

THEORIE VISCOELASTIQUE DES DEFORMATIONS
DE FLEXION ET DE CISAILLEMENT
DES DENTS D'ENGRENAGES

par

Roland Doré et Jean-Claude Bigou

Mars 1976

No EP 76-R-6

don de R. Doré

THEORIE VISCOELASTIQUE DES DEFORMATIONS
DE FLEXION ET DE CISAILLEMENT
DES DENTS D'ENGRENAGES

PAR

ROLAND DORE et JEAN-CLAUDE BIGOU

RAPPORT No EP 76-R-6

Département de Génie Mécanique
Ecole Polytechnique
Montréal, P.Q., Canada

Mars 1976

TABLE DES MATIERES

	<u>Page</u>
1. Introduction.....	1
2. Flexion élastique pour une force stationnaire.....	3
3. Flexion élastique pour une force mobile.....	5
4. Flèche due au cisaillement élastique.....	7
5. Flexion viscoélastique des dents.....	8
6. Flèche due au cisaillement viscoélastique.....	9
7. Réponse à un matériau spécifique.....	10
7.1 Composante due à la flexion.....	11
7.2 Composante due au cisaillement.....	13
8. Déformation résiduelle après m cycles.....	15
9. Remarques.....	17
 Annexe 1: Calcul exact du bras de levier L	 18
Annexe 2: Evaluation de l'intégrale I_a	22
Figures.....	25
Références.....	30

SOMMAIRE

Le but du présent travail est de déterminer la déformation des dents d'un engrenage en matière plastique sous l'effet d'une charge répétée, variable et mobile sur le profil des dents. A cause de la nature viscoélastique du matériau, les déformations sont cumulatives, occasionnant une détérioration progressive de l'engrènement. Les résultats de cette étude permettent donc d'évaluer, pour un matériau donné, le nombre de cycles d'application de la charge (nombre de tours) au-delà duquel la déformation de la denture dépasse l'interférence de fonctionnement tolérable. Le profil original pourrait donc être modifié de façon à se transformer en un profil idéal après un certain nombre de cycles.

Une dent d'engrenage en développante de cercle peut être assimilée à une poutre courte, en porte-à-faux, dont la section est variable. Une variation cubique a été supposée dans ce travail. Lors de l'engrènement, le chargement est mobile sur la dent, passant du sommet à la racine, ou réciproquement.

Le problème élastique est d'abord solutionné pour un chargement stationnaire, puis mobile, en tenant compte des déformations de flexion et de cisaillement. La solution viscoélastique est obtenue au moyen des intégrales hériditaires. Le détail de cette solution est donné pour un solide à trois paramètres dont les propriétés s'apparentent à celles des plastiques utilisés pour la fabrication d'engrenages.

1. INTRODUCTION

Les engrenages en matières plastiques possèdent, sous certains aspects, des avantages sur les engrenages en acier: ils nécessitent peu ou pas de lubrification, ils peuvent être moulés, ils sont en général plus silencieux et leur fini de surface peut être, sans inconvénient, relativement grossier. Cependant, leur principal inconvénient est d'être, à dimensions égales, environ 30 fois moins résistants que ceux en acier. Les premières tentatives d'utilisation des matières plastiques pour les engrenages visèrent donc l'économie de fabrication beaucoup plus que la transmission d'une puissance importante. La disponibilité de matériaux plastiques de plus en plus résistants ainsi que des plastiques armés permet de rendre ceux-ci compétitifs pour la transmission de puissance dans certaines applications particulières. Les facteurs qui influencent la résistance et la déformation de la denture de tels engrenages sont mal connus, ce qui n'encourage certainement pas les concepteurs à les utiliser. Le but du présent travail est de contribuer à la compréhension du phénomène de déformation des dents d'un engrenage en matière plastique sous l'effet d'une charge répétée, variable et mobile sur le profil des dents.

La déformation d'une dent en acier, durant le contact, a peu d'effet sur la géométrie de celle-ci et le profil de la denture demeure pratiquement inchangé. Tel n'est pas le cas cependant pour les engrenages en matières plastiques dont les dents sont beaucoup plus flexibles. Cette flexibilité, jointe

au cumul des déformations dû à la nature viscoélastique du matériau, peut provoquer des interférences de fonctionnement intolérables. La connaissance des déformations cumulées après un certain nombre de cycles d'application de la charge peut permettre la modification du profil original des dents, de telle sorte que pendant le fonctionnement, celui-ci se transforme en un profil idéal.

Les dents en développante de cercle seront assimilées à des poutres courtes en porte-à-faux dont le profil est montré à la Figure 1. Lors de l'engrènement, la charge est mobile sur la dent, passant du sommet à la racine ou réciproquement. La méthode élaborée dans le présent document solutionne d'abord le problème élastique pour un chargement stationnaire, puis mobile. Les déformations de flexion et de cisaillement de l'axe neutre sont alors considérées. Au moyen des intégrales héréditaires, on obtient la solution viscoélastique pour un chargement répété. Les déformations de contact pour deux cylindres viscoélastiques ont déjà été déterminées par Bazergui et Hung [1] et peuvent être superposés pour obtenir les déformations totales. La réponse à un matériau spécifique complète l'étude.

2. FLEXION ELASTIQUE POUR UNE FORCE STATIONNAIRE

Le profil en développante de cercle (Figure 1) peut être représenté approximativement par la relation

$$h = H(1 - x)^{1/3}, \quad (1)$$

où H = largeur de la section à l'encastrement,

ℓ = longueur de la poutre,

$x = x^*/\ell$ = ordonnée non-dimensionnelle,

et x^* = ordonnée mesurée sur l'axe neutre.

Le moment d'inertie de la section devient alors

$$I_x = bh^3/12 = bH^3(1 - x)/12 = I(1 - x), \quad (2)$$

où b = largeur de la poutre,

et $I = bH^3/12$. (3)

Considérons une force normale F située à une distance L^* de l'encastrement. Cette force F possède une composante transversale P et une composante axiale N (Figure 1). Le moment fléchissant M_x à une section d'ordonnée x est

$$M_x = P\ell(\phi - x), \quad \text{pour } x \leq \phi, \quad (4)$$

$$\text{et } M_x = 0, \quad \text{pour } x > \phi, \quad (5)$$

$$\text{où } \phi = L/\ell. \quad (6)$$

Dans le cas de déformation plane, la relation entre la courbure de l'axe neutre (d^2w/dx^2) et le moment fléchissant est

$$(d^2w/dx^2)/\theta\ell = M_x/I_x, \quad (7)$$

$$\text{où } \theta = (1 - \nu^2)/E = \left[1/G + 3/(3K + G) \right] / 4 ,$$

E = module d'élasticité de Young,

G = module d'élasticité transversale,

ν = coefficient de Poisson,

K = module de dilatation = $E/3(1 - 2\nu)$,

et w = déplacement transversal non-dimensionnel de l'axe neutre = w^*/ℓ .

Pour $x \leq \phi$, on obtient, en introduisant (2) et (4) dans (7)

$$d^2w/dx^2 = (P\ell^2\theta/I) \left[1 - (1 - \phi)/(1 - x) \right] . \quad (8)$$

Après intégration de l'équation (8), on trouve

$$dw/dx = (P\ell^2\theta/I) \left[x + (1 - \phi) \log (1 - x) + C \right] , \quad (9)$$

$$\text{et } w = (P\ell^2\theta/I) \left\{ x^2/2 - (1 - \phi) (1 - x) \left[\log (1 - x) - 1 \right] + C_x + C^1 \right\} , \quad (10)$$

où C et C^1 sont les constantes d'intégration. En imposant $dw/dx = 0$ et $w = 0$ à $x = 0$, on trouve $C = 0$ et $C^1 = -(1 - \phi)$.

La déformée de l'axe neutre est alors

$$w = (P\ell^2\theta/I) \left\{ x^2/2 - (1 - \phi) \left[(1 - x) \log (1 - x) + x \right] \right\} , \text{ pour } 0 \leq x \leq \phi. \quad (11)$$

Pour $x > \phi$, la courbure de l'axe neutre est nulle et

$$w = \left[w \right]_{x=\phi} + (x - \phi) \left[dw/dx \right]_{x=\phi} . \quad (12)$$

En introduisant (11) dans (12), il est facile d'obtenir

$$w = (P\ell^2\phi/I) \left\{ \phi^2/2 - (1 - x) \left[(1 - \phi) \log (1 - \phi) + \phi \right] \right\} , \text{ pour } 0 \leq \phi < x. \quad (13)$$

3. FLEXION ELASTIQUE POUR UNE FORCE MOBILE

La variation de la distance L (Figure 1) est calculée en fonction du temps en annexe 1. Pour un cas particulier, cette variation est tracée à la Figure 8. Une variation linéaire donne une assez bonne approximation de la variation réelle de la distance L . On peut alors écrire

$$L = H(T - t) \ell_0 (1 - t/T) , \quad (14)$$

où t = temps à partir du début du contact sur la dent,

T = temps total de contact sur la dent (Figure 2),

ℓ_0 = valeur maximale de la distance L ,

$H()$ = fonction Heavyside.

