

Titre: Un élément convectif pour la solution de l'équation de Navier-Stokes

Title: Stokes

Auteurs: Dominique Pelletier, Michel Hameury, & Ricardo Camarero

Authors:

Date: 1982

Type: Rapport / Report

Référence: Pelletier, D., Hameury, M., & Camarero, R. (1982). Un élément convectif pour la solution de l'équation de Navier-Stokes. (Rapport technique n° EP-R-82-15).

Citation: <https://publications.polymtl.ca/10236/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/10236/>

PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved

Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EP-R-82-15

Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

05 MARS 1982

UN ELEMENT CONVECTIF POUR LA SOLUTION DE L'EQUATION DE NAVIER-STOKES

Dominique Pelletier
Michel Hameury
Ricardo Camarero

Département de mathématiques appliquées
Ecole Polytechnique

Février 1982

À CONSULTER
SUR PLACE

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE	page
I. LES EQUATIONS D UN ECOULEMENT INCOMPRESSIBLE VISQUEUX	1
Introduction	1
Equations primitives	1
Equations de la vorticite et de la Fonction courant	2
Forme conservative	3
Normalisation	3
Normalisation convective	3
Schema general de la solution du probleme de mecanique des fluides	4
Fonction courant	5
Vorticite	5
II. SOLUTION D UNE EQUATION DE POISSON PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	9
Introduction	9
Remarques sur la forme de K_E et F_E	12
III. SOLUTION DE L EQUATION DE LA VORTICITE PAR ELEMENTS FINIS	15
Equation de la vorticite	15
Representation discrète du terme transitoire	18
Traitement du terme convectif	20
IV. RESULTATS NUMERIQUES ET CONCLUSIONS	23
References	25
Appendice	page
A. ANNEXE A	27
Matrices S_I pour un element triangulaire lineaire	27

B.	ANNEXE B	29
	Matrices de l'équation de la vorticité	29
	Matrice transitoire	29
	Matrice de diffusion	29
	Matrice de convection	30
	Calcul du point d'intégration	31
C.	FIGURES	35

CHAPITRE I

LES EQUATIONS D'UN ECOULEMENT INCOMPRESSIBLE VISQUEUX

1.1 INTRODUCTION

On présente dans ce travail une méthode nouvelle pour résoudre les équations de Navier-Stokes aux grands nombre de Reynolds par éléments finis. La méthode présentée est une extension du schéma de HUGHES pour le traitement des termes convectifs.

Les difficultés rencontrées lors de la solution des équations de Navier-Stokes sont de deux ordres:

1. la non-linéarité des équations différentielles due à la présence des termes convectifs.
2. La dégénérescence des opérateurs différentiels aux grands nombres de Reynolds.

On résoud le premier problème en adoptant un schéma transitoire qui permet la linéarisation des termes convectifs.

Le deuxième point se caractérise par la très faible importance des termes diffusifs. On peut dire qu'aux grands nombres de Reynolds les équations tendent à devenir hyperboliques. La théorie des caractéristiques nous apprend qu'il faut alors avoir recours aux schémas dits de "différentiation amont" pour traiter les termes convectifs. C'est une pratique classique en différences finies mais relativement nouvelle en éléments finis.

1.2 EQUATIONS PRIMITIVES

L'écoulement bidimensionnel transitoire d'un fluide visqueux incompressible est régit par un système d'équations différentielles aux dérivées partielles non-linéaires: ce sont les équations de Navier-Stokes: en coordonnées cartésiennes on a

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{\nu} \nabla^2 \bar{u} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{v} \nabla^2 \bar{v} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (1c)$$

Bien qu'on puisse obtenir des solutions numériques à partir de ces équations, l'expérience a montré que, pour les écoulements bidimensionnels, la formulation en terme de vorticité était plus avantageuse car elle ne nécessite que la solution de deux variables, plutôt que de trois.

1.3 EQUATIONS DE LA VORTICITE ET DE LA FONCTION COURANT

Dérivant 1.a par rapport à y et 1.b par rapport à x , et en soustrayant, on élimine la pression. Identifiant la vorticité ζ :

$$\zeta = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \quad (2)$$

on obtient l'équation parabolique de transport de la vorticité :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{t}} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \zeta = \bar{v} \nabla^2 \zeta \quad (3)$$

On peut maintenant définir la fonction courant $\bar{\psi}$

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} \quad \bar{v} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} \quad (4)$$

L'équation (1.c) est alors toujours vérifiée; l'équation (2) se réécrit

$$\nabla^2 \bar{\psi} = -\zeta \quad (5)$$

L'équation (3) est parabolique et avec l'équation (5) constitue un problème aux valeurs initiales. Les termes convectifs sont non-linéaires car u et v sont des fonctions de ζ par l'intermédiaire de l'équation (5). Comme on le constatera plus loin, la présence des dérivées premières (termes convectifs) change complètement le comportement de l'équation. La représentation numérique de ces termes revêt beaucoup d'importance. Malheureusement les

meilleures méthodes numériques pour représenter les termes convectifs et diffusifs sont souvent différentes.

1.4 FORME CONSERVATIVE

Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité (1.3) s'écrit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (6)$$

On peut écrire cette expression à l'aide de l'identité vectorielle, de la façon suivante:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\vec{\zeta}) = \vec{v} \cdot (\vec{\nabla}\vec{\zeta}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{\zeta} \quad (7)$$

Le dernier terme étant nul à cause de (6), l'équation (3) peut alors s'écrire

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial \bar{t}} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\vec{\zeta}) = \bar{\gamma} \nabla^2 \vec{\zeta} \quad (8)$$

Cette forme de l'équation est dite conservative. L'expérience a montré que les formes conservatives conduisent généralement à des solutions plus précises. On a aussi montré leur intérêt dans les écoulements avec discontinuités (Roache 1976, Chap V).

1.5 NORMALISATION

1.5.1 Normalisation convective

On utilise comme références

- L_0 une longueur caractéristique
- U_0 une vitesse caractéristique

On peut alors définir les quantités adimensionnelles suivantes:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}/U_0 & v &= \bar{v}/U_0 & \zeta &= \bar{\zeta}/(U_0/L_0) \\ x &= \bar{x}/L_0 & y &= \bar{y}/L_0 & t &= \bar{t}/(U_0/L_0) \end{aligned}$$

Les équations (8) et (5) deviennent:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\zeta) = \frac{1}{R_e} \nabla^2 \zeta \quad (9)$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \quad (10)$$

où Re est le nombre de Reynolds. Ainsi pour une géométrie donnée, Re est le seul paramètre caractérisant l'écoulement.

Pour un nombre de Reynolds élevé ($Re \gg 1$), la convection est le phénomène prédominant. Cette équation est valable lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini; par contre lorsqu'il tend vers zéro c'est la diffusion qui contrôle l'écoulement; la référence temporelle L/U_0 doit alors être remplacée par L^2/ν qui représente une constante de temps de diffusion. L'équation de la vorticité prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + Re \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \zeta) = \nabla^2 \zeta \quad (11)$$

1.6 SCHEMA GENERAL DE LA SOLUTION DU PROBLEME DE MECANIQUE DES FLUIDES

Quelle que soit la méthode utilisée, différences finies ou éléments finis, le schéma de solution est le même:

1. Etablir un maillage.

2. Au temps $t = 0$, établir les conditions initiales de ζ , ψ , u et v en tout point du domaine. Elles correspondent, soit à la situation physique initiale d'un problème transitoire, soit à une estimation grossière de la solution permanente.

3. Résoudre l'équation de la vorticité, c'est-à-dire l'intégrer du temps t au temps $t+dt$.

4. Résoudre l'équation de Poisson pour obtenir de nouvelles valeurs de la fonction de courant ψ et des vitesses u et v .

5. Calculer de nouvelles valeurs frontières de la vorticité, elles dépendent généralement de la solution des étapes 3 et 4.

Le cycle de calcul (3,4,5) est répété jusqu'à ce que l'on atteigne soit un temps fixé à l'avance soit un critère de convergence caractérisant le régime permanent.

1.7 FONCTION COURANT

Pour le problème de la cavité carrée (fig. 1a-1d) avec paroi mobile les conditions sur la fonction courant sont :

$$u = 1 \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \quad (12)$$

$$u = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

$$v = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

Les quatre parois forment une ligne de courant, alors

$$\psi = \text{cte} \quad (15)$$

Cette valeur étant arbitraire nous la prendrons égale à zéro. On a donc finalement

$$y = 0 \quad \psi = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

$$y = 1 \quad \psi = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \quad (17)$$

$$x = 0 \quad \psi = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$x = 1 \quad \psi = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

1.8 VORTICITE

Les valeurs de ζ sont calculées en fonction ψ et de ses dérivées à la frontière.

Développons ψ en série de Taylor à l'ordre 2.

PAROI DC

$$\psi_{i,n-1} = \psi_{i,n} - \Delta y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (20)$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad v = 0 \quad (21)$$

utilisant la relation $\nu = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ on obtient $\zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$

Substituant dans (20) et introduisant les valeurs de et $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ et isolant $\zeta_{i,n}$:

$$\zeta_{i,n} = (\psi_{i,n-1} + \Delta y) 2/\Delta y^2 \quad (22)$$

PAROI AB

$$\psi_{i,2} \approx \psi_{i,1} + \Delta y \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i,1} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,1} \quad (23)$$

par le même raisonnement on obtient

$$\zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (24)$$

Substituant dans (23), et en introduisant les valeurs de ψ et $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ on obtient

$$\zeta_{i,1} = -2 \frac{\psi_{i,2}}{\Delta y^2} \quad (25)$$

PAROI AD

$$\psi_{2,j} \approx \psi_{1,j} + \Delta x \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{1,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{1,j} \quad (26)$$

d'autre part :

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

or $\partial u / \partial y = 0$ car $u = 0$ sur AD, à cause de la condition d'adhérence, mais on a également :

$$v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

donc

$$\zeta = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (27)$$

Substituant dans (26) et introduisant les valeurs de ψ et de sa dérivée on obtient

$$\zeta_{1,j} = -2 \psi_{2,j} / \Delta x^2 \quad (28)$$

PAROI BC

$$\psi_{m-1,j} \approx \psi_{m,j} - \Delta x \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{m,j} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{m,j} \quad (29)$$

Par le raisonnement précédent on a

$$\zeta = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (30)$$

On obtient finalement :

$$\zeta_{m,j} = - \frac{2}{\Delta x^2} \psi_{m-1,j} \quad (31)$$

On peut douter de l'emploi des conditions du premier ordre, telles que développées précédemment. Cependant avec la différentiation amont la précision globale du schéma diminue à un niveau difficile à évaluer. D'autre part Roache 1976 recommande l'emploi de forme du premier ordre en disant qu'elles sont généralement plus sûres et parfois plus précises que des formes d'ordre plus élevés. Les calculs théoriques de P.-J. Taylor pour une forme du deuxième ordre indiquent des possibilités d'instabilité pour des nombres de Reynolds élevés. Dans notre cas, il serait inconsistant et même probablement dangereux d'employer une forme d'ordre

2 avec un schéma numérique dont la précision se situe entre
1^{er} ordre 1 et 2.

CHAPITRE II

SOLUTION D'UNE EQUATION DE POISSON PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

2.1 INTRODUCTION

Soit à résoudre l'équation différentielle suivante

$$K_{xx} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \zeta = 0 \quad (32)$$

soumise à des conditions de frontière de Dirichlet. Le calcul des variations donne la fonctionnelle correspondante sous la forme suivante:

$$I(\psi) = \int_V \frac{1}{2} \{ K_{xx} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + K_{yy} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - 2\psi\zeta \} dv \quad (33)$$

V étant le domaine où l'on cherche la solution; cette fonctionnelle étant valable sur tout le domaine elle l'est en particulier sur tout élément "e" de V . La minimisation de la fonctionnelle I par rapport aux degrés de liberté donne la solution de l'équation différentielle qu'elle représente.

