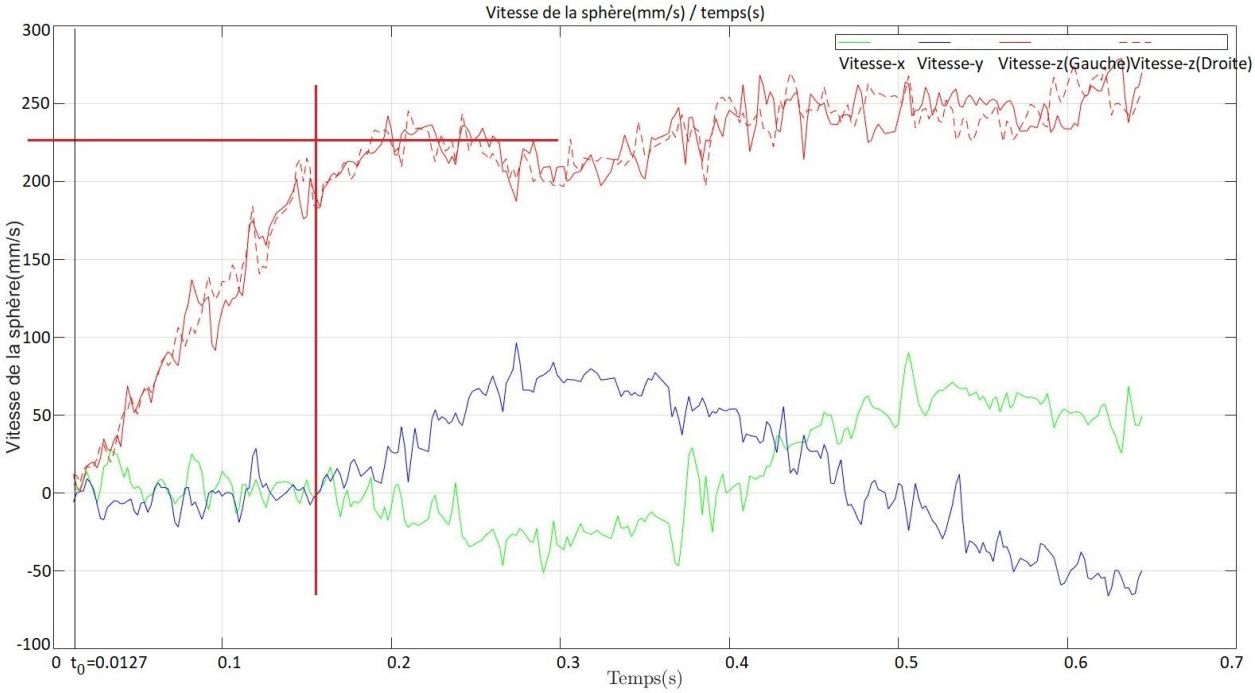


Figure 4.5 Composantes de la vitesse de la particule DA-0.3125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=7.9375 mm) en fonction du temps. La ligne verte correspond à la composante x, la ligne bleue la composante y, la ligne rouge la composante z(gauche) et celle rouge et pointillée la composante z(droite).

Détermination de l'instant t_0 où une particule est relâchée

En me concentrant sur la phase d'accélération, du temps a été consacré pour calculer le coefficient de traînée C_D et le coefficient de masse ajoutée C_m à l'instant t_0 où une seule particule sphérique est libérée. On supposera un C_D de la forme A/Re.

Pour chaque particule, en prenant les positions z mesurées (à différents instants) dans la phase d'accélération, j'ai essayé de faire l'ajustement de courbe en utilisant l'expression suivante (voir l'annexe A pour savoir comment obtenir cette expression) :

— Pour des particules qui tombent ou descendent, le sens de l'axe z est vers le bas :

$$\left[\frac{\rho_P}{\rho_L} + C_m\right]\ddot{z} + \left[\frac{3}{4}\frac{A\mu_L}{\rho_L d^2}\right]\dot{z} + \left[-\left(\frac{\rho_P}{\rho_L} - 1\right)g\right] = 0 \tag{4.1}$$

— Pour des particules qui montent, le sens de l'axe z est vers le haut :

$$\left[\frac{\rho_P}{\rho_L} + C_m\right]\ddot{z} + \left[\frac{3}{4}\frac{A\mu_L}{\rho_L d^2}\right]\dot{z} + \left[-\left(1 - \frac{\rho_P}{\rho_L}\right)g\right] = 0 \tag{4.2}$$

Les équations (4.1) et (4.2) peuvent être unifiées parce qu'elles ont toutes les deux une forme $a\ddot{z} + b\dot{z} + c = 0$.

En prenant en compte les conditions aux limites (voir l'annexe A), en notant t_0 le temps où une particule est relâchée et z_0 la position z à cet instant-là, la solution analytique est proposée :

$$\begin{cases} C_1 (t - t_0) - C_1 C_2 \exp\left(\frac{1}{C_2}(t - t_0)\right) + C_1 C_2 + z_0 & t \geq t_0 \\ z_0 & t \leq t_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

avec les deux paramètres C_1 et C_2 définis :

Pour une particule qui descend,

$$C_1 = -\frac{c}{b} = \frac{\left(\frac{\rho_P}{\rho_L} - 1\right) g}{\frac{3A\mu_L}{4\rho_L d^2}} = f(A) \tag{4.4}$$

Pour une particule qui monte,

$$C_1 = -\frac{c}{b} = \frac{\left(1 - \frac{\rho_P}{\rho_L}\right) g}{\frac{3A\mu_L}{4\rho_L d^2}} = f(A) \tag{4.5}$$

Pour tout type de particule,

$$C_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{\frac{\rho_P}{\rho_L} + C_m}{\frac{3A\mu_L}{4\rho_L d^2}} = f(C_m + A) \tag{4.6}$$

On attend que $C_1 > 0$ et que $C_2 < 0$ et on a ainsi quatre paramètres - z_0, t_0, C_1 et C_2 - à identifier quand on fait l'ajustement de courbe.

En trouvant les valeurs de ces paramètres, on peut ainsi calculer les valeurs de C_D et C_m.

En prenant une particule du type DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm), les résultats sont présentés aux figures suivantes (figures 4.6, 4.7 et 4.8), et aussi dans le tableau récapitulatif ci-dessous.

Les trois figures (4.6, 4.7 et 4.8) présentent les points (temps, position z) ainsi qu'une courbe ajustée (dans chaque figure). Dans la figure 4.6 on prend les points ou $t \leq 0.10$s ; dans la figure 4.7, $t \leq 0.15$s ; dans la figure 4.8, $t \leq 0.20$s. Le tableau 4.1 présente les valeurs des paramètres ainsi que celles des deux coefficients déduits.

Tableau 4.1 Tableau récapitulatif des valeurs des paramètres z_0, t_0, C_1 et C_2

Limite d'échantillonnage (s)	t_0	z_0	C_1	C_2	C_m déduit	A déduit
0.10	0.0225	1.1572×10^{-4}	2725.6	-1877.3	1.3725	0.0853
0.15	0.0228	1.1233×10^{-4}	0.6805	-0.4419	1.2129	341.4536
0.20	0.0246	1.2689×10^{-4}	0.4650	-0.2793	1.0162	499.7376

Il faut aussi remarquer que dans les trois figures (4.6, 4.7 et 4.8), une courbe supplémentaire est rajoutée (dans chacune de ces trois figures), qui décrit l'évolution de la position z si C_D vaut toujours 24/Re et si C_m vaut toujours 0.5. Les deux courbes dans chaque figure se superposent bien peu après la libération de la particule sphérique, mais après l'écart devient de plus en plus grand.

Finalement, il s'avère que je ne peux pas obtenir une bonne valeur de C_D et de C_m. Une raison possible est qu'une fois relâchée, la particule accélère si vite que le nombre de Reynolds Re augmente vite et que l'hypothèse sur C_D devient fausse rapidement - la loi de Stokes n'est en effet guère valide dès que Re ≥ 10. La mesure de C_m est couplée avec celle de C_D à l'aide des trois paramètres, donc si l'on ne peut pas obtenir la bonne valeur de C_D, on ne peut pas trouver celle de C_m non plus.

En regardant le tableau 4.1, on peut dire qu'avec cette méthode – l'ajustement de courbe, on peut trouver l'instant t_0 où une particule est libérée avec une bonne précision.

Pour toutes les courbes présentées dans la suite de ce chapitre, si l'abscisse est le temps (avec ou sans dimension) et s'il n'y a pas d'indication explicite, alors la valeur zéro de l'abscisse correspond bien à t_0 déterminé par la méthode décrite au-dessus.

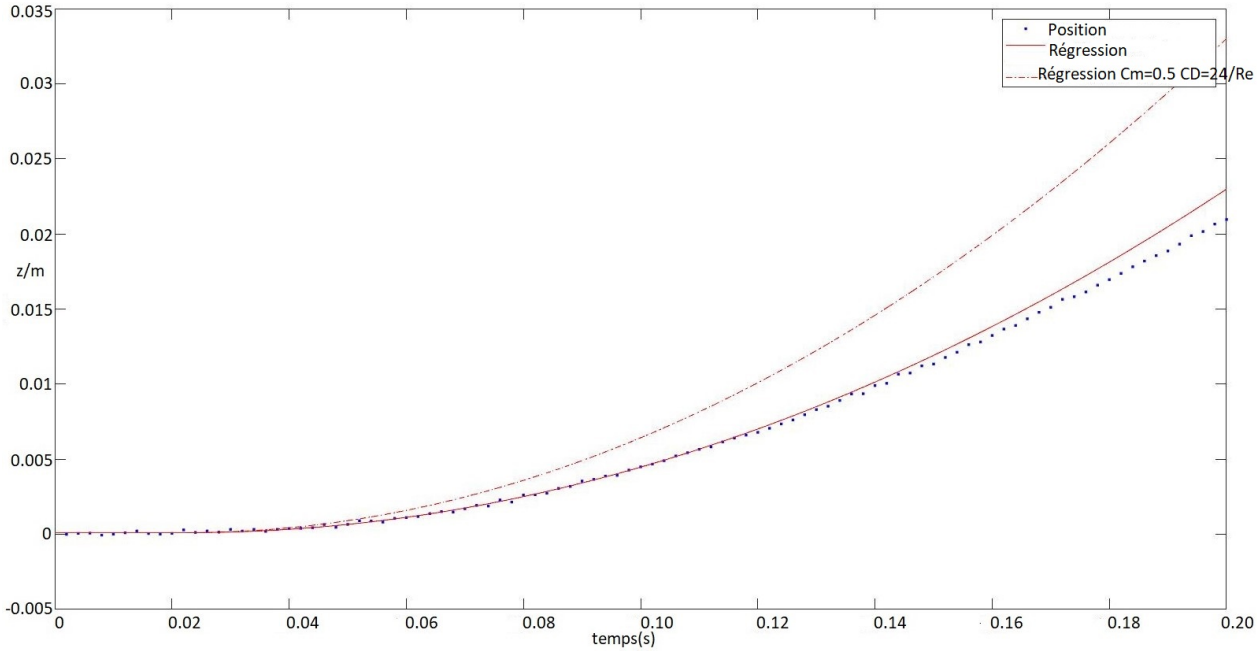


Figure 4.6 Ajustement de courbe en prenant les positions z mesurées (à différents instants, $t \leq 0.10$s) dans la phase d'accélération d'une particule sphérique du type DA-0.25 ($\rho_P =$ 1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) ; une courbe supplémentaire (celle qui est rouge et pointillée, qui correspond au cas où $C_m = 0.5$ et $C_D = 24/\mathrm{Re}$) est rajoutée afin de faire des comparaisons.

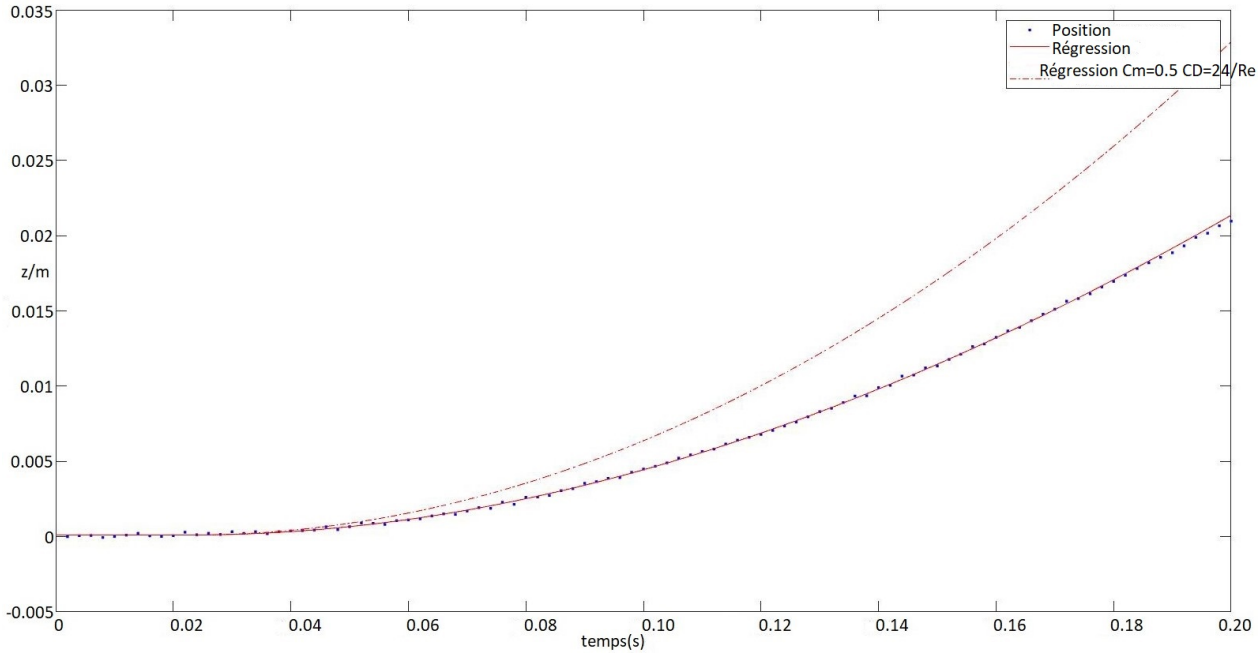


Figure 4.7 Ajustement de courbe en prenant les positions z mesurées (à différents instants, $t \leq 0.15$s) dans la phase d'accélération d'une particule sphérique du type DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) ; une courbe supplémentaire (celle qui est rouge et pointillée, qui correspond au cas où $C_m = 0.5$ et $C_D = 24/\mathrm{Re}$) est rajoutée afin de faire des comparaisons.

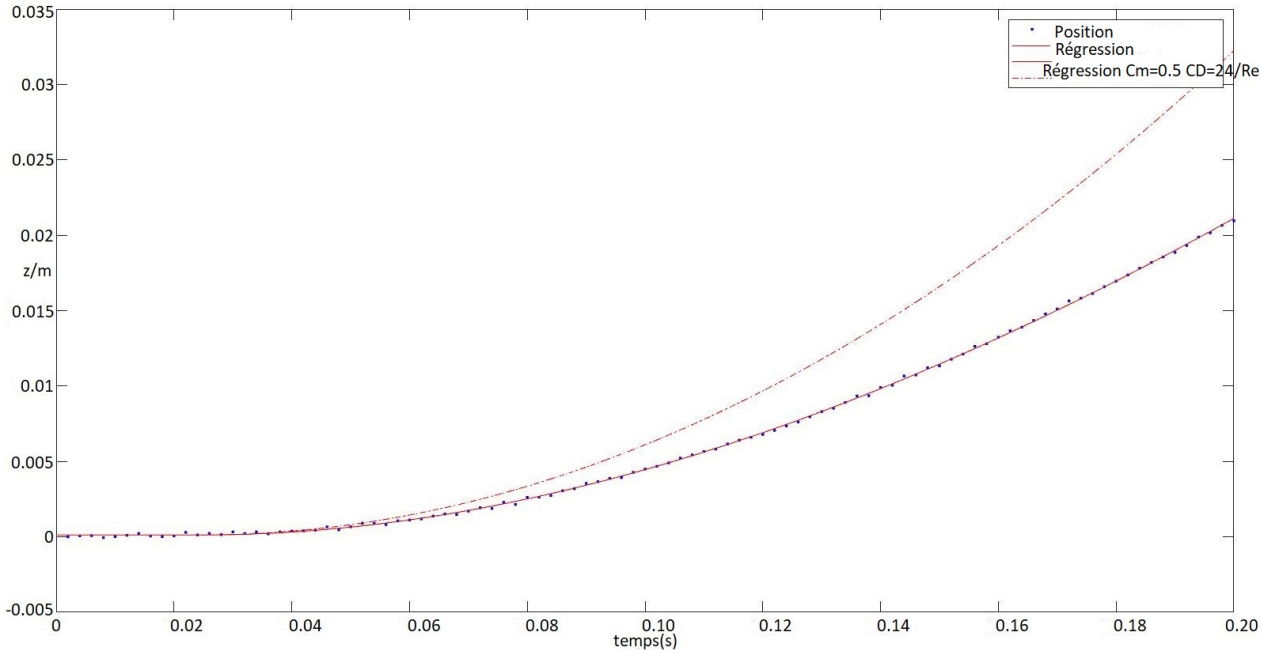


Figure 4.8 Ajustement de courbe en prenant les positions z mesurées (à différents instants, $t \leq 0.20$s) dans la phase d'accélération d'une particule sphérique du type DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) ; une courbe supplémentaire (celle qui est rouge et pointillée, qui correspond au cas où $C_m = 0.5$ et $C_D = 24/\mathrm{Re}$) est rajoutée afin de faire des comparaisons.