La valeur de ϕ (6) devient donc

$$\phi = H(T - t) \alpha (1 - t/T) , \quad (15)$$

où $\alpha = \ell_0/\ell$.

Considérons une certaine section d'ordonnée x pour laquelle la distance L est égale à x^* lorsque t vaut t_0 . Les relations (11) et (13) peuvent alors être groupées et prennent la forme

$$w = (P\ell^2\theta/I) \left\{ H(t_0 - t) \left[x^2/2 - (1 - \phi) (1 - x) \log (1 - x) - (1 - \phi) x \right] + H(t - t_0) \left[\phi^2/2 - (1 - x) (1 - \phi) \log (1 - \phi) - (1 - x) \phi \right] \right\} . \quad (16)$$

En élevant la relation (15) au carré, on obtient

$$\phi^2 = H(T - t) \alpha^2 (1 + t^2/T^2 - 2t/T) . \quad (17)$$

Le remplacement de ϕ (15) et ϕ^2 (17) dans (16), donne lieu à des produits de fonctions Heavyside qu'il est possible de remplacer par des différences des mêmes fonctions (Figure 3).

$$H(t_0 - t) H(T - t) = H(t_0 - t) = H(t) - H(t - t_0) , \quad (18)$$

$$H(t - t_0) H(T - t) = H(t - t_0) - H(t - T) . \quad (19)$$

En remplaçant (15) et (17) dans (16) et en utilisant les relations (18) et (19), on obtient finalement

$$\begin{aligned} w = (P\ell^2\theta/I) & \left\{ H(t_0 - t) \left[x^2/2 - (1 - \alpha + \alpha t/T) \left\langle (1 - x) \log(1 - x) + x \right\rangle \right] \right. \\ & + \left[H(t - t_0) - H(t - T) \right] \left[\alpha^2 t^2 / 2T^2 + \alpha t(1 - x - \alpha)/T + \alpha(x - 1 + \alpha/2) \right. \\ & \quad \left. \left. + (1 - x) \alpha(1 - t/T) \log \left\langle 1 - H(T - t) \alpha(1 - t/T) \right\rangle \right] \right. \\ & \left. - H(t - t_0) (1 - x) \log \left\langle 1 - H(T - t) \alpha(1 - t/T) \right\rangle \right\} . \quad (20) \end{aligned}$$

Donc, pour $0 \leq t \leq t_0 \leq T$, (20) devient

$$w = (P\ell^2\theta/I) \left\{ x^2/2 - (1 - \alpha + \alpha t/T) \left[(1 - x) \log(1 - x) + x \right] \right\} \quad (21)$$

et pour $t_0 < t \leq T$, (20) devient

$$\begin{aligned} w = (P\ell^2\theta/I) & \left\{ \alpha^2 t^2 / 2T^2 + \alpha t(1 - x - \alpha)/T + \alpha(x - 1 - \alpha/2) \right. \\ & \left. - (1 - x) \left[1 - \alpha(1 - t/T) \right] \log \left[1 - \alpha(1 - t/T) \right] \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

et finalement pour $t_0 \leq T < t$, $w = 0$.

4. FLECHE DUE AU CISAILLEMENT ELASTIQUE

La dent d'engrenage étant une poutre courte, il faut considérer la flèche due aux contraintes de cisaillement. Pour une poutre à section rectangulaire la contrainte à l'axe neutre est $\tau = 3P/2A$ où A est la section au point considéré. Pour $x \leq \phi$, la déformation unitaire de cisaillement est $\gamma = \tau/G$ ou bien

$$dw^1/dx = \gamma = 3P/2AG , \quad (23)$$

où w^1 = flèche non-dimensionnelle due au cisaillement,

$$A = bh = bH(1 - x)^{1/3} .$$

Introduisant A dans (23) et intégrant, on obtient

$$w^1 = - (9P/4bHG) \left[(1 - x)^{2/3} + C \right] .$$

En imposant la condition $w^1 = 0$ à $x = 0$, on trouve $C = -1$ et w^1 devient

$$w^1 = (9P/4bHG) \left[1 - (1 - x)^{2/3} \right] , \text{ pour } 0 \leq x \leq \phi . \quad (24)$$

Cependant, pour $x > \phi$ la contrainte de cisaillement est nulle et $dw^1/dx = 0$.

La valeur de w^1 est alors obtenue en faisant $x = \phi$ dans (24); on a donc

$$w^1 = (9P/4bHG) \left[1 - (1 - \phi)^{2/3} \right] , \text{ pour } 0 \leq \phi < x . \quad (25a)$$

Introduisant la notion du temps t_0 pour lequel la valeur de ϕ est égale à x et utilisant la relation (15), il est possible d'écrire

$$w^1 = (9P/4bHG) \left[1 - (1 - x)^{2/3} \right] , \text{ pour } 0 \leq t \leq t_0 \leq T , \quad (25b)$$

$$w^1 = (9P/4bHG) \left\{ 1 - \left[1 - \alpha (1 - t/T) \right]^{2/3} \right\} , \text{ pour } t_0 < t \leq T \quad (26)$$

$$\text{et } w^1 = 0 , \text{ pour } t \leq T < t . \quad (27)$$

5. FLEXION VISCOELASTIQUE DES DENTS

La flèche de l'axe neutre due à la flexion d'une dent élastique (21) et (22) est de la forme $w_0 f(t)$ pour chacun des intervalles de temps. La solution viscoélastique peut être obtenue au moyen des intégrales héréditaires [2] .

$$w_v = (w_0/\theta) \left\{ f(0) J(t) + \int_{0^+}^t J(t - t^1) \left[d f(t^1)/dt^1 \right] dt^1 \right\}, \quad (28)$$

où w_v = flèche de l'axe neutre pour un matériau viscoélastique

et $J(t)$ = complaisance viscoélastique du matériau.

Introduisant les relations (21) et (22) dans (28), on obtient pour $0 \leq t \leq t_0 \leq T$,

$$w_v = (P\ell^2/I) \left\{ \left\langle x^2/2 - (1 - \alpha) [(1 - x) \log (1 - x) + x] \right\rangle J(t) - (\alpha/T) [(1 - x) \log (1 - x) + x] \int_{0^+}^t J(t - t^1) dt^1 \right\} \quad (29)$$

et pour $t_0 < t \leq T$,

$$w_v = (P\ell^2/I) \left\{ \left\langle x^2/2 - (1 - \alpha) [(1 - x) \log (1 - x) + x] \right\rangle J(t) - (\alpha/T) [(1 - x) \log (1 - x) + x] \int_{0^+}^{t_0} J(t - t^1) dt^1 + (\alpha^2/T^2) \int_{t_0}^t t^1 J(t - t^1) dt^1 - (\alpha^2/T) \int_{t_0}^t J(t - t^1) dt^1 - (\alpha/T) (1 - x) \int_{t_0}^t J(t - t^1) \log [1 - \alpha(1 - t^1/T)] dt^1 \right\} \quad (30)$$

et finalement pour $t_0 \leq T < t$,

$$\begin{aligned}
 w_V = & (P\ell^2/I) \left\{ x^2/2 - (1-x) \left[(1-x) \log(1-x) + x \right] > J(t) \right. \\
 & - (\alpha/T) \left[(1-x) \log(1-x) + x \right] \int_{0^+}^{t_0} J(t-t^1) dt^1 \\
 & + (\alpha^2/T^2) \int_{t_0}^T t^1 J(t-t^1) dt^1 - (\alpha^2/T) \int_{t_0}^T J(t-t^1) dt^1 \\
 & \left. - (\alpha/T) (1-x) \int_{t_0}^T J(t-t^1) \log \left[1 - \alpha(1-t^1/T) \right] dt^1 \right\}. \quad (31)
 \end{aligned}$$