Soit $I(\psi^e)$ la fonctionnelle pour un élément

$$I(\psi) = \sum_e I(\psi^e) \quad (34)$$

On peut écrire la variation de I sur le domaine

$$\delta I(\psi) = 0 \quad (35)$$

sous la forme suivante

$$\sum_e \{ \delta I(\psi^e) = 0 \} \quad (36)$$

Comme la solution sur le domaine est la somme des solutions sur les éléments posons

$$\{g^T\} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} \quad D = \begin{Bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

On peut alors écrire

$$I(\psi^e) = \int_V \frac{1}{2} \{g_e^T\} D \{g_e\} dv - \int_V \zeta_e \psi_e dv \quad (38)$$

On choisit une approximation de ψ de forme polynomiale

$$\{\psi^e\} = [M] \{a_i\} \quad (39)$$

où

1. M est un polynôme de degré n
2. Les a_i sont des coefficients à déterminer.

En écrivant cette équation à chaque noeud, on obtient le système d'équations :

$$\{\psi_i\} = [A] \{a_i\} \quad (40)$$

A est une matrice dont chaque ligne est obtenue en évaluant M au noeuds i . En inversant, on obtient

$$\{a_i\} = [A^{-1}] \{\psi_i\} \quad (41)$$

substituant dans (39)

$$\{\psi^e\} = [M] [A^{-1}] \{\psi_i\} \quad (42)$$

on peut alors réécrire

$$\{g\} = \begin{bmatrix} M, x \\ M, y \end{bmatrix} [A^{-1}] \{\psi_i\} \quad (43)$$

En substituant dans (38) on obtient

$$I^e = \int_V \frac{1}{2} [\psi_i^T] [A_T^{-1}] [M_x^T M_y^T] [D] \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} [A^{-1}] \{\psi_i\} dv - \int_V [M] [A^{-1}] [\psi_i] \zeta dv \quad (44)$$

La formulation du problème d'éléments finis se simplifie si, au lieu d'employer le système de coordonnées global cartésien (x, y), on emploie un système local (ξ, η) propre à chaque élément. Ce système normalise les dimensions de l'élément. La figure 2 présente un tel système de coordonnées.

On peut relier, par le Jacobien, les dérivées par rapport à x et y à celles en ξ, η .

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \begin{bmatrix} J^{-1} \\ T \end{bmatrix} \quad (45)$$

d'où

$$I_e = \int_V \frac{1}{2} [\psi_i^T] [A_T^{-1}] \{M_{\xi}^T, M_{\eta}^T\} [J_T^{-1}] [D] [J^{-1}] \begin{bmatrix} M_{\xi} \\ M_{\eta} \end{bmatrix} [A^{-1}] \{\psi_i\} dv - \int_V [M] [A^{-1}] [\psi_i] \zeta dv \quad (46)$$

Il ne reste qu'à dériver par rapport au vecteur des degrés de liberté $\{\psi_i\}$ pour obtenir le système d'équations donnant la solution.

Le calcul matriciel (Siegerlind) donne les résultats suivants pour la dérivation d'une matrice par rapport à un vecteur:

- Pour les formes linéaires

$$\phi_e = [N] \{\phi_i\} \quad (47)$$

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial \{\phi_i\}} = [N] \quad (48)$$

- Pour les formes quadratiques:

$$\phi_e = \{\phi_i^T\} [N] \{\phi_i\} \quad (49)$$

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial \{\phi_i\}} = 2[N] \{\phi_i\} \quad (50)$$

En appliquant ces résultats à l'équation (46), on obtient le système d'équations algébriques suivant:

$$\int_{\xi} \int_{\eta} [A_T^{-1}] [M_T^T, M_T^T] [J_T^{-1}] [D] [J^{-1}] \begin{bmatrix} M, \xi \\ M, \eta \end{bmatrix} [A^{-1}] \|J\| d\xi d\eta \{\psi_i\} = \int_{\xi} \int_{\eta} [A_T^{-1}] [M_T] \zeta \|J\| d\xi d\eta \quad (51)$$

où $\|J\|$, la valeur absolue du déterminant de $[J]$, permet le passage du système de coordonnées en (x, y) à celui en (ξ, η) .

Sous forme symbolique:

$$[K_e] \{\psi_i\} = \{F_e\} \quad (52)$$

où

$$[K_e] = \int_{\xi} \int_{\eta} [A_T^{-1}] [M_T^T, M_T^T] [J_T^{-1}] [D] [J^{-1}] \begin{bmatrix} M, \xi \\ M, \eta \end{bmatrix} [A^{-1}] \|J\| d\xi d\eta \quad (53)$$

$$\{F_e\} = \int_{\xi} \int_{\eta} [A_T^{-1}] [M_T] \zeta \|J\| d\xi d\eta \quad (54)$$

Lorsque l'on ajoute la contribution de tous les éléments, on obtient le système d'équations global dont la solution est l'approximation à la solution de l'équation différentielle:

$$[K] \{\psi\} = \{F\} \quad (55)$$

2.2 REMARQUES SUR LA FORME DE K_E ET F_E

Dans le système de coordonnées locales, on peut facilement montrer (Mc Intyre 1977) que la matrice A est un tableau de nombres indépendants des coordonnées réelles des noeuds de l'élément et des variables ξ et η . On peut donc écrire:

$$[K_e] = [A_T^{-1}] \int_{\xi} \int_{\eta} [M_T^T, M_T^T] [J_T^{-1}] [D] [J^{-1}] \begin{bmatrix} M, \xi \\ M, \eta \end{bmatrix} d\xi d\eta \|J\| [A^{-1}] \quad (56)$$

Les matrices $[A]$, $[M, \xi]$, $[M, \eta]$ dépendent uniquement du polynôme d'interpolation, elles sont donc indépendantes de la géométrie et des propriétés physiques du problème. Ce sont les matrices $[J]$ et $[D]$ qui contiennent cette information. Posons:

$$[P] = [J_T^{-1}] [D] [J^{-1}] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Substituant dans (56) et effectuant les produits matriciels, on peut écrire

$$\begin{aligned} [K_e] = [A_T^{-1}] \int_{\xi} \int_{\eta} & \{ P_{11} [M^T, \xi] [M, \eta] + P_{21} [M^T, \eta] [M, \xi] + P_{12} [M^T, \xi] [M, \eta] \\ & + P_{22} [M^T, \xi] [M, \eta] \, d\xi \, d\eta \} \|J\| [A^{-1}] \end{aligned} \quad (58)$$

Si l'on pose

$$S_1 = [A_T^{-1}] \int_{\xi} \int_{\eta} [M^T, \xi] [M, \eta] \, d\xi \, d\eta [A^{-1}] \quad (59)$$

$$S_2 = [A_T^{-1}] \int_{\xi} \int_{\eta} [M^T, \eta] [M, \xi] \, d\xi \, d\eta [A^{-1}] \quad (60)$$

$$S_3 = [A_T^{-1}] \int_{\xi} \int_{\eta} [M^T, \xi] [M, \eta] \, d\xi \, d\eta [A^{-1}] \quad (61)$$

on peut alors exprimer la matrice d'influence d'un élément:

$$[K_e] = \|J\| \{ P_{11} S_1 + P_{12} S_2 + P_{21} S_2^T + P_{22} S_3 \} \quad (62)$$

Les tableaux Si des équations (59), (60) et (61) sont constitués de coefficients numériques constants et indépendants des propriétés physiques et géométriques du problème. Il est donc possible de les calculer une seule fois pour tous les problèmes et pour un type d'éléments donné.

Quant au membre de droite $\{F_e\}$, il s'écrit

$$\{F_e\} = \int_{\xi} \int_{\eta} [A_T^{-1}] [M_T] \zeta \, d\xi \, d\eta \|J\| \quad (63)$$

Si l'on approche ζ par un polynôme de même degré que M on a

$$\zeta = [M][A^{-1}][Z_i] \quad (64)$$

d'où

$$\{F_e\} = [A_T^{-1}] \int_{\xi} \int_{\eta} [M_T][M] d\xi d\eta [A^{-1}] \|J\| \{Z_i\} \quad (65)$$

soit

$$\{F_e\} = \|J\| S_4 \{Z_i\} \quad (66)$$

où

$$S_4 = [A_T^{-1}] \int_{\xi} \int_{\eta} [M_T][M] d\xi d\eta [A^{-1}] \quad (67)$$

Ici aussi S_4 est un tableau numérique indépendant de la géométrie et des propriétés physiques du problème.

On trouvera en appendice, les matrices Si pour un élément triangulaire linéaire.

CHAPITRE III

SOLUTION DE L'EQUATION DE LA VORTICITE PAR ELEMENTS FINIS

3.1 EQUATION DE LA VORTICITE

L'équation de transport de la vorticité s'écrit sous forme conservatrice

$$\zeta_t + \nabla^T u \zeta = \nabla^T R_e^{-1} \nabla \zeta \quad (68)$$

avec les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \zeta(\vec{x}, 0) &= \zeta_0(\vec{x}) \\ \zeta(\vec{x}_S, t) &= f(\vec{x}_S, t) \quad \text{sur } S_1 \\ \nabla \zeta(\vec{x}_{S_2}, t) &= g_S(\vec{x}_{S_2}, t) \quad \text{sur } S_2 \end{aligned} \quad (69)$$

On suppose une approximation de la vorticité de la forme

$$\zeta^*(\vec{x}, t) = \sum C_i(t) \zeta_i(\vec{x}) \quad (70)$$

On définit un résidu R_V que l'on annule sur le domaine

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_V w_i R \, d\vec{x} = 0 \right\} \quad (71)$$

de même qu'un résidu R_{V^*} mesurant l'écart entre $\nabla \zeta^*$ et g_S .

Lorsque pondéré par le même ensemble de fonctions w_i et une fonction arbitraire ϕ , et combinant les deux expressions résultantes, on obtient:

$$\sum \left\{ - \int_V w_i R \, d\vec{x} + \oint_S \phi \, w_i R_V \, d\vec{s} = 0 \right\} \quad (72)$$

utilisant les expressions de R et R_V on obtient:

$$- \int_V w_i R \, d\vec{x} = - \int_V w_i \{ \nabla^T R_e^{-1} \nabla \zeta^* - \nabla^T u \zeta^* - \zeta^* t \} \, d\vec{x} \quad (73)$$

L'identité vectorielle,

$$a \nabla^T \vec{B} = \nabla^T (a \vec{B}) - (\vec{\nabla} a)^T \vec{B}$$

permet d'écrire que

$$W_i \nabla^T (R_e^{-1} \nabla \zeta^*) = \nabla^T (W_i R_e^{-1} \nabla \zeta^*) - (\nabla W_i)^T (R_e^{-1} \nabla \zeta^*)$$

Substituant dans (73) et en appliquant le théorème de la divergence:

$$\begin{aligned} - \int_V W_i R d\vec{x} &= \int_V [(\nabla W_i)^T R_e^{-1} \nabla \zeta^* + W_i \nabla^T u \zeta^* + W_i \zeta^*, t] d\vec{x} \\ &- \oint_S (W_i R_e^{-1} \nabla \zeta^*)^T \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (74)$$

Le résidu total (72) s'écrit

$$\begin{aligned} \Sigma \{ \int (\nabla W_i)^T R_e^{-1} \nabla \zeta^* + W_i \nabla^T u \zeta^* + W_i \zeta^*, t d\vec{x} \\ - \oint_S (W_i R_e^{-1} \nabla \zeta^*)^T \cdot \vec{n} dS + \oint_S (W_i \nabla \zeta^*)^T \vec{n} dS \} \end{aligned}$$

Puisque que κ est arbitraire, posons $\kappa = Re^t$ de sorte que les deux derniers termes s'annulent

$$\Sigma \{ \int [(\nabla W_i)^T R_e^{-1} \nabla \zeta^* + W_i \nabla^T u \zeta^* + W_i \zeta^*, t] d\vec{x} - \oint_S R_e^{-1} W_i g_S d\vec{s} \} = 0 \quad (75)$$

Pour un élément on suppose une approximation polynomiale de ζ

$$\zeta^* = N_i \zeta_i = [M][A^{-1}] \{\zeta_i\}$$

où

1. N_i sont les fonctions d'interpolation; dans le cas présent ce sont les polynômes de Lagrange.
2. ζ_i sont les valeurs de la fonction aux noeuds. Les indices répétés représentent la sommation.
3. M est le polynôme d'interpolation sur l'élément.
4. A est la matrice d'interpolation géométrique. Elle est constante.