Vitesse et temps sans dimension

Pour calculer le temps sans dimension, on prend la formule suivante :

$$\bar{t} = \frac{t}{\sqrt{\frac{d}{g}}} \tag{4.7}$$

Pour calculer la vitesse sans dimension (ainsi qu'une composante), on dispose de deux façons :

Façon 1 :

$$\overline{u}^1 = \frac{u}{\frac{\Delta\rho g d^2}{\mu_L}} \tag{4.8}$$

Façon 2 :

$$\overline{u}^2 = \frac{u}{\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_L} g d}} \tag{4.9}$$

La figure 4.9 présente les courbes – la composante z de la vitesse des cinq types de particules sans dimension (façon 1) en fonction du temps sans dimension. On trouve les courbes se sont éloignées l'une de l'autre.

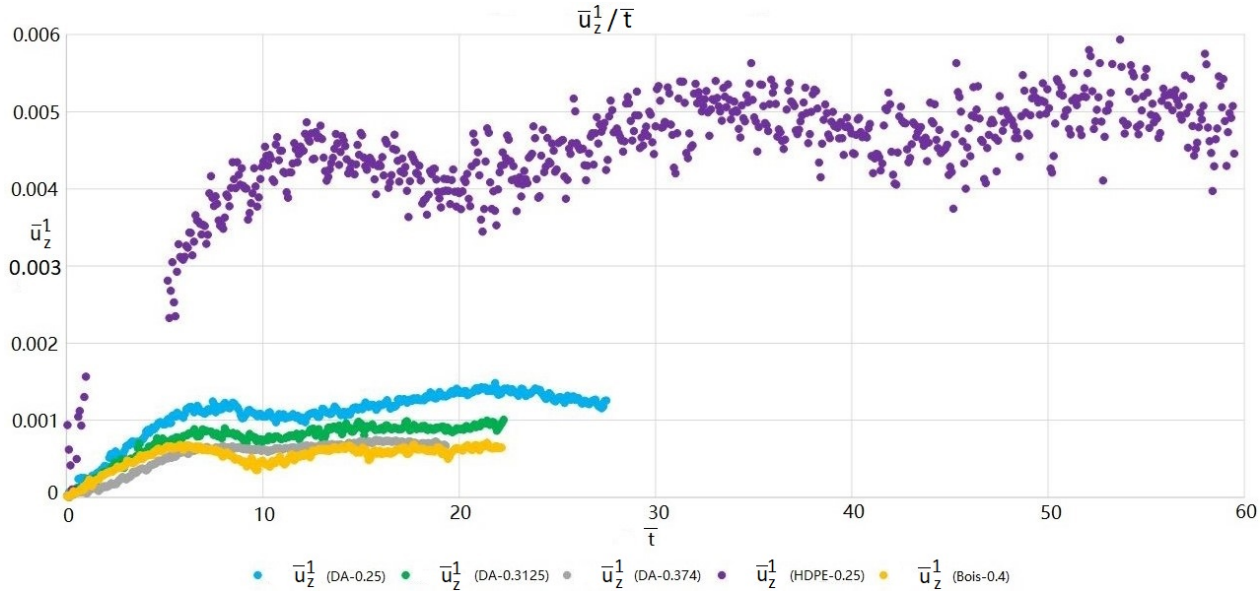


Figure 4.9 Composantes z des vitesses des cinq types de particules sans dimension (façon 1) en fonction du temps sans dimension. *DA* représente que la masse volumique vaut 1410 kg/m^3, *HDPE* 950 kg/m^3 et *Bois* 670 kg/m^3 ; 0.25, 0.3125, 0.374 et 0.4 représentent respectivement leurs diamètres, exprimés en pouce.

Si l'on remplace la composante z par son amplitude, les courbes résultantes sont similaires à celles à la figure 4.9. Ceci est logique parce que la composante z domine la vitesse.

La figure 4.10 présente les courbes – la composante z de la vitesse de chaque type de particules sans dimension (façon 2) en fonction du temps sans dimension. Dans cette figure, au contraire, les courbes s'unissent. Leurs vitesses finales sans dimension sont bien autour de 1.6, indiquant que pour nos expériences les vitesses finales des particules ne dépendent que peu de la viscosité du liquide environnant.

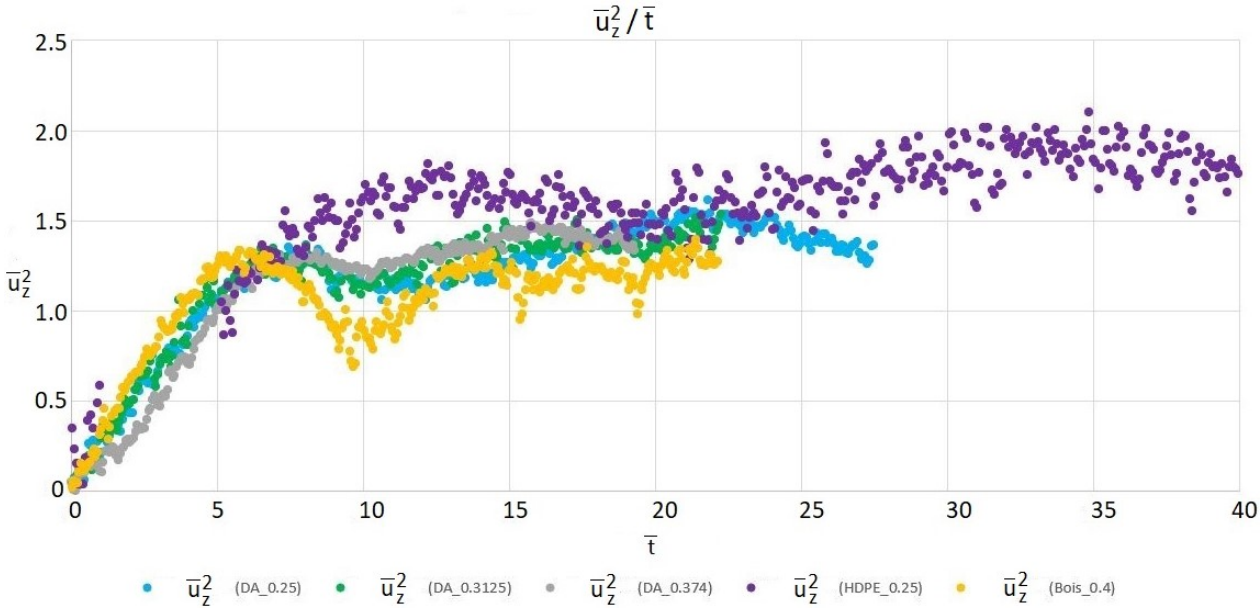


Figure 4.10 Composantes z des vitesses des cinq types de particules sans dimension (façon 2) en fonction du temps sans dimension. *DA* représente que la masse volumique vaut 1410 kg/m^3, *HDPE* 950 kg/m^3 et *Bois* 670 kg/m^3 ; 0.25, 0.3125, 0.374 et 0.4 représentent respectivement leurs diamètres, exprimés en pouce.

Pour la même raison, si l'on remplace la composante z par son amplitude, les courbes résultantes sont similaires à celles à la figure 4.10.

Spécialement, pour la particule Polystyrène-0.13, nous avons la figure 4.11, qui montre que l'amplitude (et la composante z) de la vitesse ne dépasse jamais 1.6.

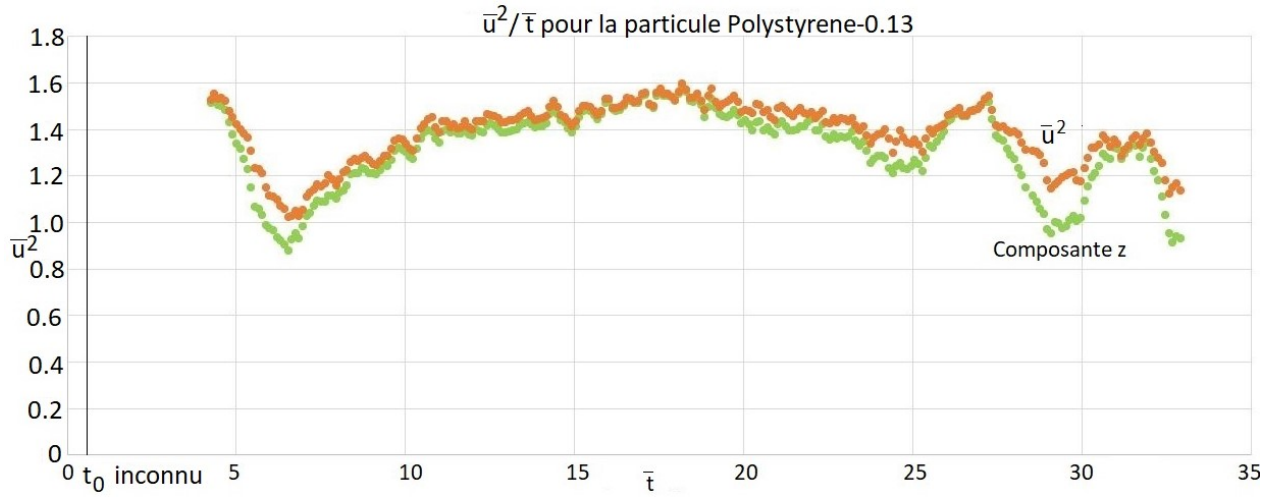
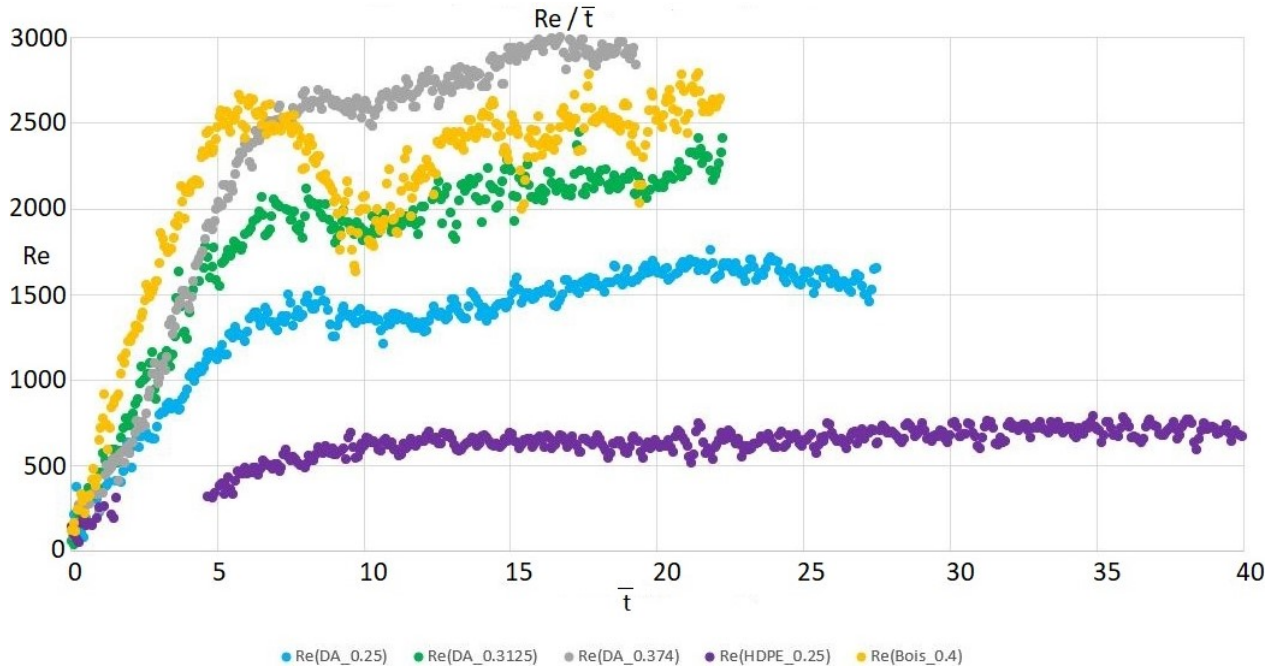
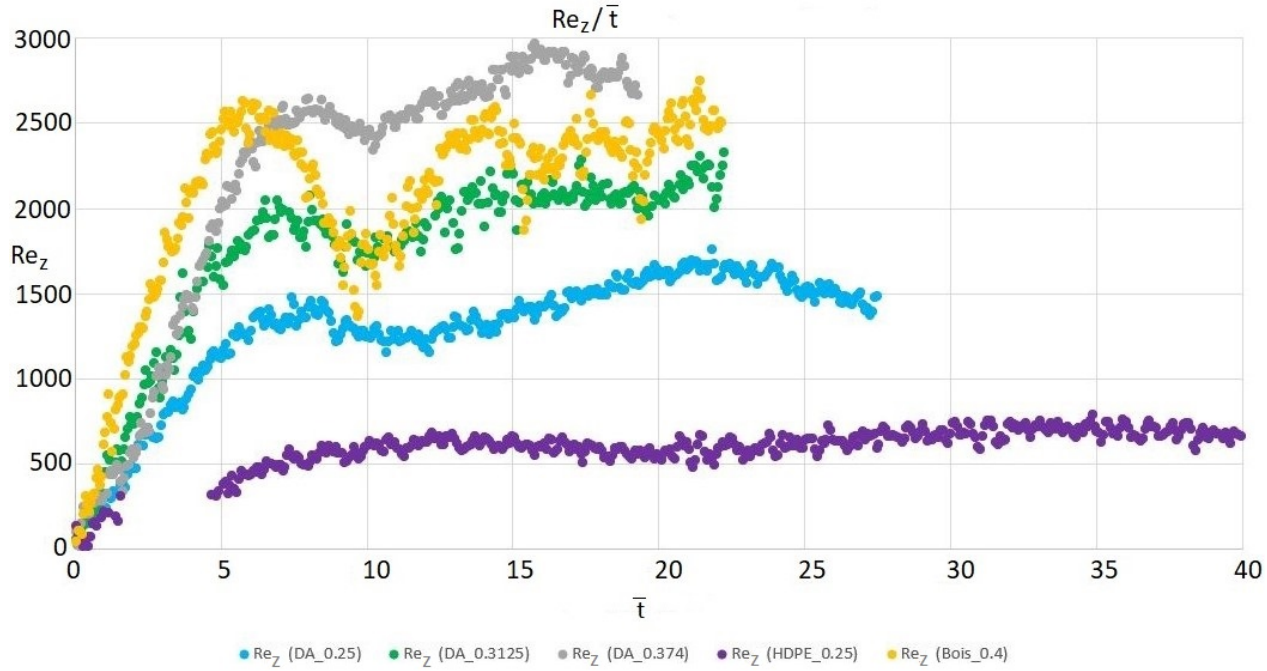


Figure 4.11 Amplitude & Composante z de la vitesse d'une particule Polystyrène-0.13 (ρ_P=20 kg/m^3(approxi) et d=3.3 mm) sans dimension (façon 2) en fonction du temps sans dimension.

Les deux figures 4.12a et 4.12b présentent l'évolution du nombre de Reynolds Re (calculé à partir de la composante z et puis l'amplitude des vitesses des cinq types de particules) en fonction du temps sans dimension. Pour la même raison, les courbes se ressemblent beaucoup, l'une à l'autre entre ces deux figures.



(a) Évolution du nombre de Reynolds Re, calculé à partir de l'amplitude de la vitesse de chaque type de particules.



(b) Évolution du nombre de Reynolds Re, calculé à partir de la composante z de la vitesse de chaque type de particules.

Figure 4.12 Deux évolutions en fonction du temps sans dimension. Ici *DA* représente que la masse volumique vaut 1410 kg/m^3, *HDPE* 950 kg/m^3 et *Bois* 670 kg/m^3 ; 0.25, 0.3125, 0.374 et 0.4 représentent respectivement leurs diamètres, exprimés en pouce.

Ces particules peuvent être divisées en 3 catégories : un matériau pour/correspond à une catégorie. Le comportement de la particule en bois ($\Delta\rho$ vaut environ 330 kg/m^3) est le plus « actif » tandis que celui de la particule en HDPE ($\Delta\rho$ vaut environ 50 kg/m^3) est le plus « calme ».

Discussion

Pour une particule sphérique, une fois que la vitesse finale est atteinte, seulement la force de traînée, la force de gravité et la poussée d'Archimède y sont appliquées et la force totale est nulle. On peut ainsi calculer la valeur de C_D :

$$\frac{1}{6}\pi d^3 \Delta\rho g = \frac{1}{2}\rho_L V_T^2 C_D \frac{1}{4}\pi d^2 \tag{4.10}$$

Et ainsi

$$V_T = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{1}{C_D}\frac{\Delta\rho}{\rho_L} g d} \tag{4.11}$$

On obtient ainsi que C_D pour une particule sphérique ayant atteint sa vitesse finale vaut environ 0.5, ce qui est logique.

En comparant ces deux figures (4.9 et 4.10), on constate que la façon 1 n'est pas une bonne façon de calculer la vitesse sans dimension, qui supposera un C_D de la forme A/Re.

4.1.3 Comparaisons Simulations & Données expérimentales

En collaboration avec un autre étudiant, Lucka, qui a pris les corrélations mentionnées dans le chapitre Revue de littérature dans le but de faire des simulations numériques, j'ai pu faire des comparaisons entre les résultats expérimentaux et ceux venant des simulations numériques. Il faut remarquer que ses équations ont été résolues numériquement et que ce n'est pas un modèle CFD (*Computational Fluid Dynamics* en anglais).

D'après les simulations numériques, dans le cas d'une seule particule relâchée dans l'eau (sans vitesse initiale), il est observé que sa trajectoire est rectiligne et verticale (donc en 1D), si $t \leq t_0 + 0.2s$. Ceci est en accord avec les résultats expérimentaux. Les figures 4.13a, 4.13b, 4.13c et 4.13d présentent quelques comparaisons.