6. FLECHE DUE AU CISAILLEMENT VISCOELASTIQUE

Soit $J^1(t)$ la complaisance viscoélastique pour les déformations de cisaillement du matériau. De la même façon que pour la flexion, la flèche due au cisaillement devient donc

$$w_V^1 = w_0^1 G \left\{ g(0) J^1(t) + \int_{0^+}^t J^1(t-t^1) \left[dg(t^1)/dt^1 \right] dt^1 \right\}, \quad (32)$$

où $g(t)$ est tel que $w^1 = w_0^1 g(t)$ [voir (25) - (27)]. Introduisant les relations (25) - (27) dans (32), on obtient pour $0 \leq t \leq t_0 \leq T$,

$$w_V^1 = (9P/4bH) \left[1 - (1-x)^{2/3} \right] J^1(t) \quad (33)$$

et pour $t_0 \leq t \leq T$,

$$w_V^1 = (9P/4bH) \left\{ \left[1 - (1-x) \right]^{2/3} J^1(t) - (2\alpha/3T) \int_{t_0}^t J^1(t-t^1) \left[1 - \alpha(1-t^1/T) \right]^{-1/3} dt^1 \right\} \quad (34)$$

et finalement pour $t_0 \leq T < t$

$$w_V^1 = (9P/4bH) \left\{ [1 - (1 - x)]^{2/3} J^1(t) - (2\alpha/3T) \int_{t_0}^T J^1(t - t^1) [1 - \alpha(1 - t^1/T)]^{-1/3} dt^1 \right\}. \quad (35)$$

A cause de la linéarité du modèle viscoélastique et des équations décrivant le comportement de celui-ci, la flèche totale de l'axe neutre est donnée, pour chacun des intervalles de temps, par la somme de w_V (29) - (31) et w_V^1 (33) - (35).

7. REPOSE A UN MATERIAU SPECIFIQUE

Dans les développements précédents, la charge P a été supposée constante en intensité pour $0 \leq t \leq T$. Par le principe de superposition, rendu possible à cause de la linéarité du système, cette charge peut être maintenue constante pour un certain intervalle $0 \leq t \leq t_1$ et peut ensuite être augmentée ou réduite par la superposition d'une solution valable pour $t_1 \leq t \leq t_2$ et résultant d'une charge additionnelle P_1 . Les solutions pour une charge constante P assurent donc toute la généralité nécessaire pour une force variant en escalier.

Il peut être intéressant d'obtenir la réponse à un matériau spécifique et plus particulièrement un solide à trois paramètres auquel il est souvent possible d'apparenter les matières plastiques. Pour ce modèle particulier, la complaisance au fluage est donné par

$$J(t) = p_1 e^{-\lambda t}/q_1 + (1 - e^{-\lambda t})/q_0, \quad (36)$$

où $\lambda = q_0/q_1$. La même relation serait valable pour $J^1(t)$ en remplaçant respectivement q_0 , q_1 et p_1 par q_0^1 , q_1^1 et p_1^1 .

7.1 Composante due à la flexion

Cette composante est calculée en remplaçant la valeur de $J(t)$ (36) dans (29) - (31).

Pour $0 \leq t \leq t_0 \leq T$

On peut mettre l'équation (29) sous la forme

$$w_v = A J(t) + B \int_{0^+}^t J(t - t^1) dt^1, \quad (37)$$

$$\text{avec } A = (P\ell^2/I) \left\langle x^2/2 - (1 - \alpha) \left[(1 - x) \log (1 - x) + x \right] \right\rangle \quad (38)$$

$$\text{et } B = - (P\ell^2\alpha/TI) \left[(1 - x) \log (1 - x) + x \right]. \quad (39)$$

En portant (36) dans (37) et en intégrant, on obtient

$$w_v = e^{-\lambda t} (A\mu - B\mu/\lambda) + Bt/q_0 + A/q_0 + B\mu/\lambda, \quad (40)$$

$$\text{où } \mu = p_1/q_1 - 1/q_0.$$

Pour $t_0 < t \leq T$

L'équation (30) peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} w_v = & A J(t) + B \int_{0^+}^{t_0} J(t - t^1) dt^1 + C \int_{t_0}^t t^1 J(t - t^1) dt^1 \\ & + D \int_{t_0}^t J(t - t^1) dt^1 + \bar{E} \int_{t_0}^t J(t - t^1) \log \left[1 - \alpha(1 - t^1/T) \right] dt^1, \end{aligned} \quad (41)$$

avec $C = P\ell^2\alpha^2/T^2I$, $D = -P\ell^2\alpha^2/TI$, $\bar{E} = -(P\ell^2\alpha/TI)(1-x)$. (42 a-c)

En portant (36) dans (41) et en intégrant, on obtient en se servant du résultat de l'annexe 2 pour l'intégrale I_a

$$\begin{aligned}
 w_V = & e^{-\lambda t} (A_\mu - B_\mu/\lambda) + e^{-\lambda(t-t_0)} [B_\mu/\lambda - C_\mu(\lambda t_0 - 1)/\lambda^2 - D_\mu/\lambda] \\
 & + Ct^2/2q_0 + t [C_\mu/\lambda + D/q_0] \\
 & + (\bar{E}_\mu/\lambda) \left\{ \log [1 - \alpha(1 - t/T)] - e^{-\lambda(t-t_0)} \log [1 - \alpha(1 - t_0/T)] \right\} \\
 & - (\bar{E}_\mu/\lambda) e^{-\lambda[t-T(1-\alpha)/\alpha]} \left\{ \log < [1 - \alpha(1 - t/T)] / [1 - \alpha(1 - t_0/T)] \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^{\infty} [(\lambda T/\alpha)^i / i \cdot i!] < [1 - \alpha(1 - t/T)]^i - [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^i > \right\} \\
 & + (\bar{E}T/\alpha q_0) \left\{ [1 - \alpha(1 - t/T)] < \log [1 - \alpha(1 - t/T)] - 1 > \right. \\
 & \left. - [1 - \alpha(1 - t_0/T)] < \log [1 - \alpha(1 - t_0/T)] - 1 > \right\} \\
 & - Ct_0^2/2q_0 + t_0 (B/q_0 - D/q_0) + A/q_0 - C_\mu/\lambda^2 + D_\mu/\lambda, \quad (43)
 \end{aligned}$$

où $\mu = p_1/q_1 - 1/q_0$.

Pour $t_0 \leq T < t$

L'équation (31) prend la forme

$$\begin{aligned}
 w_V = & A J(t) + B \int_{0^+}^{t_0} J(t - t^1) dt^1 + C \int_{t_0}^T t^1 J(t - t^1) dt^1 \\
 & + D \int_{t_0}^T J(t - t^1) dt^1 + \bar{E} \int_{t_0}^T J(t - t^1) \log [1 - \alpha(1 - t^1/T)] dt^1. \quad (44)
 \end{aligned}$$

En introduisant (36) dans (44) et en intégrant, on obtient en se servant des résultats de l'annexe 2 pour l'intégrale I_b

$$\begin{aligned}
w_v = & e^{-\lambda t} (A_\mu - B_\mu/\lambda) + e^{-\lambda(t-t_0)} \left[B_\mu/\lambda - C_\mu(\lambda t_0 - 1)/\lambda^2 - D_\mu/\lambda \right] \\
& + e^{-\lambda(t-T)} \left[C_\mu(\lambda T - 1)/\lambda^2 + D_\mu/\lambda \right] \\
& - (\bar{E}_\mu/\lambda) e^{-\lambda(t-t_0)} \log \left[1 - \alpha(1 - t_0/T) \right] \\
& - (\bar{E}_\mu/\lambda) e^{-\lambda[t+T(1-\alpha)/\alpha]} \left\{ - \log \left[1 - \alpha(1 - t_0/T) \right] \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \left[(\lambda T/\alpha)^i / i \cdot i! \right] < 1 - \left[1 - \alpha(1 - t_0/T) \right]^i > \right\} \\
& - (\bar{E}T/\alpha q_0) \left\{ 1 + \left[1 - \alpha(1 - t_0/T) \right] < \log \left[1 - \alpha(1 - t_0/T) \right] - 1 > \right\} \\
& + C(T^2 - t_0^2)/2q_0 + t_0(B - D)/q_0 + TD/q_0 + A/q_0 ,
\end{aligned} \tag{45}$$

où $\mu = p_1/q_1 - 1/q_0$.