On constate que les deux formes sont équivalentes et que

$$[N_i] = [M][A^{-1}]$$

Substituons dans la dernière équation terme par terme et posons les définitions suivantes: (Rappelons que l'approximation de Galerkin suppose que $W_i = N_i$ soit $\{W_i\} = [A_T^{-1}][M^T]$:

1. Terme diffusif

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla W_i)^T R_e^{-1} \nabla \zeta^* dx &= \int_V [A_T^{-1}]^T [\nabla M]^T [\nabla M] [A^{-1}] dx R_e^{-1} \{\zeta_{ie}\} \\ &= [B_2^e] \{\zeta_{ie}\} \end{aligned} \quad (76)$$

B_2^e est la matrice de diffusion de l'élément

2. Terme transitoire

$$\begin{aligned} \int_V W_i \zeta^*, t dx &= \int_V [A_T^{-1}] [M_T] [M] [A^{-1}] dx \{\zeta_{ie}^*\} \\ &= [B_1^e] \{\zeta_{ie}^*\} \end{aligned} \quad (77)$$

ζ_{ie}^* représente la dérivée par rapport au temps. B_1^e est la matrice transitoire de l'élément.

3. terme de Neumann

$$\oint_S R_e^{-1} W_i g_s ds = R_e^{-1} \oint_S [A_T^{-1}] [M_T] g_s ds = \{G_e\} \quad (78)$$

$\{G_e\}$ est le vecteur représentant les conditions de frontière de Neumann de l'élément.

4. terme convectif

$$\int_V W_i \nabla^T u \zeta^* d\bar{x} = \int_V [A_T^{-1}] [M_T] \nabla^T u [M] [A^{-1}] d\bar{x} \{\zeta_i\} \quad (79)$$

$B3_e$ est la matrice de convection de l'élément.

Le système d'équations différentielles ordinaires pour un élément est :

$$[B1_e]\{\zeta'_i\} + [[B2_e] + [B3_e]]\{\zeta_i\} = \{G_e\} \quad (80)$$

Lorsque les contributions de tous les éléments du domaine sont assemblées, nous obtenons le système décrivant l'ensemble du domaine d'intérêt :

$$[B1]\{\zeta'\} + [[B2] + [B3]]\{\zeta\} = \{G\} \quad (81)$$

L'annexe C traite en détail des manipulations et de l'implantation des matrices sur ordinateur. Le terme convectif requiert un traitement spécial que nous présentons dans une section suivante.

3.2 REPRESENTATION DISCRETE DU TERME TRANSITOIRE

La discrétisation de la dérivée de la vorticité par rapport au temps est possible avec trois techniques : les éléments finis dans le temps, les différences finies dans le temps, ou les méthodes de Runge-Kutta .

Les éléments finis dans le temps possèdent les mêmes caractéristiques de stabilité que les différences moyennes conventionnelles. Cependant la précision est inférieure et elles présentent un effet d'amortissement. Pour des équations linéaires, les éléments temporels peuvent sauver jusqu'à 50 pourcent de temps de calcul par étape de temps s'il n'est pas nécessaire de recalculer le membre de droite (TAYLOR et HODD).

Les schémas aux différences avant peuvent être très pratiques car on peut alors éliminer certains termes non-linéaires, mais sont si instables qu'ils sont généralement inutilisables. Les différences arrières bien que plus stables sont moins précises (sauf pour les premières étapes dans le temps où elles peuvent s'avérer supérieures. La méthode aux différences moyennes semble être un bon compromis. Sa précision et son efficacité sont équivalentes à celles d'une méthode de Runge-Kutta.

Prenons le cas d'un schéma trapézoïdal appliquée au problème de diffusion uni-dimensionnel:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (82)$$

Avec l'approximation suivante

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{t+\Delta t/2} = \frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_t + \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{t+\Delta t/2} \right\} \quad (83)$$

l'équation devient:

$$[B] \left\{ \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\Delta t} \right\} + \frac{1}{2} [B_2 + B_3] \{ \zeta^{n+1} \} + \frac{1}{2} [B_2 + B_3] \{ \zeta^n \} = \{ G \} \quad (84)$$

et

$$\left(\frac{1}{\Delta t} B_1 + \frac{1}{2} [B_2 + B_3] \right) \{ \zeta^{n+1} \} = \left[\frac{1}{\Delta t} B_1 - \frac{1}{2} [B_2 + B_3] \right] \{ \zeta^n \} + \{ G \} \quad (85)$$

Passons au schéma aux différences arrières:

$$[B_1] \left\{ \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\Delta t} \right\} + [B_2 + B_3] \{ \zeta^{n+1} \} = \{ G \} \quad (86)$$

soit:

$$\left[\frac{1}{\Delta t} B_1 + B_2 + B_3 \right] \{ \zeta^{n+1} \} = \frac{B_1}{\Delta t} \{ \zeta^n \} + \{ G \} \quad (87)$$

Le membre de droite est connu à cause des conditions initiales.

3.3 TRAITEMENT DU TERME CONVECTIF

Une formulation symétrique avec la méthode de Galerkin, cause des oscillations parasites dans les résultats. En différences finies on contourne ces difficultés avec la différenciation amont. Raithby a), Raithby b), Runchal, Fromm traitent de la différenciation amont dans le cadre des méthodes aux différences finies. Hughes, s'inspirant de Roache, Zienkiewicz et al., Christie et al. et de Heinrich et al., simplifie et adapte le concept à la méthode des éléments finis.

On propose dans ce rapport une formulation de la matrice de convection qui conduit à des solutions stables. Un élément de ce type sera dit élément fini amont. D'une façon générale, la méthode consiste à tenir compte de la dépendance de l'état d'un point de l'écoulement sur les caractéristiques de l'écoulement dans la région en amont du point considéré. On parvient à une solution stable en effectuant une intégration spéciale du terme de convection.

La matrice de convection s'écrit:

$$[B_3] = \int_A [M_T^{-1}] [M_T] \nabla^T [\{u\}_V] [M] [A^{-1}] dx \quad (83)$$

Nous verrons en annexe que la matrice A est constante. La matrice B3 est évaluée par une intégrale de GAUSS à un point

$$[B_3] = [A_T^{-1}] [M_T(\tau)] \nabla^T \begin{bmatrix} \{u(\tau)\} \\ \{v(\tau)\} \end{bmatrix} M(\tau) [A^{-1}] J(0) V \quad (84)$$

où :

1. τ est un point le long de la droite portant la vitesse. Sa position contrôle de façon continue le niveau de différenciation amont.
2. $J(0)$ est le déterminant du Jacobien de la transformation de coordonnées, évalué à l'origine.
3. V est le volume de l'élément dans le système de coordonnées locales de l'élément.

Nous choisissons la position du point τ de la façon suivante:

1- Déterminer la longueur caractéristique de l'élément $R_0 = h$ suivant l'axe de la vitesse.

2- Calculer : $\alpha = |\vec{u}| \cdot h R_e$ nombre de Reynolds caractérisant l'élément.

3- Evaluer la position relative de τ par rapport à l'origine.

$$\tilde{\tau} = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha}$$

ou

$$\tau = \frac{\alpha}{3}$$

si

$$\alpha \leq 3$$

4- Calculer les coordonnées de τ dans le repère local

$$\xi_{\tau} = \xi_0 + \tilde{\tau}(\xi_R - \xi_0)$$

$$\eta_{\tau} = \eta_0 + \tilde{\tau}(\eta_R - \eta_0)$$

les indices τ , R et 0 indiquent les points τ , R et 0 .

On montre facilement que pour un élément isoparamétrique linéaire, on retombe sur le schéma de Hughes, que l'on sait équivalent à celui de Heinrich dont l'efficacité et la précision sont bien établies (Heinrich et al. 1977).

La méthode proposée a les avantages suivants:

1. Elle est indépendante de la géométrie de l'élément. Zienkiewicz et al., Christie et al., Heinrich et al. s'en tiennent à des quadrillatères ou parallélépipèdes isoparamétriques.
2. L'ordre de la formule d'intégration n'est pas plus élevé que pour une formulation de Galerkin classique. Zienkiewicz et al., Christie et al. emploient des fonctions poids W_i de degré plus élevé que les fonctions d'interpolation N_i ; il faut donc des schémas d'intégration gaussienne plus précis.

- 3. Elle s'adapte facilement à des programmes existants utilisant une formulation de Galerkin.
- 4. Contrairement aux différences finies, on contrôle le degré de différenciation amont. On maximise donc la précision locale du schéma.

CHAPITRE IV

RESULTATS NUMERIQUES ET CONCLUSIONS

Les Figures 3 à 14 illustrent les résultats obtenus pour des nombres de Reynolds variant de 0 à 5000. Dans tous les cas on retrouvera la solution transitoire du point central et les lignes de courant et d'iso-vorticité à l'état stationnaire.

La solution par éléments finis concorde très bien avec les caractéristiques physiques d'un écoulement à grands nombres de Reynolds; ainsi pour une valeur de 5000 on retrouve sur la carte des lignes de courant un noyau circulaire presque parfait caractéristique d'un écoulement irrotationnel (non-visqueux). Cette irrotationnalité doit se traduire par une zone de vorticité constante que l'on retrouve effectivement sur la carte de vorticité.

On peut atteindre l'état stationnaire en une vingtaine d'étapes alors que la solution aux différences en requiert une centaine. Il faut noter que le prix d'une solution par l'une ou l'autre des méthodes est à peu près le même, une étape par éléments finis coutant environ cinq fois plus qu'une étape par différences.

Ce comportement peut être attribué aux caractéristiques suivantes:

1. La formulation intégrale de la discréétisation de l'équation de la vorticité assure une conservation exacte des flux de vorticité. Cette propriété est inhérente à la formulation de Galerkin utilisée.
2. La différentiation amont est correctement alignée avec la direction de l'écoulement.

Bien que sans signification physique, la possibilité de calculer une solution laminaire à des nombres de Reynolds aussi élevés permet de penser à inclure un modèle de turbulence pour résoudre des problèmes concrets couramment rencontré dans la pratique industrielle. Une formulation en variables primitives (vitesses et pression) permettrait de solutionner une plus grande variété de problèmes caractérisés par des conditions aux frontières difficiles à incorporer à la formulation présente. (Surface libre,

pression ou cisaillements connus, problèmes tridimensionnels.)

Le tableau suivant tente de résumer les principales caractéristiques des deux méthodes étudiées.

La méthode des éléments finis semble donc plus attrayante. Il ne faut cependant pas perdre de vue que son efficacité dépend beaucoup de la qualité de la programmation et que la formulation d'une solution est plus complexe et délicate qu'en différences finies.