Dans ces figures, on observe que les résultats expérimentaux et ceux venant des simulations numériques se superposent bien peu après la libération, puis au fur et à mesure s'éloignent. Deux explications peuvent être données :

— Lucka a pris la corrélation de Schiller [20] afin de calculer le coefficient de traînée, ce qui n'est plus applicable si Re ≥ 800 ;
— L'instabilité du sillage, quand la particule accélère, pourrait avoir un impact.

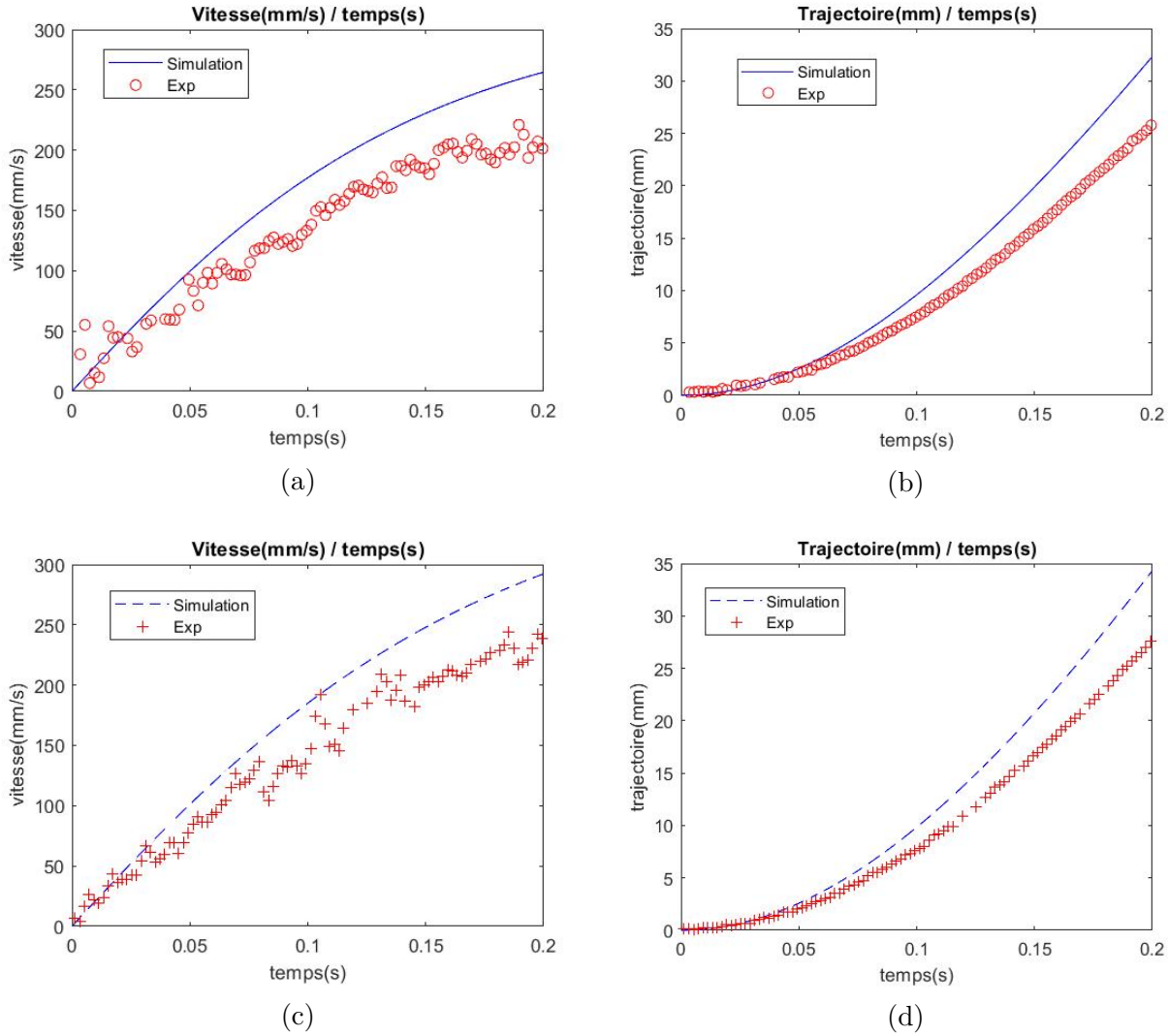


Figure 4.13 Quelques comparaisons entre les résultats expérimentaux et ceux venant des simulations numériques. (a) et (b) : la vitesse de la particule DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) en fonction du temps (t_0 exclus) et sa trajectoire en fonction du temps (t_0 exclus) ; (c) et (d) la particule DA-0.3125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=7.9375 mm). On observe que dans chaque figure ils se superposent bien peu après la libération, puis au fur et à mesure s'éloignent.

4.2 Deux particules sphériques - côte à côte

Avec la présence de deux particules sphériques identiques, qui sont initialement immobiles sur une ligne horizontale - $\vec{D_{12}}$ est un vecteur horizontal, j'ai fait de mon mieux pour les libérer en même temps – à l'œil nu, afin d'observer leurs comportements (voir le schéma 4.14). La distance centre-centre initiale $D(t = t_0) \geq d$ varie entre d et environ $2.5d$, avec un pas de 0.5 mm.

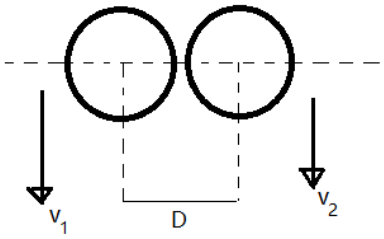


Figure 4.14 Schéma de deux particules sphériques identiques, qui sont initialement immobiles sur une ligne horizontale ; elles sont libérées en même temps et leurs vitesses initiales sont nulles.

Avant de présenter les résultats, une petite discussion est dédiée pour présenter les deux paires de « bras tubulaires », qui ont été mentionnées dans le chapitre précédent et qui ont été utilisées pendant les expériences.

Pourquoi deux paires ? Parce que l'on a envie d'éliminer l'impact de l'impulsion sur une particule sphérique (initialement attirée), quand une montée brutale de pression « pousse » de l'eau dans chaque tube en acier inoxydable et ainsi « pousse » indirectement la particule afin de la libérer (voir le schéma 4.15).

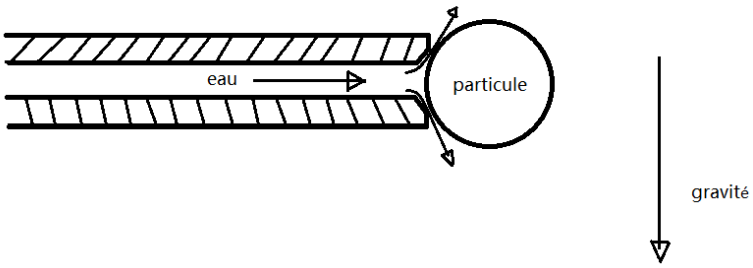


Figure 4.15 Schéma présentant l'impulsion (d'une façon indirecte) sur une particule sphérique à l'instant où elle est libérée.

4.2.1 Trajectoire

Vue globale

Exemple 1

La figure 4.16 présente les trajectoires d'une paire de particules sphériques DA-0.374 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=9.5 mm), dont la distance centre-centre initiale $D(t = t_0) = d$ (donc en contact). Il faut remarquer qu'aux premiers instants, je n'ai pas pu identifier leurs positions, à cause des cercles trop superposés.

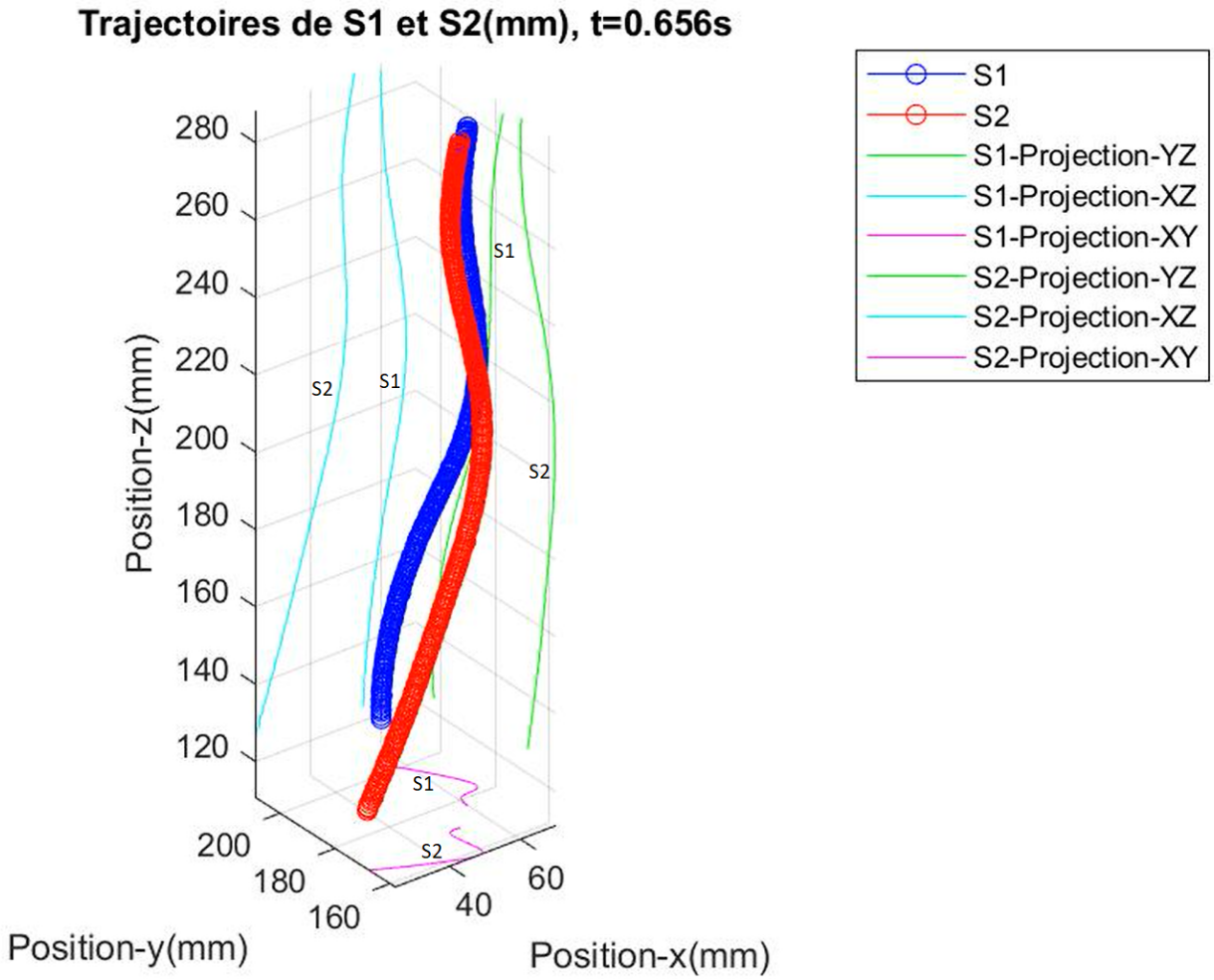


Figure 4.16 Trajectoires d'une paire de particules sphériques DA-0.374 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=9.5 mm), dont la distance centre-centre initiale $D(t = t_0) = d$ (donc en contact). Aux premiers instants leurs positions n'ont pas pu être identifiées.

Pour la particule DA-0.374 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=9.5 mm), la vitesse finale se situe dans la

plage 250-300 mm/s, le nombre de Reynolds Re final vaut environ 2500-3000.

Dans la figure 4.16, on voit que, comme dans le cas d'une seule particule sphérique, les trajectoires de chaque paire de particules sphériques sont en 3D (celle de chaque particule l'est aussi). La variation de la composante horizontale de sa vitesse varie toujours dans la plage -50 et 50 mm/s.

Exemple 2

La figure 4.17 présente les trajectoires d'une paire de particules sphériques DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=3.175 mm), dont la distance centre-centre initiale $D(t = t_0) = d$. Pour la même raison, je n'ai pas pu identifier leurs positions, à cause des cercles trop superposés (à chaque instant).

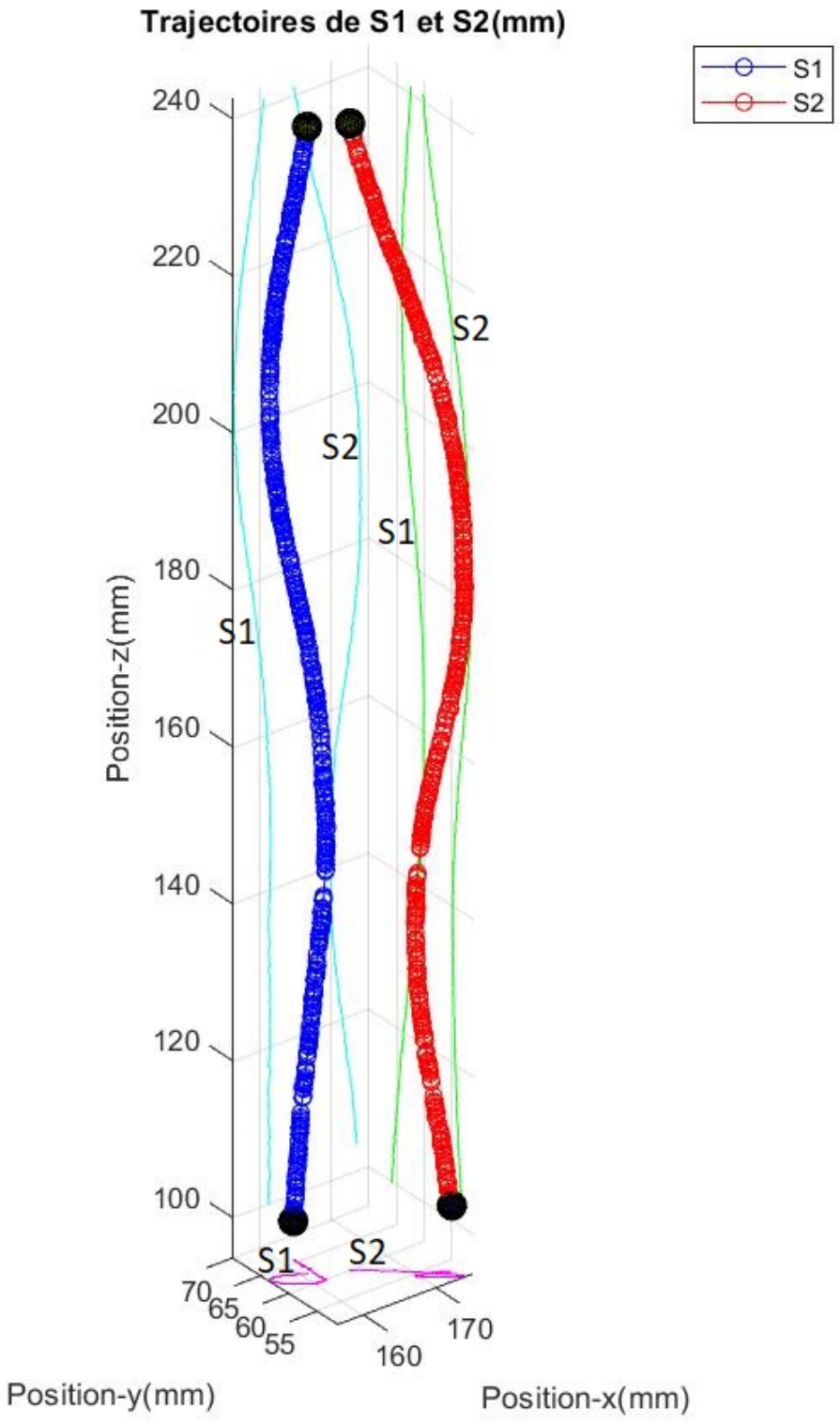


Figure 4.17 Trajectoires d'une paire de particules sphériques DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=3.175 mm), dont la distance centre-centre initiale $D(t = t_0) = d$. Aux premiers instants leurs positions n'ont pas pu être identifiées.

Pour la particule DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=3.175 mm), la vitesse finale vaut environ 150 mm/s, le nombre de Reynolds Re final vaut environ 480.

Dans la figure 4.17, on voit que, comme dans le cas d'une seule particule sphérique, la trajectoire de chaque particule sphérique est en 3D.

Discussion 1

Il faut remarquer les trajectoires présentées aux figures 4.16 et 4.17 sont des résultats qui ne se reproduisent pas *a priori*, parce que la trajectoire d'une particule devient imprédictible une fois que sa vitesse finale est atteinte, ce qui est vérifié dans la section précédente. Toutefois, on a vu que pour chaque paire de particules, leurs trajectoires sont quand même symétriques par rapport à un plan invisible, qui est vertical et qui est perpendiculaire à la ligne horizontale reliant leurs positions initiales.

