

Titre: Théorie et techniques de calibration de l'analyseur de réseau six-port
Title: Theory and techniques of calibration of the network analyzer

Auteurs: Fadhel M. Ghannouchi, & A. Brodeur
Authors:

Date: 1992

Type: Rapport / Report

Référence: Ghannouchi, F. M., & Brodeur, A. (1992). Théorie et techniques de calibration de l'analyseur de réseau six-port. (Rapport technique n° EPM-RT-92-16).
Citation: <https://publications.polymtl.ca/10145/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/10145/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EPM-RT-92-16
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

EPM/rt-92/16

Le présent rapport a été préparé dans le cadre d'un programme de recherche en physique appliquée au sein du Laboratoire de physique et d'acoustique (LPA) de l'Université de Montréal. Il a été dirigé par M. F.M. Ghannouchi et a été rédigé par M. A. Brodeur.

THÉORIE ET TECHNIQUES DE CALIBRATION DE L'ANALYSEUR DE RÉSEAU SIX-PORT

Le présent rapport a été écrit par M. A. Brodeur sous la direction de M. F.M. Ghannouchi, professeur titulaire et chercheur principal, et sous la supervision de M. F. Gagnon, stagiaire de recherche.

gentiel
Polygrammes
Département de génie électrique et génie informatique

Le présent rapport a été écrit par M. A. Brodeur sous la direction de M. F.M. Ghannouchi, professeur titulaire et chercheur principal, et sous la supervision de M. F. Gagnon, stagiaire de recherche.

École Polytechnique de Montréal

septembre 1992

Ce document a pu être publié grâce aux subventions du Conseil de recherche en sciences et en génie du Canada (CRSNG) et du Fonds pour la Formation de Chercheurs et à l'Aide à la Recherche (FCAR).

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite de l'auteur.

Dépôt légal, 2^e trimestre 1992
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser aux:

Éditions de l'École Polytechnique de Montréal
École Polytechnique de Montréal
Case postale 6079, succursale A
(514) 340-4000

Compter 0,10 \$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00 \$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'école polytechnique de Montréal. Nous n'honoreronons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissement d'enseignement, de sociétés ou d'organisme canadiens.

III

Table des matières	III
Liste des figures	IV
1. Introduction	1
2. Méthodes de calibration du réflectomètre six-port	5
2.1 Méthode à sept standards (Woods)	5
2.2 Méthode à cinq standards (Ghannouchi)	7
2.3 Méthode à quatre standards (Ghannouchi)	11
2.4 Méthode à 3 standards et demi (Hodgetts)	14
2.5 Synthèse des standards de calibration	18
2.6 Méthode à charge coulissante (Ghannouchi)	21
3. Boîte d'erreur	23
3.1 Boîte d'erreur: trois standards et demi(Hodgetts) . .	23
3.2 Boîte d'erreur sans standard (Da Silva)	26
3.3 Boîte d'erreur à deux standards (Stumper)	28
4. Procédure de mesures (méthode 3½ standards)	30
4.1 Calcul de w à partir des P_i	30
4.2 Calcul de Γ à partir des P_i , e, c et d	31
5. Calcul des points q_i	32
6. Linéarisation des diodes reliées au réflectomètre six-port	35
6.1 Six-port utilisant quatre diodes (Demers)	35
6.2 Six-port à trois diodes et un détecteur de puissance	37
7. Calibration en puissance d'une jonction six-port à 4 diodes (Hodgetts)	38
8. Calibration de l'analyseur de réseau à six-ports (ARSP) . .	39
8.1 Introduction	39
8.2 Méthode de calibration d'ARSP (Hodgetts)	41
8.3 TRL: Through-Reflect-Line (Engen)	52
8.4 Calibration d'un ARSP sans isolateurs(Ghannouchi) .	54
8.5 Méthode de calibration Through-Matched-Unmatched (TMU) (Ghannouchi)	56
8.6 Méthode de calibration à 16 termes d'erreur pour mesures sous pointes (Buthler)	67
9. Caractérisation d'un réseau n-port à l'aide de n six-ports (Ghannouchi)	69
Références	72

Liste des figures

Figure 1:	Caractérisation d'une jonction un-port avec un six-port	1
Figure 2:	Synthèse des standards de calibration	18
Figure 3:	Calcul de la longueur du délai	20
Figure 4:	Caractérisation d'une jonction deux-port avec deux réflectomètres six-ports	39
Figure 5:	Boîtes d'erreur	41
Figure 6:	Représentation du circuit par un trois-port	49
Figure 7:	Les trois excitations du système	56
Figure 8:	Coefficients de dispersion S et S'	58

1. Introduction

La technique du six-port a été introduite par G.F. Engen et C.A. Hoer au cours des années 70. C'est maintenant un instrument de mesure micro-onde très précis. Il peut être utilisé à très haute puissance et à des fréquences élevées telles que les ondes millimétriques. La mesure s'effectue donc sans conversion de fréquence.

Le réflectomètre six-port est un dispositif linéaire permettant de mesurer les tensions complexes et les puissances transmises et réfléchies par une composante. Il doit son nom au fait qu'il possède physiquement six ports d'accès. Le premier est relié au générateur, le second à la composante sous test, tandis que les quatre autres sont reliés à des détecteurs qui fournissent chacun une mesure de puissance. Il y a un seul mode à chaque port mais pas nécessairement le même.

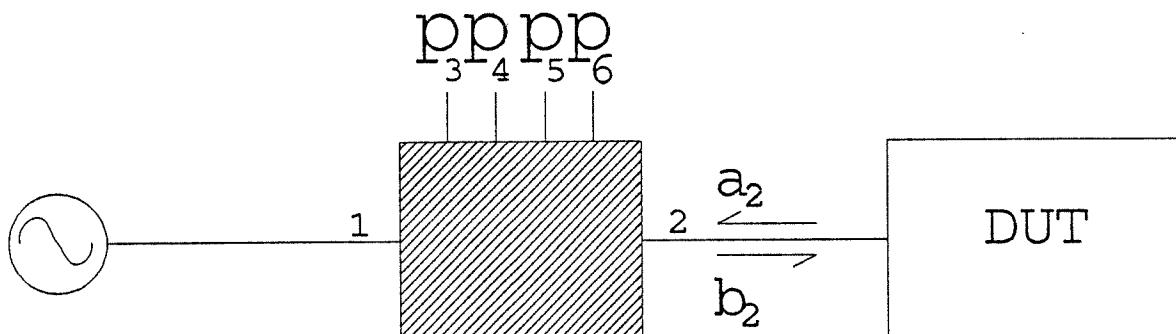


Figure 1: Caractérisation d'une jonction un-port avec un six-port

Le port 3 est le port de référence: on comparera chacune des trois autres mesures de puissance à P_3 ([1] et [2]). On définit généralement l'onde incidente à un port a_i et l'onde émergente b_i . Par convention, si on exprime ces variables en fonction de tensions normalisées, on a: $V/(Z_0)^{1/2}$, où Z_0 est l'impédance caractéristique de la ligne de transmission.

Les relations entre les a_i et les b_i sont définies par la matrice des coefficients de dispersion: $[b] = [S][a]$. Sachant que le coefficient de réflexion pour chaque détecteur est défini comme suit:

$$\Gamma_i = \frac{a_i}{b_i}; \quad i = 3, 4, 5, 6. \quad (1,1)$$

On obtient: (1,2)

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13}\Gamma_3 & s_{14}\Gamma_4 & s_{15}\Gamma_5 & s_{16}\Gamma_6 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\Gamma_3 & s_{24}\Gamma_4 & s_{25}\Gamma_5 & s_{26}\Gamma_6 \\ s_{31} & s_{32} & (s_{33}\Gamma_3 - 1) & s_{34}\Gamma_4 & s_{35}\Gamma_5 & s_{36}\Gamma_6 \\ s_{41} & s_{42} & s_{43}\Gamma_3 & (s_{44}\Gamma_4 - 1) & s_{45}\Gamma_5 & s_{46}\Gamma_6 \\ s_{51} & s_{52} & s_{53}\Gamma_3 & s_{54}\Gamma_4 & (s_{55}\Gamma_5 - 1) & s_{56}\Gamma_6 \\ s_{61} & s_{62} & s_{63}\Gamma_3 & s_{64}\Gamma_4 & s_{65}\Gamma_5 & (s_{66}\Gamma_6 - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix}$$

où la matrice $[S]$ modifiée s'appellera $[M]^{-1}$. En inversant cette matrice, on obtient des expressions beaucoup plus simples:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1,3)$$

On a donc:

$$\begin{aligned} a_1 &= m_{11}b_1 + m_{12}b_2, \\ a_2 &= m_{21}b_1 + m_{22}b_2, \\ b_i &= m_{i1}b_1 + m_{i2}b_2; \quad i=3, 4, 5, 6. \end{aligned} \quad (1.4)$$

On peut encore remanier ces équations en définissant $\Gamma_2 = \frac{a_2}{b_2}$ le coefficient de réflexion de la composante sous test. Alors on obtient:

$$b_i = \left(\frac{m_{i1}}{m_{21}} \Gamma + m_{i2} - \frac{m_{22}m_{i1}}{m_{21}} \right) b_2 \quad (1,5)$$

On appellera

$$h_i = \frac{m_{i1}}{m_{21}} \quad \text{et} \quad k_i = m_{i2} - \frac{m_{22}m_{i1}}{m_{21}} \quad (1,6)$$

donc

$$b_i = (h_i \Gamma + k_i) b_2 \quad (1,7)$$

Comme la puissance absorbée est donnée par la puissance incidente moins la puissance réfléchie, on a:

$$\begin{aligned} P_i &= |b_i|^2 - |a_i|^2 \\ &= |b_i|^2 (1 - |\Gamma_i|^2) \\ &= (1 - |\Gamma_i|^2) |h_i \Gamma + k_i|^2 |b_2|^2 \end{aligned} \quad (1,8)$$

$i=3,4,5,6$. Donc en définissant deux nouvelles variables, on a l'expression simplifiée:

$$P_i = |\alpha_i \Gamma + \beta_i|^2 |b_2|^2, \quad i = 3, 4, 5, 6. \quad (1,9)$$

donc à la charge, on a:

$$P_L = \frac{(1 - |\Gamma|^2) P_3}{|\beta_3|^2 |1 + c\Gamma|^2} \quad (1,10)$$

On définit

$$|w_k|^2 = \frac{P_i}{P_3} \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} k = 1, 2, 3 \\ i = k + 3 \end{matrix} \quad (1,11)$$

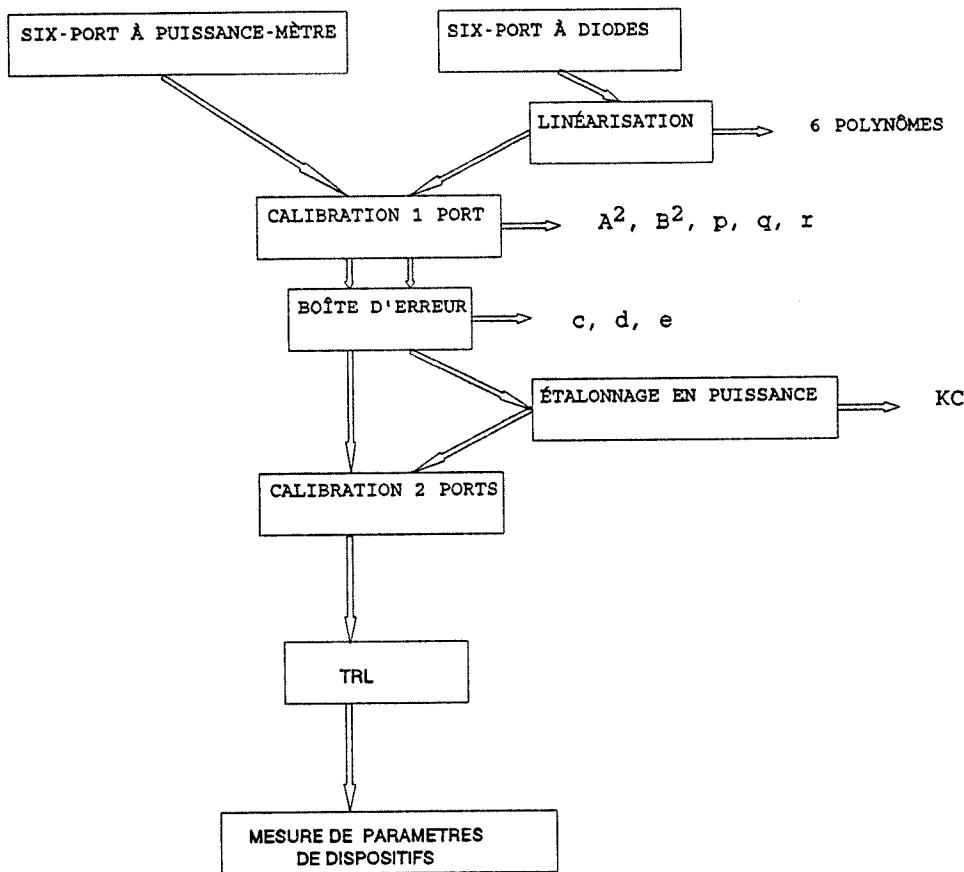
On aura donc:

$$|w_k|^2 = \left| \frac{\alpha_i \Gamma + \beta_i}{\alpha_3 \Gamma + \beta_3} \right|^2 \quad (1,12)$$

En divisant par β_3 tous les paramètres et en les renommant, on obtient la forme simplifiée suivante:

$$|w_k|^2 = \left| \frac{d_k \Gamma + e_k}{c \Gamma + 1} \right|^2 \quad (1,13)$$

Ces équations permettent de réduire un six-port à un quatre-port équivalent. C'est une technique de calibration très utilisée qui sera décrite dans la prochaine section. Voici un schéma des étapes à suivre pour calibrer un analyseur de réseau six-port:



2. Méthodes de calibration du réflectomètre six-port

2.1 Méthode à sept standards (Woods)

Woods, en 1979 a développé une méthode de calibration mathématiquement très simple. En voici une brève description [1]. En transformant l'équation (1,12) et en posant $\Gamma = x+jy$, on peut montrer que:

$$\begin{aligned} |w_k|_1^2 & (1 + |c|^2 (x_1^2 + y_1^2) + 2(Re(c)x_1 - Im(c)y_1)) \\ & = |d_k|^2(x_1^2 + y_1^2) + |e_k|^2 + 2(p_k x_1 + q_k y_1) \end{aligned} \quad (2,1)$$

où 1 indique le standard,

$$\begin{aligned} p_k & = Re(d_k)Re(e_k) + Im(d_k)Im(e_k) \\ q_k & = -(Im(d_k)R(e_k) - Re(d_k)Im(e_k)); \quad k=1,2,3. \end{aligned} \quad (2,2)$$

Il faut utiliser 7 standards dont on connaît les coefficients de réflexion avec précision et résoudre les 21 équations générées par cette opération. Ensuite, on peut évaluer le coefficient de réflexion de n'importe quelle composante inconnue en utilisant les équations suivantes:

$$y = \frac{\frac{F - E}{g_3 - g_2} - \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1}}{\frac{f_3 - f_2}{g_3 - g_2} - \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1}} \quad (2,3)$$

et

$$x = E - \left(\frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1} \right) y \quad (2,4)$$

où

$$E = \frac{r_1^2 - r_2^2 + (f_2^2 + g_2^2) - (f_1^2 + g_1^2)}{2(f_2 - f_1)} \quad (2,5)$$

$$F = \frac{r_2^2 - r_3^2 + (f_3^2 + g_3^2) - (f_2^2 + g_2^2)}{2(f_3 - f_2)} \quad (2,6)$$

$$f_k = \frac{p_k - Re(c)|w_k|^2}{|c|^2|w_k|^2 - |d_k|^2} \quad (2,7)$$

$$g_k = \frac{q_k + Im(c)|w_k|^2}{|c|^2|w_k|^2 - |d_k|^2} \quad (2,8)$$

$$r_k^2 = \frac{|e_k|^2 - |w_k|^2}{|c|^2|w_k|^2 - |d_k|^2} + f_k^2 + g_k^2 \quad (2,9)$$

Comme les coefficients de réflexion connus que l'on doit utiliser pour effectuer la calibration sont autant de sources d'imprécision, il est impératif de minimiser leur nombre. C'est pourquoi beaucoup de travail a été effectué dans ce sens.