Ces dernières, conceptuellement plus simples, semblent jouir d'un regain de popularité grâce à l'avènement des maillages adaptés et de la méthode multigrid (YOUNIS et CARMERERO 1979) qui lèvent dans une certaine mesure les restrictions dues aux géométries complexes et aux temps de calculs très élevés.

Chacune de ces deux méthodes devrait trouver sa place dans la panoplie d'outils dont dispose l'ingénieur. La simplicité de la méthode des différences finies en fait un outil accessible à tous. Par contre la généralité et la flexibilité de la méthode des éléments finis la prédispose à la solution de problèmes très complexes et de grande envergure.

REFERENCES

- CHRIESTIE, I., GRIFFITHS, D.F., MITCHELL, A.R., ZIENKIEWICZ, O.C.,
 Finite element methods for second order differential equations with significant first derivative. Int. Journ. Num. Meth. Eng. 10, 1389 - 1396, 1976.
- HEINRICH, J.C., HUYAKORN, P.S., ZIENKIEWICZ, O.C., MITCHELL, A.R.,
 An upwind finite element scheme for two dimensionnal convective transport equation. Int. Journ. Num. Meth. Eng. 11, 131 - 143, 1977.
- HUGHES, T.J.R.,
 A simple scheme for developping upwind finite elements. Int. Journ. Num. Met. Eng. , Vol. 12, p. 1359 - 1365.
- KIKUCHI, F., YANDO
 A finite element method for initial value problems. Proc. 3rd Conference on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright Patterson Air Force Base OHIO, 1971.
- MC INTYRE ,G.
 Notes de cours d'éléments Finis, Ecole Polytechnique de Montréal 1977.
- RAITHBY, G.D.,
 A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow. Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 9, p. 75 - 103.
- RAITHBY, G.D.,
 Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 9, p. 153 - 164.
- ROACHE, P.J.,
 Computational Fluid dynamics. Hermosa publishers Albuquerque, New Mexico, 1976.
- RUNCHAL, A.K.,
 Convergence and accuracy of three finite difference schemes for a two-dimensionnal conduction and convection problem. Int. Journ. Num. Meth. In Eng., Vol. 4, p. 541 - 550.
- SEGERLIND,
 Applied Finite element analysis, John Wiley.

TAYLOR, C., HOOD, P.,

A numerical solution of the Navier-Stokes equations
using the finite element technique. Computers and
Fluids, Vol. 1, pp. 73 - 100.

CAMARERO, R., YOUNIS, M.

Generation of body-fitted coordinate systems for
cascades using Multigrid. A.I.A.A. Paper 79-7049 IV
ISABE, April 1979.

ZIENKIEWICZ, O.C., GALLAGHER, R.H., HOOD, P.,

Newtonian and Non Newtonian viscous incompressible flow.
Temperature induced flow, 2nd Conference Mathematics of
Finite element and applications, Brunel University.

Appendice A

ANNEXE A

A.1 MATRICES SI POUR UN ELEMENT TRIANGULAIRE LINEAIRE

Soit un élément triangulaire linéaire quelconque que l'on transforme en un triangle rectangle isocèle dans le plan (ξ, η) . (Voir Fig. 16.)

Au chapitre traitant de l'équation de Poisson de la fonction courant, il a été montré que

$$S_1 = [A_T^{-1}] \int_{\xi} \int_{\eta} [M^T, \xi] [M, \xi] d\xi d\eta [A^{-1}]$$

$$S_2 = [A_T^{-1}] \int_{\xi} \int_{\eta} [M^T, \xi] [M, \eta] d\xi d\eta [A^{-1}]$$

$$S_3 = [A_T^{-1}] \int_{\xi} \int_{\eta} [M^T, \eta] [M, \eta] d\xi d\eta [A^{-1}]$$

$$S_4 = [A_T^{-1}] \int_{\xi} \int_{\eta} [M^T] [M] d\xi d\eta [A^{-1}]$$

Dans le cas présent M est le polynôme linéaire suivant:

$$[1, \xi, \eta]$$

alors

$$M, \xi = [0, 1, 0]$$

$$M, \eta = [0, 0, 1]$$

Les lignes de la matrice A sont égales au polynôme évalué à chaque noeud de l'élément suivant l'ordre numérique indiqué à la figure 16.

Nous obtenons

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en inversant:

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En substituant des valeurs dans les intégrales, et effectuant les calculs, nous obtenons:

$$S_1 = \begin{bmatrix} .5 & -.5 & 0 \\ -.5 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} .5 & 0 & -.5 \\ -.5 & 0 & .5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} .5 & 0 & -.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -.5 & 0 & .5 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} .083333 & .041667 & .041667 \\ .041667 & .08333 & .041667 \\ .041667 & .041667 & .08333 \end{bmatrix}$$

Appendice B

ANNEXE B

B.1 MATRICES DE L'EQUATION DE LA VORTICITE

B.1.1 Matrice transitoire

Nous avons déjà montré que

$$[B1] = \int_V W_i \zeta^* t dV = [A_T^{-1}] \int_V [M_T][M] dV [A^{-1}]$$

soit

$$[B1] = S_4 \|J\|$$

B.1.2 Matrice de diffusion

Cette manipulation est identique à celle présentée pour l'équation de Poisson de la fonction courant sauf pour la matrice D qui dans le cas présent s'écrit:

$$D = \begin{bmatrix} R_e^{-1} & 0 \\ 0 & R_e^{-1} \end{bmatrix}$$

on a toujours

$$[P] = [J_T^{-1}][D][J_T^{-1}]$$

Et nous retrouvons l'expression de B2

$$[B2] = P_{11} S_1 + P_{12} S_2 + P_{21} S_2^T - P_{22} S_3$$

B.1.3 Matrice de convection

C'est la matrice de convection B3 qui différencie la formulation présente des formulations précédentes.

Nous avons

$$[B3] = \int_V [A_T^{-1}] [M_T] \nabla^T \begin{bmatrix} (u) \\ (v) \end{bmatrix} [M] [A^{-1}] dV$$

en utilisant le système de coordonnées locales précédent, nous pouvons écrire

$$B3 = \int_V [A_T^{-1}] [M_T] \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \right\} [J_T^{-1}] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} [M] [A^{-1}] \right] dV$$

En supposant:

- un cas bidimensionnel., - un élément triangulaire linéaire (alors $[J]=\text{cte.}$), - les vitesses u et v constantes dans un élément,

Nous pouvons écrire:

$$B3 = [A_T^{-1}] \int_V [M_T] [(uJ_{11}^{-1} + vJ_{21}^{-1})[M, \xi] + (uJ_{12}^{-1} + vJ_{22}^{-1})[M, \eta]] dV [A^{-1}]$$

Choisissons le point τ pour effectuer une intégrale de GAUSS à un point (Nous reviendrons sur le calcul de τ plus loin).

$$\begin{aligned} B3 &= [A_T^{-1}] [(uJ_{11}^{-1} + vJ_{21}^{-1})[M^T(\tau)][M, \xi(\tau)] \\ &\quad + (uJ_{12}^{-1} + vJ_{22}^{-1})[M^T(\tau)][M, \eta(\tau)]][A^{-1}] \|J\| V^e \end{aligned}$$

$\|J\|$ est le déterminant du jacobien de la transformation de coordonnées.

V^e est le volume de l'élément dans le système de coordonnées (ξ, η) .

$V^e = 0.5$ pour un triangle

$V^e = 1$ pour un quadrilatère.

Pour

$$[M] = [1, \xi, \eta], [M, \tau] = [0, 1, 0], [M, \eta] = [0, 0, 1]$$

(l^e indice τ indique que les quantités sont évaluées en τ)

$$[B3] = [A^{-1}] \begin{bmatrix} 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{bmatrix} [A^{-1}] \|J\| V^e$$

Rappelons que

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Substituant et effectuant les calculs, nous obtenons:

$$[B_3] = \begin{bmatrix} -a_1 + a_2 + a_3 - c_1 + c_2 + c_3 & a_1 - a_2 - a_3 & c_1 - c_2 - c_3 \\ -a_2 - c_2 & a_2 & c_2 \\ -a_3 - c_3 & a_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

B.1.4 Calcul du point d'intégration

Calcul du point R.

On peut facilement calculer l'équation de la droite portant la vitesse: on connaît son vecteur directeur (la vitesse) et un point (l'origine de l'élément). On peut facilement établir les équations des cotés de l'élément.

La solution des systèmes d'équations (équation de la droite de vitesse, équation d'un côté) nous fournit un point d'intersection qui n'est pas forcément dans l'élément et qui n'est pas forcément le point amont recherché. Cependant dans le cas d'un triangle, on peut déterminer aisément le côté d'intersection dans le système de coordonnées (τ, η); en effet la géométrie étant constante quel que soit l'élément, l'angle de la vitesse nous permet de déterminer directement le côté d'intersection amont.

La tangente de l'angle de la droite est donné par le rapport V/U dans le système de coordonnée (x, y) U et V étant les composantes de la vitesse suivant x et y . On a de plus:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$V = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Montrons que dans le système (τ, η) la tangente de l'angle local est \bar{V}/\bar{U}

$$\bar{U} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$$

ou

$$\bar{V} = - \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$$

PREUVE:

On sait que la transformation T entre les deux repères (ξ, η) et (x, y) est linéaire.

on peut écrire

$$\vec{V} = T \vec{\tilde{V}}$$

ou

$$\vec{\tilde{V}} = T^{-1} \vec{V}$$

on sait de plus que

$$\vec{V} = [K] \nabla \psi$$

où

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\nabla \psi = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]$$

Dans le système (ξ, η) la transformée de ψ est $\bar{\psi}$ donnée par

où

$$\bar{\psi} = \psi_0 T$$

$$\psi = \bar{\psi}_0 T^{-1}$$

On peut alors écrire

$$\nabla \psi = T^{-1} \nabla \bar{\psi}$$

et

$$\vec{\tilde{V}} = T^{-1} \vec{V} = T^{-1} [K] \nabla \psi = T^{-1} [K] T^{-1} T \nabla \bar{\psi}$$

On peut montrer que dans le cas bidimensionnel

$$T^{-1} [K] T^{-1} = \det [T^{-1}] [K]$$

d'où

$$\vec{\tilde{V}} = \frac{1}{\det T} \nabla \bar{\psi}$$

en exprimant les composantes

$$\bar{U} = \frac{1}{\det T} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \eta}$$

$$\bar{V} = - \frac{1}{\det T} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \tau}$$

les pentes peuvent alors s'exprimer dans (ξ, η)

$$\frac{\bar{V}}{\bar{U}} = - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} / \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$$

dans (x, y)

$$\frac{V}{U} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} / \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Revenons au calcul de R . On peut donc poser dans (ξ, η)

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\bar{V}}{\bar{U}} \right) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

En se référant à la figure 15, posons

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{4}$$

en s'arrangeant pour que $\varphi \in [0, 2\pi]$ si $\varphi < 0$ on pose

$$\varphi \quad \varphi + 2\pi$$

On peut géométriquement établir les conditions suivantes

$$\varphi \in [0, 1.8925] \quad R \in \text{côté } (1, 2)$$

$$\varphi \in [1.8925, 4.3906] \quad R \in \text{côté } (2, 3)$$

$$\varphi \in [4.3906, 6.2832] \quad R \in \text{côté } (1, 3)$$

On montre aisément que l'équation de la droite portant la vitesse s'écrit

$$\eta = \frac{\bar{V}}{\bar{U}} \xi + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\bar{V}}{\bar{U}} \right)$$

et que celles des 3 cotés sont

$$\text{côté } (1, 2) \quad \eta = 0$$

$$\text{côté } (2, 3) \quad \eta = -\xi + 1$$

$$\text{côté } (1, 3) \quad \tau = 0$$

en solutionnant les systèmes de 2 équations à 2 inconnues, on obtient les coordonnées suivantes pour R.