Discussion 2

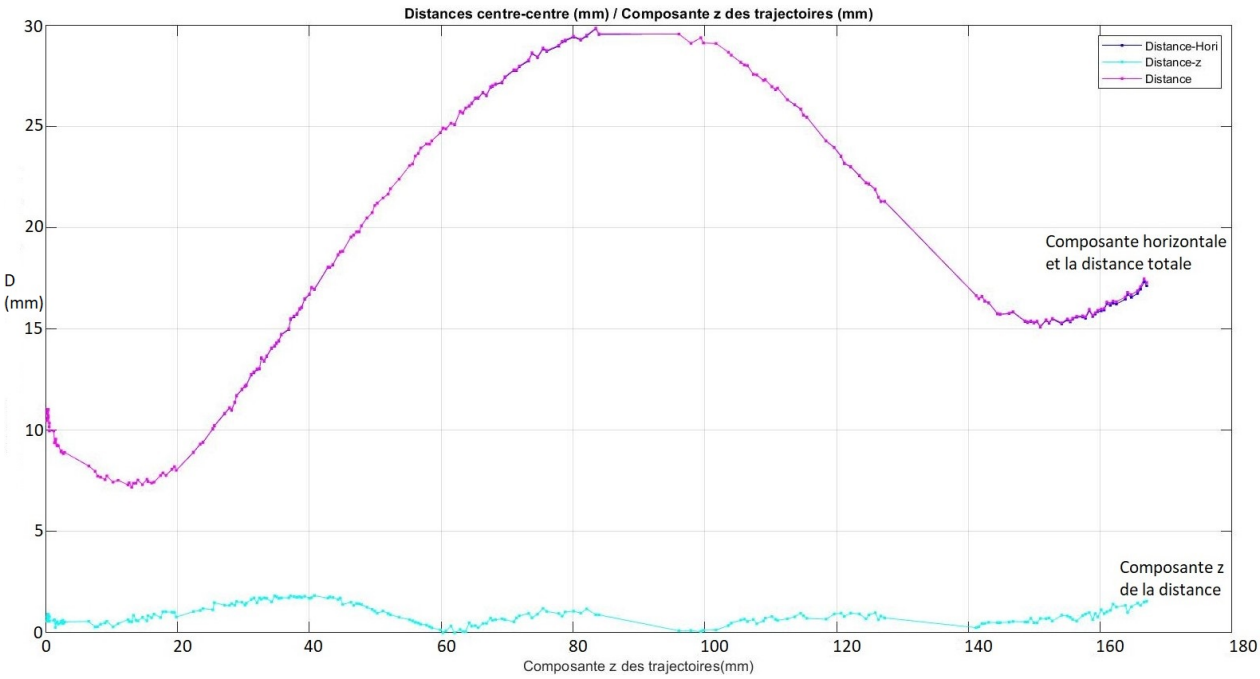
Une fois relâchée, chaque particule entre dans la phase d'accélération. Elles s'approchent et s'éloignent légèrement, tout en descendant/montant. Dans cette phase-ci, leurs trajectoires sont en 2D, plus précisément, leurs trajectoires sont dans un même plan vertical et dans ce plan-ci, leurs trajectoires sont quasiment symétriques par rapport à une ligne verticale. Tout ceci est bien en accord avec les résultats dans l'article [6].

Leurs vitesses continuent à augmenter (jusqu'à la vitesse finale correspondante) et leurs trajectoires commencent à sortir du plan, deviennent en 3D. La propriété symétrique peut résister/survivre un peu plus de temps et la durée est beaucoup plus longue pour la particule DA-0.125 (ρ_P = 1410 kg/m^3 et d=3.175 mm), dont le nombre de Reynolds Re final vaut environ 500.

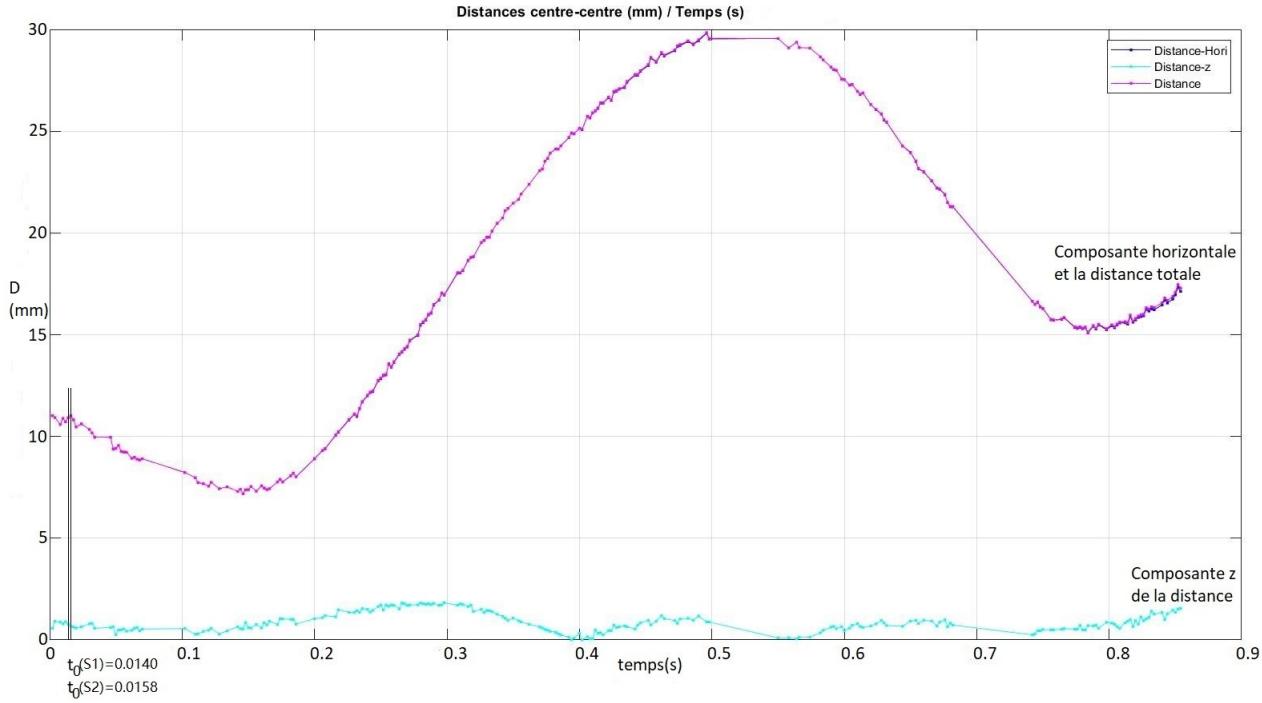
Malheureusement, en général, on ne peut plus prédire leurs trajectoires à cette étape-ci, tout comme dans le cas d'une seule particule. L'instabilité du sillage pouvait se déclencher dans n'importe quelle direction.

Elles s'approchent puis s'éloignent

Les figures 4.18a et 4.18b présentent la distance centre-centre D d'une paire de particules DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) en fonction de la composante z de la position/trajectoire et en fonction du temps.



(a) Variation de D en fonction de la position z (qui commence par 0).



(b) Variation de D en fonction du temps (avec l'instant de la libération t_0 de S1 et de S2 inclus).

Figure 4.18 Variations de la distance centre-centre D d'une paire de particules DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm, $D(t = t_0) = d + 4$ mm). La ligne violette correspond à la distance D, la ligne bleu foncé correspond à la projection dans un plan horizontal et la ligne cyan la projection dans le sens vertical.

En observant les deux figures 4.18a et 4.18b, on voit que ces deux particules sphériques s'approchent un peu puis s'éloignent (une fois libérées), tout en restant dans un même plan horizontal (presque), en descendant dans le fluide. On est ainsi intéressé par l'analyse de ce col.

En changeant la distance centre-centre initiale $D(t = t_0)$, on est intéressé par l'évolution de la position z et celle de l'instant (du temps) où la distance centre-centre minimale se trouve (t_0 exclus).

Les (sous-)figures 4.19, 4.20 et 4.21 présentent les résultats obtenus.

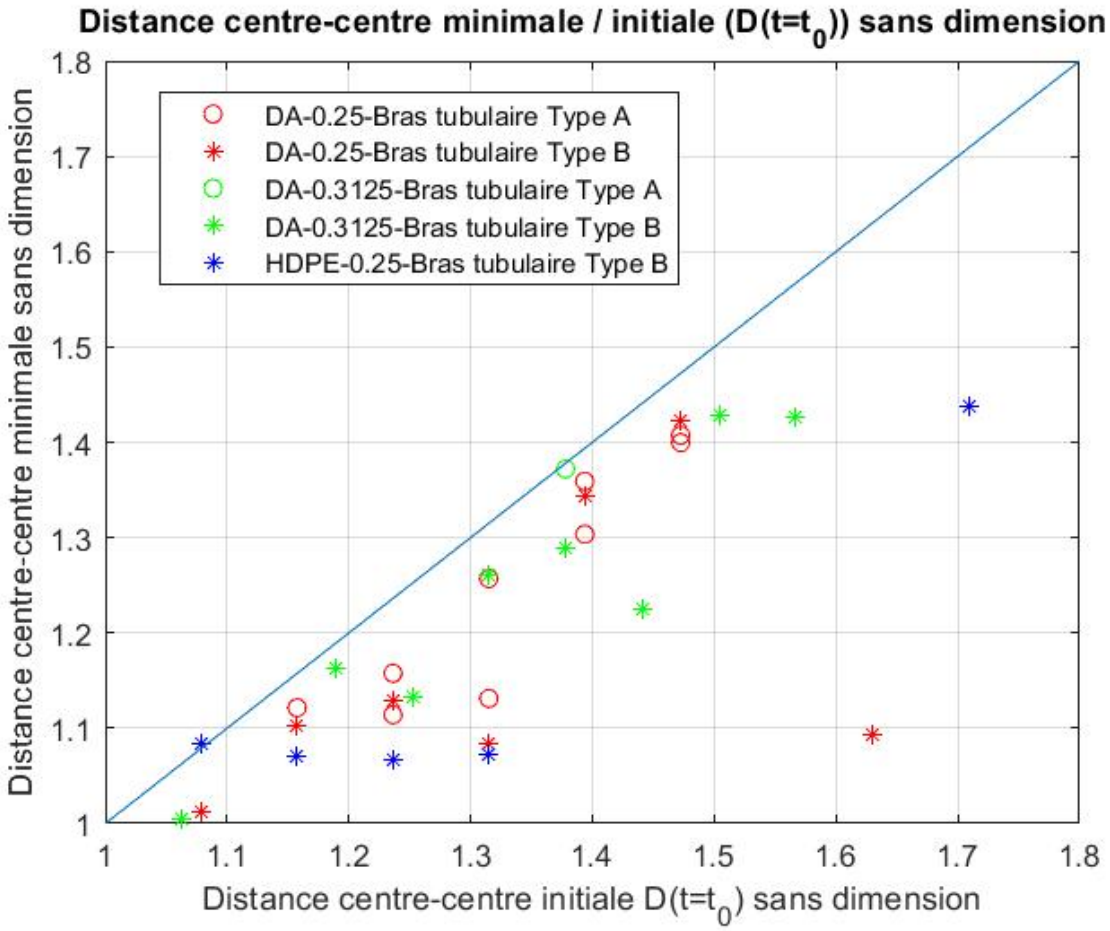


Figure 4.19 Évolution de la distance centre-centre minimale en fonction de celle qui est initiale, toutes les valeurs sont sans dimension (divisées par le diamètre correspondant).

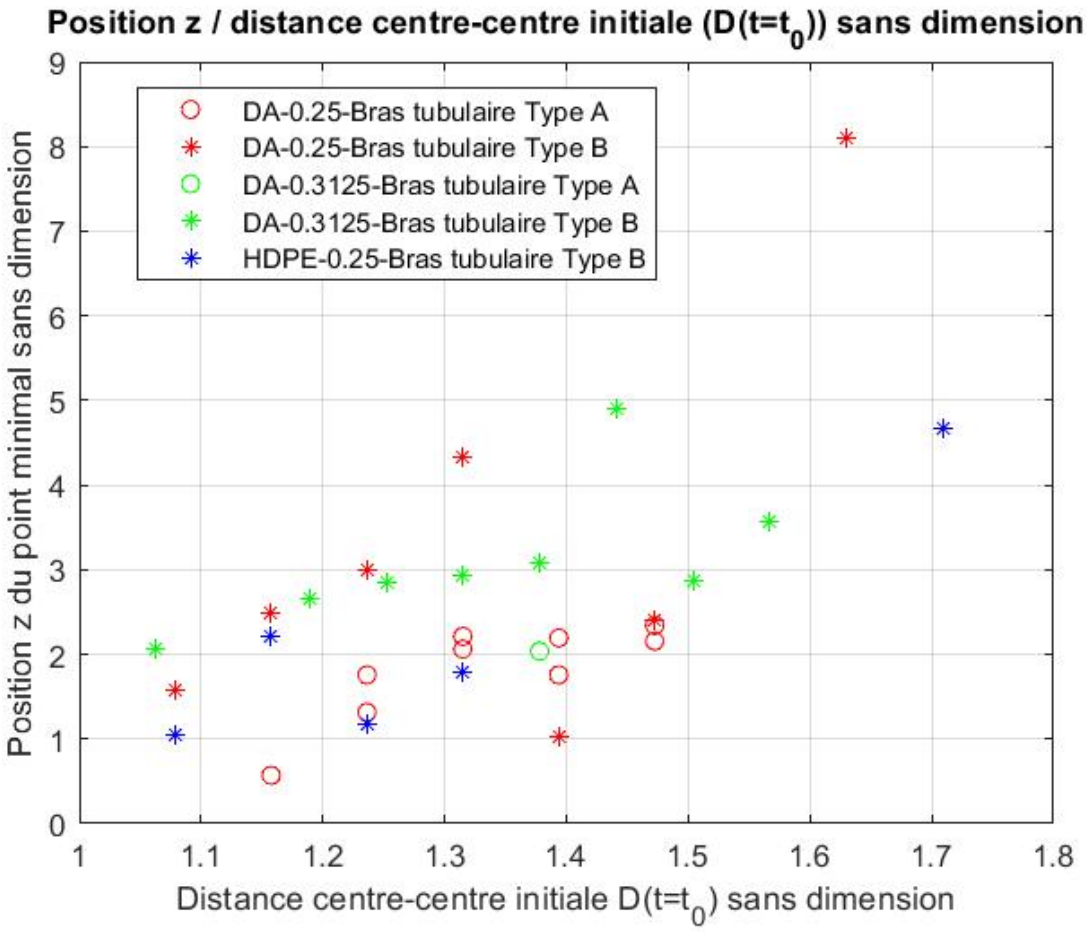


Figure 4.20 Évolution de la position z du col (qui commence par 0) en fonction de celle qui est initiale, toutes les valeurs sont sans dimension (divisées par le diamètre correspondant).

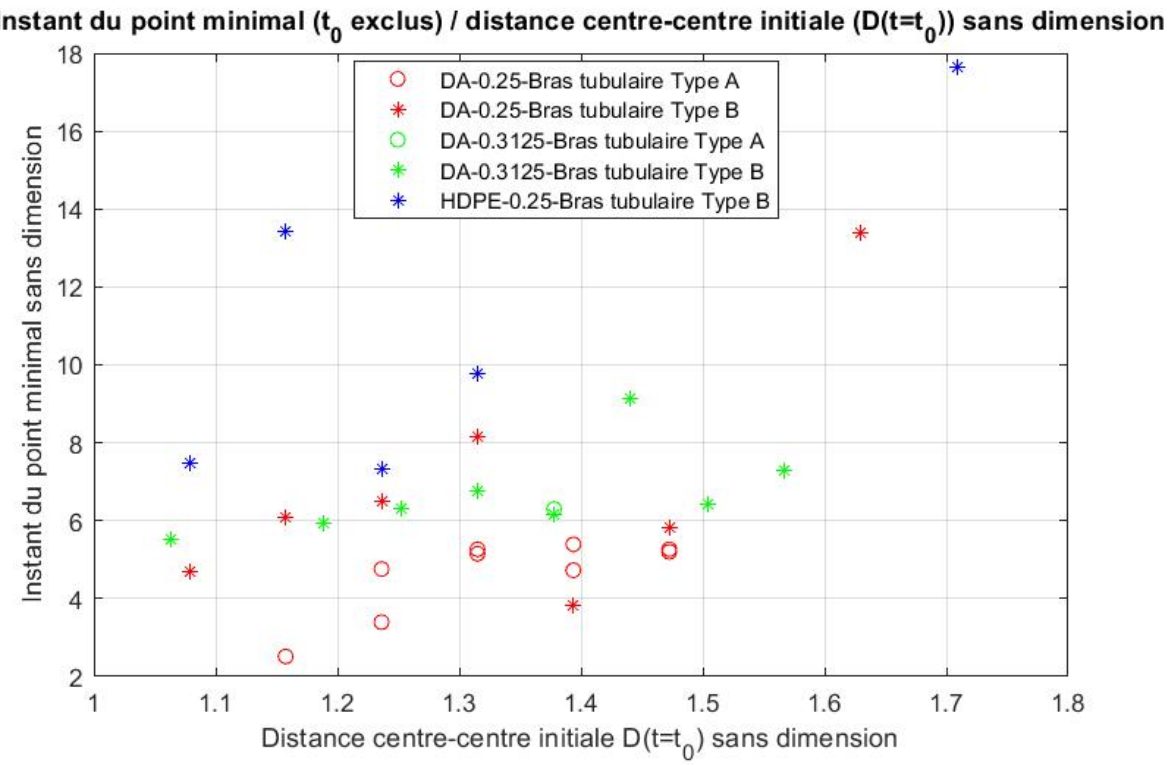


Figure 4.21 Évolution de l'instant où le col est atteint (t_0 exclus) en fonction de la distance centre-centre initiale, toutes les valeurs sont sans dimension (divisées par le diamètre correspondant et adimensionné à l'aide de la formule (4.7)).

En observant ces trois (sous-)figures (4.19, 4.20 et 4.21), on peut constater que même si avec la présence de quelques « points » loin de la tendance, la distance centre-centre minimale augmente avec celle qui est initiale $D(t = t_0)$, la position z du col l'est aussi. La relation entre l'instant où le col est atteint (t_0 exclus) et la distance centre-centre initiale $D(t = t_0)$, en revanche, semble faible parce que la plupart des points à la figure 4.21 se trouvent entre 4 et 8.

Il faut aussi remarquer que la répétabilité peut être vue : dans la figure 4.21, il y a deux endroits où deux points rouges se superposent bien, ceci indique que deux expériences avec une même condition initiale nous amènent à deux résultats quasiment identiques.