2.2 Méthode à cinq standards (Ghannouchi)

Cette méthode de calibration utilise une procédure non itérative [3]. Elle comporte en outre l'avantage de ne pas utiliser un port spécifique de référence. On a montré que: équation (1,8)

$$P_i = (1 - |\Gamma_i|^2) |h_i \Gamma + k_i|^2 |b_2|^2 \quad i=3,4,5,6. \quad (2,10)$$

En posant $(1 - |\Gamma_i|^2) |b_2|^2 = \alpha$, on peut écrire ce système d'équation sous la forme matricielle suivante: $[P] = \alpha [L][R]$

$$\begin{bmatrix} P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} |k_3|^2 & |h_3|^2 & k_3^* h_3 & k_3 h_3^* \\ |k_4|^2 & |h_4|^2 & k_4^* h_4 & k_4 h_4^* \\ |k_5|^2 & |h_5|^2 & k_5^* h_5 & k_5 h_5^* \\ |k_6|^2 & |h_6|^2 & k_6^* h_6 & k_6 h_6^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ |\Gamma|^2 \\ \Gamma \\ \Gamma^* \end{bmatrix} \quad (2,11)$$

On veut obtenir la forme: $[P] = \alpha [C][\Gamma]$ où $[C]$ est une matrice de calibration et

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} 1 \\ |\Gamma|^2 \\ Re(\Gamma) \\ Im(\Gamma) \end{bmatrix} \quad (2,12)$$

Cette équation permettra de trouver le coefficient de réflexion lorsque la matrice de calibration sera déterminée. Sachant que $Re(\Gamma) = 1/2(\Gamma + \Gamma^*)$ et $Im(\Gamma) = j/2(\Gamma^* - \Gamma)$, on a que

$$[T][R] = [\Gamma] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{j}{2} & \frac{j}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ |\Gamma|^2 \\ \Gamma \\ \Gamma^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ |\Gamma|^2 \\ Re(\Gamma) \\ Im(\Gamma) \end{bmatrix} \quad (2,13)$$

Donc $[P] = \alpha [C][\Gamma]$. Maintenant, si on effectue des essais avec les quatre premiers standards, on obtient le système suivant:

$$\begin{bmatrix} P_{3k} \\ P_{4k} \\ P_{5k} \\ P_{6k} \end{bmatrix} = \alpha_k \begin{bmatrix} C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ |\Gamma|^2 \\ Re(\Gamma) \\ Im(\Gamma) \end{bmatrix} \quad (2,14)$$

où $k=1,2,3,4$ est l'indice du standard. En normalisant par rapport à une des mesures de puissance, on passe de 16 à 4 coefficients inconnus:

$$\begin{aligned} & c_{j1} + c_{j2}|\Gamma_k|^2 + c_{j3}Re(\Gamma_k) + c_{j4}Im(\Gamma_k) \\ & = \frac{P_{jk}}{P_{3k}} (C_{31} + C_{32}|\Gamma_k|^2 + C_{33}Re(\Gamma_k) + C_{34}Im(\Gamma_k)) \end{aligned} \quad (2,15)$$

où $j=4,5,6$ indique le port. En définissant la matrice suivante:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & |\Gamma_1|^2 & Re(\Gamma_1) & Im(\Gamma_1) \\ 1 & |\Gamma_2|^2 & Re(\Gamma_2) & Im(\Gamma_2) \\ 1 & |\Gamma_3|^2 & Re(\Gamma_3) & Im(\Gamma_3) \\ 1 & |\Gamma_4|^2 & Re(\Gamma_4) & Im(\Gamma_4) \end{bmatrix} \quad (2,16)$$

et

$$[P_j] = \begin{bmatrix} P_{j1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{j2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{j3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{j4} \end{bmatrix} \quad (2,17)$$

où $j=3,4,5,6$ indique le port. On peut réécrire ce même système:

$$[G] \begin{bmatrix} C_{j1} \\ C_{j2} \\ C_{j3} \\ C_{j4} \end{bmatrix} = [P_j] [P_3]^{-1} [G] \begin{bmatrix} C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \\ C_{34} \end{bmatrix} \quad j=4,5,6. \quad (2,18)$$

donc

$$[C_j] = \begin{bmatrix} C_{j1} \\ C_{j2} \\ C_{j3} \\ C_{j4} \end{bmatrix} = [G]^{-1} [P_j] [P_3]^{-1} [G] \begin{bmatrix} C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \\ C_{34} \end{bmatrix} \quad j=4,5,6. \quad (2,19)$$

Comme la normalisation peut s'effectuer par rapport à n'importe quel port, on peut montrer que

$$[C_j] = [G]^{-1} [P_j] [P_i]^{-1} [G] [C_i] \quad (2,20)$$

où i et j indiquent deux ports différents. En observant cette équation, on remarque que:

$$[P_3]^{-1} [G] [C_3] = [P_j]^{-1} [G] [C_j] \quad j=4,5,6. \quad (2,21)$$

ce qui donne un vecteur colonne $[V_0]$. Donc, on a que

$$[C_j] = [G]^{-1} [P_j] [V_0] \quad (2,22)$$

En reprenant l'équation (2,14) avec la définition de V_0 , on déduit que

$$V_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha_2} \\ \frac{1}{\alpha_3} \\ \frac{1}{\alpha_4} \end{bmatrix} \quad (2,23)$$

En effectuant le cinquième essai, on trouve que

$$P_{j5} = \alpha_5 [C_j]^T [\Gamma_5] \quad j=3,4,5,6. \quad (2,24)$$

Par l'équation (2,22) on a

$$P_{j5} = \alpha_5 ([G]^{-1} [P_j] [V_0])^T [\Gamma_5] = \alpha_5 [V_0]^T [P_j] ([G]^{-1})^T [\Gamma_5] \quad (2,25)$$

où P_j est diagonale. Posons

$$([G]^{-1})^T [\Gamma_5] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \quad (2,26)$$

alors on peut montrer que

$$\begin{bmatrix} P_{35} \\ P_{45} \\ P_{55} \\ P_{65} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} \\ P_{61} & P_{62} & P_{63} & P_{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \alpha_5 [V_0] \quad (2,27)$$

On peut donc trouver $\alpha_5 [V_0]$. On peut introduire ce vecteur dans l'équation (2,22) à la place de V_0 pour trouver la matrice $[C]$. Le facteur α_5 qui est introduit dans la matrice $[C]$ n'est pas important car le but final est de trouver la valeur exacte de Γ . Comme celui-ci est déterminé par des puissances relatives, le facteur α_5 s'annule. Comme

$$\Gamma = \frac{1}{\alpha} [C]^{-1} [P] = \frac{1}{\alpha} [X] [P] \quad (2,28)$$

alors

$$\begin{aligned} |\Gamma|^2 &= \frac{[X_2]^T [P]}{[X_1]^T [P]} \\ Re(\Gamma) &= \frac{[X_3]^T [P]}{[X_1]^T [P]} \\ Im(\Gamma) &= \frac{[X_4]^T [P]}{[X_1]^T [P]} \end{aligned} \quad (2,29)$$

où $[X_n]$, ($n=1,2,3,4$), est la $n^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $[X]$.

2.3 Méthode à quatre standards (Ghannouchi)

Une méthode semblable utilisant un standard de moins a été développée [4] et [5]. Elle utilise les mêmes notions de départ mais à partir de l'équation (2,19), les transformations effectuées diffèrent; on pose:

$$[G]^{-1} [P_j] [P_3]^{-1} [G] = [H^{(j)}] \quad (2,30)$$

Si on normalise la matrice de calibration par rapport à c_{31} , on obtient:

$$\begin{bmatrix} c_{j1} \\ c_{j2} \\ c_{j3} \\ c_{j4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}^{(j)} & h_{12}^{(j)} & h_{13}^{(j)} & h_{14}^{(j)} \\ h_{21}^{(j)} & h_{22}^{(j)} & h_{23}^{(j)} & h_{24}^{(j)} \\ h_{31}^{(j)} & h_{32}^{(j)} & h_{33}^{(j)} & h_{34}^{(j)} \\ h_{41}^{(j)} & h_{42}^{(j)} & h_{43}^{(j)} & h_{44}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ c_{32} \\ c_{33} \\ c_{34} \end{bmatrix} \quad (2,31)$$

On a défini la matrice $[C]$ de la façon suivante:

$$[C] = \begin{bmatrix} |k_3|^2 & |h_3|^2 & k_3^* h_3 & k_3 h_3^* \\ |k_4|^2 & |h_4|^2 & k_4^* h_4 & k_4 h_4^* \\ |k_5|^2 & |h_5|^2 & k_5^* h_5 & k_5 h_5^* \\ |k_6|^2 & |h_6|^2 & k_6^* h_6 & k_6 h_6^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{j}{2} & \frac{j}{2} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2,32)$$

donc

$$[C] = \begin{bmatrix} |k_3|^2 & |h_3|^2 & k_3^* h_3 + k_3 h_3^* & j(k_3 h_3^* - k_3^* h_3) \\ |k_4|^2 & |h_4|^2 & k_4^* h_4 + k_4 h_4^* & j(k_4 h_4^* - k_4^* h_4) \\ |k_5|^2 & |h_5|^2 & k_5^* h_5 + k_5 h_5^* & j(k_5 h_5^* - k_5^* h_5) \\ |k_6|^2 & |h_6|^2 & k_6^* h_6 + k_6 h_6^* & j(k_6 h_6^* - k_6^* h_6) \end{bmatrix} \quad (2,33)$$

Une fois normalisée par rapport à c_{31} , on a:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{|h_3|^2}{|k_3|} & \frac{2Re(k_3h_3)}{|k_3|} & \frac{2Im(k_3h_3)}{|k_3|} \\ \frac{|k_4|^2}{|k_3|} & \frac{|h_4|^2}{|k_3|} & \frac{2Re(k_4h_4)}{|k_3|} & \frac{2Im(k_4h_4)}{|k_3|} \\ \frac{|k_5|^2}{|k_3|} & \frac{|h_5|^2}{|k_3|} & \frac{2Re(k_5h_5)}{|k_3|} & \frac{2Im(k_5h_5)}{|k_3|} \\ \frac{|k_6|^2}{|k_3|} & \frac{|h_6|^2}{|k_3|} & \frac{2Re(k_6h_6)}{|k_3|} & \frac{2Im(k_6h_6)}{|k_3|} \end{bmatrix} \quad (2,34)$$

On remarque que les éléments de la matrice de calibration C sont liés par l'équation suivante:

$$(c_{j3})^2 + (c_{j4})^2 - 4c_{j1}c_{j2} = 0 \quad (2,35)$$

Si on remplace les valeurs de c_{ji} obtenues à l'équation (2,31) en fonction du vecteur C, dans l'équation (2,35), on trouve que

$$(2,36)$$

$$\alpha_1^{(j)} + \alpha_2^{(j)} (c_{32})^2 + \alpha_3^{(j)} (c_{33})^2 + \alpha_4^{(j)} (c_{34})^2 + 2(\beta_{23}^{(j)} c_{32}c_{33} + \beta_{24}^{(j)} c_{32}c_{34} + \beta_{34}^{(j)} c_{33}c_{34} + \beta_{12}^{(j)} c_{32} + \beta_{13}^{(j)} c_{33} + \beta_{14}^{(j)} c_{34}) = 0$$

où

$$\alpha_i^{(j)} = (h_{3i}^{(j)})^2 + (h_{4i}^{(j)})^2 - 4(h_{1i}^{(j)}h_{2i}^{(j)}) \quad (2,37)$$

$$\beta_{mj}^{(j)} = h_{3m}^{(j)}h_{3j}^{(j)} + h_{4m}^{(j)}h_{4j}^{(j)} - 2(h_{1m}^{(j)}h_{2i}^{(j)} + h_{2m}^{(j)}h_{1i}^{(j)}) \quad (2,38)$$

Généralement, le troisième port est presque indépendant du coefficient de réflexion. On définit donc le facteur de directivité D en fonction des éléments c_{3i} de calibration:

$$D = -\frac{1}{2}(c_{33} + jc_{34}) \quad (2,39)$$

Sachant que D doit être très faible, on s'attend à ce que c_{32} , c_{33} et c_{34} soient très petits. On a un système non-linéaire à résoudre pour

obtenir la matrice de calibration [C]. Pour solutionner, on utilise la solution initiale $c_{32} = c_{33} = c_{34} = 0$ dans un algorithme semblable à la méthode de Newton. Le coefficient de réflexion est ensuite déterminé à l'aide de l'équation (2,29):

$$\begin{aligned} |\Gamma|^2 &= \frac{[X_2]^T[P]}{[X_1]^T[P]} \\ Re(\Gamma) &= \frac{[X_3]^T[P]}{[X_1]^T[P]} \quad (2,40) \\ Im(\Gamma) &= \frac{[X_4]^T[P]}{[X_1]^T[P]} \end{aligned}$$

où $[X_n]$, ($n=1,2,3,4$), est la $n^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $[C]^{-1}$.

2.4 Méthode à 3 standards et demi (Hodgetts)

Cette méthode de calibration est décrite par T.E. Hodgetts et E.J. Griffin [1]. Elle utilise, dans un premier temps, le principe de réduction du six-port à un quatre-port équivalent. Dans un deuxième temps, on considère que le six-port est séparé de la composante sous test par une boîte d'erreur. Le concept de boîte d'erreur sera décrit en détail au chapitre 3. Sachant que

$$w_k = \frac{d_k \Gamma + e_k}{c \Gamma + 1}; \quad k=1,2,3 \quad (2,41)$$

ce qui représente trois cercles non colinéaires dans le plan complexe Γ qui se rencontrent en un point unique qui est Γ_L . Donc on a que

$$\Gamma_L = \frac{e_1 - w_1}{cw_1 - d_1} = \frac{e_2 - w_2}{cw_2 - d_2} = \frac{e_3 - w_3}{cw_3 - d_3} \quad (2,42)$$

On pose $Q_k = |w_k|^2$. Si on ramène le tout en fonction de w_1 , on aura trois autres cercles dans le plan complexe w_1 :

$$Q_1 = |w_1|^2; \quad A^2 Q_2 = |w_1 - m|^2; \quad B^2 Q_3 = |w_1 - n|^2. \quad (2,43)$$

où A , B , m et n sont définis en fonction de c , d_k et e_k .