Côté	ξ_R	η_R
1,2	$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{\bar{U}}{\bar{V}}\right)$	0
2,3	$\frac{1}{3} \frac{\bar{U} + 2\bar{V}}{\bar{U} + \bar{V}}$	$\frac{1}{3} \frac{2\bar{U} + \bar{V}}{\bar{U} + \bar{V}}$
1,3	0	$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{\bar{V}}{\bar{U}}\right)$

Le point R étant déterminés, calculons la longueur caractéristique

$$h = [(x_0 - x_R)^2 + (y_0 - y_R)^2]^{\frac{1}{2}}$$

où

$$x_i = x_1 + \xi_i(x_2 - x_1) + \eta_i(x_3 - x_1)$$

$$y_i = y_1 + \xi_i(y_2 - y_1) + \eta_i(y_3 - y_1)$$

est la transformation de coordonnées pour un triangle.

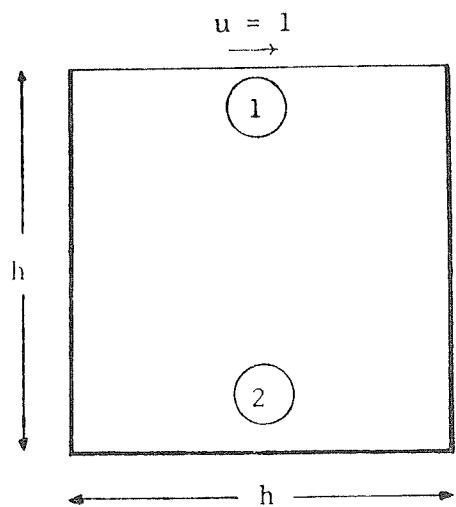


Fig. 1a Conditions frontières de la cavité carrée

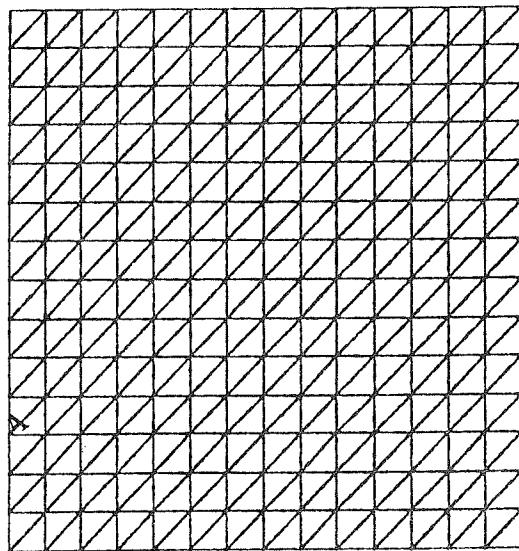


Fig. 1b Maillage de la cavité carrée avec diagonales alignées sur le même sens.
Dimension de 1×1
Maillage de 15×15

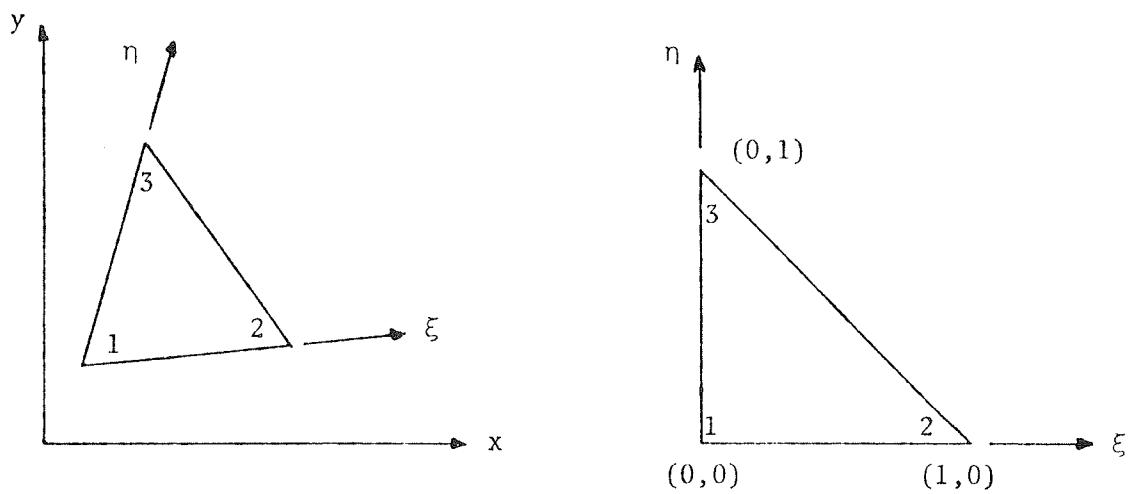


Fig. 2a Système de coordonnées naturelles

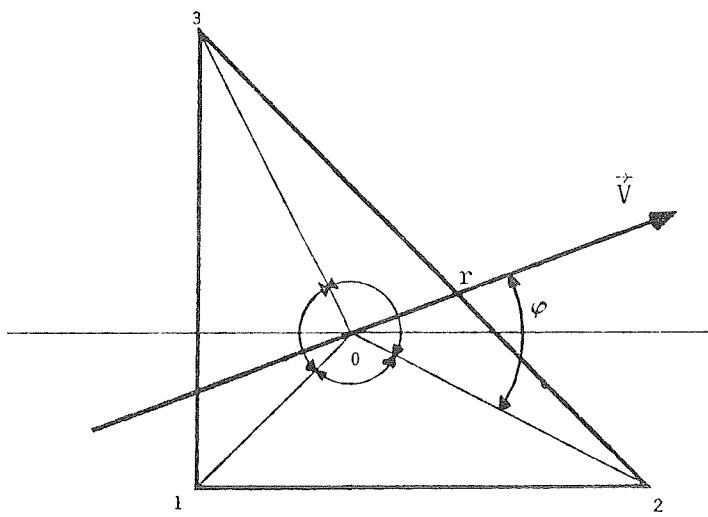
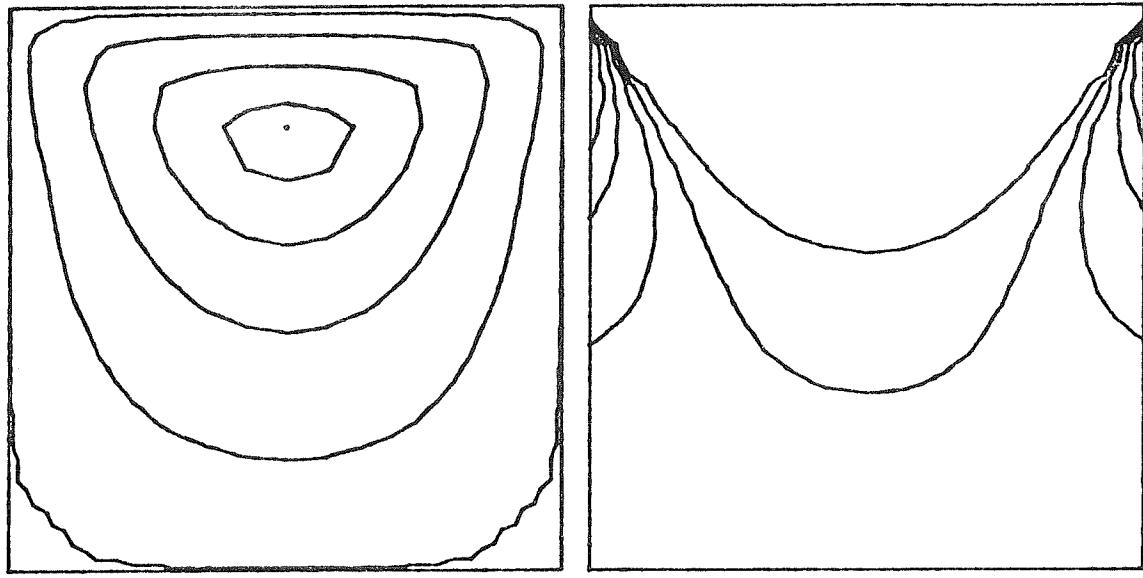


Fig. 2b Calcul du point r en fonction de la vitesse d'écoulement dans l'élément.



Lignes de courant en régime permanent

Lignes de vorticité en régime permanent

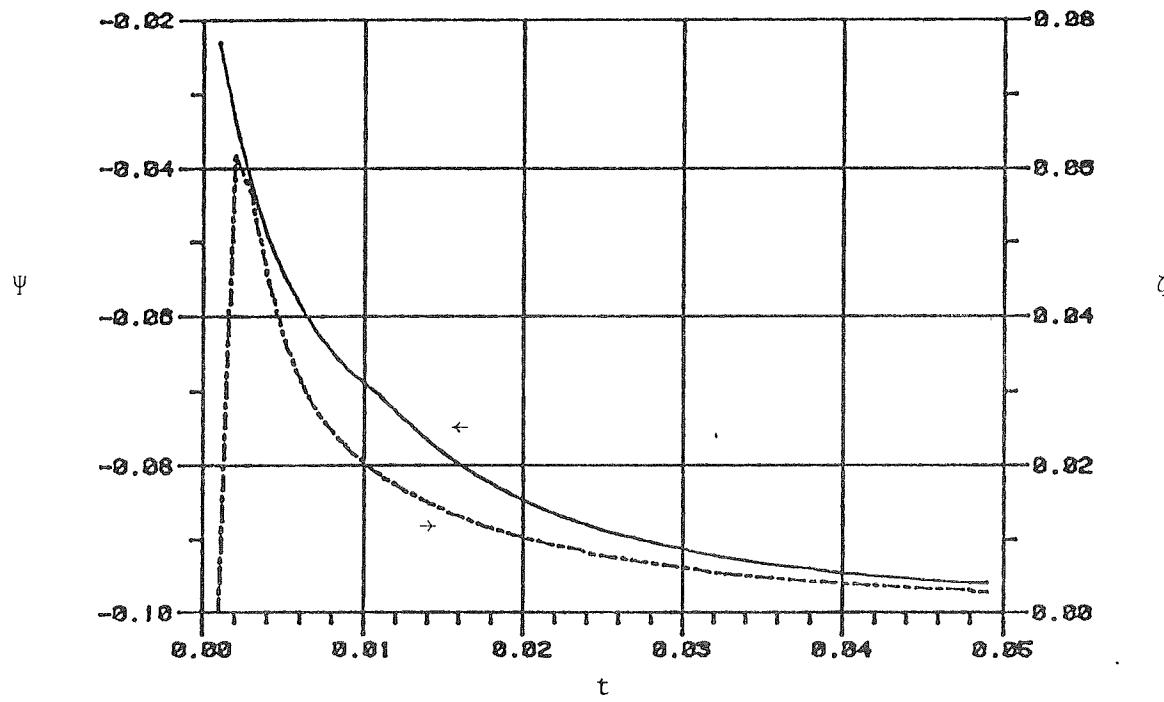
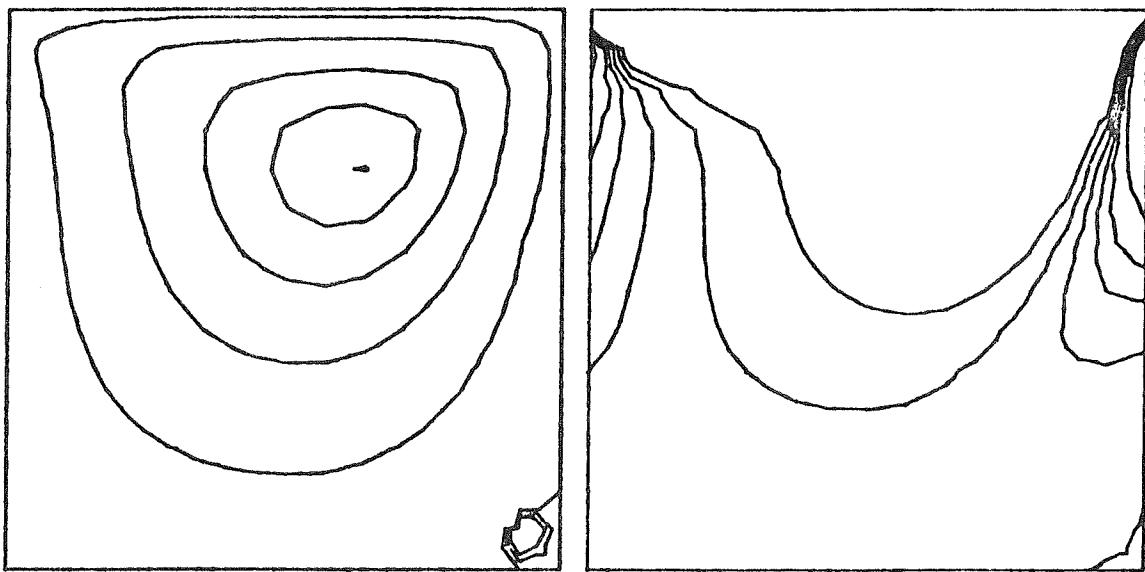