S'il y a deux particules sphériques identiques qui se touchent initialement - $D(t = t_0) = d$, alors il n'y a pas de col.

4.2.2 Rotations de deux particules sphériques*

Pour obtenir de bons résultats, il faut faire attention à la façon de fixer et libérer des particules sphériques ; il faut aussi éviter toute bulle, grande ou petite, attachée sur la surface d'une particule.

Pendant mes expériences, j'ai profité de petites bulles attachées pour pouvoir observer la rotation d'une paire de particules sphériques du type DA-0.374 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=9.5 mm).

Une fois libérées, les particules sphériques font chacune une rotation de la façon suivante, en descendant et en accélérant (voir le schéma à la figure 4.22).

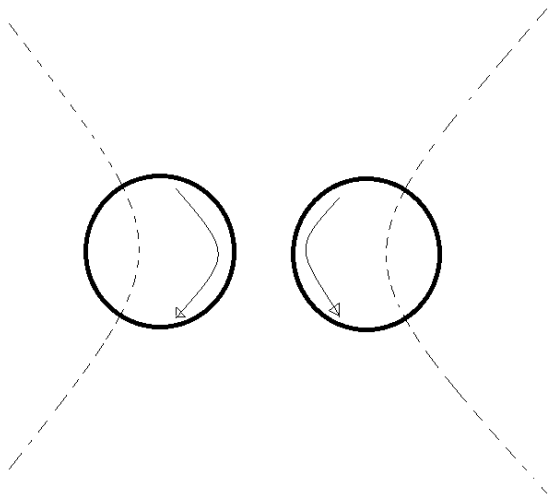


Figure 4.22 Schéma présentant la rotation des deux particules sphériques. Les deux lignes pointillées représentent leurs trajectoires.

Malheureusement, je n'ai ni pu trouver l'axe de rotation ni pu mesurer la variation de l'angle avec une haute exactitude, donc le schéma au-dessus nous donne seulement une description qualitative, qui est assez approximative.

Il est possible que l'existence de la rotation soit due à l'impulsion mentionnée au-dessus.

4.2.3 Comparaisons Simulations & Données expérimentales

En collaboration avec un autre étudiant, Lucka, qui a pris les corrélations mentionnées dans le chapitre Revue de littérature dans le but de faire des simulations, j'ai pu faire des comparaisons entre les résultats et ceux venant de ses simulations numériques. Il faut remarquer

que ses équations ont été résolues numériquement et que ce n'est pas un modèle CFD (*Computational Fluid Dynamics* en anglais).

Si nous traitons le cas d'une paire de particules DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et $d = 0.125po$), qui sont initialement côte à côte (sans vitesse initiale) et que $D(t = t_0) = d$ (donc en contact), en faisant des simulations numériques, la figure 4.23 présente leurs trajectoires. Dans cette figure on trouve que leurs trajectoires sont symétriques et que leur distance centre-centre D augmente à partir de $D(t = t_0) = d$, si t est dans la plage t_0 et $t_0 + 0.2s$.

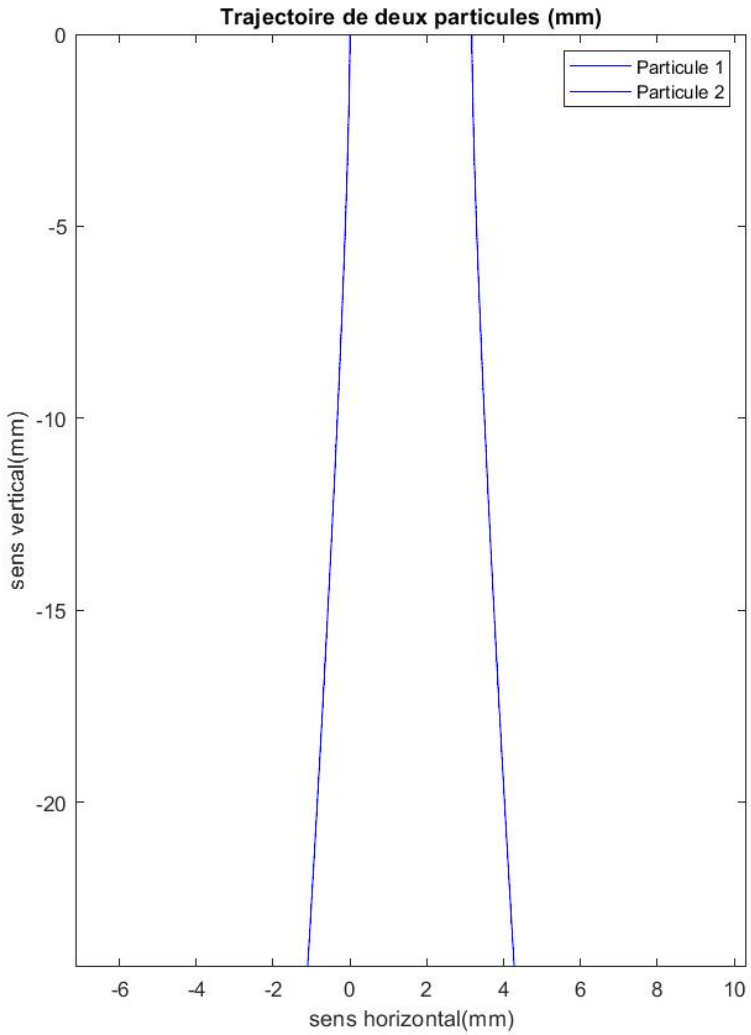
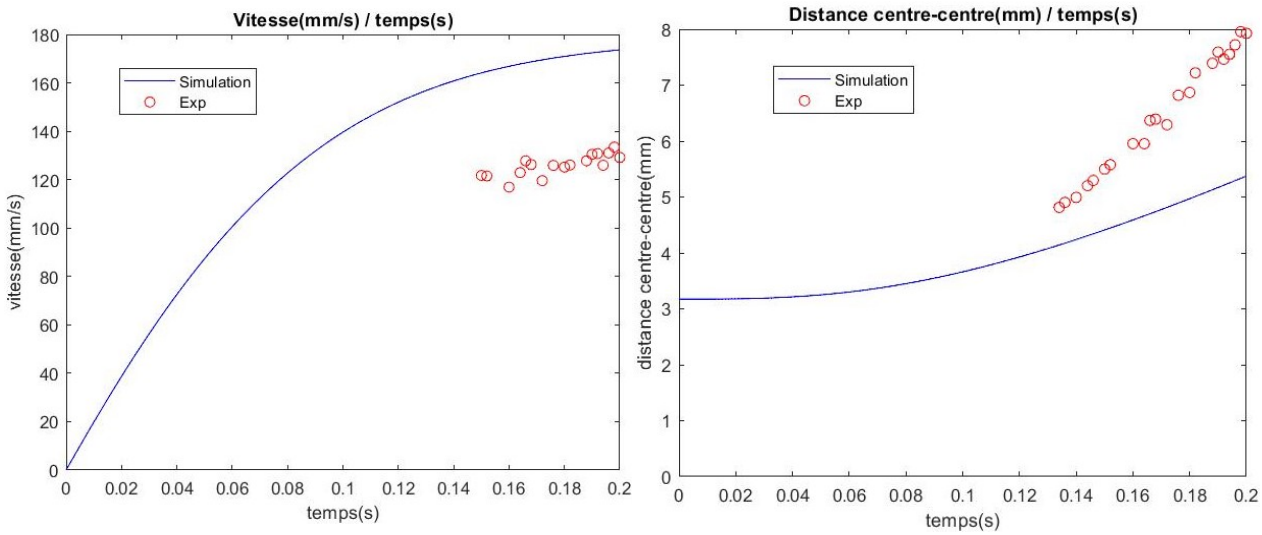


Figure 4.23 Trajectoires d'une paire de particules DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=3.175 mm), qui sont initialement côte à côte (sans vitesse initiale). Initialement $D(t = t_0) = d$ (donc en contact). t est dans la plage t_0 et $t_0 + 0.2s$.

Les figures 4.24a et 4.24b présentent (respectivement) la comparaison de la distance centre-centre D et de la vitesse (simulations numériques et expériences). On voit que la simulation numérique a « sur-estimé » la vitesse des particules, mais « sous-estimé » la distance centre-centre D. Une explication est donnée : l'impulsion appliquée sur chacune des deux particules a un impact non négligeable dans ce cas - pour ce type de particule.



(a) (b)

Figure 4.24 Comparaison de D (figure b) et de la vitesse (figure a) (simulations numériques et expériences) si nous traitons le cas d'une paire de particules DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=3.175 mm), qui sont initialement côte à côte (sans vitesse initiale). Initialement $D(t = t_0) = d$ (donc en contact). t est dans la plage t_0 et $t_0 + 0.2$ s. On voit que, comme dans le cas d'une seule particule, la simulation numérique a « sur-estimé » la vitesse des particules, mais « sous-estimé » la distance centre-centre D.

En prenant les différents types de particules (du même matériau DA, dont ρ_P=1410 kg/m^3, de différents diamètres), des simulations numériques ont été faites. La figure 4.25 présente quelques résultats - $D(t = t_0 + 0.2 \text{ s})/d$ (donc sans dimension) en fonction du diamètre (avec dimension) - ainsi qu'une courbe présentant la tendance.

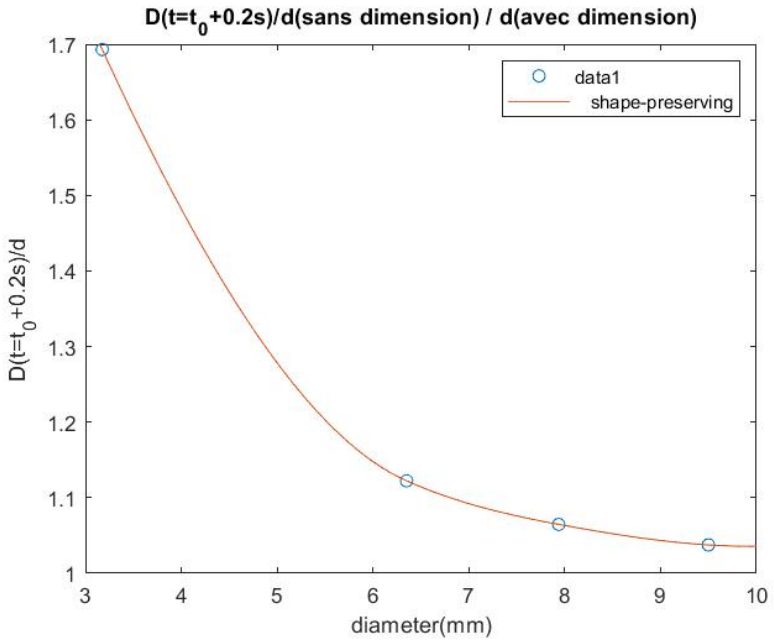


Figure 4.25 $D(t = t_0 + 0.2 \text{ s})/d$ (donc sans dimension) en fonction du diamètre (avec dimension) pour 4 types de particules (du même matériau DA, dont ρ_P=1410 kg/m^3, de différents diamètres). Une courbe présentant la tendance est rajoutée.

Finalement en faisant des simulations numériques, on constate que le « profil » de la vitesse de chacune d'une paire de particules est légèrement différent de celui de la vitesse d'une seule particule dans un milieu infini (pendant la phase d'accélération). La figure 4.26 présente ces « profils » en prenant le type de particule DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=3.175 mm). Malheureusement, on n'a pas pu détecter cette différence pendant le (post-)traitement des données des expériences.

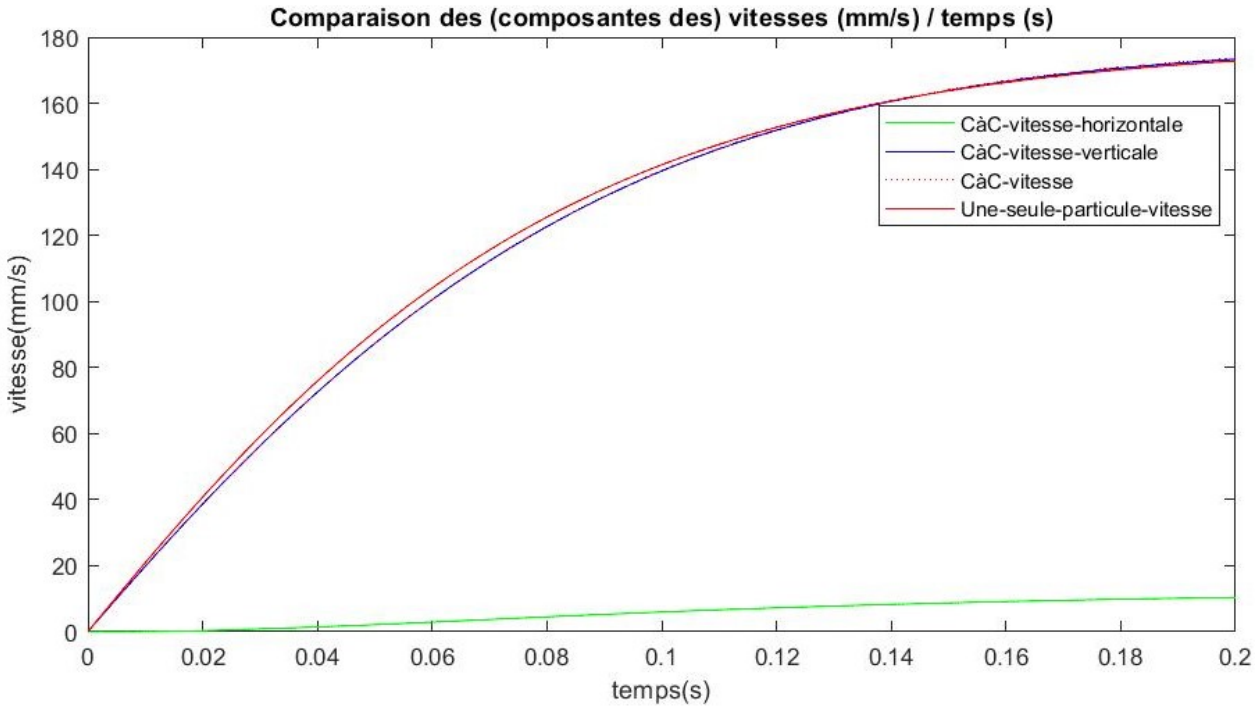


Figure 4.26 En prenant le type de particule DA-0.125 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=3.175 mm, on constate que le « profil » de la vitesse de chacune d'une paire de particules (initialement côte à côte - CàC) est légèrement différent de celui de la vitesse d'une seule particule (pendant la phase d'accélération). La ligne rouge pointillée est « cachée » par la ligne bleue.

4.3 Deux particules sphériques – devant derrière

On reste ici avec deux particules sphériques identiques, mais initialement elles sont sur une ligne verticale - $\vec{D_{12}}$ est un vecteur vertical. Si la distance centre-centre initiale $D(t = t_0)$ varie à partir de d, les résultats dans cette partie vont présenter les comportements.

4.3.1 Trajectoire

Vue globale

Example 1

La figure 4.27 présente les trajectoires d'une paire de particules sphériques DA-0.374 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=9.5 mm).

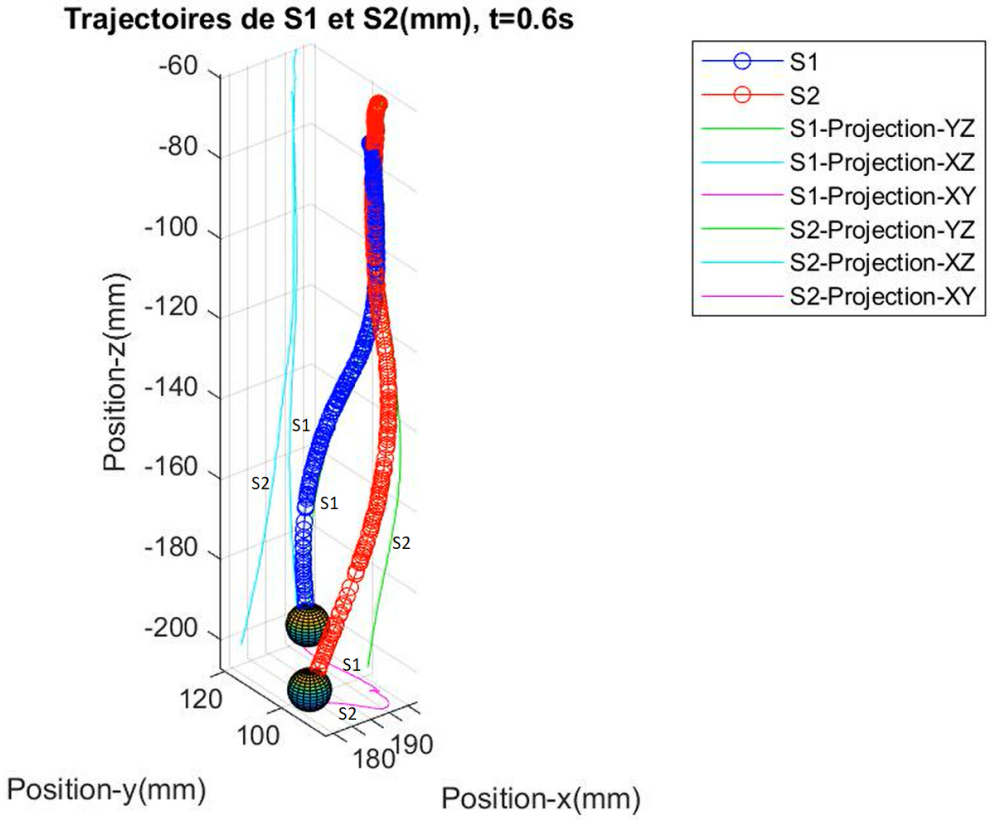


Figure 4.27 Trajectoires d'une paire de particules sphériques DA-0.374 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=9.5 mm) qui sont devant derrière initialement. Une fois qu'elles sont libérées, la particule derrière S2 accélère d'une façon telle que la ligne les reliant devient un vecteur (proche d'être) horizontal rapidement.