En ramenant w_1 , m et n à une forme plus explicite, on a:

$$w_1 = u_1 + jv_1 \quad (2,44)$$

$$m = M (\cos \mu + j \sin \mu)$$

$$n = N (\cos \nu + j \sin \nu)$$

donc

$$Q_1 = u_1^2 + v_1^2 \quad (2,45)$$

$$A^2 Q_2 = (u_1 - M \cos \mu)^2 + (v_1 - M \sin \mu)^2 \quad (2,46)$$

$$B^2 Q_3 = (u_1 - N \cos v)^2 + (v_1 - N \sin v)^2 \quad (2,47)$$

Afin de n'avoir que des constantes réelles, on définit

$$\begin{aligned} p &= |m - n|^2 \\ q &= |n|^2 \\ r &= |m|^2 \end{aligned} \quad (2,48)$$

On a donc:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(v - \mu)} \begin{bmatrix} \sin v & -\sin \mu \\ -\cos v & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{M^2 + Q_1 - A^2 Q_2}{2 M} \\ \frac{N^2 + Q_1 - B^2 Q_3}{2 N} \end{bmatrix} \quad (2,49)$$

En choisissant

$$\alpha = \frac{(p-q-r)}{2\sqrt{qr}} \quad (2,50)$$

$$\beta = \frac{r + Q_1 - A^2 Q_2}{2\sqrt{r}} \quad (2,51)$$

$$\gamma = \frac{q + Q_1 - B^2 Q_3}{2\sqrt{q}} \quad (2,52)$$

On simplifie l'équation (2,49):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(v - \mu)} \begin{bmatrix} \sin v & -\sin \mu \\ -\cos v & \cos \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (2,53)$$

On peut exprimer Q_1 sous une nouvelle forme:

$$Q_1 = [u_1 \ v_1] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma}{1 - \alpha^2} \quad (2,54)$$

ce qui permettra, en remplaçant les équations (2,50), (2,51) et (2,52) dans l'équation (2,54), d'obtenir une expression uniquement

fonction de p , q , r , A^2 , B^2 et Q_k :

$$\begin{aligned} pQ_1^2 + qA^4Q_2^2 + rB^4Q_3^2 + (r-p-q)A^2Q_1Q_2 + (q-p-r)B^2Q_1Q_3 + (p-q-r)A^2B^2Q_2Q_3 \\ + p(p-q-r)Q_1 + q(q-p-r)A^2Q_2 + r(r-p-q)B^2Q_3 + pqr = 0 \end{aligned} \quad (2,55)$$

En linéarisant cette équation, on obtient l'expression suivante:

$$X_1Q_1^2 + X_2Q_2^2 + X_3Q_3^2 + X_4Q_1Q_2 + X_5Q_1Q_3 + X_6Q_2Q_3 + X_7Q_1 + X_8Q_2 + X_9Q_3 + 1 = 0 \quad (2,56)$$

On peut donc déterminer les cinq constantes A^2 , B^2 , p , q et r en branchant successivement neuf charges différentes dont on ignore le coefficient de réflexion. On a: $(2,57)$

$$q = \frac{2X_4 - X_7X_8}{2X_1X_8 - X_4X_7} \quad r = \frac{2X_5 - X_7X_9}{2X_1X_9 - X_5X_7}$$

$$p = r + q + \frac{X_7}{X_1}$$

$$A^2 = \sqrt{prX_2}$$

$$B^2 = \sqrt{pqX_3}$$

On utilise généralement plus de 9 charges afin de pouvoir éviter de travailler avec une matrice mal conditionnée. Après avoir effectué cette vérification, on peut utiliser l'algorithme des moindres carrés afin d'obtenir une solution approximative pour les cinq constantes. Ensuite, on injecte ces valeurs dans l'équation (2,55) comme solution initiale et on se sert de l'algorithme itératif de Gauss-Newton avec les valeurs des neuf (ou plus) essais pour améliorer la précision de ces constantes.

note: On pourrait également utiliser l'algorithme SVD pour résoudre l'équation (2,56).

Les charges généralement utilisées pour les essais avec coefficient de réflexion connu sont: un court-circuit, un circuit ouvert et une charge adaptée. On suggère d'utiliser un atténuateur d'au moins trois positions en court-circuit et en circuit ouvert pour générer les différentes impédances inconnues.

Note: Un circuit ouvert est parfois difficile à obtenir alors on utilise un court-circuit avec un déphasage de 180° , ce qui nous assure un module de Γ égal à 1 et une différence de phase avec le court-circuit de 180° .

2.5 Synthèse des standards de calibration

Voici une technique qui a été développée pour obtenir plusieurs impédances différentes à haute fréquence et sur une bande de fréquence choisie ([6] et [7]).

D'abord, il y a trois impédances connues: un court-circuit, un circuit ouvert et une charge adaptée. On s'en sert pour déterminer les paramètres de la boîte d'erreur.

Ensuite pour obtenir différents facteurs de réflexion, on peut varier deux facteurs: le module et la phase. On utilise un atténuateur comportant deux ou trois niveaux pour varier la grandeur du facteur de réflexion d'une part et d'autre part pour un circuit ouvert.

Pour agir sur la phase du coefficient de réflexion, on utilise un délai. Il faut que les impédances demeurent différentes sur une certaine largeur de bande prédéterminée, alors on essaie d'obtenir un déphasage d'environ 90° .

Les impédances ne doivent pas tendre à se rapprocher. On peut donc à l'aide de 2 niveaux d'atténuation et d'un délai produire 10 impédances différentes qui s'ajoutent aux trois du début. Généralement on choisit des atténuations de 3dB et de 6dB.

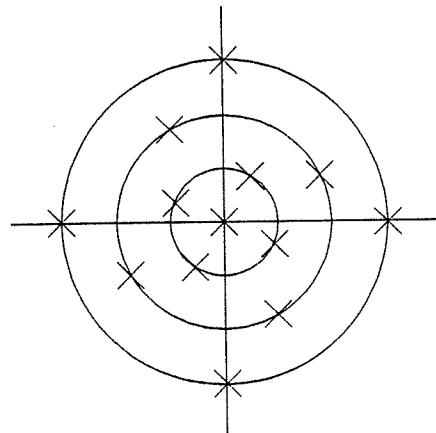


Figure 2: Synthèse des standards de calibration

Pour obtenir un délai, on utilise une section de ligne de transmission. Le facteur de déphasage créé par une section de longueur l est $e^{-j2\pi l}$. Soit ϕ le déphasage provoqué par cette section

à une fréquence f , alors:

$$2 \beta l = \phi = 24 f l * \sqrt{\epsilon_{eff} \mu_r} = 24 f L \quad (2,58)$$

où l est la longueur physique en cm, L est la longueur électrique en cm, ϵ_{eff} est la permittivité effective de la ligne de transmission, f est la fréquence en GHz et ϕ est la phase en degrés. Dans le cas d'une ligne coaxiale à air ($\epsilon_r=1, \mu_r=1$), on aurait $L=l$. Il faut que $\phi=90$ à la fréquence centrale $(f_1 + f_2)/2$.

Donc on a:

$$L = \frac{7,5}{(f_1 + f_2)} \quad (2,59)$$

et

$$\phi_{f_1} = \frac{180}{1 + f_2/f_1} \quad (2,60)$$

Si ce déphasage est trop petit, il faut diviser l'intervalle f_1-f_2 en deux régions (ou plus si nécessaire). On choisit le point f' de séparation de façon à ce que:

$$\frac{f_2}{f'} = \frac{f'}{f_1} \Rightarrow f' = \sqrt{f_1 f_2} \quad (2,61)$$

Si la fréquence est élevée, il est possible que la longueur de la ligne calculée soit trop courte pour être applicable en pratique. La solution est d'allonger la ligne de façon à obtenir un décalage de $180n + 90$ degrés. L'inconvénient avec cette méthode est qu'on doit exclure certaines bandes de fréquence à l'intérieur de l'intervalle f_1-f_2 car un déphasage trop près de 0° ou 180° serait produit. Une ligne très longue permet de réduire la largeur des bandes de fréquence non-utilisables. On choisit donc la longueur de la ligne en fonction des dimensions physiques du circuit tout en s'assurant qu'elle soit suffisamment longue pour ne pas exclure de trop larges bandes de fréquence. Comme l'intervalle de fréquence est discontinu, on choisit un pas Δf entre les points de cali-

brations de façon à obtenir un déphasage de 90° . À chaque augmentation de fréquence Δf correspond un déphasage $\Delta\phi$:

$$\Delta\phi = 24 L \Delta f \quad (2,62)$$

On choisit le pas de fréquence de façon à obtenir un nombre entier de points de calibration par cycle, c'est-à-dire:

$$360 = n \Delta\phi \quad (2,63)$$

Si on définit ϕ_{\min} le déphasage minimum par rapport à 0° ou 180° , on a que

$$(2,64)$$

$$\Delta\phi = 2\phi_{\min} \Rightarrow \phi_{\min} = \frac{180}{n}$$

donc

$$L = \frac{\phi_{\min}}{12\Delta f} \quad (2,65)$$

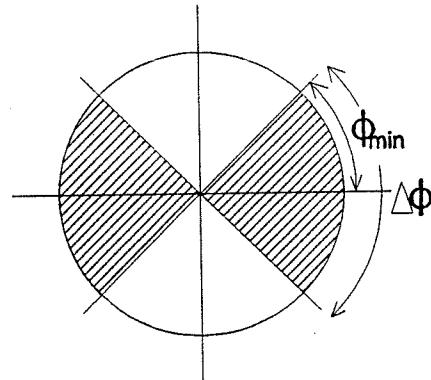


Figure 3: Calcul de la longueur du délai

Habituellement, on choisit $\phi_{\min}=90^\circ$ de façon à toujours obtenir un déphasage ϕ le plus près possible de 90° . Il faut donc choisir la première fréquence de calibration:

$$f_1 = n_1 \Delta f + \frac{\Delta f}{2} \quad (2,66)$$

Donc en terme de déphasage, on a: $180^\circ n_1 + 90^\circ$.

2.6 Méthode à charge coulissante (Ghannouchi)

Près du centre de l'abaque de Smith, il est difficile d'obtenir une mesure de Γ qui soit juste. Lors de la calibration, on utilise généralement une charge adaptée mais le coefficient de réflexion du connecteur s'ajoute à celui de la charge, ce qui limite la précision de la mesure et la bande dynamique du réflectomètre.

En utilisant le principe de la charge coulissante [8], on peut obtenir un meilleur résultat. À partir de l'équation (1,9), on peut montrer que

$$P_i = A_i |\Gamma - q_i|^2 \quad i=3, 4, 5, 6. \quad (2,67)$$

Lorsque Γ est près de 0, on peut faire l'approximation que $|\Gamma|^2=0$ donc

$$P_i \approx A_i |q_i|^2 - 2A_i |\Gamma| |q_i| \cos(\theta_\Gamma - \theta_{q_i}) \quad (2,68)$$

En effectuant 3 mesures avec une charge coulissante, on obtient les résultats suivants:

$$\begin{aligned} P_{i1} &= A_i |q_i|^2 - 2A_i |\Gamma| |q_i| \cos \theta_i \\ P_{i2} &= A_i |q_i|^2 - 2A_i |\Gamma| |q_i| \cos(\theta_i + \alpha) \\ P_{i3} &= A_i |q_i|^2 - 2A_i |\Gamma| |q_i| \cos(\theta_i + \beta) \end{aligned} \quad (2,69)$$

où α et β sont des déphasages relatifs connus. À l'aide de ces mesures, on peut calculer θ_i : (2,70)

$$\theta_i = \operatorname{arccot} \left(-\frac{(P_{i1} - P_{i3}) \sin \alpha + (P_{i2} - P_{i1}) \sin \beta}{(P_{i1} - P_{i3})(1 - \cos \alpha) + (P_{i2} - P_{i1})(1 - \cos \beta)} \right)$$

Ensuite, on peut évaluer les valeurs des $A_i |q_i|^2$.

$$A_i |q_i|^2 = P_{i2} + \frac{(P_{i3} - P_{i1}) \cos(\theta_i + \alpha)}{\sin\theta \sin\beta - (1 - \cos\beta) \cos\theta} \quad (2.71)$$

Ces valeurs correspondent aux mesures de puissance qui seraient lues sur les quatre détecteurs si on avait une charge parfaitement adaptée. Ces valeurs seront donc utilisées comme les mesures d'un standard connu pour la calibration du six-port.

3. Boîte d'erreur

3.1 Boîte d'erreur: trois standards et demi (Hodgetts)

Quand le six-port est calibré, c'est à dire qu'on a déterminé les cinq constantes réelles qui le caractérise, il faut pouvoir trouver le coefficient de réflexion de la composante sous test en fonction des lectures de puissance, donc en fonction d'un w unique dépendant des trois rapports de puissance Q_k . Pour ce faire, on fait appel au concept de boîte d'erreur [1]. Ainsi les quantités w et Γ sont reliées par une nouvelle matrice de dispersion:

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} [w] \quad (3,1)$$

Donc

$$w = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma}{1 - S_{22}\Gamma} \quad (3,2)$$

ce qui est équivalent à

$$\Gamma = \frac{e - w}{cw - d} \quad (3,3)$$

où les constantes c , d et e sont définies en fonction des coefficients de dispersion. Le but de la boîte d'erreur est de tenir compte de tous les éléments compris entre le port 2 du six-port et le port de la composante sous test. On peut donc choisir le plan de mesure que l'on veut et y évaluer le coefficient de réflexion.

Il faut donc déterminer ces nouvelles constantes. Pour cela, il faudra utiliser un minimum de trois standards et demi, c'est-à-dire trois standards dont on connaît le coefficient de réflexion

avec précision et un dont on connaît approximativement le coefficient de réflexion. Ce dernier standard servira uniquement à lever une ambiguïté de signe. On pose

$$w = w_1(\cos\mu - j\sin\mu) \quad (3,4)$$

Cela permet de définir w en fonction des cinq constantes réelles caractérisant le six-port. Sachant que

$$w = u + jv \quad (3,5)$$

en reprenant l'équation (2,53) et en appliquant la définition de w (3,4), on trouve que:

$$\begin{aligned} u &= \beta \\ v &= \frac{\alpha\beta + \gamma}{\pm\sqrt{1 - \alpha^2}} \end{aligned} \quad (3,6)$$

L'ambiguïté de signe mentionnée plus tôt porte sur le signe du dénominateur de cette dernière équation. Les variables α, β et γ sont données en fonction des Q_k et de p, q, r, A^2, B^2 :

$$\alpha = \frac{(p-q-r)}{2\sqrt{qr}} \quad (3,7)$$

$$\beta = \frac{r + Q_1 - A^2 Q_2}{2\sqrt{r}} \quad (3,8)$$

$$\gamma = \frac{q + Q_1 - B^2 Q_3}{2\sqrt{q}} \quad (3,9)$$

On peut donc calculer u et v . D'autre part on peut séparer la relation entre w et Γ en une partie réelle et une partie

imaginaire, ainsi on trouve que

(3,10)

$$u = \operatorname{Re}(d)x - \operatorname{Im}(d)y + \operatorname{Re}(e) - (xu - yv)\operatorname{Re}(c) + (xv + yu)\operatorname{Im}(c)$$

$$v = \operatorname{Re}(d)y - \operatorname{Im}(d)x + \operatorname{Re}(e) - (xv + yu)\operatorname{Re}(c) + (xu + yv)\operatorname{Im}(c)$$

Donc après avoir déterminé u et v pour chacun des quatre essais, on peut déterminer les valeurs des quantités complexes c , d et e en utilisant les deux équations ci-dessus.

Ensuite on peut lever l'ambiguïté de signe mentionnée plus tôt en utilisant la mesure effectuée avec le standard approximativement connu dans l'équation (3,3).