7.2 Composante due au cisaillement

Cette composante est calculée en remplaçant la valeur de

$$J^1(t) = \mu^1 e^{-\lambda^1 t} - 1/q_0^1 \tag{46}$$

dans les relations (33) - (35). Dans l'expression (46), on a

$$\mu^1 = p_1^1/q_1^1 - 1/q_0^1 \tag{47}$$

et $\lambda^1 = q_0^1/q_1^1$. (48)

Pour $0 \leq t \leq t_0 \leq T$

On peut mettre l'équation (33) sous la forme

$$w_V^1 = F J^1(t) , \quad (49)$$

$$\text{où } F = (9P/4bH) \left[1 - (1 - x)^{2/3} \right] . \quad (50)$$

Introduisant (46) dans (49), on a

$$w_V^1 = F(\mu^1 e^{-\lambda^1 t} - 1/q_0^1) . \quad (51)$$

Pour $t_0 \leq t \leq T$

L'équation (34) peut être mise sous la forme

$$w_V^1 = F J^1(t) + \bar{K} \int_{t_0}^t J^1(t - t^1) \left[1 - \alpha(1 - t^1/T) \right]^{-1/3} dt^1 \quad (52)$$

$$\text{où } \bar{K} = - (3P\alpha/2bHT) . \quad (53)$$

Introduisant (46) dans (52) et intégrant, on obtient en se servant des résultats de l'annexe 2 pour l'intégrale I_c

$$\begin{aligned} w_V^1 = & F(\mu^1 e^{-\lambda^1 t} - 1/q_0^1) + (\bar{K}\mu^1 T/\alpha) e^{-\lambda^1 [t - T(\alpha-1)/\alpha]} \left\{ 1.5 \left[1 - \alpha(1 - t/T) \right]^{2/3} \right. \\ & - 1.5 \left[1 - \alpha(1 - t_0/T) \right]^{2/3} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\lambda^1 T/\alpha)^n / n! (n + 2/3) \right] < \left[1 - (1 - t/T) \right]^{n+2/3} - \left[1 - \alpha(1 - t_0/T) \right]^{n+2/3} > \left. \right\} \\ & - (1.5 \bar{K} T/\alpha q_0^1) \left\{ \left[1 - \alpha(1 - t/T) \right]^{2/3} - \left[1 - \alpha(1 - t_0/T) \right]^{2/3} \right\} . \quad (54) \end{aligned}$$

Pour $t_0 \leq T < t$

L'équation (35) peut être mise sous la forme

$$w_V^1 = F J^1(t) + \bar{K} \int_{t_0}^T J^1(t - t^1) [1 - \alpha(1 - t^1/T)]^{-1/3} dt^1, \quad (55)$$

où F et $\bar{K}$ sont donnés par (50) et (53). Introduisant (46) dans (55), on obtient en se servant des résultats de l'annexe 2 pour l'intégrale I_d

$$\begin{aligned} w_V^1 = & F(\mu^1 e^{-\lambda^1 t} - 1/q_0^1) + (\bar{K}\mu^1 T/\alpha) e^{-\lambda^1 [t-T(\alpha-1)/\alpha]} \left\{ 1.5 - 1.5 [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{2/3} \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\lambda^1 T/\alpha)^n / n!(n + 2/3) \right] < 1 - [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{n+2/3} > \left. \right\} \\ & - (1.5 \bar{K} T/\alpha q_0^1) \left\{ 1 - [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{2/3} \right\}. \end{aligned} \quad (56)$$

8. DEFORMATION RESIDUELLE APRES m CYCLES

Soit w tours/seconde la vitesse de rotation de l'engrenage considéré. Sur une même dent de cet engrenage, le contact s'établit donc tous les $1/w$ secondes. Après un certain nombre d'applications de la charge sur une dent donnée, ce n'est pas tant la déformation de la dent en fonction du temps qui présente un intérêt pratique mais bien la déformation résiduelle juste avant que le contact ne s'établisse de nouveau. Cette déformation résiduelle peut provoquer des interférences de fonctionnement qui rendent l'engrènement inadéquat à cause du bruit, de l'usure accélérée et, éventuellement, de l'arrachement des dents. Le cumul des déformations à cause des charges répétées est montré qualitativement à la Figure 5. Après m cycles de chargement, la déformation résiduelle de l'axe neutre de la dent due à

un chargement appliqué au temps j/w est donnée par la superposition des déformations de flexion (45) et de cisaillement (56) en considérant $t = (m - j)/w$. Puisque $T < 1/w$, il est évident que $T < t$ et les formules (45) et (56) doivent être utilisées. Les déformations résiduelles à l'instant $t = (m/w)^-$ sont donc obtenues en faisant la somme des déformations partielles lorsque l'incide j varie de 0 à $(m - 1)$. L'examen de la Figure 5 montre que le même résultat est obtenu en considérant $t = j/w$ et en faisant varier j de 1 à m . Les déformations résiduelles sont donc

$$\begin{aligned}
w_r = & \sum_{j=1}^m \left\{ e^{-\lambda j/w} (A_\mu - B_\mu/\lambda) + e^{-\lambda(j/w-t_0)} [B_\mu/\lambda - C_\mu(\lambda t_0 - 1)/\lambda^2 - D_\mu/\lambda] \right. \\
& + e^{-\lambda(j/w-T)} [C_\mu(\lambda T - 1)/\lambda^2 + D_\mu/\lambda] - (E_\mu/\lambda) \left\{ e^{-\lambda(j/w-t_0)} \log [1 - \alpha(1 - t_0/T)] \right\} \\
& - (\bar{E}_\mu/\lambda) e^{-\lambda[j/w + T(1-\alpha)/\alpha]} \left\{ - \log [1 - \alpha(1 - t_0/T)] \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^{\infty} [(\lambda T/\alpha)^i / i \cdot i!] < 1 - [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^i > \right\} \\
& - (\bar{E}T/\alpha q_0) \left\{ 1 + [1 - \alpha(1 - t_0/T)] < \log [1 - \alpha(1 - t_0/T)] - 1 > \right\} \\
& + C (T^2 - t_0^2)/2q_0 + t_0 (B - D)/q_0 + TD/q_0 + A/q_0 \\
& + F (\mu^1 e^{-\lambda^1 j/w} - 1/q_0^1) + (\bar{K}\mu^1 T/\alpha) e^{-\lambda^1 [j/w - T(\alpha-1)/\alpha]} \left\{ 1.5 - 1.5 [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{2/3} \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda^1 T/\alpha)^n / n! (n + 2/3)] < 1 - [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{n+2/3} > \left. \right\} \\
& - (1.5 \bar{K}T/\alpha q_0^1) \left\{ 1 - [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{2/3} \right\}, \tag{57}
\end{aligned}$$

où A , B , C , D , $\bar{E}$, F et $\bar{K}$ sont respectivement donnés par (38), (39), (42 a-c), (50) et (53).

9. REMARQUES

Tous les calculs précédents considèrent que P et N , composantes transversale et radiale de la force F (Figure 1), sont constantes. Or, si la valeur de F est théoriquement constante lorsqu'une seule dent est en contact, l'angle de chargement entre P et F est variable ce qui entraîne nécessairement une variation de P et N pour une valeur fixe du couple transmis. L'approximation faite en général par tous les auteurs est de considérer $P = F \cos \alpha$ et $N = F \sin \alpha$ (α étant l'angle de pression) ce qui est exact en un seul point de l'engrènement. Puisque l'angle de chargement varie légèrement de part et d'autre de l'angle de pression, cette approximation donne des résultats très acceptables.

Tel que nous l'avons déjà mentionné dans la section 7 de cet article, la théorie présentée ne considère qu'une seule dent en prise. En réalité, au début et à la fin du chargement d'une dent particulière, la charge ne sera que la moitié de la charge théorique puisque deux dents seront alors en prise. Les résultats tels que présentés ne tiennent donc pas compte de cet aspect particulier.

ANNEXE 1

Calcul exact du bras de levier L

Lorsque la force P se déplace le long du profil, la distance L (Figure 1) varie en fonction du temps. Pour une dent en développante de cercle dont l'angle de pression est α (Figure 6), l'équation de la ligne de conduite (D) par rapport au repère XO_2Y est donné par

$$Y = (X - R_2) \cotg \alpha, \quad (a)$$

où R_2 = rayon du cercle primitif.