Les deux particules (dans la figure 4.27) ont une relation (position-position) devant derrière initialement. Une fois qu'elles sont relâchées (presque en même temps), la particule derrière accélère un peu plus vite que celle devant elle, donc la distance centre-centre D diminue légèrement. Dans la phase d'accélération, elles se déplacent tout au long de la ligne verticale, définie par leurs positions initiales.

La particule derrière approche celle devant elle, et en même temps, cette première commence à dévier de la ligne verticale. À un instant, la particule derrière accélère si vite qu'elle arrive à être sur le même plan horizontal que celle devant elle avant de la dépasser. À partir de ce moment elles continuent à tomber/monter en restant sur un plan horizontal, autrement dit, elles sont maintenant dans une direction transverse. Ceci est exactement comme ce qui est décrit dans le livre de Clift *et al.* [1].

Il est aussi possible que la particule derrière puisse dépasser celle devant elle et qu'elles

montent ou descendent, sans être sur un même plan horizontal.

Discussion

La trajectoire de la particule derrière peut être décrite en deux catégories (voir la figure 4.28) :

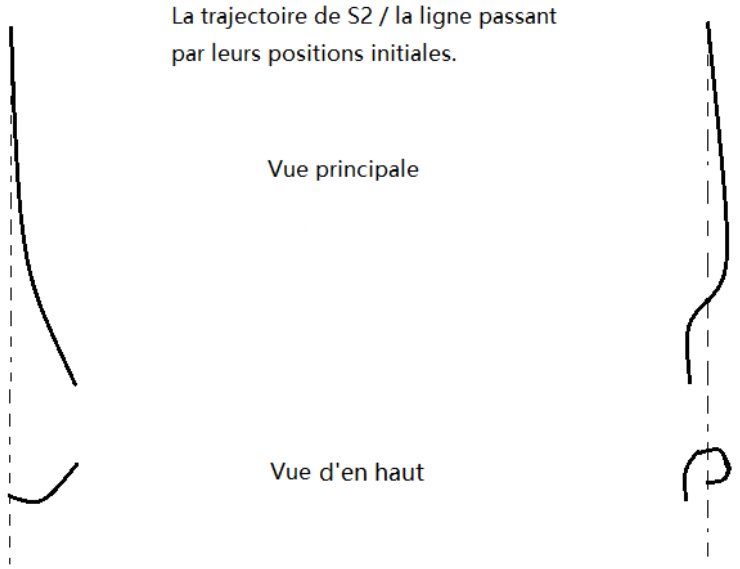


Figure 4.28 Trajectoire de la particule derrière, qui est impactée par le sillage de celle devant elle, peut être décrite en deux catégories.

Phase d'accélération

Comme dans les cas traités au-dessus, une fois relâchées, les deux particules entrent dans la phase d'accélération, leurs trajectoires peuvent être considérées en 2D (plus précisément, elles se déplacent le long de la ligne verticale reliant leurs positions initiales, donc en 1D).

Elles s'approchent puis s'éloignent

La figure 4.29 présente la distance centre-centre D entre deux particules DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm) en fonction du temps :

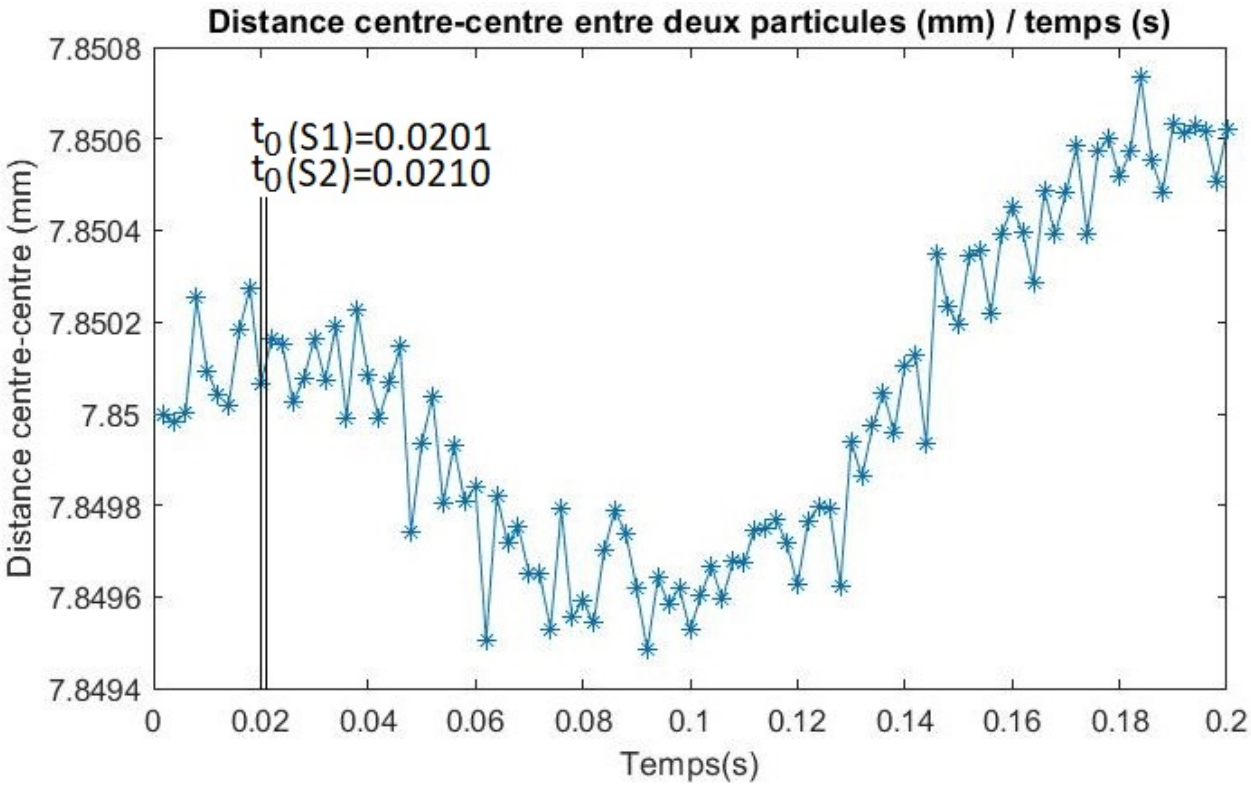


Figure 4.29 Distance centre-centre D entre deux particules DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm), en fonction du temps. Ici S1 est la particule devant et S2 derrière.

En observant la figure 4.29 on peut constater que la distance centre-centre D diminue d'abord et puis augmente. Il faut remarquer que cette variation est très petite.

On voudrait, en utilisant la même méthode qu'avant, étudier l'impact de la distance centre-centre initiale $D(t = t_0)$ sur la position z de la particule derrière S2 du point minimal et sur l'instant où le point minimal se trouve (t_0 exclus). Malheureusement il s'avère que l'écart de t_0 de deux particules (celle devant et celle derrière) peut avoir une influence non négligeable, qui pourra être grosse, finalement, on n'a pas pu faire cette analyse.

4.3.2 Vitesse

Vue globale

Exemple 1

La figure 4.30 présente la vitesse d'une paire de particules DA-0.374 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=9.5 mm) en fonction du temps (avec dimension).

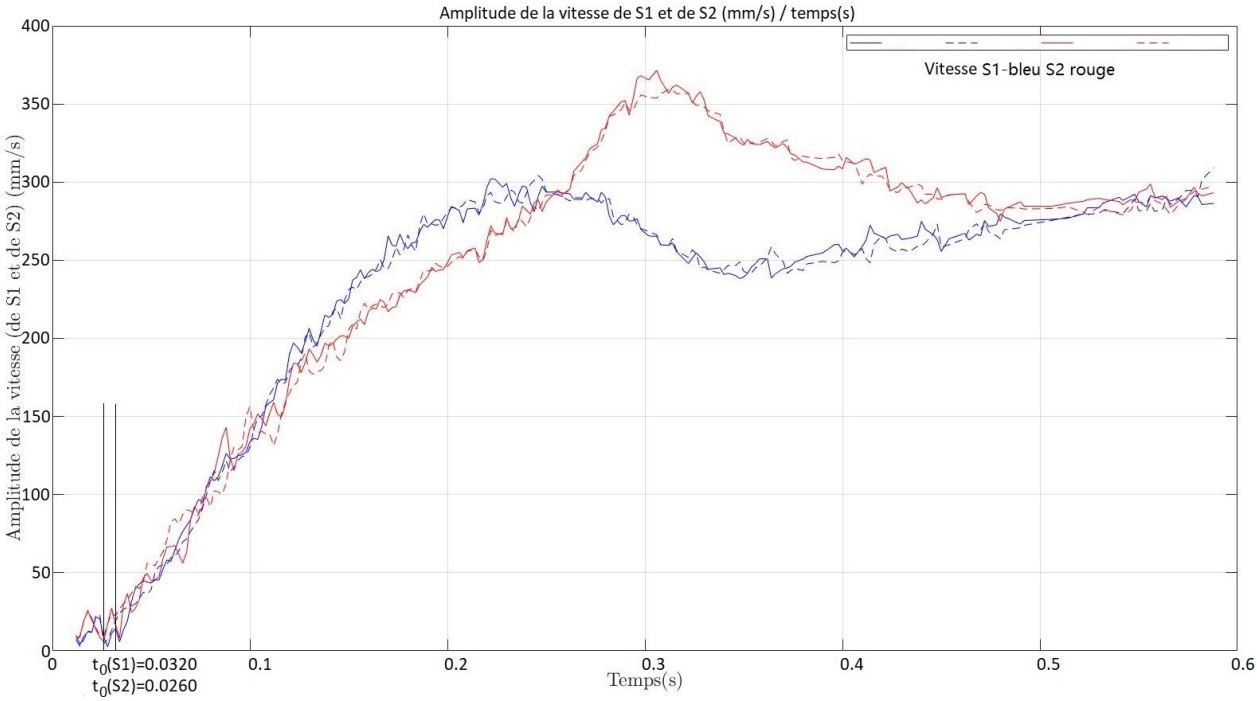


Figure 4.30 Amplitude des vitesses d'une paire de particules DA-0.374 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=9.5 mm). S1 est celle qui est devant et S2 qui est derrière.

En observant les courbes dans la figure 4.30, on peut trouver que globalement la variation de l'amplitude de la vitesse de la particule S2 derrière est plus « violente ».

Peu après la libération de ces deux particules sphériques, la particule S2 (celle derrière) est influencée par le sillage de S1 (celle devant). Une fois que S2 sort de la phase d'accélération, elle commence à dévier de la ligne verticale (reliant leurs positions initiales), elle continue à accélérer, mais d'une façon moins « forte » que S1. Quand la vitesse de S1 atteint son premier « sommet » (sans doute quand son sillage a fini de se développer), la vitesse de S2 continue à augmenter jusqu'à une valeur qui est supérieure à sa vitesse finale. À ce moment-là elles sont déjà dans une relation (position-position) transversale. La vitesse de S2 diminue jusqu'à sa vitesse finale.

Il faut remarquer que la composante z de la vitesse domine l'amplitude tout le temps.

En plus, on peut constater que l'impact de la particule devant (S1) sur celle derrière (S2) est beaucoup plus grande que celui de la particule derrière (S2) sur celle devant (S1).

4.3.3 Phénomène intéressant

Quand je lançais deux particules sphériques Nylon-0.125 (ρ_P=1150 kg/m^3 et d=3.175 mm) et dont la distance centre-centre initiale $D(t = t_0) = d$ - elles se touchent initialement, un phénomène intéressant s'est passé et ce résultat est reproductible (voir la figure 4.31).

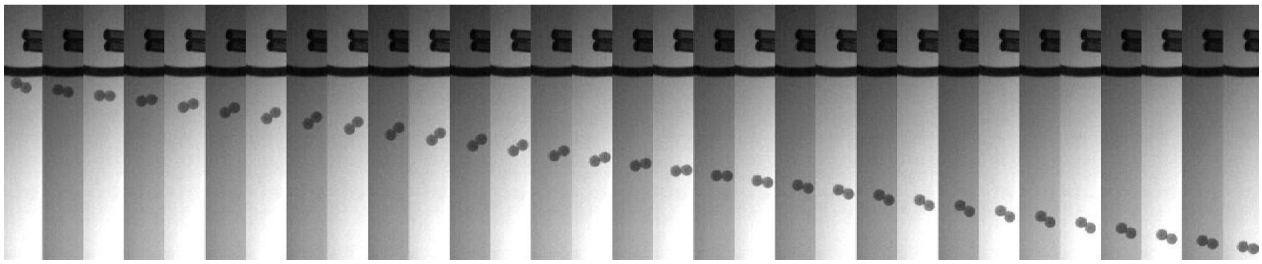
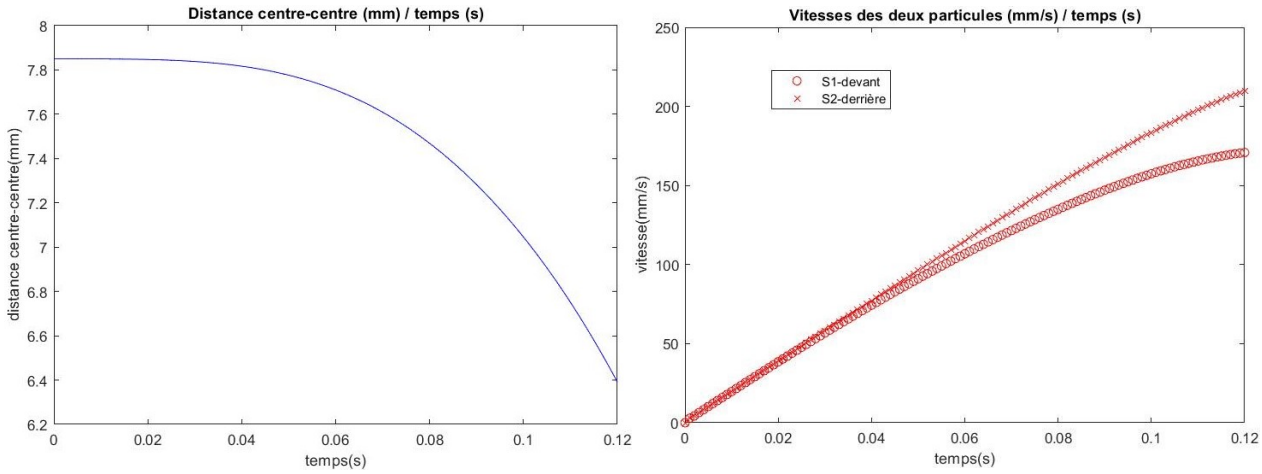


Figure 4.31 Images présentant la tombée d'une paire de particules sphériques Nylon-0.125 (ρ_P=1150 kg/m^3 et d=3.175 mm), qui est sur une ligne verticale et qui se touchent initialement. Une fois que la ligne les reliant devient horizontale et qu'ainsi leur vitesse finale est atteinte, elles continuent à tomber, mais tout en gardant le contact. L'écart du temps entre deux images consécutives vaut environ 20.0 ms.

La tombée d'une paire de particules sphériques Nylon-0.125, qui est initialement sur une ligne verticale. Une fois que la ligne les reliant devient horizontale et qu'ainsi leur vitesse finale est atteinte, elles continuent à tomber, mais tout en gardant le contact. D'abord S2 (celle derrière) dépasse S1 (celle devant) puis S1 dépasse S2 et ceci se répète (l'une dépasse l'autre alternativement).

4.3.4 Simulations numériques

Si nous traitons le cas d'une paire de particules DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm), qui sont initialement devant derrière (sans vitesse initiale) et que $D(t = t_0) = d + 1.5$ mm, les figures 4.32b et 4.32a présentent respectivement leurs vitesses et la distance centre-centre D en fonction du temps. On trouve que dans les simulations numériques, elles tombent en contact au dernier instant (donc la simulation s'arrête), ce qui n'est pas du tout ce que j'ai observé dans les expériences.



(a) (b)

Figure 4.32 (a) : distance centre-centre D en fonction du temps ; (b) : vitesses d'une paire de particules DA-0.25 (ρ_P=1410 kg/m^3 et d=6.35 mm), qui sont initialement devant derrière (sans vitesse initiale). $D(t = t_0) = d + 1.5$ mm.

4.4 Deux particules sphériques – d'autres cas

Ici nous allons étudier le mouvement de deux particules sphériques identiques, mais initialement elles ne sont ni sur une ligne horizontale ni sur une ligne verticale.

J'ai fait des expériences avec chaque fois une paire de particules sphériques identiques et leurs positions initiales peuvent être décrites par deux paramètres supplémentaires $D_x(t = t_0)$ et $D_z(t = t_0)$ (voir le schéma 4.33) :

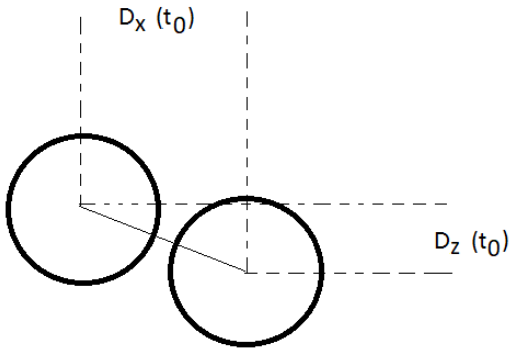


Figure 4.33 Schéma présentant deux particules sphériques identiques. Initialement elles ne sont ni sur une ligne horizontale ni sur une ligne verticale.