3.2 Boîte d'erreur sans standard (Da Silva)

En appliquant la méthode développée par Da Silva et McPhun pour les quatre-ports aux six-ports, on évite de supposer que les pertes dans les conducteurs sont nulles [1]. Il s'agit d'utiliser le fait que le coefficient de réflexion d'un court circuit est -1 et de tenir compte de l'atténuation du signal pour différentes positions du court-circuit. C'est le principe d'un court-circuit coulissant.

On a besoin de quatre positions, soit l_0 , l_0+1 , l_0+2l et l_0+3l . L'atténuation pour une distance d est de $e^{-2d\delta}$ où δ est la constante de propagation de la ligne ($j \frac{\omega_r \mu_r}{c}$). Donc les coefficients de réflexion correspondant aux quatres mesures seront: Γ_0 , $\Gamma_0 e^{-2\delta l}$, $\Gamma_0 e^{-4\delta l}$ et $\Gamma_0 e^{-6\delta l}$. On peut vérifier que:

$$W = \frac{(w_0 - w''') (w' - w'')} {(w_0 - w') (w'' - w''')} = \frac{(\Gamma_0 - \Gamma''') (\Gamma' - \Gamma'')} {(\Gamma_0 - \Gamma') (\Gamma'' - \Gamma''')} \quad (3,11)$$

où W est une constante que l'on calcule. En posant $x = e^{-2\delta l}$, on trouve que

$$W = \frac{x^2 + x + 1}{x} \quad (3,12)$$

donc

$$x = W - 1 \pm \frac{\sqrt{(W - 1)^2 - 4}}{2} \quad (3,13)$$

Seule la valeur $|x| < 1$ est admissible car il s'agit d'une atténuation. x^* est aussi une valeur admissible, mais une seule des deux est bonne: celle pour laquelle l'équation (3.11) se vérifie. On a maintenant:

(3,14)

$$w_0 = \frac{d\Gamma_0 + e}{c\Gamma_0 + 1}$$

$$w' = \frac{dx\Gamma_0 + e}{cx\Gamma_0 + 1}$$

$$w'' = \frac{dx^2\Gamma_0 + e}{cx^2\Gamma_0 + 1}$$

$$w''' = \frac{dx^3\Gamma_0 + e}{cx^3\Gamma_0 + 1}$$

Ce qui permet d'évaluer les constantes c, d et e de la boîte d'erreur. Il suffit de linéariser et d'utiliser la méthode des moindres carrés. Cette méthode suppose que le coefficient de réflexion d'un court-circuit est constant peu importe sa position. En pratique toutefois, cette hypothèse n'est pas parfaitement vérifiée, ce qui induit une erreur. Le court-circuit coulissant n'existe pas à plus de 10 GHz.

3.3 Boîte d'erreur à deux standards (Stumper)

Une autre méthode pour déterminer les relations entre w et Γ a été développée par U. Stumper et W. Peinelt [9]. Cette méthode n'utilise que deux standards connus: une section de ligne de transmission et un court-circuit.

On décrit l'effet d'une section de ligne de transmission de longueur l selon l'expression suivante:

$$T = e^{-2\alpha l - 2j\beta l} \quad (3,15)$$

La longueur est connue, le coefficient de propagation β est calculé et le coefficient d'atténuation α est mesuré. On suppose que la ligne de transmission ne provoque pas de réflexion. Le développement mathématique de cette méthode est basé sur l'équation (3.11) :

$$D = \frac{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(w_1 - w_4)(w_3 - w_2)} = \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2)(\Gamma_3 - \Gamma_4)}{(\Gamma_1 - \Gamma_4)(\Gamma_3 - \Gamma_2)} \quad (3,16)$$

On effectue les quatre essais suivants:

- 1- la composante inconnue: Γ_0
- 2- la section de ligne de transmission avec la composante inconnue: $T \Gamma_0$
- 3- un court-circuit connu: K
- 4- la section de ligne de transmission avec un court-circuit: TK

En remplaçant les résultats obtenus dans l'équation (3,16), on obtient:

$$D = \frac{(\Gamma_0 - \Gamma_0 T)(K - TK)}{(\Gamma_0 - TK)(K - TT_0)} \quad (3,17)$$

On peut remanier cette expression pour obtenir:

$$\left(\frac{\Gamma_0}{K}\right)^2 - \left(\frac{\Gamma_0}{K}\right)_E + 1 = 0 \quad (3,18)$$

où

$$E = \frac{D(1 + T^2) - (1 - T)^2}{T D}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on peut appliquer l'algorithme de Gauss-Newton et résoudre pour Γ_0 .

4. Procédure de mesures (méthode 3½ standards)

4.1 Calcul de w à partir des P_i

D'abord, à partir des P_i , on calcule les Q_k :

$$Q_k = \frac{P_i}{P_3}; \quad k=1, 2, 3, \quad i=k+3. \quad (4,1)$$

Comme on connaît maintenant p, q, r, A^2 et B^2 , on peut trouver α, β et γ : équations (2,50), (2,51) et (2,52).

$$\alpha = \frac{(p-q-r)}{2\sqrt{qr}} \quad (4,2)$$

$$\beta = \frac{r + Q_1 - A^2 Q_2}{2\sqrt{r}} \quad (4,3)$$

$$\gamma = \frac{q + Q_1 - B^2 Q_3}{2\sqrt{q}} \quad (4,4)$$

De là, on peut calculer w , partie réelle et partie imaginaire: équation (3,6)

$$w = u + jv = \beta + j \left(\frac{\alpha\beta + \gamma}{\pm\sqrt{1 - \alpha^2}} \right) \quad (4,5)$$

4.2 Calcul de Γ à partir des P_p , e , c et d

Ensuite, on peut calculer le coefficient de réflexion en utilisant la relation de la boîte d'erreur: équation (3,3)

$$\Gamma = \frac{e - w}{cw - d} \quad (4,6)$$

5. Calcul des points q_i

On a déjà montré que (2,41):

$$|w_k|^2 = \left| \frac{d_k \Gamma + e_k}{c \Gamma + 1} \right|^2 \quad (5,1)$$

c'est une réduction de six-port à quatre-port où c , d_k et e_k sont complexes. Ces équations permettent de définir trois cercles dans le plan complexe qui se rencontrent en un point unique. Ce point représente Γ_L , le coefficient de réflexion de la composante sous test. Les constantes c , d_k et e_k sont connues si la technique de calibration de Wood a été employée, sinon elles peuvent être évaluées à l'aide de trois des standards de calibration en utilisant l'équation (5,1).

Pour trouver l'expression des centres et des rayons de ces cercles [1], on décompose la relation entre w_k et Γ (en utilisant $|X+Y|^2 = (X+Y)(X^*+Y^*)$) et on obtient: $(5,2)$

$$|\Gamma|^2 - \frac{c|w_k|^2 - d_k e_k^*}{|d_k|^2 - |c|^2 |w_k|^2} \Gamma - \frac{c^* |w_k|^2 - d_k^* e_k}{|d_k|^2 - |c|^2 |w_k|^2} \Gamma^* = \frac{|w_k|^2 - |e_k|^2}{|d_k|^2 - |c|^2 |w_k|^2}$$

On a des cercles d'équation $|\Gamma - q_i|^2 = r_i^2$ où les q_i sont les centres des cercles et les r_i sont les rayons.

(Note: $|\Gamma|^2 - \Gamma_{0k}^* \Gamma - \Gamma_{0k} \Gamma^* = r^2 - |\Gamma_{0k}|^2$)

Donc on peut trouver

$$q_i = \frac{c^* |w_k|^2 - d_k^* e_k}{|d_k|^2 - |c|^2 |w_k|^2} \quad (5,3)$$

et

$$r_k^2 = \frac{|w_k|^2 |d_k - ce_k|^2}{(|d_k|^2 - |c|^2 |w_k|^2)^2} \quad (5,4)$$

Une autre façon de calculer les q_i [7] serait de calculer les centres des cercles dans le plan de w_1 , puis de retrouver les points correspondants dans le plan de Γ . Ainsi, on aurait 0 , m et n dans le plan de w_1 . (Ils ont déjà été définis dans la section sur la calibration 3½ standards.) Dans le plan de w on obtient: 0 , M , et $N(\cos(\mu - v) + j \sin(\mu - v))$. Pour obtenir les q_i , il suffit d'utiliser la relation entre Γ et w (équation (27)), et on trouve que:

$$q_4 = -\frac{e}{d} \quad (5,5)$$

$$q_5 = \frac{e - M}{cM - d} \quad (5,6)$$

$$q_6 = \frac{e - N(\cos(\mu - v) + j \sin(\mu - v))}{c N(\cos(\mu - v) + j \sin(\mu - v)) - d} \quad (5,7)$$

Si on utilise la méthode des cinq standards [3], on peut retrouver les q_i à partir de la matrice de calibration:

$$q_i = -\frac{1}{2c_{i2}} (c_{i3} + c_{i4}) \quad (5,8)$$

et

$$|q_i|^2 = \left| \frac{c_{i1}}{c_{i2}} \right| \quad (5,9)$$

où $i=3,4,5,6$.

La position des q_i est très importante car elle détermine la précision des paramètres qui serviront à évaluer les coefficients de réflexion à la charge. Idéalement les q_i devraient être repartis également autour de l'origine du plan complexe. Les valeurs optimales pour la grandeur des $|q_i|$ sont entre 0 et 1,5. Cependant si $|q_i| \approx 1$, la simulation par ordinateur a démontré que la calibration est moins bonne; et si $|\Gamma| \approx |q_i|$, la précision des mesures est plus faible. Donc des $|q_i|$ près de 1,5 sont des valeurs recommandables.

6. Linéarisation des diodes reliées au réflectomètre six-port

6.1 Six-port utilisant quatre diodes (Demers)

Aux port 3, 4 , 5 et 6 de la jonction six-port, il est fréquent qu'on utilise des diodes plutôt que des puissance-mètres. En plus d'être moins coûteuses, les diodes offrent une plus grandes rapidité de réaction ($1\mu s$ vs $1ms$) ; ce qui peut être important pour certaines applications.

L'inconvénient des diodes est qu'elles n'ont pas un comportement linéaire. Pour compenser la non-linéarité, des modèles exprimant la puissance en fonction de la tension ont été étudiés ([10] et [11]). La linéarisation des diodes permet d'obtenir les rapports de tension dont on a besoin pour faire la calibration. Voici le modèle suggéré par C. Zhou et X. Binchon:

$$P = CV \cdot 10^S \quad \text{avec} \quad S = \sum_{i=1}^N a_i x^i \quad (6,1)$$

où N est l'ordre du polynôme, C est une constante et

$$x = \ln\left(\frac{V}{q} + 1\right) \quad (6,2)$$

La constante q est arbitraire, on la fixe de façon à ce que x demeure inférieur à 0,5, ce qui assure la convergence de la sommation. L'ordre du polynôme est déterminé en effectuant des essais et en comparant les résultats.

En prenant le port 3 comme référence encore une fois, et en variant la puissance d'entrée, on peut déterminer les valeurs des a_i . On utilise la caractéristique suivante: pour une même charge sur le port 2, si on varie la puissance de la source, le rapport P_j/P_3

est invariant. Donc

$$\frac{P_j}{P_3} = \frac{P'_j}{P'_3} \Leftrightarrow \frac{C_k V_j \cdot 10^{S_j}}{C_3 V_3 \cdot 10^{S_3}} = \frac{C'_k V'_j \cdot 10^{S'_j}}{C'_3 V'_3 \cdot 10^{S'_3}} \quad (6,3)$$

On a donc

$$\log\left(\frac{V_j V_3}{V'_j V_3}\right) + \sum_{i=1}^N (a_{ji}(x_j^i - x_j^{i\wedge}) - a_{3i}(x_3^i - x_3^{i\wedge})) = 0 \quad (6,4)$$

Les paramètres a_{ji} et a_{3i} peuvent donc être évalués. On note cependant que trois S_3 différents correspondant à S_4 , S_5 et S_6 seront déterminés, donc six polynômes différents. Cette particularité est due au fait qu'on linéarise un rapport de puissance et non les puissances elles-mêmes.

Les rapports réels de puissance sont donnés par l'expression suivante:

$$R_j = \alpha_j \frac{P_j}{P_3}, \quad \alpha_j = \frac{C_j}{C_3} \quad (6,5)$$

Le facteur α_j est automatiquement inclus dans les constantes de calibration du six-port; on utilise donc

$$|w_k|^2 = \frac{P_j}{P_3} \quad \text{pour } \begin{matrix} k=1, 2, 3 \\ j=k+3 \end{matrix} \quad (6,6)$$

dans les calculs de calibration.

6.2 Six-port à trois diodes et un détecteur de puissance

Le principe de linéarisation [11] est semblable au cas précédent. On effectue cette fois les rapports entre les puissances calculées P_4 , P_5 , P_6 , et la puissance mesurée P_3 . On a:

$$R_k = \alpha_k \frac{P_k}{P_3} = \frac{\alpha_k V_k 10^{S_k}}{P_3}$$

où les S_k sont déterminés de la même façon que dans le cas où on a quatre diodes. L'avantage est qu'on a seulement 3 polynômes S_k , cette fois, car P_3 est une valeur mesurée. Il ne sera pas nécessaire d'étalonner la jonction en puissance car P_3 est la valeur dont on se sert pour calculer la puissance dissipée dans la charge.

7. Calibration en puissance d'une jonction six-port à 4 diodes

En utilisant un détecteur de puissance standard au deuxième port de sortie, on peut étalonner la jonction en puissance. Cette étape est très liée à la linéarisation des diodes car on manipule les mêmes équations. Comme le détecteur 3 est peu influencé par le coefficient de réflexion, il sert de référence pour les calculs. Il est facile de démontrer à l'aide des équations de base que:

$$P_L = K(|d - wc|^2 - |w - e|^2)P_3 = K|d-ce|^2 \frac{(1-|\Gamma|^2)}{|1+c\Gamma|^2} P_3 \quad (7,1)$$

où

$$P_3 = C_3 V_3 10^{S_3} \quad (7,2)$$

On peut donc trouver la valeur de

$$KC_3 = \frac{P_L}{(|d - wc|^2 - |w - e|^2) V_3 10^{S_3}} = \frac{P_L |1+c\Gamma|^2}{(1-|\Gamma|^2) |d-ce|^2 V_3 10^{S_3}} \quad (7,3)$$

À chaque charge sous test, correspond une puissance P_L dissipée dans la charge et un coefficient de réflexion Γ . À l'aide d'un puissance-mètre, on peut trouver la constante KC_3 et le coefficient de réflexion, ce qui permet de calculer P_L pour n'importe quel DUT connecté au port de mesure (port 2).

8. Calibration de l'analyseur de réseau à six-ports (ARSP)

8.1 Introduction

Il est possible de caractériser des composantes à deux ports à l'aide de deux réflectomètres six-ports [1]. On les relie comme illustré à la figure 4 avec un contrôleur de phase variable.