Fig. 3 Evolution de la fonction courant (Ψ) et de la vorticité (ζ) au centre du vortex en fonction du temps. Maillage 1b (15×15) Double précision avec viscosité artificielle $Re = 1$, $\Delta t = 0.001$



Lignes de courant en régime permanent

Lignes de vorticité en régime permanent

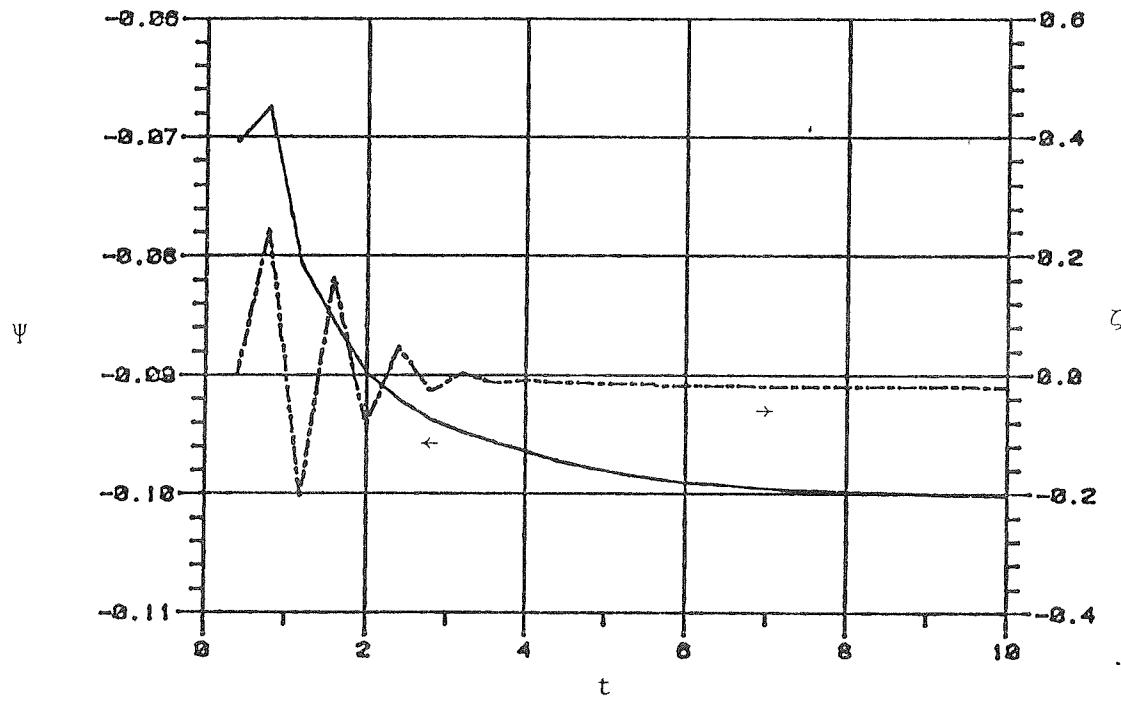
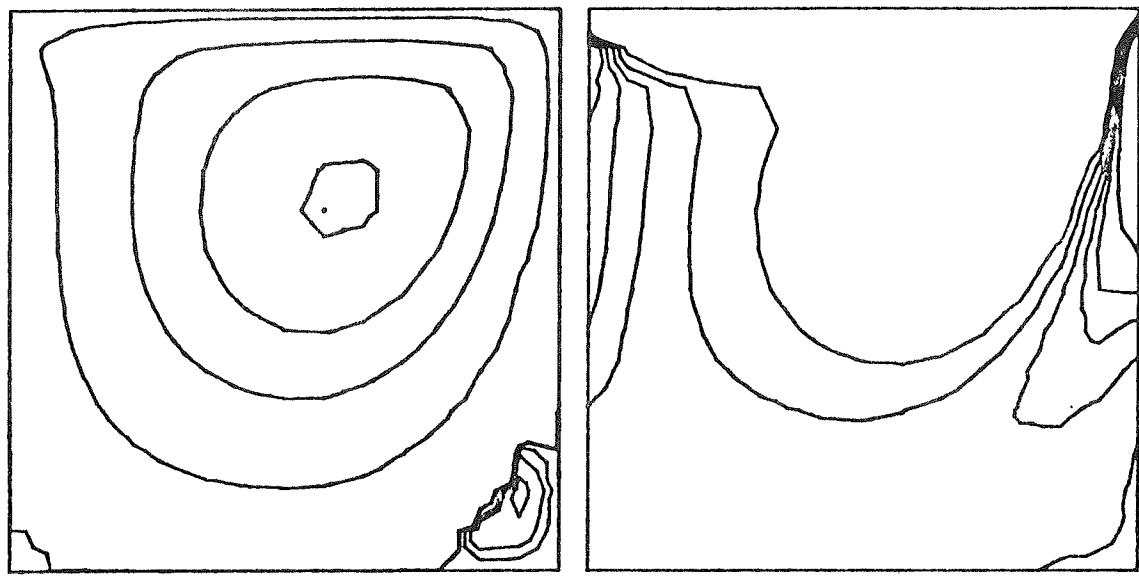


Fig. 4 Evolution de la fonction courant (Ψ) et de la vorticité (ζ) au centre du vortex en fonction du temps. Maillage 1b (15×15). Double précision avec viscosité artificielle $Re = 100$, $\Delta t = 0.4$.



Lignes de courant en régime permanent

Lignes de vorticité en régime permanent

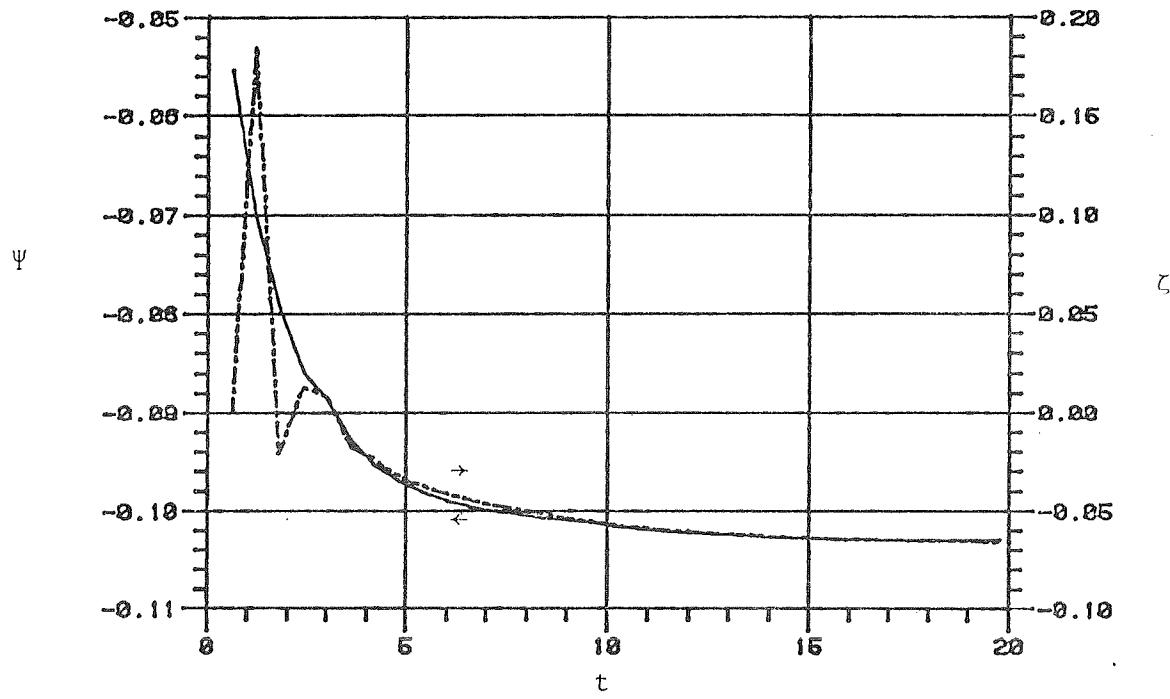
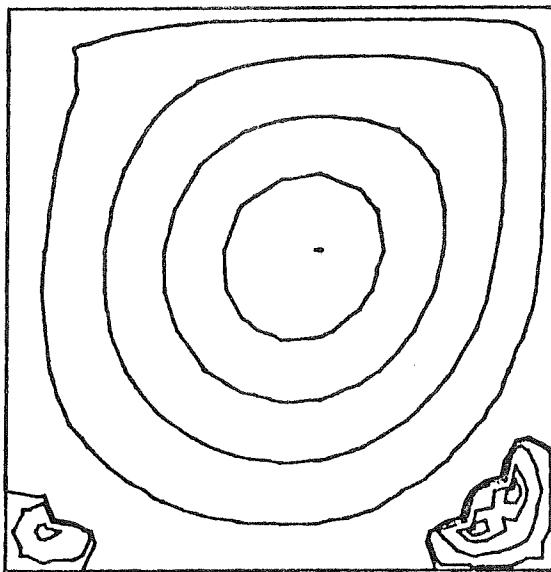
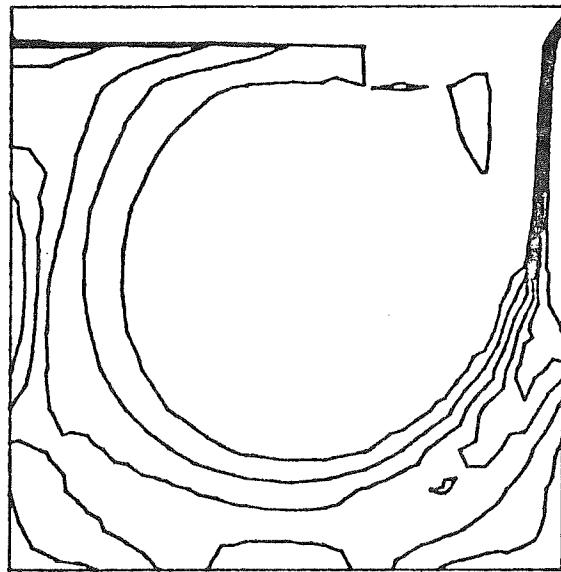


Fig. 5 Evolution de la fonction courant (Ψ) et de la vorticité (ζ) au centre du vortex en fonction du temps. Maillage 1b (15×15). Double précision avec viscosité artificielle $Re = 200$, $\Delta t = 0.6$.