Pour chaque type de particules, $D_x(t = t_0)$ varie à partir de d et $D_z(t = t_0)$ à partir de 0 jusqu'à environ d, avec chacun un pas de 0.5 mm.

4.4.1 Trajectoire

Vue globale

Pour chaque paire de particules sphériques libérées, les trajectoires des deux particules ressemblent beaucoup à celles de deux particules dans le cas précédent (devant derrière) : la particule derrière accélère un peu plus vite pour qu'elle puisse « rattraper » la particule devant elle.

La figure 4.34 donne une description qualitative de la trajectoire de la particule S2 (celle derrière).

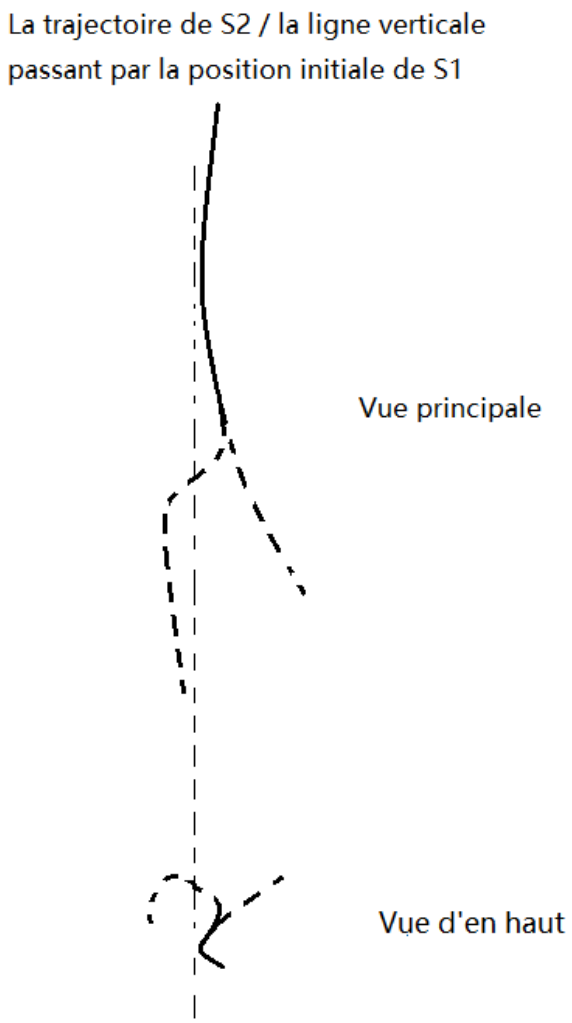


Figure 4.34 Schéma présentant la trajectoire de la particule S2 (celle derrière). Les deux lignes pointillées présentent deux catégories de « chemin » possibles.

Il est possible qu'elles se touchent en descendant/montant, ceci rend la prédiction de leurs trajectoires par des simulations numériques plus difficile.

4.4.2 Dépassement

La figure 4.35 nous dit si la particule derrière peut-elle dépasser celle devant elle.

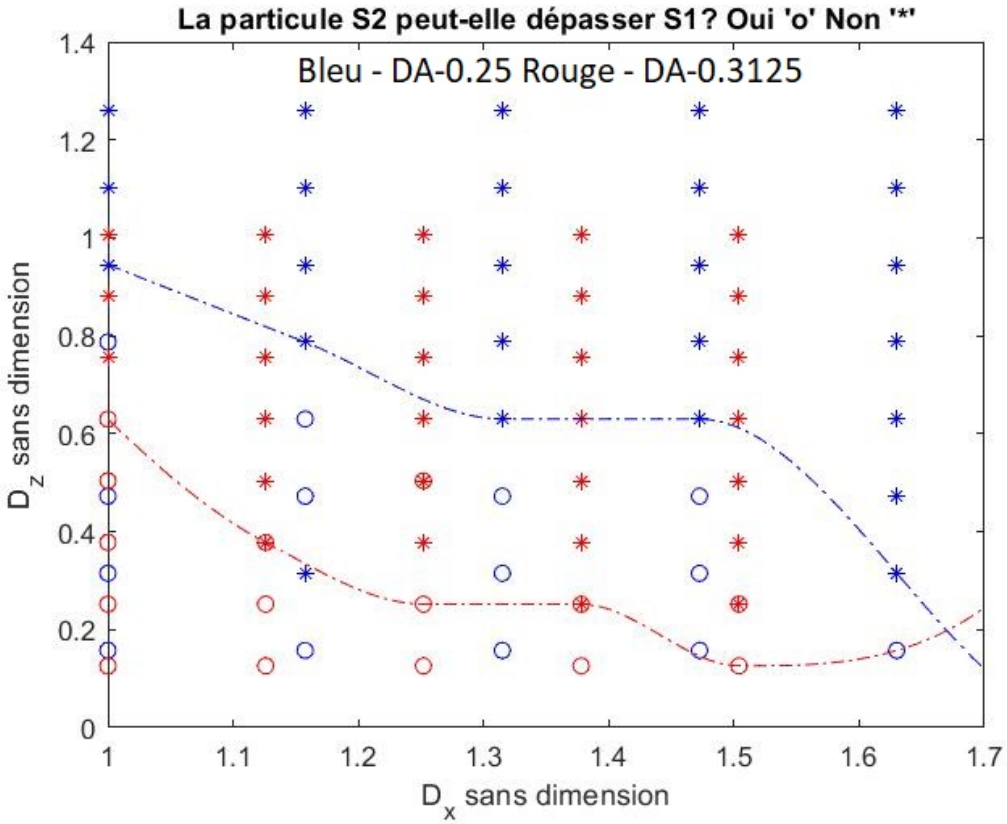


Figure 4.35 Tableau avec des points ou des étoiles nous disant si la particule S2 (derrière) peut-elle dépasser celle devant elle - S1. Deux courbes y sont rajoutées afin de montrer la tendance.

Dans la figure 4.35, on observe qu'avec la croissance de D_x initiale, il est de plus en plus difficile pour la particule S2 (derrière) de dépasser celle devant elle - S1 parce que plus D_x est grande, moins l'interaction devient importante. Deux courbes y sont rajoutées afin de montrer cette tendance. Il faut aussi remarquer qu'il existe une zone « grise », dans laquelle les résultats sont compliqués à prédire (peut-être qu'elles tombent en restant sur un même plan horizontal).

Dans le chapitre Revue de littérature, nous avons la figure 2.2 qui décrit la variation de la longueur adimensionnée du sillage à l'arrière d'une seule particule sphérique par rapport au nombre de Reynolds Re [1–3]. Dans cette figure on observe que si Re $\leq$ 200, la longueur adimensionnée augmente à partir de zéro jusqu'à 1.2 (environ). Si Re $\geq$ 200, cette longueur adimensionnée peut atteindre 2.5.

En observant la « tranche » de la zone « grise » où D_x vaut 1 (c.-à-d. la composante horizontale de la distance centre-centre D est égale à d au premier instant), on peut constater que ceci

est compatible avec la figure 2.2. Peu après la libération, la particule qui se situe légèrement derrière peut être impactée par le sillage de celle devant elle et ainsi il est possible que le dépassement se passe.

4.5 Discussions

4.5.1 Erreurs de mesure

Dans cette sous-section, une discussion sur les erreurs de mesure est développée et détaillée.

Les erreurs peuvent être divisées en 2 catégories : celles qui viennent du système (systématiques) - Type 1, et celles qui sont considérées comme aléatoires - Type 2.

Erreurs du type 1

Les erreurs qui viennent des mesures peuvent être considérées comme systématiques et on a :

- la masse volumique, le diamètre et la rugosité de la surface* d'une particule sphérique ;
- la masse volumique, la température (ainsi la viscosité dynamique) du fluide ;
- la vitesse initiale d'une particule à l'instant où elle est libérée** ;

* : on a dit que toutes les particules sphériques sont considérées comme lisses, mais il existe toujours un coefficient de rugosité pour chaque type de particule, qu'il soit grand ou petit. Plus ce coefficient est grand, moins elle est lisse. Les coefficients de rugosité sont en général inférieurs à 0.15, qui correspond à la particule Bois-0.4 (bois raboté).

** : comme on en a parlé au début de ce chapitre, on voudrait que la vitesse initiale soit nulle, ceci n'est pas le cas rigoureusement.

Voici quelques valeurs :

- Le fluide utilisé de toutes les expériences est l'eau du robinet, dont la température varie entre 21.5 et 24.5 degrés Celsius ;
- La masse volumique du fluide se situe entre 0.9980 et 0.9970 kg/m^3 ;
- La viscosité dynamique du fluide se situe entre 0.9775 et 0.8900 mPa.s ;
- Le diamètre de chaque type de particule sphérique a une tolérance de plus ou moins ± 0.0005 ou ± 0.0010 pouce (1 pouce = 25.4 mm).

Ces erreurs conduisent à une erreur de la mesure de Re et d'autres nombres sans dimension, spécialement. Ainsi les propriétés sans dimension ($\overline{t}$, $\overline{u}^{1,2}$, etc.) sont aussi impactées.

Erreurs du type 2

Les erreurs qui sont considérées comme aléatoires sont plutôt liées au traitement des images.

Par exemple, la détection de cercle(s) et ainsi la mesure de la/les position(s) de la/les particule(s) sphérique(s) correspondante(s) à cet instant-là. Finalement la trajectoire, la vitesse, t_0 etc., ont tous une erreur.

4.6 Résumé des résultats principaux

Pendant ce projet de recherche, j'ai fait des expériences pendant approximativement 5 mois et j'en ai tiré quelques résultats intéressants. Il y a aussi quelques résultats que je voudrais obtenir ou approfondir, mais je n'ai pas pu, malheureusement.

Voici une liste de tous les résultats obtenus :

— Pour une particule sphérique qui est relâchée d'une façon telle que sa vitesse initiale est nulle, sa trajectoire est d'abord rectiligne et verticale (donc en 1D), quand elle est dans la phase d'accélération ; sa trajectoire devient 3D une fois qu'elle sort de la phase d'accélération et elle commence à suivre un mouvement de spirale ;

— Pour une seule particule sphérique relâchée (aucune vitesse initiale), pour la gamme de nombres d'Archimède considérée, la vitesse finale ne dépend que peu de la viscosité du liquide environnant ;

— Pour deux particules sphériques identiques, qui sont initialement sur une ligne horizontale - côte à côte et qui sont relâchées en même temps tel que leurs vitesses initiales valent zéro, leurs trajectoires sont d'abord en 2D (dans la phase d'accélération) puis en 3D. Pendant cette phase, ces deux particules s'approchent puis s'éloignent ;

— Pour deux particules sphériques identiques, qui sont initialement sur une ligne horizontale - côte à côte et qui sont relâchées en même temps (aucune vitesse initiale), les rotations de ces deux particules sphériques sont observées ;

— Pour deux particules sphériques identiques, qui sont initialement sur une ligne verticale – devant derrière et qui sont relâchées en même temps telles que leurs vitesses initiales valent zéro, leurs trajectoires sont d'abord en 1D (en suivant la ligne verticale) dans la phase d'accélération, puis en 3D quand, au fur et à mesure, leur relation (position-position) devient transversale ;

— Pour deux particules sphériques identiques, qui sont initialement sur une ligne verticale – devant derrière et qui sont relâchées en même temps telles que leurs vitesses initiales valent zéro, on observe que la distance centre-centre D diminue légèrement peu après la libération ;

— Pour deux particules sphériques identiques, qui sont initialement sur une ligne ni horizontale ni verticale et qui sont relâchées en même temps tel que leurs vitesses initiales valent zéro, on observe qu'elles s'approchent peu après la libération et que le

dépassement de la particule derrière peut se produire sous certaines conditions.

CHAPITRE 5 BILAN DES TRAVAUX, AMÉLIORATIONS ET TRAVAUX FUTURS

Dans ce chapitre, d'abord un bilan de tout ce que j'ai pu faire et de tout ce que je n'ai pas pu faire pendant tout mon projet de recherche est développé et présenté ; ensuite, des améliorations sont discutées ; finalement, des travaux futurs sont proposés.

5.1 Bilan des travaux

5.1.1 Ce que j'ai pu faire

Avant de lancer mes expériences, avec la collaboration d'un autre étudiant, j'ai pu concevoir un nouveau système (l'ensemble du dispositif expérimental) qui répond à toutes les exigences (à part un sous-système dynamique faisant monter et descendre la plateforme mobile) à partir de zéro. En plus, le cadre métallique est réutilisable par mon partenaire pour son projet de recherche, qui étudie les comportements et la coalescence de deux bulles.

J'ai aussi pu, à l'aide de MATLAB, établir un processus de traitement d'images (dans lesquelles il y a des cercles partiellement superposés ou totalement détachés), qui nous permet :

- de détecter et d'identifier le/les cercle(s) dans chaque image ;
- de trouver les positions des cercles à chaque instant (une image correspond à un instant) ;
- de rétablir les trajectoires des particules sphériques en 3D ;
- de calculer la vitesse de chaque particule, la distance centre-centre D entre deux particules, etc.

En utilisant MATLAB, j'ai aussi pu développer un code permettant de faire l'ajustement de courbe (à l'aide d'une expression non linéaire et complexe).

En utilisant une carte Arduino, j'ai pu écrire un code simple (aussi en langage Arduino) qui peut faire tourner le moteur.

Et finalement, j'ai pu avoir des observations intéressantes et des conclusions importantes, en faisant mes expériences en utilisant les différentes particules sphériques qui peuvent monter/descendre dans l'eau.

5.1.2 Ce que je n'ai pas pu faire

D'abord, initialement on voulait avoir une plateforme mobile entraînée par le moteur pas à pas, sur laquelle il y a la caméra de haute vitesse, pour que l'on puisse filmer tout le processus de descente/montée d'une particule sphérique ou de deux en interaction. Finalement à cause du sous-système dynamique lié à la plateforme qui n'est pas bien conçu, le moteur ne pouvait pas faire bouger la plateforme mobile (par la rotation de la vis sans fin) d'une façon stable. Cette exigence n'est ainsi pas satisfaite.

Ensuite, quand on libérait deux particules sphériques dont la masse volumique adimensionnelle ρ_P/ρ_L vaut très proche de 1 et dont le diamètre est égal ou inférieur à 1/4 pouce, l'impact de l'impulsion est déjà non-négligeable. Il s'avère que le mécanisme de fixation et de libération de deux particules actuel n'est pas un bon mécanisme pour libérer des particules sphériques de ce type.

5.2 Améliorations

D'abord affiner la plage de masses volumiques de particules sphériques choisies pour faire des expériences. Plus précisément, choisir des particules sphériques fabriquées en d'autres matériaux telles que la masse volumique varie autour de celle du fluide et plus proche de celle du fluide.

En plus, si possible, étudier d'autres mécanismes de fixation et de libération de deux particules, spécialement pour des particules sphériques petites et légères. En lisant l'article de Zhu *et al.* [6], on sait qu'ils ont adopté des pinces électromagnétiques (donc contrôlées par un courant).

Ensuite, reconcevoir le mécanisme de montée et de descente de la plateforme mobile. Ceci contient plusieurs aspects que l'on peut réfléchir : 1. Choisir un moteur plus puissant ; 2. Avoir une plateforme mobile qui est relativement plus légère mais plus rigide (on pourra y rajouter du squelette).

Finalement, pour pouvoir mieux faire le traitement d'images (surtout les images prises pour suivre de petites particules sphériques), une autre caméra de haute vitesse, dont la résolution est plus élevée, peut être choisie pour qu'on ait plus de pixels pour localiser un même cercle et pour tracer sa trajectoire.

5.3 Travaux futurs

Conformément à l'objectif final de ce projet de recherche, il y a des travaux futurs qui pourront être faits.

- Modifier le présent mécanisme de fixation et de libération de deux particules afin de pouvoir étudier les interactions parmi 3 particules sphériques submergées (voire plus de 3) ;
- Étudier la rotation d'une particule sphérique submergée dans l'eau et réécrire les équations théoriques en prenant en compte cette rotation ;
- Modifier la cuve ainsi que ses accessoires pour pouvoir étudier le comportement d'une bulle, ceux de deux voire plusieurs bulles ;
- Introduire un $\hat{C}_D$ et $\hat{C}_L$ instationnaires (en fonction du temps) dans les modèles.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

Intéressé par le comportement d'une particule sphérique au sein d'un nuage de particules dans un fluide newtonien, j'ai choisi ce projet de recherche - on commence par le cas d'une seule particule et par des cas de deux particules (et on étudie le comportement de chacune), et on utilise toujours le même fluide – l'eau.

Dans la phase préparatoire de ce projet de recherche, du temps a été consacré à la revue de littérature. En fait il y a pas mal des chercheurs qui ont fait leurs études sur l'interaction entre particules submergées dans un milieu fluide (l'air et l'eau dans la plupart des cas) – spécialement sur les coefficients des forces qui y participent. Malheureusement, dans leurs expériences ou simulations numériques, les particules restent immobiles l'une par rapport à l'autre. Ainsi, à partir des corrélations trouvées dans la littérature, un modèle eulérien, constitué par toutes les forces qui participent à cette interaction est établi (ma première modélisation) et ainsi on pourra développer un code numérique à partir de ce modèle.

En fait, un objectif plus profond de mon projet de recherche est de faire des comparaisons entre des résultats expérimentaux et ceux numériques afin de modifier et améliorer ce modèle. Ce que je fais est de contribuer à la création d'une base des données (des résultats expérimentaux).

Ce projet de recherche commence par la conception, l'établissement, les modifications et les tests du tout nouveau dispositif expérimental. J'ai appris à utiliser quelques machines, y compris la découpe laser et l'imprimante 3D. Le cadre métallique et plusieurs pièces (le miroir 50/50, les deux miroirs optiques, la caméra haute vitesse, etc.) sont réutilisables pour d'autres projets de recherche.