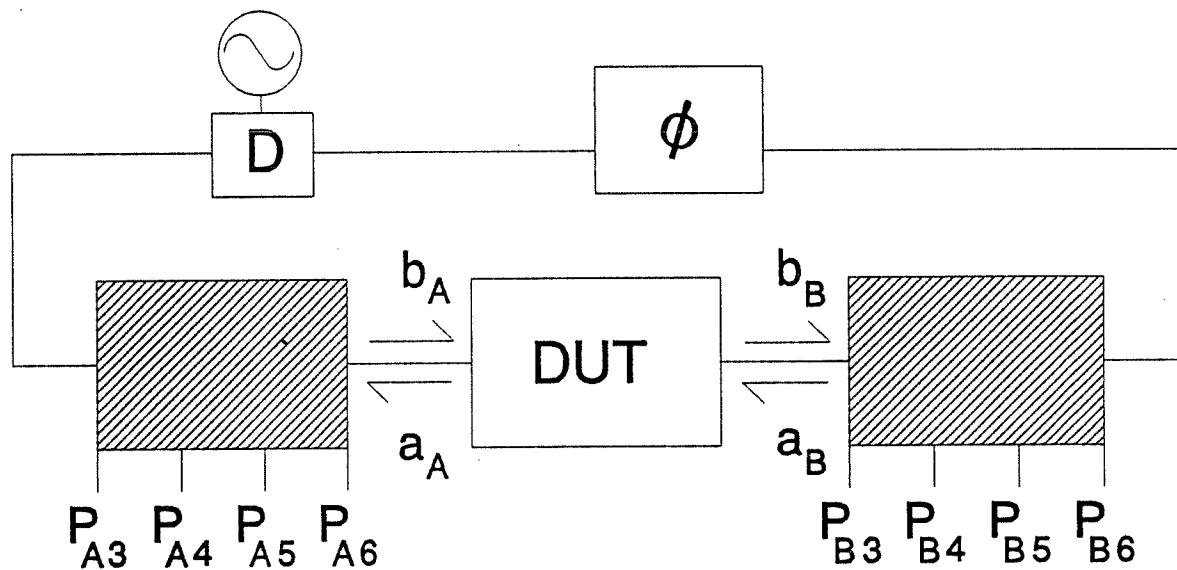


figure 4 : Caractérisation d'une jonction deux-port avec deux réflectomètres six-ports

Il faut effectuer trois essais différents pour faire la calibration à deux ports. Le premier consiste à relier directement les deux réflectomètres six-ports ensemble. Le second est une section de ligne de transmission placée entre les six-ports. Le dernier montage consiste à placer une charge à chaque six-port et de les intervertir ensuite afin de produire deux mesures jumelles. Lors de ce dernier essai, il n'y a pas de transmission entre les deux charges.

On peut représenter la composante sous-test par la matrice de dispersion suivante:

$$\begin{bmatrix} a_A \\ a_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_A \\ b_B \end{bmatrix} \quad (8,1)$$

alors on a que

$$\Gamma_A = \frac{a_A}{b_A} = s_{11} + s_{12} \frac{b_B}{b_A} \quad (8,2)$$

$$\Gamma_B = \frac{a_B}{b_B} = s_{22} + s_{21} \frac{b_A}{b_B} \quad (8,3)$$

On peut réunir ces deux équations en une seule en éliminant b_A et b_B :

$$\Gamma_A \Gamma_B = \Gamma_B s_{11} + \Gamma_A s_{22} + (s_{12} s_{21} - s_{11} s_{22}) \quad (8,4)$$

En provoquant trois déphasages différents avec le contrôleur de phase, on trouve trois paires de (Γ_A, Γ_B) , ce qui permet de calculer les coefficients de dispersion d'une composante deux-port réciproque ($s_{12} = s_{21}$ quand les deux ports transportent le même mode). Il y a toutefois une ambiguïté de phase pour s_{12} et s_{21} . Les coefficients de réflexion mesurés par les six-ports pour les composantes à deux ports peuvent être supérieurs à 1 contrairement au cas de composantes à un port.

8.2 Méthode de calibration d'ARSP (Hodgetts)

On définit de façon analogue au cas précédent:

$$\begin{aligned} Q_{Ak} &= \frac{P_{Ai}}{P_{A3}} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3 \\ Q_{Bk} &= \frac{P_{Bi}}{P_{B3}} \quad i = k + 3 \\ \text{et} \quad Q_{AB} &= \frac{P_{B3}}{P_{A3}} \end{aligned} \quad (8,5)$$

Q_{AB} n'est utile que lorsque s_{12} est différent de s_{21} .

On obtient w_A et w_B de la même façon qu'avec une composante à un port, à partir des rapports de puissance et avec les mêmes équations (voir la section procédure de mesures: méthode 3½ standards). Le principe de la boîte d'erreur sera également employé, on aura donc w_A correspondant à Γ_A avec une boîte d'erreur [A] et w_B correspondant à Γ_B avec une boîte d'erreur [B]. (voir figure 5)

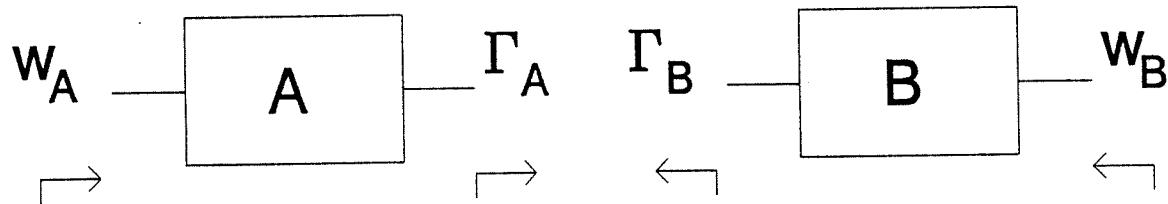


figure 5 : Boîtes d'erreur

Cependant l'ambiguïté de signe résolue pour la calibration à un port devra l'être aussi pour la calibration à deux ports. En fait, il y a deux signes ambigus: un pour w_A et un pour w_B . Les coefficients de réflexion Γ_A et Γ_B valent 1 lorsque les réflectomètres sont reliés directement. En utilisant ce fait et l'équation (3,11), on a que dans ce cas particulier:

$$\frac{(w_A - w_A''') (w_A' - w_A'')} {(w_A - w_A') (w_A'' - w_A''')} = \frac{(w_B - w_B''') (w_B' - w_B'')} {(w_B - w_B') (w_B'' - w_B''')} \quad (8,6)$$

En s'assurant de vérifier cette équation, on aura soit w_A et w_B ou soit w_A^* et w_B^* . Cette précision ne sera apportée qu'à la fin de la calibration. À ce moment là, si il faut changer les w , il suffira de prendre les conjugués complexes des paramètres calculés pour trouver les équations des vrais coefficients de réflexion.

On a vu: (équation (8,4))

$$\Gamma_A \Gamma_B = \Gamma_B S_{11} + \Gamma_A S_{22} + (S_{12} S_{21} - S_{11} S_{22}) \quad (8,7)$$

De la même façon, on peut définir une équation de la même forme entre w_A et w_B :

$$w_A w_B = w_B S_{11}' + w_A S_{22}' + (S_{12}' S_{21}' - S_{11}' S_{22}') \quad (8,8)$$

On peut se servir de la même forme d'équation pour exprimer Γ_A en fonction de w_A et Γ_B en fonction de w_B , mais il faut respecter les sens indiqués à la figure 5:

$$w_A \Gamma_A^{-1} = \Gamma_A^{-1} S_{11}^{(a)} + w_A S_{22}^{(a)} + (S_{12}^{(a)} S_{21}^{(a)} - S_{11}^{(a)} S_{22}^{(a)}) \quad (8,9)$$

$$\Gamma_B^{-1} w_B = w_B S_{11}^{(b)} + \Gamma_B^{-1} S_{22}^{(b)} + (S_{12}^{(b)} S_{21}^{(b)} - S_{11}^{(b)} S_{22}^{(b)}) \quad (8,10)$$

Si on exprime a_A et b_A en fonction de b_B et a_B plutôt que a_A et a_B en fonction de b_A et b_B comme à l'équation (8,1), on obtient:

$$\begin{bmatrix} a_A \\ b_A \end{bmatrix} = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} (S_{12} S_{21} - S_{11} S_{22}) & S_{11} \\ -S_{22} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_B \\ a_B \end{bmatrix} \quad (8,11)$$

Donc la matrice de cascade entre deux mesures w_U et Γ_U est:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{S_{21}^{(u)}} \begin{bmatrix} (S_{12}^{(u)} S_{21}^{(u)} - S_{11}^{(u)} S_{22}^{(u)}) & S_{11}^{(u)} \\ -S_{22}^{(u)} & 1 \end{bmatrix} \quad (8,12)$$

On peut donc écrire que

$$\Gamma_A = \frac{w_A - \left(\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)}{\left(\frac{a_{11}}{a_{22}}\right)\left(1 - w_A \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\right)} \quad (8,13)$$

$$\Gamma_B = \frac{w_B + \left(\frac{b_{21}}{b_{22}}\right)}{\left(\frac{b_{11}}{b_{22}}\right)\left(1 + w_B \left(\frac{b_{12}}{b_{11}}\right)\right)} \quad (8.14)$$

Afin d'obtenir une boîte d'erreur avec les paramètres c, d et e comme lors de la calibration à un port, on pose:

$$\begin{aligned} c_A &= \frac{a_{21}}{a_{22}} & c_B &= -\frac{b_{12}}{b_{22}} \\ d_A &= \frac{a_{11}}{a_{22}} & d_B &= \frac{b_{11}}{b_{22}} \\ e_A &= \frac{a_{12}}{a_{22}} & e_B &= -\frac{b_{21}}{b_{22}} \end{aligned} \quad (8,15)$$

Pour effectuer la calibration, il faut évaluer ces paramètres. D'abord on utilise l'équation (8,8)

$$w_A w_B = w_B S'_{11} + w_A S'_{22} + (S'_{12} S'_{21} - S'_{11} S'_{22}) \quad (8,16)$$

En variant la phase, on effectue trois mesures avec les réflectomètres reliés directement. On détermine les coefficients s_{11}' , s_{22}' et $(s_{12}' s_{21}' - s_{11}' s_{22}')$ d'une matrice de cascade [R] définie par:

$$\frac{1}{S'_{21}} [R] = [A] [B] = \frac{1}{S'_{21}} \begin{bmatrix} (S'_{12}S'_{21} - S'_{11}S'_{22}) & S'_{11} \\ -S'_{22} & 1 \end{bmatrix} \quad (8,17)$$

donc

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} = S'_{21} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (8,18)$$

Ensuite, on effectue trois autres mesures avec une ligne de transmission entre les réflectomètres. Cela permet de déterminer les coefficients d'une autre matrice de cascade, [P]:

$$\frac{1}{S''_{21}} [P] = [A] [L] [B] = \frac{1}{S''_{21}} \begin{bmatrix} (S''_{12}S''_{21} - S''_{11}S''_{22}) & S''_{11} \\ -S''_{22} & 1 \end{bmatrix} \quad (8,19)$$

donc

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = S''_{21} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (8,20)$$

La ligne de transmission crée un déphasage; la boîte d'erreur qui la représente est:

$$[L] = \begin{bmatrix} e^{-\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{+\delta_1} \end{bmatrix} \quad (8,21)$$

En définissant la matrice $[T] = [P][R]^{-1}\det[R]$, on peut montrer que

$$[T] = \phi [A] [L] [A]^{-1} \quad \text{où } \phi = \frac{S'_{21}}{S''_{21}} \det[R] \quad (8,22)$$

Donc en détaillant, on trouve

$$\begin{aligned} t_{11}a_{11} + t_{12}a_{21} &= \phi a_{11} e^{-\delta_1} \\ t_{21}a_{11} + t_{22}a_{21} &= \phi a_{21} e^{-\delta_1} \end{aligned} \quad (8,23)$$

$$\begin{aligned} t_{11}a_{12} + t_{12}a_{22} &= \phi a_{12}e^{\delta_1} \\ t_{12}a_{12} + t_{22}a_{22} &= \phi a_{22}e^{\delta_1} \end{aligned} \quad (8,24)$$

En regroupant les équations (8,23) et (8,24), on trouve que:

$$t_{21}\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right)^2 + (t_{22}-t_{11})\left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right) - t_{12} = 0 \quad (8,25)$$

$$t_{21}\left(\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)^2 + (t_{22}-t_{11})\left(\frac{a_{12}}{a_{22}}\right) - t_{12} = 0$$

Donc

$$\left(\frac{d_A}{c_A}, e_A\right) = \left(\frac{a_{11}}{a_{21}}, \frac{a_{12}}{a_{22}}\right) = \frac{t_{11} - t_{22} \pm \sqrt{(t_{11}-t_{22})^2 + 4t_{12}t_{21}}}{2t_{21}} \quad (8,26)$$

Note: On sait que a_{11}/a_{21} est différent de a_{12}/a_{22} car le produit $a_{12} \cdot a_{21}$ ne peut jamais prendre la valeur zéro. Donc l'un prend la valeur positive de la racine et l'autre la valeur négative. Les valeurs de a_{11}/a_{21} et a_{12}/a_{22} permettent de calculer les paramètres de la boîte d'erreur e_A et c_A/d_A . Généralement, les critères de design font que $|a_{11}/a_{12}| > |a_{21}/a_{22}|$.

Étant donné que les r_{ij} sont connus, on peut écrire l'équation (8,18) sous une forme mettant les paramètres de deux boîtes d'erreur en évidence:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = S'_{21} \begin{bmatrix} d_A & e_A \\ c_A & 1 \end{bmatrix} a_{22} \begin{bmatrix} d_B & -c_B \\ -e_B & 1 \end{bmatrix} b_{22} \quad (8,27)$$

Si on multiplie par $[A]^{-1}$ de chaque côté, on obtient:

$$a_{22}(s'_{21}b_{22}\det[A])^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -e_A \\ -c_A & d_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_B & -c_B \\ -e_B & 1 \end{bmatrix} \quad (8,28)$$

posons $a_{22}(s'_{21}b_{22}\det[A])^{-1}=K$, alors:

$$\begin{aligned} -c_B &= (r_{12} - e_A r_{22}) K \\ d_B &= (r_{11} - e_A r_{21}) K \\ -e_B &= (d_A r_{21} - c_A r_{11}) K \\ 1 &= (d_A r_{22} - c_A r_{12}) K \end{aligned} \quad (8,29)$$

donc

$$\frac{c_B}{d_B} = \frac{-r_{12} + e_A r_{22}}{r_{11} - e_A r_{21}} \quad (8,30)$$

$$d_B = \frac{r_{11} - e_A r_{21}}{d_A \left(r_{22} - \frac{c_A}{d_A} r_{12} \right)} \quad (8,31)$$

$$e_B = \frac{-r_{21} + \frac{c_A}{d_A} r_{11}}{r_{22} - \frac{c_A}{d_A} r_{12}} \quad (8,32)$$

où e_A et c_A/d_A sont déjà calculés. Donc tous les paramètres des boîtes d'erreur peuvent être calculés sauf d_A et d_B dont on a seulement la valeur du produit. On effectue alors des mesures avec deux charges que l'on échange, ce qui donne $\Gamma_A = \Gamma_B'$ et $\Gamma_B = \Gamma_A'$. Grâce à cette information et à la valeur connue de $d_B d_A$, on peut trouver d_A et d_B en utilisant les équations suivantes:

$$\Gamma_A = \frac{w_A - e_A}{d_A \left(1 - w_A \frac{c_A}{d_A}\right)} \quad \text{et} \quad \Gamma_B = \frac{w_B - e_B}{d_B \left(1 - w_B \frac{c_B}{d_B}\right)} \quad (8,33)$$

Les paramètres c_A , d_A , e_A , c_B , d_B et e_B étant tous déterminés, la calibration est presque complétée. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'on a bien choisi w_A et w_B et non w_A^* et w_B^* . Pour cette vérification, on divise la deuxième équation (8,23) par la deuxième (8,24) et en utilisant les résultats de l'équation (8,26) on exprime $e^{-2\delta l}$ uniquement en fonction de t_{ij} :

$$x = e^{-2\delta l} = \frac{t_{11} + t_{22} \mp \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}t_{21}}}{t_{11} + t_{22} \pm \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}t_{21}}} \quad (8,34)$$

il y a deux solutions, mais seulement celle dont le module est inférieur à un est valable car la ligne de transmission atténue un peu le signal. Afin de s'assurer qu'on a bien w_A et w_B et non w_A^* et w_B^* , il suffit de vérifier que

$$\ln(x) \approx -2j\beta l + 2n\pi \quad (8,35)$$

Sinon, il faut choisir les signes inverses pour calculer w_A et w_B . Il faudra aussi prendre les conjugués complexes des valeurs calculées pour les paramètres des boîtes d'erreur.