En utilisant les formules de changement d'axes lors d'une rotation θ , on obtient l'équation de (D) dans le repère $X_1O_2Y_1$

$$X_1 = X \cos \theta - (X - R_2) k \sin \theta \quad (b)$$

et
$$Y_1 = X \sin \theta + (X - R_2) k \cos \theta,$$

où
$$k = \cotg \alpha. \quad (c)$$

Le point M a pour ordonnée $Y_{1M} = 0$. En portant cette valeur Y_{1M} dans (b), on trouve

$$X_{1M} = R_2 k / (\sin \theta + k \cos \theta) \quad (d)$$

La valeur de L est donnée par

$$L = X_{1M} - R \quad (e)$$

où $R = R_2 - \text{dédendum} = R_2 - R_2 d = R_2 (1 - d) \quad (f)$

et d dépend de la denture considérée. En introduisant (d) et (f) dans (e), on obtient

$$L = R_2 \left[k/(\sin \theta + k \cos \theta) - 1 + d \right] \quad (g)$$

La relation (6) définit ϕ comme le rapport L/ℓ . L'expression de ϕ devient donc

$$\phi = (R_2/\ell) \left[k/(\sin \theta + k \cos \theta) - 1 + d \right] \quad (h)$$

Les valeurs extrêmes de ϕ (donc de L) sont atteintes pour les valeurs extrêmes de θ lorsque le point de contact est soit en E soit en E'. Le point E est situé à l'intersection de (D) et du cercle de tête de l'engrenage II (Figure 7). L'équation du cercle de tête est donné par

$$X = R_{T2} \cos \bar{\delta} \quad \text{et} \quad Y = R_{T2} \sin \bar{\delta} . \quad (i)$$

Soit δ la valeur de $\bar{\delta}$ au point E. Si l'on porte (a) dans (i) en utilisant (c), on trouve

$$R_{T2} \sin \delta - R_{T2} k \cos \delta + R_2 k = 0$$

dont la solution est

$$\delta = \arcsin \left\langle \left\{ -k + k \left[\mu^2 + (\mu^2 - 1) k^2 \right]^{0.5} \right\} / \mu (1 + k^2) \right\rangle , \quad (j)$$

$$\text{où } \mu = R_{T2} / R_2 . \quad (k)$$

La première limite d'engrènement θ_1 est donnée par (Figure 7)

$$|\theta_1| = |\delta| - |a| \quad (l)$$

où $a = t_a / 2R_{T_2}$, t_a étant l'épaisseur de dent au cercle de tête. La valeur de t_a est donnée dans [4], [5]

$$t_a = 2R_2 \mu \left\{ \pi/2N_2 + \text{inv } \alpha - \text{inv} \left[\arccos (\cos \alpha / \mu) \right] \right\} \quad (m)$$

N_2 étant le nombre de dents de la roue II et α l'angle de pression de la denture.

Suivant le même raisonnement pour le point de contact E', on obtient

$$|\theta_2| = |\varepsilon| + |b| \quad (n)$$

$$\text{où } \varepsilon = \arcsin \left\langle k - k \left[n^2 + k^2 (n^2 - 1) \right]^{0.5} \right\rangle / n(1 - k^2) \quad (o)$$

et approximativement

$$b = \arcsin (t_b / 2k_2 \cos \alpha), \quad (p)$$

$$\text{et } \eta = R_{T_3} / R_3, \quad (q)$$

où R_{T_3} et R_3 sont les rayons de tête et primitif de la roue III.

La valeur de t_b est donnée dans [4], [5]

$$t_b = 2R_2 \cos \alpha \left[\pi/2N_2 + \text{inv } \alpha \right]. \quad (r)$$

Exemple: Soit les données suivantes

$$R_2 = R_3 = 30 \text{ cm}$$

$$\alpha = 20 \text{ degrés}$$

$$N_2 = N_3 = 30 \text{ dents}$$

$$\text{Addendum} = 2.5 R_2 / N_2 = 2.5 \text{ cm}$$

Les relations (ℓ) et (n) donnent après calculs

$$\theta_1 = 9.02^0 \quad \text{et} \quad \theta_2 = 16.74^0$$

Le tracé de la courbe réelle $\phi\ell/R_2 = f(\theta - \theta_1)$ obtenu à l'aide de la relation (h) permet de voir l'approximation utilisée pour simplifier les calculs dans la section 3 (Figure 8). Dans l'expression de $\phi\ell/R_2$ (voir (h)), l'on remarque que seul d dépend de l'engrenage considéré pour un angle de pression α donné. En d'autres termes, pour un exemple différent de la courbe ci-dessus, la courbe de la Figure 8 serait la même mais déplacée par rapport à l'axe $\phi\ell/R_2$. Les limites θ_1 et θ_2 seraient alors en général différentes.

ANNEXE 2

A2.1 Evaluation de l'intégrale I_a

$$I_a = \int_{t_0}^t \left[\mu e^{-\lambda(t-t^1)} + 1/q_0 \right] \log \left[1 - \alpha(1 - t^1/T) \right] dt^1 \quad (a)$$

$$\text{soit } I_a = I_1 + I_2 \quad (b)$$

$$\text{où } I_1 = \mu \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-t^1)} \log \left[1 - \alpha(1 - t^1/T) \right] dt^1 \quad (c)$$

$$\text{et } I_2 = (1/q_0) \int_{t_0}^t \log \left[1 - \alpha(1 - t^1/T) \right] dt^1 . \quad (d)$$

En intégrant I_1 par partie, on trouve

$$I_1 = (\mu/\lambda) \left\{ \log \left[1 - \alpha(1 - t/T) \right] - e^{-\lambda(t-t_0)} \log \left[1 - \alpha(1 - t_0/T) \right] - \alpha I_3/T \right\} \quad (e)$$

$$\text{où } I_3 = \int_{t_0}^t \left\{ e^{-\lambda(t-t^1)} / \left[1 - \alpha(1 - t^1/T) \right] \right\} dt^1 \quad (f)$$

En faisant le changement de variable $z^1 = \left[1 - \alpha(1 - t^1/T) \right]$, on obtient

$$I_3 = (T/\alpha) e^{-\lambda \left[t + T(1-\alpha)/\alpha \right]} \int_{z_0}^z \left[(e^{\lambda T z^1 / \alpha}) / z^1 \right] dz^1 \quad (g)$$

dans lequel des limites d'intégration sont $z = 1 - \alpha(1 - t/T)$ et $z_0 = 1 - \alpha(1 - t_0/T)$. L'intégrale I_3 est donnée dans [3] ; l'on obtient après simple substitution

$$I_3 = (T/\alpha) e^{-\lambda[t+T(1-\alpha)/\alpha]} \left\{ \log \left[\frac{1 - \alpha(1 - t/T)}{1 - \alpha(1 - t_0/T)} \right] + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{(\lambda T/\alpha)^i}{i \cdot i!} \right] \left[\left(1 - \alpha(1 - t/T) \right)^i - \left(1 - \alpha(1 - t_0/T) \right)^i \right] \right\} \quad (h)$$

L'intégrale I_2 est simplement évaluée en faisant le changement de variable $z^1 = [1 - \alpha(1 - t^1/T)]$; on a alors

$$I_2 = (T/\alpha q_0) \int_{z_0}^z \log(z^1) dz^1$$

$$I_2 = (T/\alpha q_0) \left\{ \left[1 - \alpha(1 - t/T) \right] \left[\log \left[1 - \alpha(1 - t/T) \right] - 1 \right] - \left[1 - \alpha(1 - t_0/T) \right] \left[\log \left[1 - \alpha(1 - t_0/T) \right] - 1 \right] \right\} \quad (i)$$

La valeur de I_a est donc donnée par $(I_1 + I_2)$, I_2 étant explicitée par (i) et I_1 par (e), la valeur de I_3 dans (e) étant donnée par (h).

A2.2 Evaluation de l'intégrale I_b

$$I_b = \int_{t_0}^T \left[\mu^{-\lambda(t-t^1)} + 1/q_0 \right] \log \left[1 - \alpha(1 - t^1/T) \right] dt^1 \quad (j)$$

En utilisant la procédure utilisée précédemment, il est facile de montrer que

$$I_b = I_4 + I_5 \quad (k)$$

$$\text{où } I_4 = -(\mu/\lambda) \left\{ e^{-\lambda(t-t_0)} \log [1 - \alpha(1 - t_0/T)] + (\alpha/T) I_6 \right\} \quad (\ell)$$

$$\text{et } I_5 = -(T/\alpha q_0) \left\{ 1 + [1 - \alpha(1 - t_0/T)] < \log [1 - \alpha(1 - t_0/T)] - 1 > \right\} \quad (m)$$

et la valeur de I_6 dans (ℓ) est

$$I_6 = (T/\alpha) e^{-\lambda[t+T(1-\alpha)/\alpha]} \left\{ -\log [1 - \alpha(1 - t_0/T)] + \sum_{i=1}^{\infty} [(\lambda T/\alpha)^i / i \cdot i!] < 1 - [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^i > \right\} \quad (n)$$

A2.3 Evaluation de l'intégrale I_c

$$I_c = \int_{t_0}^t [\mu^1 e^{-\lambda^1(t-t^1)} - 1/q_0^1] [1 - \alpha(1 - t^1/T)]^{-1/3} dt^1 \quad (o)$$

$$\text{soit } I_c = I_7 + I_8 \quad (p)$$

$$\text{où } I_7 = \mu^1 \int_{t_0}^t e^{-\lambda^1(t-t^1)} [1 - \alpha(1 - t^1/T)]^{-1/3} dt^1 \quad (q)$$

$$\text{et } I_8 = -(1/q_0^1) \int_{t_0}^t [1 - \alpha(1 - t^1/T)]^{-1/3} dt^1. \quad (r)$$