Après avoir bien construit le dispositif expérimental, les expériences, les traitements et les post-traitements d'images et les analyses ont été faits. Pendant la phase des expériences et du traitement des images, j'ai pu utiliser MATLAB, qui est un outil très puissant.

À la fin de ce projet de recherche, quelques résultats importants et intéressants sont obtenus à partir des résultats expérimentaux, qui décrivent la trajectoire, la variation de la vitesse, la position relative, etc. d'une particule submergée. On a pu identifier le type de la trajectoire d'une seule particule sphérique submergée (en 1D dans la phase d'accélération puis en 3D) ; d'une paire de particules (en 2D parce qu'elles s'approchent et s'éloignent dans la phase d'accélération, puis en 3D). On a aussi pu observer les évolutions de leurs vitesses. En plus, quelques comparaisons ont été faites entre les résultats expérimentaux et numériques, des

discussions y sont accordées afin d'expliquer les différences.

À part ces résultats, en plus, ce qui est plus important, c'est qu'une base de données est créée, qui contient plutôt les trajectoires en 3D d'une particule submergée dans différents cas (d'une seule particule et de deux particules), et que l'on pourra faire des comparaisons avec des simulations numériques afin de valider des codes numériques.

Finalement, les améliorations et les travaux futurs sont proposés afin d'approfondir nos connaissances sur ce sujet de recherche et de faire aller plus loin ce projet de recherche.

RÉFÉRENCES

[1] M. W. R. Clift, J.R. Grace, *Bubbles, Drops and Particles.* New York : ACADEMIC PRESS, 1978.

[2] B. LeClair *et al.*, "A theoretical and experimental study of the internal circulation in water drops falling at terminal velocity in air," *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 29, n°. 4, p. 728–740, 1972.

[3] Y. Rimon et S. Cheng, "Numerical solution of a uniform flow over a sphere at intermediate reynolds numbers," *The Physics of Fluids*, vol. 12, n°. 5, p. 949–959, 1969.

[4] A. A. Kendoush, A. H. Sulaymon et S. A. Mohammed, "Experimental evaluation of the virtual mass of two solid spheres accelerating in fluids," *Experimental thermal and fluid science*, vol. 31, n°. 7, p. 813–823, 2007.

[5] M. Simcik, M. Ruzicka et J. Drahoš, "Computing the added mass of dispersed particles," *Chemical engineering science*, vol. 63, n°. 18, p. 4580–4595, 2008.

[6] C.-R. Chu *et al.*, "Interaction of two free-falling spheres in water," *Physics of Fluids*, vol. 32, n°. 3, p. 033304, 2020.

[7] W. Kim et H. Choi, "Immersed boundary methods for fluid-structure interaction : A review," *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 75, p. 301–309, 2019.

[8] J. Lu *et al.*, "Moving from momentum transfer to heat transfer–a comparative study of an advanced graetz-nusselt problem using immersed boundary methods," *Chemical engineering science*, vol. 198, p. 317–333, 2019.

[9] D. Guinin et B. Joppin, *Analyse PC.* Editions Bréal, 2004.

[10] S. Leichtberg *et al.*, "A study of unsteady forces at low reynolds number : a strong interaction theory for the coaxial settling of three or more spheres," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 282, n°. 1311, p. 585–610, 1976.

[11] Y. Tsuji, Y. Morikawa et K. Terashima, "Fluid-dynamic interaction between two spheres," *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 8, n°. 1, p. 71–82, 1982.

[12] K. Lee, "Aerodynamic interaction between two spheres at reynolds numbers around 10^4," *The Aeronautical Quarterly*, vol. 30, n°. 1, p. 371–385, 1979.

[13] C. Zhu, S. Liang et L. S. Fan, "Particle wake effects on the drag force of an interactive particle," *International journal of multiphase flow*, vol. 20, n°. 1, p. 117–129, 1994.

[14] J. W. KOK, “Dynamics of a pair of gas bubbles moving through liquid. ii : Experiment,” *European journal of mechanics. B, Fluids*, vol. 12, n°. 4, p. 515–540, 1993.

[15] A. Biesheuvel et L. Van Wijngaarden, “The motion of pairs of gas bubbles in a perfect liquid,” *Journal of engineering Mathematics*, vol. 16, n°. 4, p. 349–365, 1982.

[16] C. K. Batchelor et G. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 2000.

[17] C. Beguin, E. Pelletier et S. Etienne, “Void fraction influence on added mass in a bubbly flow,” *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, vol. 56, p. 28–45, 2016.

[18] S. Zoghlami, “Modélisation numérique des écoulements diphasiques dispersés,” thèse de doctorat, Polytechnique Montréal affilée à l’Université de Montréal, Montréal, 2020. [En ligne]. Disponible : -

[19] A. A. Kendoush, “The virtual mass of a growing and collapsing bubble,” *AIChE journal*, vol. 52, n°. 6, p. 2013–2019, 2006.

[20] L. Schiller et A. Nauman, “-,” *Ver. Deut. Ing*, vol. 77, n°. -, p. 318–320, 1933.

[21] C. Lapple, “Particle dynamics,” *Ver. Deut. Ing*, 1951.

[22] B. Langmuir et K. Blodgett, “Kb, 1946. a mathematical investigation of water droplet trajectories,” *US Army Air Force Tech. Rep*, vol. 5418, 1948.

[23] M. Allen, “-,” *Philos. Mag.*, vol. 50, n°. -, p. 323–338, 519–534, 1900.

[24] M. Gilbert, L. Davies et D. Altman, “-,” *Jet Propul*, vol. 25, n°. -, p. 26–30, 1955.

[25] H. Kürten, J. Raasch et H. Rumpf, “Beschleunigung eines kugelförmigen feststoffteilchens im strömungsfeld konstanter geschwindigkeit,” *Chemie Ingenieur Technik*, vol. 38, n°. 9, p. 941–948, 1966.

[26] F. F. Abraham, “Functional dependence of drag coefficient of a sphere on reynolds number,” *The Physics of Fluids*, vol. 13, n°. 8, p. 2194–2195, 1970.

[27] R. Clift et W. Gauvin, “-,” *Proc. Chemeca’70*, vol. 1, n°. -, p. 14–28, 1970.

[28] H. Brauer et D. Mewes, “Strömungswiderstand sowie stationärer und instationärer stoff- und wärmeübergang an kugeln,” *Chemie Ingenieur Technik*, vol. 44, n°. 13, p. 865–868, 1972.

[29] F. Ihme, H. Schmidt-Traub et H. Brauer, “Theoretische untersuchung über die umströmung und den stoffübergang an kugeln,” *Chemie Ingenieur Technik*, vol. 44, n°. 5, p. 306–313, 1972.

[30] C. Oseen, “Stokes’ formula and a related theorem in hydrodynamics,” *Ark. Mat. Astron. Fys*, vol. 6, n°. 29, p. 20, 1910.

[31] Z. Tanaka et K. Iinoya, “New approximate equation of drag coefficient for spherical particles,” *Journal of Chemical Engineering of Japan*, vol. 3, n°. 2, p. 261–262, 1970.

[32] Z. Naumann et L. Schiller, “A drag coefficient correlation,” *Z. Ver. Deutsch. Ing*, vol. 77, n°. 318, p. e323, 1935.

[33] M. Ishii et N. Zuber, “Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows,” *AIChE journal*, vol. 25, n°. 5, p. 843–855, 1979.

[34] F. N. Peebles, “Studies on the motion of gas bubbles in liquid,” *Chem. Eng. Prog.*, vol. 49, n°. 2, p. 88–97, 1953.

[35] G. B. Wallis, “The terminal speed of single drops or bubbles in an infinite medium,” *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 1, n°. 4, p. 491–511, 1974.

[36] A. Tomiyama *et al.*, “Drag coefficients of single bubbles under normal and micro gravity conditions,” *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*, vol. 41, n°. 2, p. 472–479, 1998.

[37] ——, “Terminal velocity of single bubbles in surface tension force dominant regime,” *International journal of multiphase flow*, vol. 28, n°. 9, p. 1497–1519, 2002.

[38] A. Frumkin et V. Levich, “Effect of surface-active substances on movements at the boundaries of liquid phases,” *Zhur. Fiz. Khim*, vol. 21, p. 1183–1204, 1947.

[39] V. G. Levich, “Physicochemical hydrodynamics prentice-hall,” *Englewood Cliffs, NJ*, vol. 115, 1962.

[40] I. Meshcherky, “Works on the mechanics of bodies with variable mass [in russian], with an introduction by aa kosmodemyansky,” *Moscow, Leningrad : GITTL*, 1949.

[41] L. Van Wijngaarden et D. Jeffrey, “Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid,” *J. Fluid Mech*, vol. 77, n°. 1, p. 27–44, 1976.

[42] L. Milne-Thomson, “Theoretical hydrodynamics,(1968),” *New York, McMillan & Co*, 1955.

[43] D. Legendre, J. Magnaudet et G. Mougin, “Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 497, p. 133–166, 2003.

[44] L. Prahl *et al.*, “On the interaction between two fixed spherical particles,” *International journal of multiphase flow*, vol. 33, n°. 7, p. 707–725, 2007.

[45] Y. Zhou *et al.*, “Experimental measurement and theoretical analysis on bubble dynamic behaviors in a gas-liquid bubble column,” *Chemical Engineering Science*, vol. 211, p. 115295, 2020.

[46] A. Fortes, D. Joseph et T. Lundgren, “spherical particles,” *J. Fluid Mech*, vol. 177, p. 467–483, 1987.

ANNEXE A COEFFICIENTS DE MASSE AJOUTÉE ET DE TRAÎNÉE - SOLUTION ANALYTIQUE

Dans cette annexe, une expression analytique de la position (plus précisément la composante verticale z) en fonction du temps pour une particule sphérique est déduite à partir de l'équation BBO. Cette expression décrit la position de la particule avant et après la libération dans l'eau, qui reste valable/valide pendant une courte période.

En faisant l'ajustement de courbe en utilisant cette expression, on peut calculer le coefficient de traînée et celui de masse ajoutée à l'instant de la libération et ainsi pouvoir faire des comparaisons avec les données dans la revue de littérature.

On commence par l'équation BBO pour une particule sphérique qui descend dans un fluide (en enlevant le terme la force d'histoire et celui de la force de Meshchersky), écrite de la façon suivante :

$$\rho_P \left(\frac{1}{6}\pi d^3\right) \ddot{z} = (\rho_P - \rho_L) g \left(\frac{1}{6}\pi d^3\right) - \rho_L \left(\frac{1}{6}\pi d^3\right) C_m \ddot{z} - \frac{1}{2}\rho_L \left(\frac{1}{4}\pi d^2\right) C_D \dot{z}\dot{z} \tag{A.1}$$

Dans l'équation (A.1), les notations (tenseurs) des deux coefficients ont été simplifiées. En plus, sachant que la trajectoire pendant cette courte période est rectiligne, on peut directement définir un sens positif dans le but d'enlever la flèche (qui représente un vecteur) sur z, $\dot{z}$ et $\ddot{z}$:

- pour une particule qui descend dans un fluide, le sens positif de l'axe z est vers le bas ;
- pour une particule qui monte dans un fluide, le sens positif de l'axe z est vers le haut.

Ainsi, pour une particule sphérique qui monte, de la même façon, on a $\rho_P - \rho_L$ remplacé par $\rho_L - \rho_P$:

$$\rho_P \left(\frac{1}{6}\pi d^3\right) \ddot{z} = (\rho_L - \rho_P) g \left(\frac{1}{6}\pi d^3\right) - \rho_L \left(\frac{1}{6}\pi d^3\right) C_m \ddot{z} - \frac{1}{2}\rho_L \left(\frac{1}{4}\pi d^2\right) C_D \dot{z}\dot{z} \tag{A.2}$$

Partie 1

On fait l'hypothèse que :

$$C_D = \frac{A}{\mathrm{Re}} = \frac{A\mu_L}{\rho_L \dot{z} d} \tag{A.3}$$

Le terme la force de traînée devient

$$-\frac{1}{2}\rho_L\left(\frac{1}{4}\pi d^2\right)\left(\frac{A\mu_L}{\rho_L\dot{z}d}\right)\dot{z}\dot{z} = -\frac{1}{8}\pi dA\mu_L\dot{z} \tag{A.4}$$

L'équation (A.1) devient ainsi

$$\rho_P\left(\frac{1}{6}\pi d^3\right)\ddot{z} = (\rho_P-\rho_L)g\left(\frac{1}{6}\pi d^3\right) - \rho_L\left(\frac{1}{6}\pi d^3\right)C_m\ddot{z} - \frac{1}{8}\pi dA\mu_L\dot{z} \tag{A.5}$$

On continue à changer sa forme

$$\left[(\rho_P+\rho_L C_m)\left(\frac{1}{6}\pi d^3\right)\right]\ddot{z} + \left[\frac{1}{8}\pi dA\mu_L\right]\dot{z} = (\rho_P-\rho_L)g\left(\frac{1}{6}\pi d^3\right) \tag{A.6}$$

En enlevant π, d et ρ_L et puis en multipliant $6/d^2$

$$\left[\frac{\rho_P}{\rho_L}+C_m\right]\ddot{z} + \left[\frac{3}{4}\frac{A\mu_L}{\rho_L d^2}\right]\dot{z} + \left[-\left(\frac{\rho_P}{\rho_L}-1\right)g\right] = 0 \tag{A.7}$$

Pour une particule sphérique qui monte, $\rho_P/\rho_L - 1$ devient $1-\rho_P/\rho_L$:

$$\left[\frac{\rho_P}{\rho_L}+C_m\right]\ddot{z} + \left[\frac{3}{4}\frac{A\mu_L}{\rho_L d^2}\right]\dot{z} + \left[-\left(1-\frac{\rho_P}{\rho_L}\right)g\right] = 0 \tag{A.8}$$

Les équations (A.7) et (A.8) sont en fait <u>chacune</u> une équation différentielle à second ordre de z, qui prend une forme $a\ddot{z}+b\dot{z}+c=0$.

Dans les équations (A.7) et (A.8), il y a seulement deux paramètres dont les valeurs sont inconnues - C_m et A, qui correspond à C_D.

Partie 2

On cherche ainsi une solution analytique de l'équation (A.7), en prenant en compte les conditions suivantes :

— À l'instant de libération t_0, la continuité de la trajectoire/position, donc de z ;
— À l'instant de libération t_0, la continuité de la vitesse, donc de $\dot{z}$;

On obtient ainsi une solution analytique de z :

$$\begin{cases} -\frac{c}{b}(t-t_0) - \frac{c}{b}\frac{a}{b}\exp\left(-\frac{b}{a}(t-t_0)\right) + \frac{c}{b}\frac{a}{b} + z_0 & t \geq t_0 \\ z_0 & t \leq t_0 \end{cases} \tag{A.9}$$

avec a, b et c exprimées entre les crochets respectivement. Ici on a $a > 0$, $b > 0$ et $c < 0$.

Avec cette solution analytique, on a :

$$\dot{z} = \begin{cases} -\frac{c}{b} + \frac{c}{b}\exp\left(-\frac{b}{a}\left(t - t_0\right)\right) & t \geq t_0 \\ 0 & t \leq t_0 \end{cases} \tag{A.10}$$

et

$$\ddot{z} = \begin{cases} -\frac{c}{a}\exp\left(-\frac{b}{a}\left(t - t_0\right)\right) & t \geq t_0 \\ 0 & t \leq t_0 \end{cases} \tag{A.11}$$

On voit que les deux conditions de continuité sont satisfaites.

Partie 3

On introduit deux nouveaux paramètres C_1 ou C_2 dans le but de simplifier l'ajustement de courbe (*curve fitting* en anglais) :

$$C_1 = -\frac{c}{b} = \frac{\left(\frac{\rho_P}{\rho_L} - 1\right) g}{\frac{3A\mu_L}{4\rho_L d^2}} = f\left(A\right) \tag{A.12}$$

$$C_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{\frac{\rho_P}{\rho_L} + C_m}{\frac{3A\mu_L}{4\rho_L d^2}} = f\left(C_m + A\right) \tag{A.13}$$

Pour une particule qui monte, C_1 est :

$$C_1 = -\frac{c}{b} = \frac{\left(1 - \frac{\rho_P}{\rho_L}\right) g}{\frac{3A\mu_L}{4\rho_L d^2}} = f\left(A\right) \tag{A.14}$$

On a $C_1 > 0$ et $C_2 < 0$.

La solution analytique ((A.9)) devient :

$$\begin{cases} C_1\left(t - t_0\right) - C_1 C_2 \exp\left(\frac{1}{C_2}\left(t - t_0\right)\right) + C_1 C_2 + z_0 & t \geq t_0 \\ z_0 & t \leq t_0 \end{cases} \tag{A.15}$$

On a ainsi quatre paramètres - z_0, t_0, C_1 et C_2 - à chercher quand on fait l'ajustement de courbe.

Algorithme

Voici mon algorithme pour calculer C_m et A en faisant un ajustement de courbe, en prenant des points (t_i, z_i) - i de 1 à N :

— Fixer la valeur initiale de t_0 comme 0.0001 seconde (en fait, t_0 est une valeur proche de 0.0001 seconde et je cherche une valeur de t_0 dont la précision est 0.0001 seconde) ;
— Commencer la boucle ;
— Trouver les meilleures valeurs de z_0, C_1, et C_2 en utilisant *fminsearch* en Matlab, en définissant une fonction d'erreur ;
— Fin de la boucle ;
— La valeur de t_0 s'augmente - $t_0 = t_0 + 0.0001$;
— Répéter les étapes 2 à 5, jusqu'à $t_0 \geq t_N$;
— Comparer les erreurs et trouver la meilleure valeur de t_0 (ainsi celles de z_0, de C_1 et de C_2) ;
— Calculer C_m et A à partir de C_1 et C_2.

-Fin-