Calcul de $|s_{12}|$ et $|s_{21}|$

Si la jonction n'est pas réciproque, on peut évaluer $|s_{12}|$ et $|s_{21}|$ grâce à Q_{AB} qui a été défini au début de ce chapitre [1]. On peut montrer facilement que

$$P_A = K_A P_{A3} (|d_A - w_A c_A|^2 - |w_A - e_A|^2) \quad (8,36)$$

Comme $P_A = (1 - |\Gamma_A|^2) |b_A|^2$, on a que

$$|b_A|^2 = K_A P_{A3} |d_A - w_A c_A|^2 \quad (8,37)$$

donc

$$\left| \frac{b_A}{b_B} \right|^2 = \frac{K_A}{K_B} \left| \frac{d_A - w_A c_A}{d_B - w_B c_B} \right|^2 \frac{P_{A3}}{P_{B3}} \quad (8,38)$$

Grâce à l'essai où les six-ports sont reliés directement, on peut déterminer K_A/K_B car dans ce cas $P_A = P_B$ et donc

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{P_{B3}}{P_{A3}} \left(\frac{|d_B - w_B c_B|^2 - |w_B - e_B|^2}{|d_A - w_A c_A|^2 - |w_A - e_A|^2} \right) \quad (8,39)$$

où $P_{B3}/P_{A3} = Q_{AB}$. On sait que (équations (8,2) et (8,3))

$$|s_{12}| = |(\Gamma_A - s_{11})| \left| \frac{b_A}{b_B} \right| \quad \text{et} \quad |s_{21}| = |(\Gamma_B - s_{22})| \left| \frac{b_B}{b_A} \right| \quad (8,40)$$

donc on peut évaluer $|s_{12}|$ et $|s_{21}|$ pour n'importe quelle composante sous test. Comme on varie la phase, on a plusieurs données et on peut faire la moyenne des $|s_{12}|$ et $|s_{21}|$ pour obtenir des valeurs plus justes.

Mesures des phases de s_{12} et s_{21}

On peut obtenir les mesures des phases de s_{12} et s_{21} en modifiant légèrement le circuit [1]. Il faut ajouter deux isolateurs (I) entre les six-ports et la source. On utilise deux standards réciproques dont les phases de s_{12} sont différentes et une section de ligne de transmission non réfléchissante. Ces trois jonctions doivent être exactement de la même longueur. De plus le déphasage créé par le contrôleur de phase doit être parfaitement reproductible.

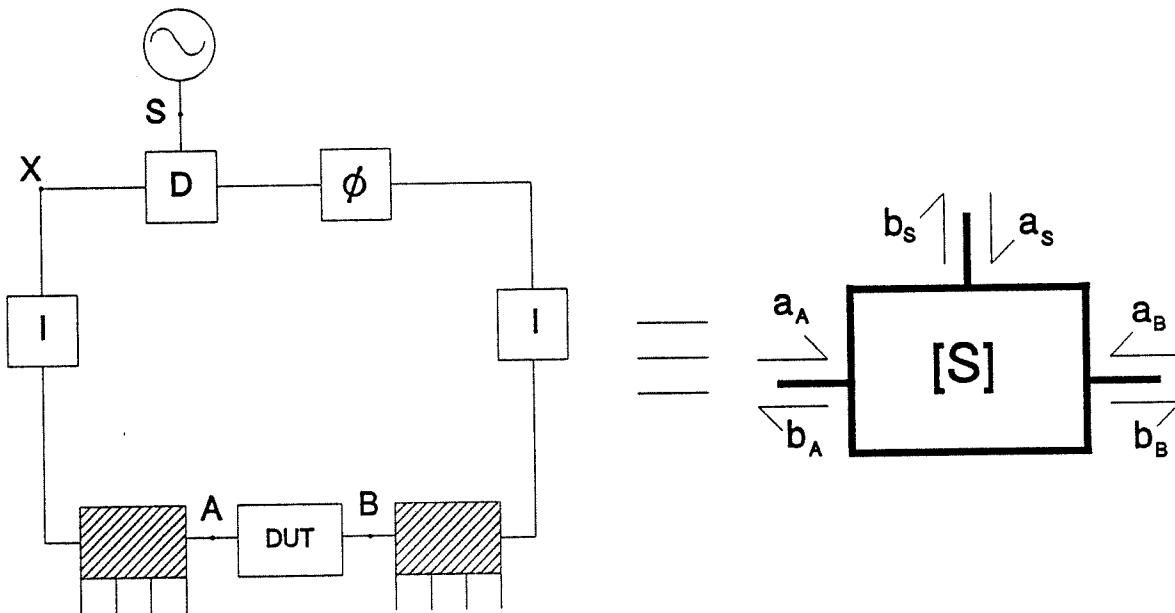


figure 6 : Représentation du circuit par un trois-port

On peut représenter le circuit complet par un trois-port. Physiquement, les trois plans de mesure sont situés de part et d'autre de la composante sous test (A et B) et à la source (S), avant le diviseur de puissance (D) (voir figure 6). On a:

$$\begin{bmatrix} b_A \\ b_B \\ b_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_A \\ a_B \\ a_S \end{bmatrix} \quad (8,41)$$

Donc on déduit que:

$$b_A = u_{11}a_A + u_{12}a_B + \frac{u_{13}}{u_{23}}(b_B - u_{21}a_A - u_{22}a_B) \quad (8,42)$$

On peut exprimer l'équation précédente comme suit:

$$\frac{b_A}{b_B} = \left(u_{11} - \frac{u_{13}}{u_{23}}u_{21} \right) \frac{b_A}{b_B} \Gamma_A + \left(u_{12} - \frac{u_{13}}{u_{23}}u_{22} \right) \Gamma_B + \frac{u_{13}}{u_{23}} \quad (8,43)$$

On suppose que grâce aux isolateurs, $u_{12} = u_{21} = 0$. En reliant directement les deux réflectomètres, on a que $b_A/b_B = \Gamma_B$ et

$$\Gamma_B = A_1 + A_2 - A_3\Gamma_B \quad (8,44)$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{u_{13}}{u_{23}} \\ A_2 &= u_{11} \\ A_3 &= \frac{u_{22}u_{13}}{u_{23}} \end{aligned} \quad (8,45)$$

Ensuite on insère la section de ligne de transmission au point X du circuit (figure 6), ce qui crée un déphasage et u_{13} est multiplié par $e^{-\delta l}$. On effectue alors des essais avec différents déphasages pour chacun des standards réciproques connus. On détermine les rapports b_A/b_B à l'aide de l'équation (8,43) et on a:

$$\frac{b_A}{b_B} = A_1 e^{-\delta l} + A_2 \frac{b_A}{b_B} \Gamma_A - A_3 e^{-\delta l} \Gamma_B \quad (8,46)$$

Les constantes A_1 , A_2 et A_3 peuvent donc être déterminées pour chaque déphasage. On peut donc trouver s_{12} et s_{21} pour n'importe quel deux-port en utilisant le résultat de l'équation (8,46) dans l'équation (8,40).

8.3 TRL: Through-Reflect-Line (Engen)

Le TRL [13] est une technique semblable à la précédente qui utilise les trois essais suivants pour déterminer les coefficients de dispersion:

-T: Connexion des six-ports directement ou avec une courte ligne de transmission. Si on utilise cette option, on doit s'assurer que l'impédance de cette ligne est la même que celle de la ligne de transmission L.

--R: Les six-ports sont court-circuités ou en circuit ouvert, ce qui donne un $\Gamma_A = \Gamma_B$ près de 1. On a pour ce cas $s_{11} = s_{22} = \Gamma$, idéalement égal à 1.

-L: Une section de ligne de transmission relie les deux six-ports. La phase doit être différente de celle de T. La longueur optimale est un quart de longueur d'onde, ou un déphasage de 90° par rapport à T à la fréquence centrale. L'atténuation n'a pas à être connue.

Les opérations à effectuer sont identiques à celles décrites précédemment à l'exception de l'étape qui consiste à déterminer les constantes d_A et d_B (p.46). Plutôt que d'effectuer des mesures avec une charge double, on utilise le montage R. On sait que

$$\Gamma_A = \frac{w_A - e_A}{d_A \left(1 - w_A \frac{c_A}{d_A}\right)} \quad \text{et} \quad \Gamma_B = \frac{w_B - e_B}{d_B \left(1 - w_B \frac{c_B}{d_B}\right)} \quad (8,47)$$

Comme $\Gamma_A = \Gamma_B$ dans ce cas, on obtient:

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{(w_A - e_A) \left(1 - w_B \frac{c_B}{d_B}\right)}{(w_B - e_B) \left(1 - w_A \frac{c_A}{d_A}\right)} \quad (8,48)$$

En utilisant l'expression du produit de d_A et d_B (8,31):

$$d_A d_B = \frac{r_{11} - e_A r_{21}}{\left(r_{22} - \frac{c_A}{d_A} r_{12} \right)} \quad (8,49)$$

avec l'équation (8,48), on trouve:

$$d_A = \pm \sqrt{\frac{(w_A - e_A) \left(1 - w_B \frac{c_B}{d_B} \right) (r_{11} - e_A r_{21})}{(w_B - e_B) \left(1 - w_A \frac{c_A}{d_A} \right) \left(1 - r_{12} \frac{c_A}{d_A} \right)}} \quad (8,50)$$

où

$$d_B = \frac{r_{11} - e_A r_{21}}{d_A r_{22} - c_A r_{12}} \quad (8,51)$$

On peut donc déterminer d_A et d_B à un signe près. Connaissant la nature de la charge utilisée, on peut, à l'aide de l'équation (8,33), choisir le signe qui convient.

Cas particulier: Analyseurs de réseaux

Avec les analyseurs de réseaux usuels, on a accès aux valeurs absolues a_1' , b_1' , a_2' et b_2' . Cela permet d'obtenir en deux mesures les coefficients de dispersion S' . Donc, dans ce cas, deux excitations seulement sont requises pour la calibration et lors des mesures.

On utilise le principe de matrices de cascade et on a que $[A][B]=[P_1]$, $[A][R][B]=[P_2]$ et $[A][L][B]=[P_3]$. Pour chaque $[P_i]$ on a: $b_1' = p_{11} a_2' + p_{12} b_2'$ et $b_1' = p_{11} a_2' + p_{12} b_2'$. À l'aide de deux excitations, on peut déterminer les p_{ij} pour chaque standard.

En suivant les étapes telles que décrites dans les sections 8,2 et 8,3, on trouve les paramètres des boîtes d'erreur c_A , d_A , e_A , c_B , d_B et e_B .

8.4 Calibration d'un ARSP sans isolateurs (Ghannouchi)

Les isolateurs réduisent la largeur de bande utilisable. Il est donc avantageux d'utiliser une technique permettant de déterminer les paramètres s_{ij} sans isolateurs [15].

Définissons d'abord une variable g_k :

$$g_k = \frac{b_{Bk}}{b_{Ak}} \quad (8,52)$$

où k représente l'excitation. L'excitation est le déphasage produit par le contrôleur de phase. Pour cette technique, il est essentiel de pouvoir reproduire la même excitation plusieurs fois. On peut écrire l'équation (8,1) sous une nouvelle forme :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ g_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{Ak} \\ g_k \Gamma_{Bk} \end{bmatrix} \quad (8,53)$$

Donc lorsque g_k sera déterminé pour deux excitations données, il sera possible d'évaluer les quatre paramètres de dispersion d'un deux ports à l'aide de deux mesures seulement.

Pour déterminer g_k , on se base sur la représentation du système actuel par un trois-port, on a :

$$\begin{aligned} b_{Ak} &= u_{10}^{(k)} a_{Sk} + u_{11}^{(k)} a_{Ak} + u_{12}^{(k)} a_{Bk} \\ b_{Bk} &= u_{20}^{(k)} a_{Sk} + u_{21}^{(k)} a_{Ak} + u_{22}^{(k)} a_{Bk} \end{aligned} \quad (8,54)$$

où u_{ij} sont les paramètres de dispersion du trois-port. On peut réécrire ce système d'équations comme suit:

$$\begin{bmatrix} 1-u_{11}^{(k)}\Gamma_{Ak} & -u_{12}^{(k)}\Gamma_{Bk} \\ -u_{21}^{(k)}\Gamma_{Ak} & 1-u_{22}^{(k)}\Gamma_{Bk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{Ak} \\ b_{Bk} \end{bmatrix} = a_{Sk} \begin{bmatrix} u_{10}^{(k)} \\ u_{20}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (8,55)$$

en utilisant la règle de Crammer pour isoler b_{1k} et b_{2k} et en effectuant le quotient, on trouve que

$$g_k = \frac{\frac{B_k}{A_k} + \frac{D_k}{A_k}\Gamma_{Ak}}{\frac{A_k + C_k\Gamma_{Bk}}{1 + \left(\frac{C_k}{A_k}\right)\Gamma_{Bk}}} = \frac{\left(\frac{B_k}{A_k}\right) + \left(\frac{D_k}{A_k}\right)\Gamma_{Ak}}{1 + \left(\frac{C_k}{A_k}\right)\Gamma_{Bk}} \quad (8,56)$$

où A_k , B_k , C_k et D_k sont définis en fonction des u_{ij} . En utilisant l'équation (8,4), .

$$\Gamma_{Ak}\Gamma_{Bk} = \Gamma_{Bk}s_{11} + \Gamma_{Ak}s_{22} + (s_{12}s_{21} - s_{11}s_{22}) \quad (8,57)$$

on peut trouver s_{ij} à l'aide de trois excitations, pour un deux-port réciproque. À partir de l'équation (8,53) et l'équation (8,56), on peut développer une expression où les seules inconnues sont les rapports B_k/A_k , C_k/A_k et D_k/A_k :

$$s_{12}\left(\frac{B_k}{A_k}\right) + (\Delta - \Gamma_{Ak}s_{22})\left(\frac{C_k}{A_k}\right) + s_{12}\Gamma_{Ak}\left(\frac{D_k}{A_k}\right) = \Gamma_{Ak} - s_{11} \quad (8,58)$$

où

$$\Delta = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} \quad (8,59)$$

À l'aide de trois standards utilisés à trois niveaux d'excitation différents, on trouve les valeurs de B_k/A_k , C_k/A_k et D_k/A_k correspondant à ces excitations. On a donc g_k , ce qui permet de trouver les paramètres de dispersion de n'importe quel deux-port en effectuant deux mesures.

8.5 Méthode de calibration Through-Matched-Unmatched (TMU)

Une méthode de calibration pour analyseurs de réseaux a été développée par H. Heuermann et B. Schiek [14]. Il est possible de l'adapter pour calibrer les six-ports. Tout comme dans le cas de la méthode du TRL, on peut effectuer la calibration deux-port directement à partir de w , ce qui limite le nombre de standards connus à utiliser. On utilise le principe de boîtes d'erreur tel qu'illustré à la figure 7.