En faisant encore le changement de variable $z^1 = [1 - \alpha(1 - t^1/T)]$, on obtient

$$I_7 = (\mu^1 T/\alpha) e^{-\lambda^1[t-T(\alpha-1)/\alpha]} \int_{z_0}^z e^{(\lambda^1 T/\alpha) z^1} (z^1)^{-1/3} dz^1. \quad (s)$$

$$\text{Mais } I_9 = \int_{z_0}^z e^{(\lambda^1 T/\alpha) z^1} (z^1)^{-1/3} dz^1 \quad (t)$$

$$I_9 = \int_{z_0}^z (z^1)^{-1/3} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda^1 T/\alpha) z^1]^n / n! \right\} dz^1$$

et en intégrant terme par terme, on obtient

$$I_9 = 1.5 (z^{2/3} - z_0^{2/3}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\lambda^1 T / \alpha)^n / n! (n + 2/3) \right] (z^{n+2/3} - z_0^{n+2/3})$$

En introduisant dans (s) la valeur de I_9 et en remplaçant z et z_0 en fonction de t et t_0 respectivement, on obtient

$$I_7 = (\mu^1 T / \alpha) e^{-\lambda^1 [t - T(\alpha - 1) / \alpha]} \left\{ 1.5 [1 - \alpha(1 - t/T)]^{2/3} - 1.5 [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{2/3} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\lambda^1 T / \alpha)^n / n! (n + 2/3) \right] < [1 - \alpha(1 - t/T)]^{n+2/3} - [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{n+2/3} > \right\}. \quad (u)$$

Par simple intégration on obtient aussi

$$I_8 = -(1.5 T / \alpha q_0^1) \left\{ [1 - \alpha(1 - t/T)]^{2/3} - [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{2/3} \right\}. \quad (v)$$

La valeur de I_c est donnée par la somme de I_7 et I_8 respectivement donnés par (u) et (v).

A2.4 Evaluation de l'intégrale I_d

$$I_d = \int_{t_0}^T \left[\mu^1 e^{-\lambda^1 (t - t^1)} - 1/q_0^1 \right] [1 - \alpha(1 - t^1/T)]^{-1/3} dt^1$$

En utilisant la procédure utilisée dans la partie A2.3 il est facile de montrer que

$$I_d = (\mu^1 T / \alpha) e^{-\lambda^1 [t - T(\alpha - 1) / \alpha]} \left\{ 1.5 - 1.5 [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{2/3} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\lambda^1 T / \alpha)^n / n! (n + 2/3) \right] < 1 - [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{n+2/3} > \right. \\ \left. - (1.5 T / \alpha q_0^1) \left\{ 1 - [1 - \alpha(1 - t_0/T)]^{2/3} \right\} \right\}. \quad (w)$$

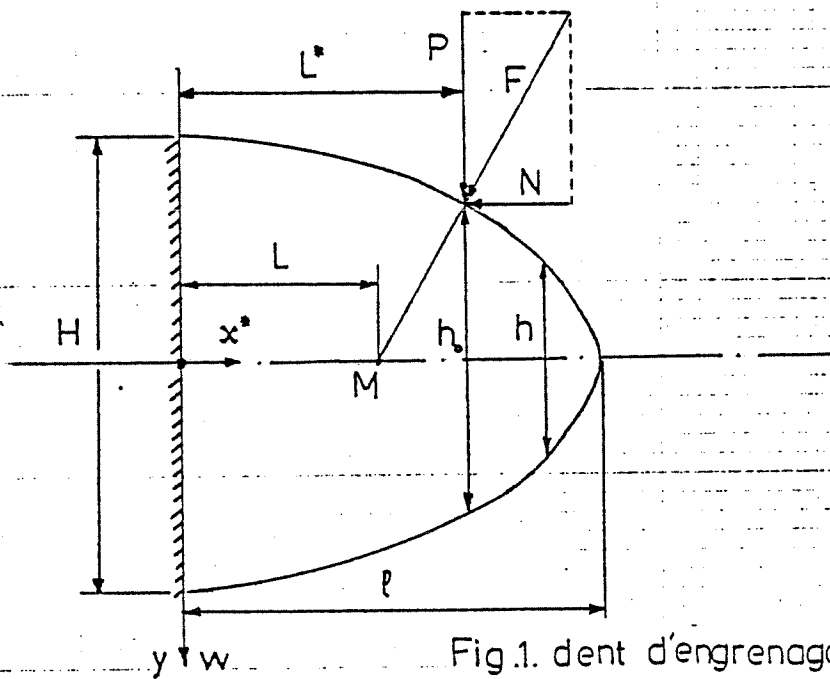


Fig.1. dent d'engrenage (geometrie idealisee)

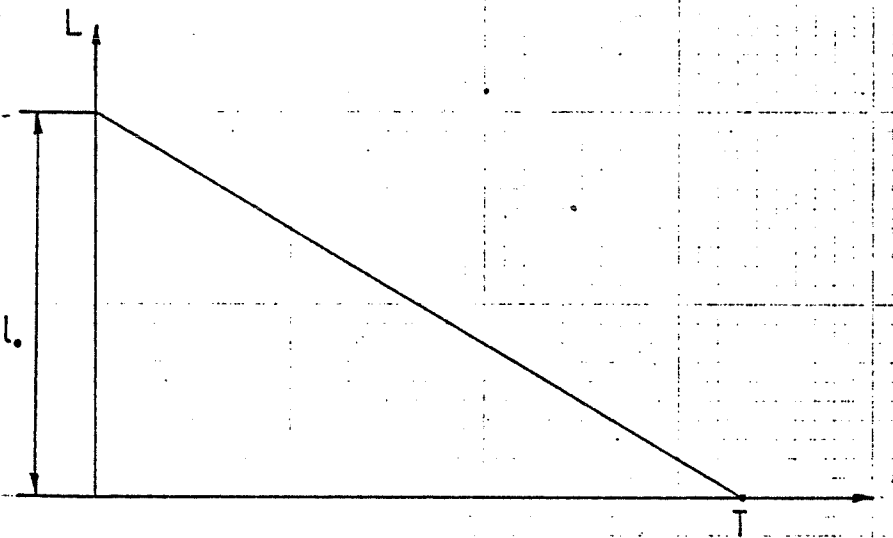


Fig.2. variation de L en fonction du temps t

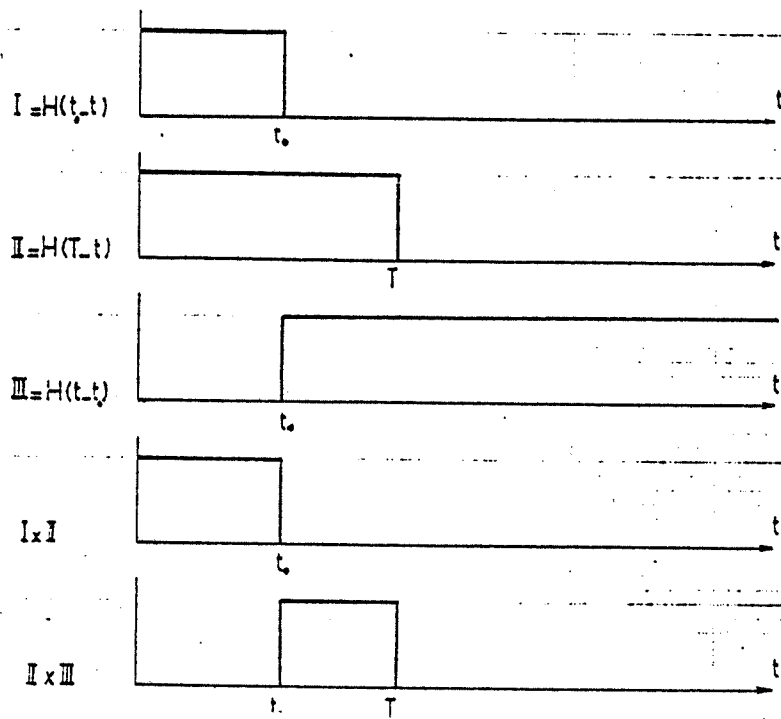


Fig. 3.