Lignes de courant en régime permanent



Lignes de vorticité en régime permanent

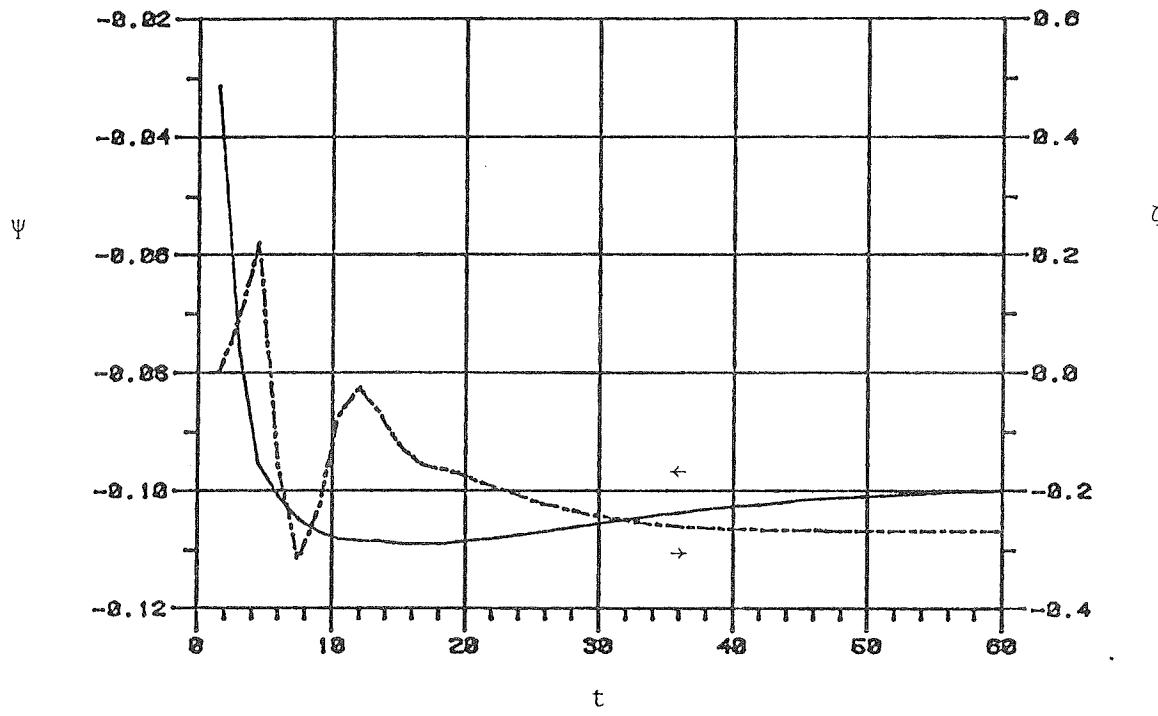
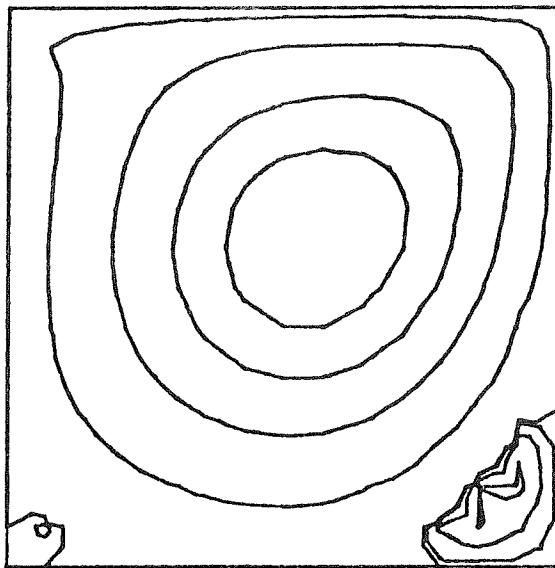
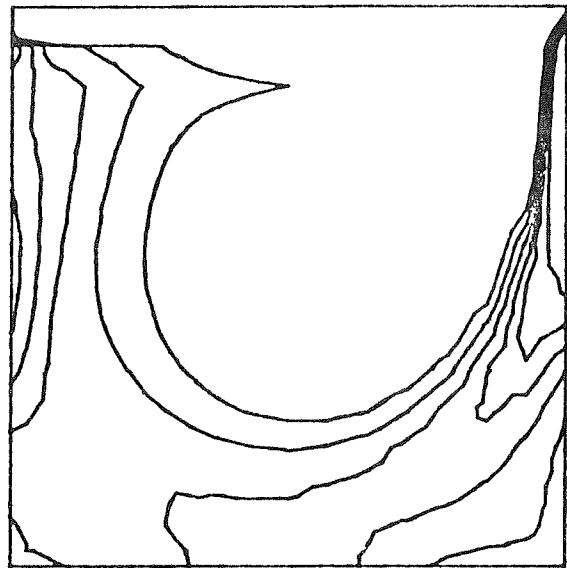


Fig. 6 Evolution de la fonction courant (Ψ) et de la vorticité (ζ) au centre du vortex en fonction du temps. Maillage 1b (15×15). Double précision avec viscosité artificielle $Re = 500$, $\Delta t = 1.0$



Lignes de courant en régime permanent



Lignes de vorticité en régime permanent

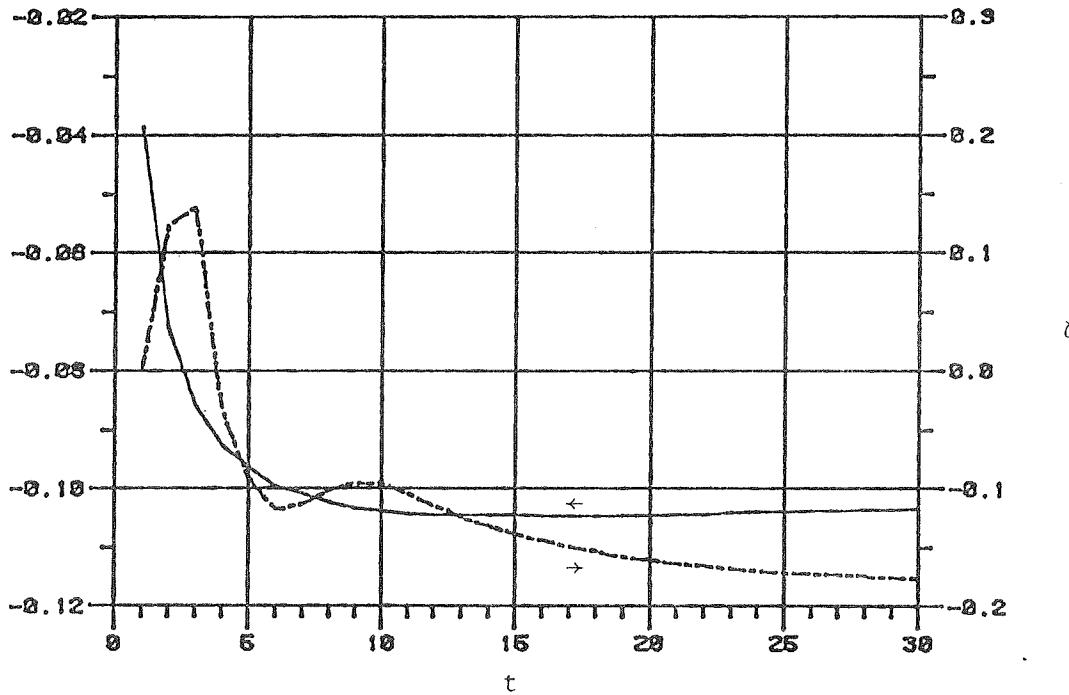
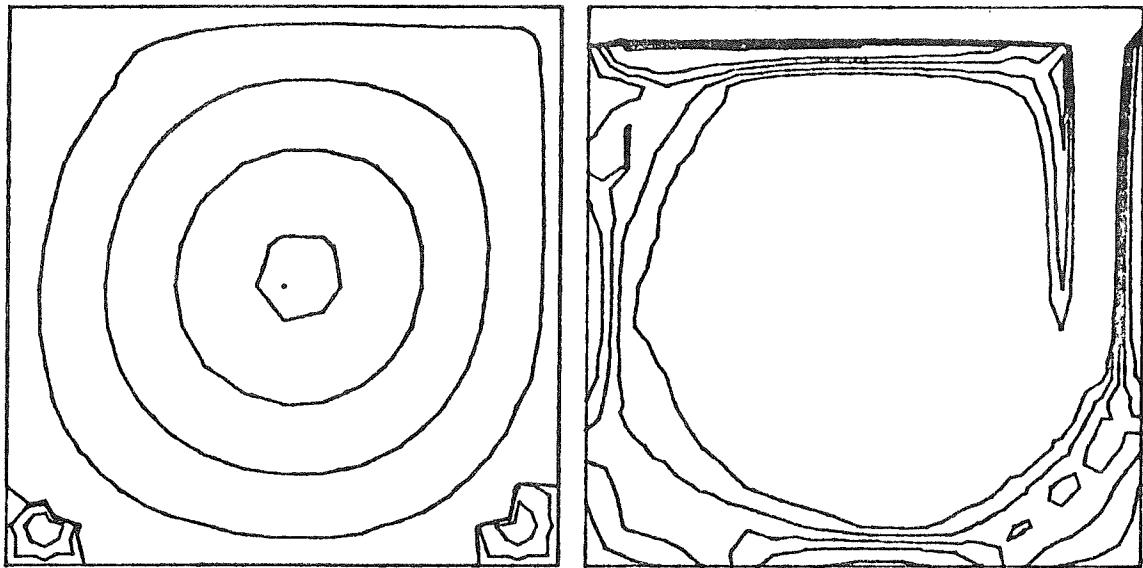


Fig. 7 Evolution de la fonction courant (Ψ) et de la vorticité (ζ) au centre du vortex en fonction du temps. Maillage 1b (15×15). Double précision avec viscosité artificielle $Re = 1,000$, $\Delta t = 1.5$