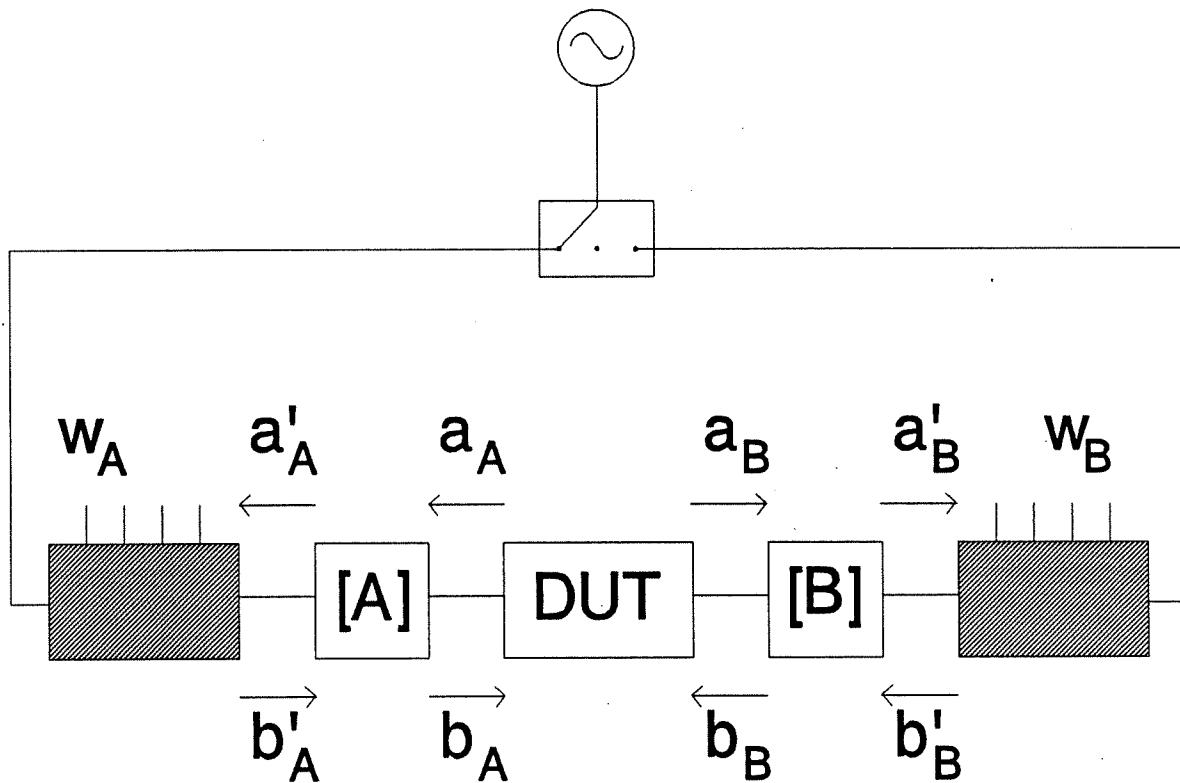


figure 7: Les trois excitations du système

On a que

$$\begin{bmatrix} b'_A \\ a'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_A \\ b_A \end{bmatrix} \quad (8,60)$$

$$\begin{bmatrix} a'_B \\ b'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_B \\ a_B \end{bmatrix} \quad (8,61)$$

$$\begin{bmatrix} a_A \\ b_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_B \\ a_B \end{bmatrix} \quad (8,62)$$

où les d_{ij} sont définis en fonction de s_{ij} selon l'équation (8,11), soit:

$$[D] = \frac{1}{s_{21}} \begin{bmatrix} -\det[S] & s_{11} \\ -s_{22} & 1 \end{bmatrix} \quad (8,63)$$

donc

$$\begin{bmatrix} b'_A \\ a'_A \end{bmatrix} = [A] [D] [B]^{-1} \begin{bmatrix} a'_B \\ b'_B \end{bmatrix} \quad (8,64)$$

Avec les six-ports, les mesures auxquelles on a accès sont w_A et w_B . On modifiera donc le système en conséquence:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{w_A} \\ 1 \end{bmatrix} = [A] [D] [B]^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \frac{\alpha}{w_B} \end{bmatrix} \quad (8,65)$$

où

$$\alpha = \frac{a'_B}{a'_A} \quad (8,66)$$

On utilise trois excitations différentes pour cette calibration:

1- on alimente le circuit par la gauche seulement, la droite étant temporairement reliée à une charge adaptée.

2- on alimente le circuit par la droite seulement, la gauche étant temporairement reliée à une charge adaptée.

3- on alimente les deux côtés à la fois (excitation quelconque).

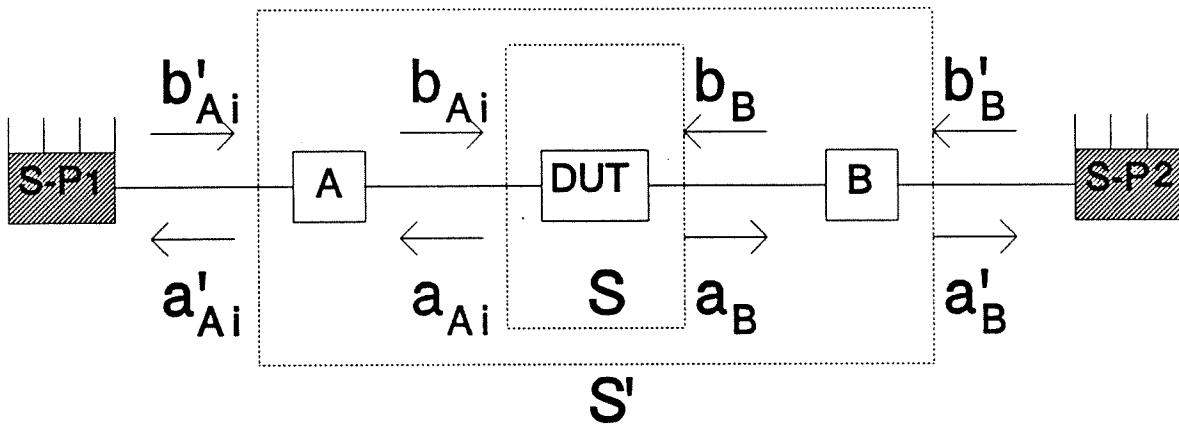


figure 8: Coefficients de dispersion S et S' .

On doit définir les constantes α_i . On sait que:

$$S_{12} = \frac{a_A}{b_B} \Big|_{b_A=0} \quad \text{et} \quad S_{21} = \frac{a_B}{b_A} \Big|_{b_B=0} \quad (8,67)$$

De la même façon, si l'on considère la matrice S' de coefficients de dispersion définissant a_A' et a_B' en fonction de b_A' et b_B' , on a que :

$$S'_{12} = \frac{a'_A}{b'_B} \Big|_{b'_A=0} \quad \text{et} \quad S'_{21} = \frac{a'_B}{b'_A} \Big|_{b'_B=0} \quad (8,68)$$

On peut donc redéfinir les constantes α_1 et α_2 comme suit:

$$\alpha_1 = \frac{a'_B}{a'_A} = \frac{S'_{21}}{w_{A1}} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{a'_A}{a'_B} = \frac{w_{B2}}{S'_{12}} \quad (8,69)$$

En reprenant l'équation (8,65) pour ces deux excitations, on a que

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{w_{A1}} \\ 1 \end{bmatrix} = [A] [D] [B]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{S'_{21}}{w_{A1}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8,70)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [A] [D] [B]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{W_{B2}}{S'_{12}} \\ \frac{1}{S'_{12}} \end{bmatrix} \quad (8,71)$$

Si on combine les équations (8,70) et (8,71) on obtient:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{W_{A1}} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [A] [D] [B]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{S'_{21}}{W_{A1}} & \frac{W_{B2}}{S'_{12}} \\ 0 & \frac{1}{S'_{12}} \end{bmatrix} \quad (8,72)$$

Posons

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{W_{A1}} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{S'_{21}}{W_{A1}} & \frac{W_{B2}}{S'_{12}} \\ 0 & \frac{1}{S'_{12}} \end{bmatrix}^{-1} = [A] [D] [B]^{-1} \quad (8,73)$$

Si on utilise un deux-port réciproque, $s_{12} = s_{21}$ et $s_{12}' = s_{21}'$. On trouve que:

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{W_{A1}} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{S'_{12}} & -\frac{W_{B2}}{S'_{12}} \\ 0 & \frac{S'_{12}}{W_{A1}} \end{bmatrix} W_{A1} \quad (8,74)$$

donc

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{S'_{12}} & \frac{-W_{B2}}{S'_{12}} \\ \frac{W_{A1}}{S'_{12}} & \frac{-W_{B2}W_{A1} + S'_{12}^2}{S'_{12}} \end{bmatrix} \quad (8,75)$$

Selon l'équation (8,64), on a:

$$\begin{bmatrix} b'_A \\ a'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_B \\ b'_B \end{bmatrix} \quad (8,76)$$

On doit décrire le paramètre s_{12}' en fonction uniquement de valeurs mesurées. D'abord on écrit la matrice [M] sous la même forme que la matrice [D]; pour cela, on utilise l'équation (8,11). On obtient:

$$\begin{bmatrix} a'_A \\ b'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{22} & m_{21} \\ m_{12} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b'_B \\ a'_B \end{bmatrix} \quad (8,77)$$

et

$$\begin{bmatrix} m_{22} & m_{21} \\ m_{12} & m_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{s'_{21}} \begin{bmatrix} -\text{det}S' & s'_{11} \\ -s'_{22} & 1 \end{bmatrix} \quad (8,78)$$

En effectuant l'identification, on trouve que:

$$s'_{11} = w_{A1} \quad \text{et} \quad s'_{22} = w_{B2} \quad (8,79)$$

On utilise l'équation (8,8) et les résultats des trois excitations pour déterminer la valeur de s_{12}' :

$$w_{A3}w_{B3} = w_{B3}w_{A1} + w_{A3}w_{B2} + (s'_{12}^2 - w_{A1}w_{B2}) \quad (8,80)$$

$$s'_{12} = \sqrt{w_{A3}w_{B3} + w_{A1}w_{B2} - w_{A3}w_{B2} - w_{B3}w_{A1}} \quad (8,81)$$

On peut remplacer les s_{12}' dans la matrice [M]. Celle-ci dépend donc uniquement de valeurs mesurées. Pour effectuer la calibration, on utilise 3 standards réciproques:

1- on relie les réflectomètres directement (THROUGH):

$$[S1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8,82)$$

2- un deux-port bien adapté ($Z_{in}=Z_{out}=50\Omega$):

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & f \\ f & 0 \end{bmatrix} \quad (8,83)$$

3- un deux-port non-adapté:

$$[S_3] = \begin{bmatrix} g & h \\ h & g \end{bmatrix} \quad (8,84)$$

On a: $[M_1] = [A][B]^{-1}$ (8,85)
 $[M_2] = [A][D_2][B]^{-1}$
 $[M_3] = [A][D_3][B]^{-1}$

donc $[A][D_2] = [M_2][M_1]^{-1}[A]$ (8,86)
 $[A][D_3] = [M_3][M_1]^{-1}[A]$

Si on pose

$$[M_2][M_1]^{-1} = P, \quad (8,87)$$

$$[M_3][M_1]^{-1} = Q,$$

$$[M_3][M_2]^{-1} = R$$

$$\text{et } [D_3][D_2]^{-1} = T,$$

alors on peut montrer que

$$[A][D_2] = [P][A] \quad (8,88)$$

$$[A][D_3] = [Q][A] \quad (8,89)$$

$$[A][T] = [R][A] \quad (8,90)$$

où

$$[T] = \frac{f}{h} \begin{bmatrix} -\det[S_3] & g \\ -g & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\det[S_2] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{f}{h} \begin{bmatrix} -\frac{\det[S_3]}{f^2} & g \\ -\frac{g}{f^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (8,91)$$

Il a été montré mathématiquement que des matrices $[U]$ et $[V]$ de la forme $[S][U] = [V][S]$ ont la propriété suivante: $\sum u_{ii} = \sum v_{ii}$. En appliquant cette propriété à l'équation (8,88), on trouve:

$$\frac{f^2 + 1}{f} = p_{11} + p_{22} \quad (8,92)$$

À partir de cette équation, on peut exprimer f en fonction des p_{ij} qui sont des valeurs connues. Une connaissance approximative du second standard permet de choisir le bon signe dans l'expression obtenue:

$$f = \frac{(p_{11} + p_{22}) \pm \sqrt{(p_{11} + p_{22})^2 - 4}}{2} \quad (8,93)$$

On veut trouver une équation exprimant h en fonction de p_{ij} , r_{ij} et f qui sont des valeurs connues. À partir des équations (8,89) et (8,90) et de la propriété énoncée plus tôt, on trouve que:

$$\frac{f}{h} \left(1 - \frac{\det[S3]}{f^2} \right) = r_{11} + r_{22} \quad (8,94)$$

et

$$\frac{1 - \det[S3]}{h} = q_{11} + q_{22} \quad (8,95)$$

En éliminant le déterminant de [S3], on trouve que

$$h = \frac{1 - f^2}{(q_{11} + q_{22}) - f(r_{11} + r_{22})} \quad (8,96)$$

En reprenant l'équation (8,95) avec (8,96), on peut écrire que

$$g = \left(\frac{f(r_{11} + r_{22}) - f^2(q_{11} + q_{22})}{f(r_{11} + r_{22}) - (q_{11} + q_{22})} - h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8,97)$$

Calibration

Maintenant, il faut déterminer les coefficients a_{ij} . Les équations (8,88), (8,89) et (8,90) ont la forme:

$$[A][D] = [X][A] \rightarrow [A] - [X][A][D]^{-1} = 0 \quad (8,98)$$

On peut utiliser les quatres équations de chacun des trois systèmes pour obtenir un seul système de douze équations de la forme

$$[C][\bar{A}] = 0 \quad \text{où} \quad [\bar{A}] = [a_{11} \ a_{12} \ a_{21} \ a_{22}]^T \quad (8,99)$$

On peut alors utiliser une technique de résolution telle que SVD (singular value décomposition) pour déterminer les a_{ij} . Cette méthode permet de résoudre le système d'équations indépendamment des singularités que peut comporter la matrice $[C]$ et donne la meilleure solution au sens des moindres carrés.

Il s'agit tout d'abord de décomposer la matrice $[A]$ pour obtenir la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} \\ C_{71} & C_{72} & C_{73} & C_{74} \\ C_{81} & C_{82} & C_{83} & C_{84} \\ C_{91} & C_{92} & C_{93} & C_{94} \\ C_{101} & C_{102} & C_{103} & C_{104} \\ C_{111} & C_{112} & C_{113} & C_{114} \\ C_{121} & C_{122} & C_{123} & C_{124} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \\ u_{51} & u_{52} & u_{53} & u_{54} \\ u_{61} & u_{62} & u_{63} & u_{64} \\ u_{71} & u_{72} & u_{73} & u_{74} \\ u_{81} & u_{82} & u_{83} & u_{84} \\ u_{91} & u_{92} & u_{93} & u_{94} \\ u_{101} & u_{102} & u_{103} & u_{104} \\ u_{111} & u_{112} & u_{113} & u_{114} \\ u_{121} & u_{122} & u_{123} & u_{124} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{bmatrix}^T$$

où $[U]$ et $[V]$ sont des matrices orthogonales selon les colonnes. En normalisant par rapport au paramètre a_{22} , on a le système

$[C][A_N] = E$, et SDV résout:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \end{bmatrix} = [V] \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{w_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{w_4} \end{bmatrix} [U]^T [E] \quad (8,100)$$

Avec ce résultat, on peut utiliser le premier standard pour déterminer $[B]$: $[B] = [M1]^{-1}[A]$.