produits de fonctions

de Heavyside

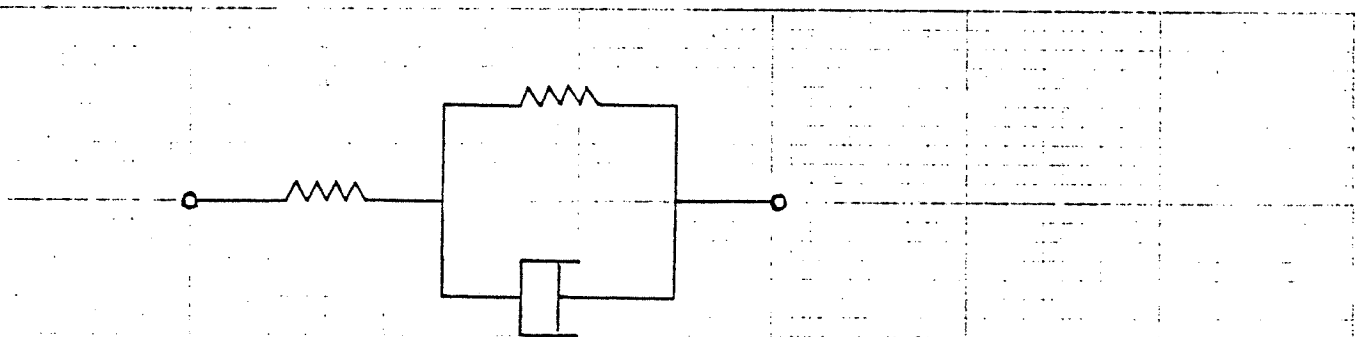


Fig.4. solide a 3 parametres

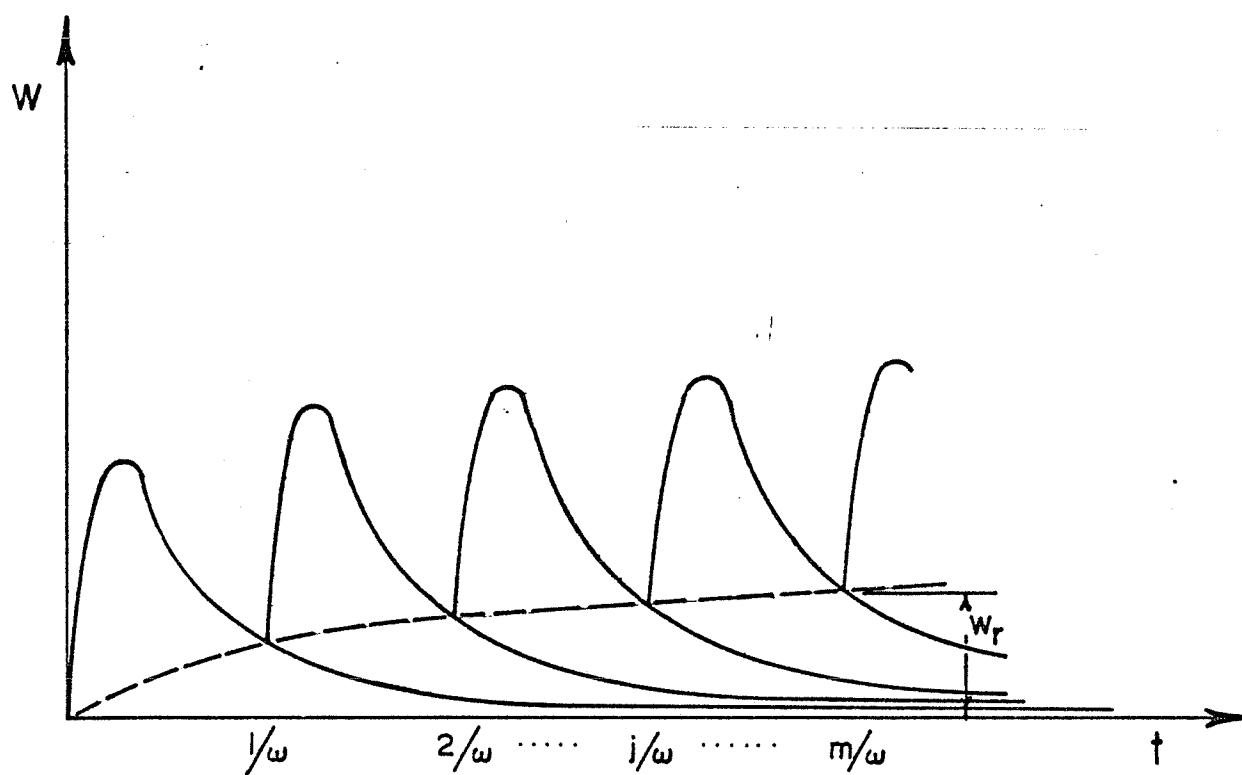
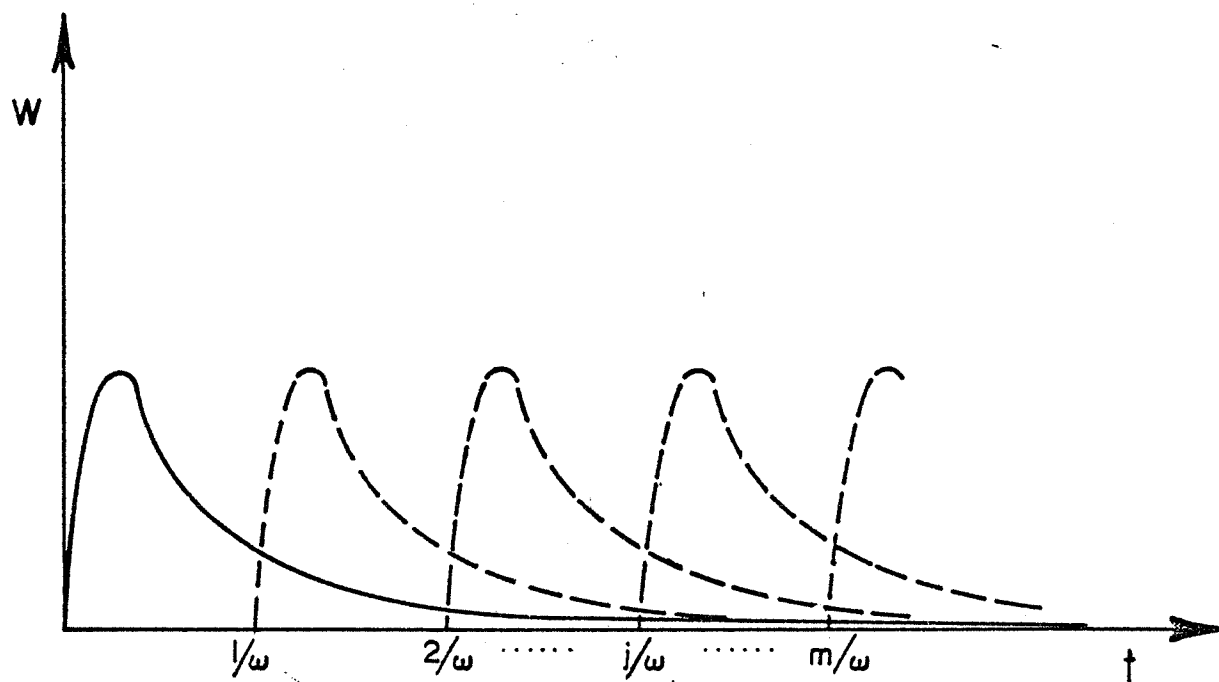