Lignes de courant en régime permanent

Lignes de vorticité en régime permanent

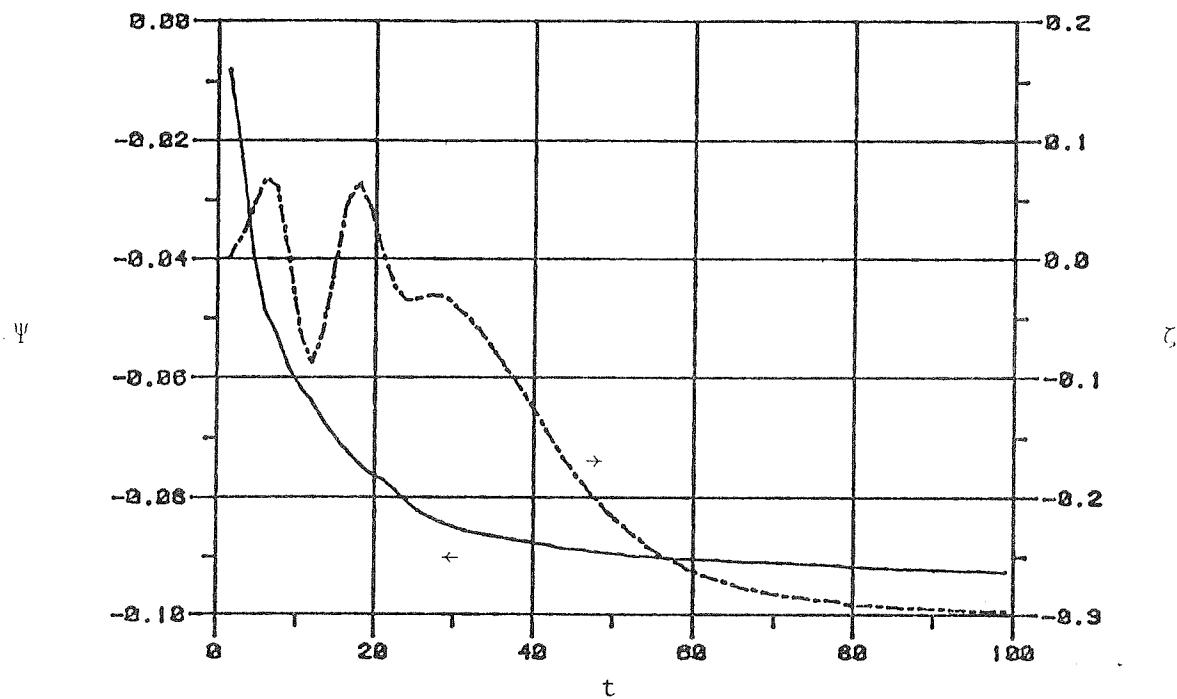
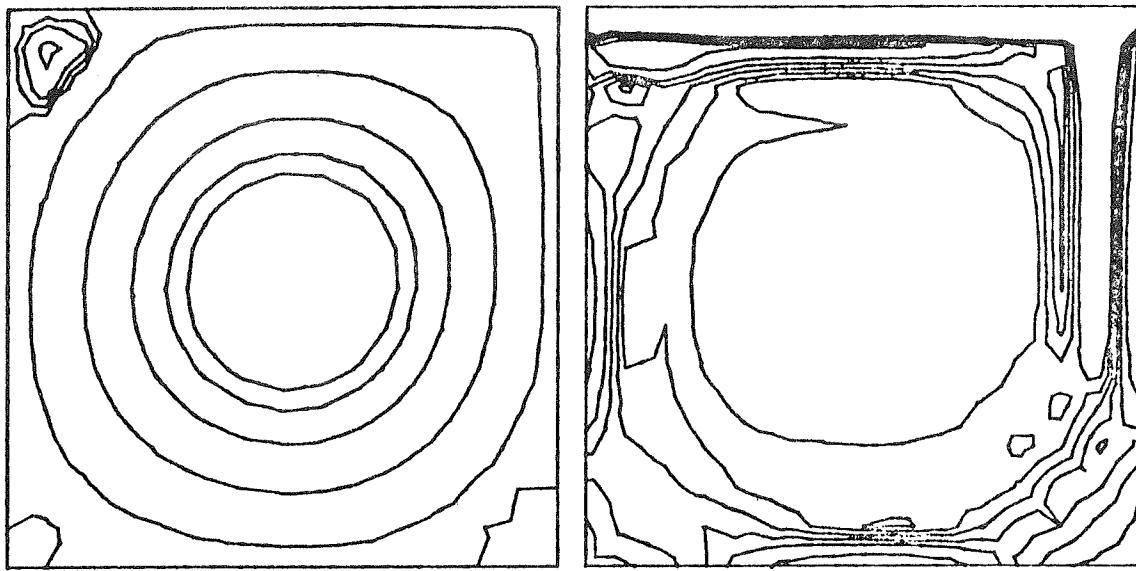


Fig. 8 Evolution de la fonction courant (Ψ) et de la vorticité (ζ) au centre du vortex en fonction du temps. Maillage 1b (15×15). Double précision avec viscosité artificielle $Re = 5,000$, $\Delta t = 1.5$



Lignes de courant en régime permanent

Lignes de vorticité en régime permanent

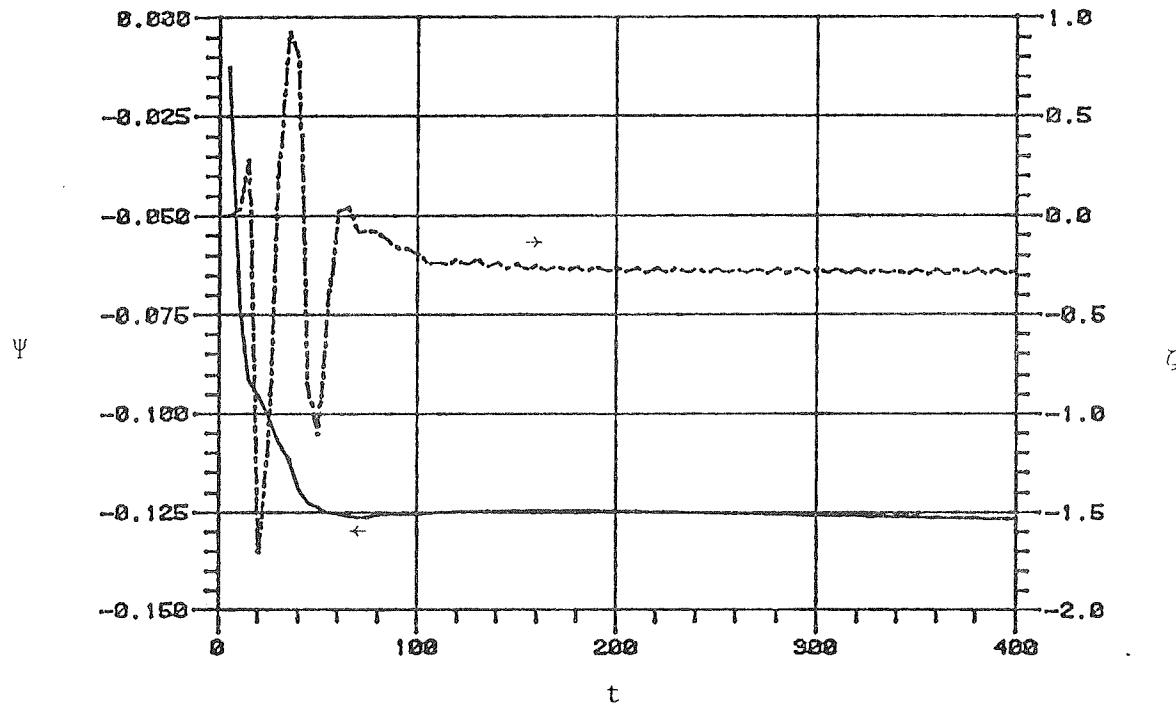
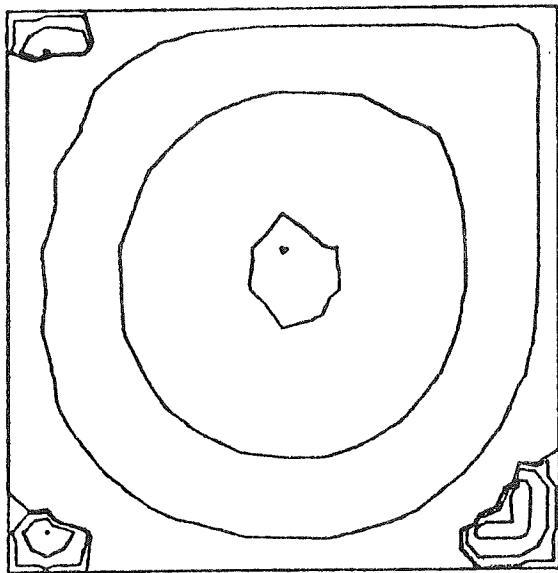
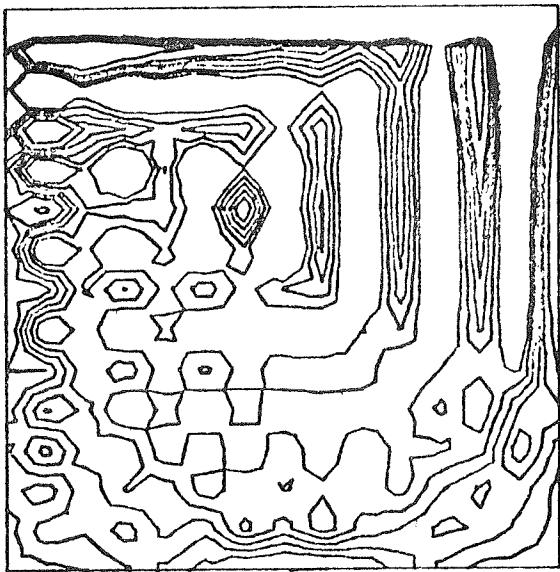


Fig. 9 Evolution de la fonction courant (Ψ) et de la vorticité (ζ) au centre du vortex en fonction du temps. Maillage 1b (15×15). Double précision avec viscosité artificielle $Re = 10,000$, $\Delta t = 6.0$



Lignes de courant en régime permanent



Lignes de vorticité en régime permanent

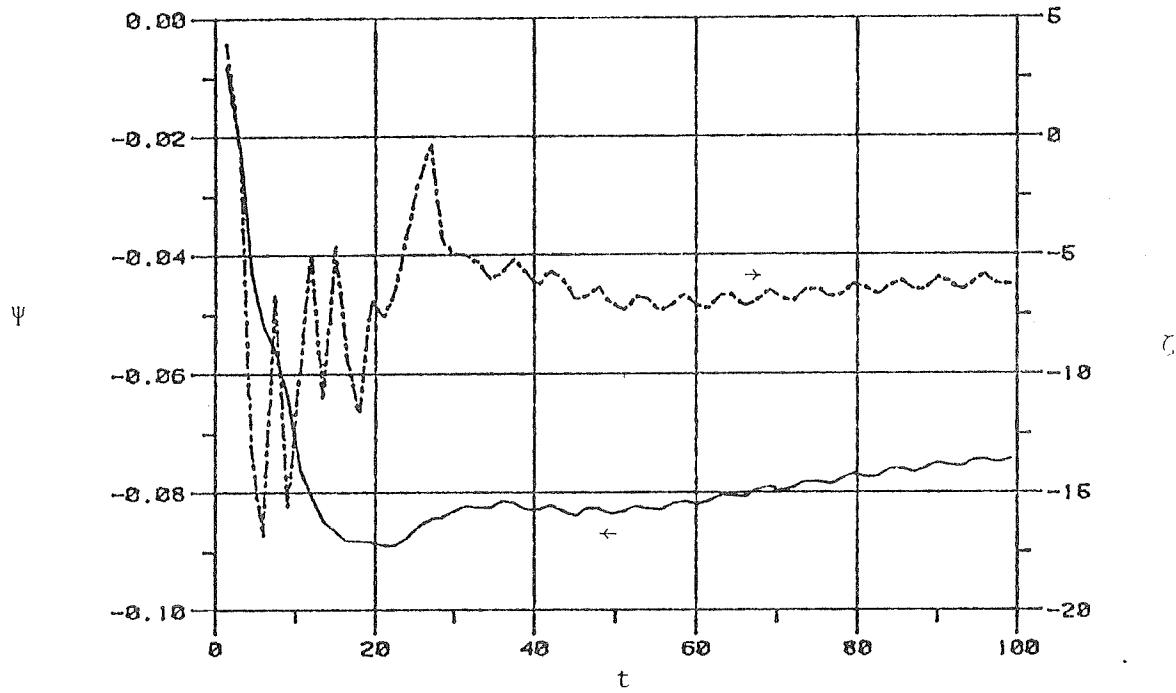


Fig. 10 Evolution de la fonction courant (Ψ) et de la vorticité (ζ) au centre du vortex en fonction du temps. Maillage 1b (15 × 15) Double précision sans viscosité artificielle
 $Re = 5,000$, $\Delta t = 1.5$

REMERCIEMENT

On remercie le Service de la recherche de l'Ecole Polytechnique et le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie pour l'appui financier accordé au cours de cette étude.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289222 0