Pour chacun des trois standards utilisés avec la troisième excitation, on pose $g_3' = b_{B3}' / b_{A3}'$; on peut écrire que:

$$\begin{bmatrix} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ g_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{A3} \\ g_3' w_{B3} \end{bmatrix} \quad (8,101)$$

En utilisant la représentation du système par un trois-port, on a:

$$\begin{aligned} b_{A3}' &= v_{10} a_{S3}' + v_{11} a_{A3}' + v_{12} a_{B3}' \\ b_{B3}' &= v_{20} a_{S3}' + v_{21} a_{A3}' + v_{22} a_{B3}' \end{aligned} \quad (8,102)$$

On peut réécrire ce système comme suit:

$$\begin{bmatrix} 1 - v_{11} w_{A3} & -v_{12} w_{B3} \\ -v_{21} w_{A3} & 1 - v_{22} w_{B3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{A3}' \\ b_{B3}' \end{bmatrix} = a_{S3}' \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} \quad (8,103)$$

En utilisant la règle de Crammer, on trouve une expression pour g_3' :

$$g_3 = \frac{\frac{B_3}{A_3} + \frac{D_3}{A_3} w_{A3}}{\frac{B_3}{A_3} + \frac{C_3}{A_3} w_{B3}} = \frac{\left(\frac{B_3}{A_3}\right) + \left(\frac{D_3}{A_3}\right) w_{A3}}{1 + \left(\frac{C_3}{A_3}\right) w_{B3}} \quad (8,104)$$

Les paramètres A_3 , B_3 , C_3 et D_3 ne dépendent pas de la composante sous-test, mais uniquement du circuit. À partir de l'équation (8,101) et l'équation (8,104), on peut développer une expression où les seules inconnues sont les rapports B_3/A_3 , C_3/A_3 et D_3/A_3 :

$$s'_{12} \left(\frac{B_3}{A_3} \right) + (\Delta' - w_{A3}s'_{22}) \left(\frac{C_3}{A_3} \right) + s'_{12}w_{A3} \left(\frac{D_3}{A_3} \right) = w_{A3} - s'_{11} \quad (8,105)$$

où

$$\Delta' = s'_{22}s'_{11} - s'_{12}s'_{21} \quad (8,106)$$

A l'aide des trois standards de calibration utilisés avec la troisième excitation, on trouve les valeurs de B_3/A_3 , C_3/A_3 et D_3/A_3 , ce qui permet d'évaluer g_3 pour n'importe quelle composante en effectuant la troisième excitation. La calibration est terminée, on peut maintenant trouver les paramètres S d'une composante quelconque en utilisant les trois mêmes excitations que lors de la calibration.

Pour une composante inconnue:

On trouve s_{11}' et s_{22}' directement en mesurant w_{A1} et w_{B2} respectivement et on utilise l'équation (8,8) pour évaluer le déterminant $s_{11}'s_{22}' - s_{12}'s_{21}'$. Ensuite, on reprend les équations (8,101) et (8,104) afin de calculer s_{12}' et s_{21}' . Enfin on réutilise l'équation (8,72) pour former le système suivant:

$$[A]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s'_{21}} & \frac{-w_{B2}}{s'_{21}} \\ \frac{w_{A1}}{s'_{21}} & \frac{-w_{B2}w_{A1} + s'_{21}s'_{12}}{s'_{21}} \end{bmatrix} [B] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (8,107)$$

On peut calculer les paramètres d_{ij} du deux-port en effectuant le produit et par identification avec l'équation (8,63), on trouve les

coefficients de dispersion S:

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{d_{12}}{d_{22}} \\ s_{12} &= d_{11} - \frac{d_{12}d_{21}}{d_{22}} \\ s_{21} &= \frac{1}{d_{22}} \\ s_{22} &= -\frac{d_{21}}{d_{22}} \end{aligned} \tag{8,108}$$

Cas particulier: analyseur de réseaux

Avec les analyseurs de réseaux usuels, on peut obtenir les coefficients de dispersion S' en utilisant seulement deux excitations. On peut alors utiliser l'équation (8,75) directement:

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s'_{12}} & \frac{-s'_{22}}{s'_{21}} \\ \frac{s'_{11}}{s'_{12}} & \frac{s'_{21}}{s'_{22}} \\ \frac{s'_{11}}{s'_{21}} & \frac{-s'_{22}s'_{11} + s'_{12}s'_{21}}{s'_{21}} \end{bmatrix} \tag{8,109}$$

où tout les paramètres sont connus. On évalue les matrices [A] et [B] selon la méthode décrite plus haut. Pour la composante sous-test inconnue, on utilise deux excitations pour déterminer les paramètres S', ensuite on obtient les paramètres d_{ij} en résolvant l'équation (8,107) et enfin l'équation (8,108) permet de calculer les coefficients de dispersion S.

8.6 Méthode de calibration à 16 termes d'erreur pour mesures sous pointes (Buthler)

Cette méthode [16], élaborée pour un analyseur de réseau permet d'améliorer la calibration lorsqu'on l'adapte aux six-ports. Les seize termes d'erreur permettent de tenir compte des relations de couplage entre les signaux entrants et les signaux réfléchis. On commence par calibrer avec une autre méthode, puis on utilise celle-ci pour préciser les résultats. La calibration nous permet d'obtenir des paramètres s_{ij} "mesurés":

$$\begin{bmatrix} a_A \\ a_B \end{bmatrix} = [S_m] \begin{bmatrix} b_A \\ b_B \end{bmatrix} \quad (8,110)$$

On définit les paramètres "corrigés" avec les tensions corrigées:

$$\begin{bmatrix} a_A^* \\ a_B^* \end{bmatrix} = [S_c] \begin{bmatrix} b_A^* \\ b_B^* \end{bmatrix} \quad (8,111)$$

Supposons une matrice $[T]$ comportant les seize paramètres d'erreur telle que:

$$\begin{bmatrix} a_A \\ a_B \\ b_A \\ b_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_A^* \\ a_B^* \\ b_A^* \\ b_B^* \end{bmatrix} \quad (8,112)$$

où

$$\begin{array}{c|cc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ \hline \hline t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \end{array} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} \quad (8,113)$$

On peut montrer assez facilement que

$$[T_1][S_c] + [T_2] - [S_m][T_3][S_c] - [S_m][T_4] = 0 \quad (8,114)$$

À l'aide de quatre standards, on obtient seize équations et on peut déterminer les seize t_{ij} inconnus; on a un système de la forme $[A][T] = 0$. On suggère de solutionner ce système à l'aide de la procédure SDV. Le principe général de cette technique est de décomposer la matrice $[A]$ en trois matrices $[U][W][V]^T$ où $[W]$ est diagonale et les colonnes de $[V]$ et $[U]$ sont orthogonales. Cette méthode permet de résoudre le système d'équations indépendamment des singularités que peut comporter la matrice $[A]$ et en utilisant l'optique des moindres carrés.

En normalisant par rapport à l'une des variables t inconnues, on a le système $[A][T_N] = B$, et SDV résout:

$$(8,115)$$

Ensuite, pour une composante inconnue, on utilise l'équation suivante pour corriger les paramètres mesurés:

$$(8,116)$$

On peut réutiliser les valeurs obtenues pour les 3 standards de la calibration ordinaire et en choisir un quatrième pour cette procédure corrective. Les quatres standards suggérés par les auteurs de cette théorie sont:

- 1- Through (les six-ports sont reliés directement)
- 2- Deux-port adapté
- 3- Circuit ouvert - court-circuit
- 4- Court-circuit - circuit ouvert

9. Caractérisation d'un n-port à l'aide de n six-ports (Ghannouchi)

Cette technique est une extension de la méthode de calibration deux-port [17]. Les calculs sont très semblables, mais répétés plusieurs fois. On a le système suivant: $[A]=[S] [B]$ où $[S]$ est la matrice des coefficients de dispersion de la composante n-port. On définit $\Gamma_{ik} = a_{ik}/b_{ik}$ pour $i=1,2,\dots,n$. On peut poser un vecteur $[G_k]$, conformément à ce qui a été fait précédemment:

$$[G_k] = \begin{bmatrix} 1 \\ g_{2k} \\ g_{3k} \\ \dots \\ g_{nk} \end{bmatrix} \quad (9,1)$$

où $g_{ik} = b_{(i-1)k}/b_{ik}$ et

$$[S] [G_k] = [G'_k] \quad (9,2)$$

où

$$[G'_k] = \begin{bmatrix} \Gamma_{1k} \\ g_{2k}\Gamma_{2k} \\ g_{3k}\Gamma_{3k} \\ \dots \\ g_{nk}\Gamma_{nk} \end{bmatrix} \quad (9,3)$$

Il faut évaluer les g_{ik} . D'abord, on représente l'ensemble du circuit par un $(n+1)$ -port et on a:

$$b_{ik} = u_{10}^{(k)} a_{0k} + u_{11}^{(k)} a_{1k} + u_{12}^{(k)} a_{2k} + \dots + u_{1n}^{(k)} a_{nk} \quad (9,4)$$

pour $i=1,2,\dots,n$. On peut écrire ce système d'équation sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1-u_{11}^{(k)}\Gamma_{1k} & -u_{12}^{(k)}\Gamma_{2k} & \dots & u_{1n}\Gamma_{nk} \\ -u_{21}^{(k)}\Gamma_{Ak} & 1-u_{22}^{(k)}\Gamma_{Bk} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1-u_{nn}^{(k)}\Gamma_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \dots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = b_{0k} \begin{bmatrix} u_{10}^{(k)} \\ u_{20}^{(k)} \\ \dots \\ u_{n0}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (9,5)$$

En utilisant la règle de Crammer pour isoler $b_{(i-1)k}$ et b_{ik} et en effectuant le quotient, on trouve l'expression des g_{ik} pour $i=2,3,\dots,n$. Pour calculer les g_k , il faut d'abord déterminer u_{ij} . La façon de le faire est simple: on place un deux-port entre deux des six-ports et des charges parfaitement adaptées à la sortie de tous les autres. On a alors

$$\begin{aligned} b_{ik} &= u_{ii}^{(k)}a_{ik} + u_{ij}^{(k)}a_{jk} + u_{io}(k)a_{0k} \\ b_{jk} &= u_{ji}^{(k)}a_{ik} + u_{jj}^{(k)}a_{jk} + u_{jo}(k)a_{0k} \end{aligned} \quad (9,6)$$

On peut montrer facilement que:

$$\begin{aligned} -s_{12}(1-\Gamma_{ik}u_{ii}^{(k)})z_1^{(k)} - s_{12}\Gamma_{ik}z_2^{(k)} + (\Gamma_{ik}s_{22}-\Delta)z_3^{(k)} \\ = -(\Gamma_{ik}-s_{11}) + u_{jj}^{(k)}(\Gamma_{ik}s_{22}-\Delta) \end{aligned} \quad (9,7)$$

où

$$\begin{aligned} z_1^{(k)} &= \frac{u_{jo}^{(k)}}{u_{io}^{(k)}} \\ z_2^{(k)} &= u_{ji}^{(k)} \\ z_3^{(k)} &= \frac{u_{ij}^{(k)}u_{jo}^{(k)}}{u_{io}^{(k)}} \end{aligned} \quad (9,8)$$

On peut donc déterminer z_1 , z_2 et z_3 à l'aide de 3 standards pour chaque paire de branches (i,j) que l'on puisse former. Comme il y a de la redondance, c'est-à-dire qu'il y a plus de paires que

ce dont on a besoin pour déterminer le système, on peut trouver les u_{ij} et vérifier les résultats. Ensuite, on peut calculer les g_{ik} et donc déterminer les coefficients de dispersion caractérisant la composante sous test, avec l'équation (9,2) en un seul branchement. Il faut varier la phase n fois, ce qui donne $n*n$ données qui entrent dans le calcul de l'équation (9,2). Les opérations mathématiques peuvent devenir lourdes si n est élevé.

Références

- [1] T.E. Hodgetts et E.J. Griffin, **A unified treatment of the theory of six-port reflectometer calibration using the minimum of standards**, Royal Signals and Radar Establishment, Malvern Report No. 83003.
- [2] R. Larose, **Caractérisation de transistors micro-ondes en régime non linéaire utilisant la technologie des six-ports**, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Juillet 1991.
- [3] F.M. Ghannouchi et R.G. Bosisio, **An alternative explicit six-port matrix calibration formalism using five standards**, IEEE Trans. on MTT., Vol. 36, Mars 1988, pp. 434-439.
- [4] F.M. Ghannouchi et R.G. Bosisio, **The six-port reflectometer and its complete calibration by four standard terminations**, IEE Proceedings, Vol. 135, No. 4, Août 1988, pp. 285-288.
- [5] F.M. Ghannouchi et R.G. Bosisio, **Calibration and measurement of six-port reflectometer using a matrix approach**, Technical Report EPM/RT-86/46, Report EPM/RT-86/47 and Report EPM/RT-86/48, École polytechnique de Montréal, Octobre 1986.
- [6] C.A. Hoer, **Choosing line lengths for calibrating network analyzers**, IEEE Trans. on MTT., Vol. 31, No. 1, Janvier 1983, pp. 76-77.
- [7] S. Wang, **A CAD/CAM wideband microwave six-port junction**, Mémoire de maîtrise, École polytechnique de Montréal, Février 1990.

- [8] F.M. Ghannouchi et R.G. Bosisio, An improved sliding load formulation for use in six-port calibration methods, Alta Frequenza, Vol. LVII, No. 8, pp. 497-499.
- [9] U. Stumper et W. Peinelt, Physikalisch-technische Bundesanstalt, THCl RF et Microondes: parametres S, juin 1992, pp. 244-245.
- [10] Y. Demers, F.M. Ghannouchi et R.G. Bosisio, Repetitive and single shot pulse microwave six-port reflectometer, IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. 39, No. 1, février 1990, pp. 195-200.
- [11] F.M. Ghannouchi et R.G. Bosisio, An automated millimeter wave active load-pull system based on six-port techniques, IEEE Trans. Instrum. Meas., Decembre 1992.
- [12] F.M. Ghannouchi et R.G. Bosisio, A wideband millimeter wave six-port reflectometer using four diode detectors calibrated without a power ratio standard, IEEE Trans. Instrum. Meas., Vol. 40, No. 6, Decembre 1991, pp. 1043-1046.
- [13] G.F. Engen et C.A. Hoer, Thru-reflect-line: An improved technique for calibrating the dual six-port automatic network analyzer, IEEE Trans. on MTT., Vol. 27, Décembre 1979, pp. 987-993.
- [14] H. Heuermann et B. Schiek, Robuster algorithmus zur steuparameterbestimmung für systemfehlerkorrigierende netzwerkanalysatorkalibrierungen, Veröffentlicht in Kleiheubacher Berichten 1991, Band 35.

- [15] F.M. Ghannouchi et R.G. Bosisio, A pulse homodyne vector network analyzer suitable for mm wave active devices characterization, IEEE Trans. Instrum. Meas., Avril 1993.
- [16] J.V. Buthler et D.K. Rytting and al, 16 term error model and calibration procedure for on wafer network analysis and measurement, IEEE Trans. on MTT., Vol. 39, No 12,Décembre 1991, pp. 2211-2219.
- [17] F.M. Ghannouchi et R.G. Bosisio, A new one step connection n-port circuit scattering matrix measurement method using n calibrated six-port, IEEE Trans. on MTT., (soumis pour publication).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289796 3