Fig. 5 DEFORMATION RESIDUELLE W_r

Fig. 6
COORDONNEES DU
SYSTEME D'ENGREMENT

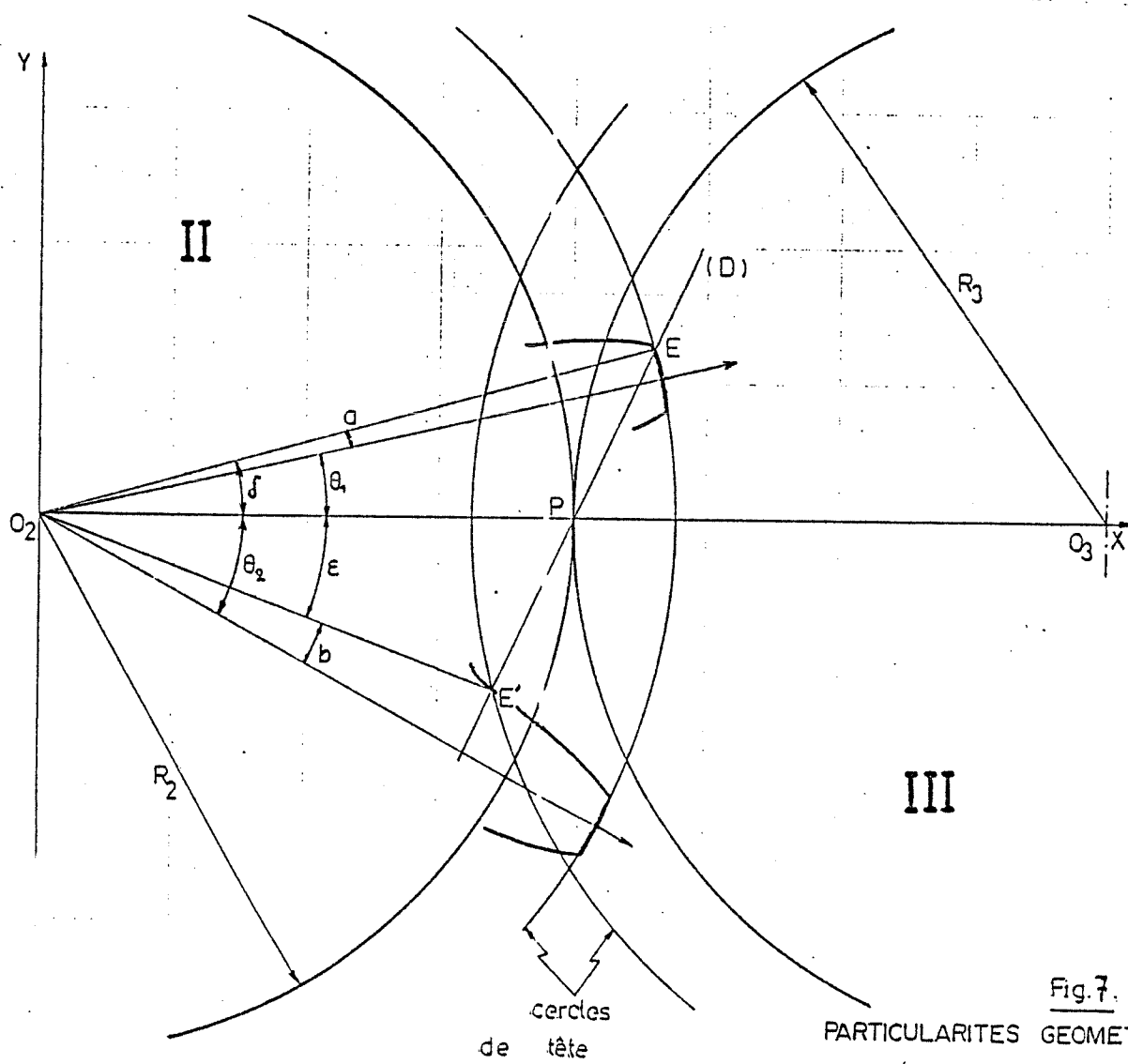
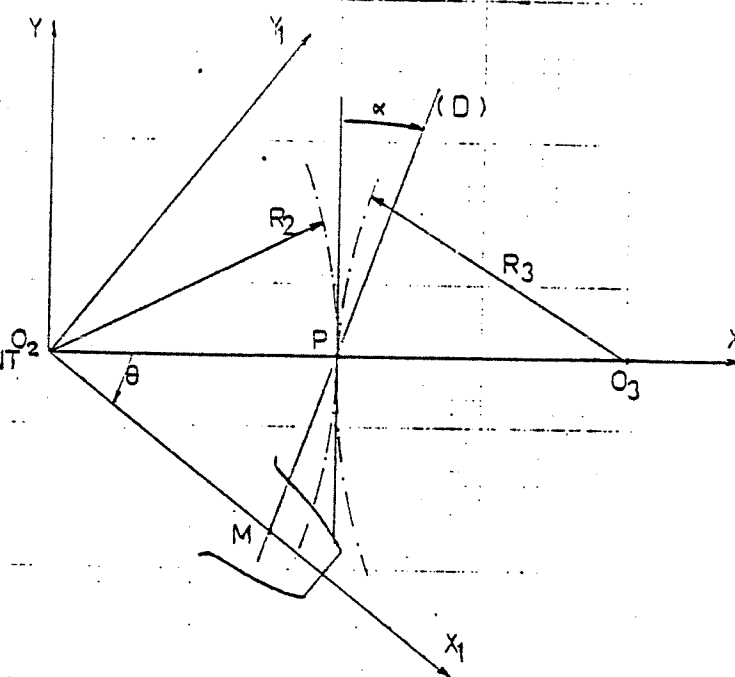
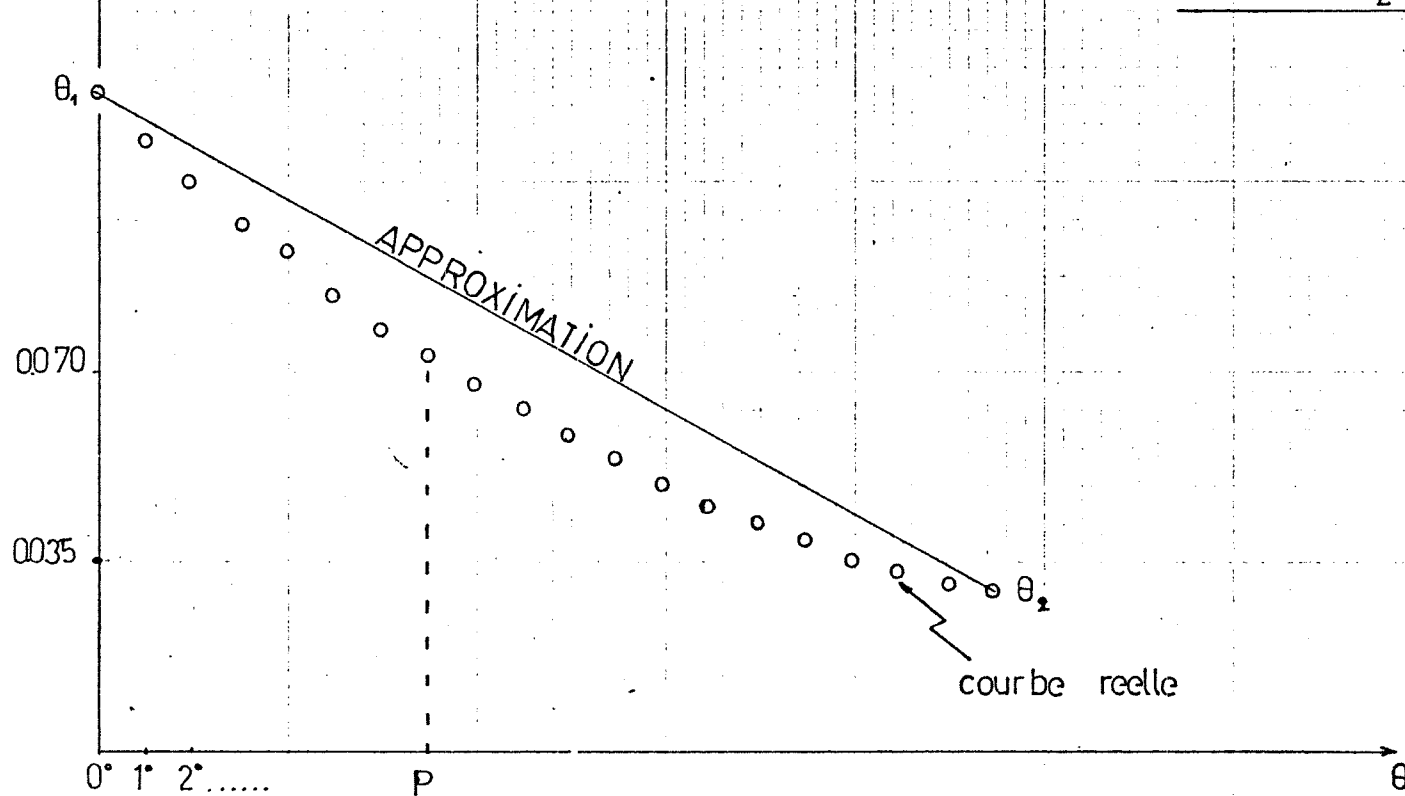


Fig. 7.
PARTICULARITES GEOMETRIQUES

Fig. 8 $\frac{\phi l}{R_2} = f(\theta - \theta_1)$



REFERENCES

- [1] HUNG, L.C. et BAZERGUI, A., "Contact de roulement sous traction tangentielle; une solution numérique-expérimentale", Revue Française de Mécanique, No 47-173, pp. 59-71.

- [2] FLÜGGE, N., Viscoelasticity, Blaisdell Publishing Co.

- [3] HODGMAN, C.D., editor, Standard Mathematical Tables, C.R.C., 10th edition.

- [4] MABIE, H.H. and OCVIRK, F.W., Mechanisms and Dynamics of Machinery, J. Wiley and Sons, 1957.

- [5] HENRIOT, G., Traité théorique et pratique des engrenages, Dunod.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00288751 9