POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Solution numérique des équations compressibles de Navier-Stokes
Title:

Auteurs: David Elkaim, Mohamad Agouzoul, & Ricardo Camarero
Authors:

Date: 1988

Type: Rapport / Report

Référence: Elkaim, D., Agouzoul, M., & Camarero, R. (1988). Solution numérique des équations compressibles de Navier-Stokes. (Technical Report n° EPM-RT-88-32). https://publications.polymtl.ca/10018/
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: https://publications.polymtl.ca/10018/
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel
Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EPM-RT-88-32
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

24 OCT. 1988

EPM/RT-88/32

SOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS COMPRESSIBLES DE NAVIER-STOKES

gratuit

David Elkaim, étudiant au Ph.D.
Mohamed Agouzoul, étudiant au Ph.D.
Ricardo Camarero, professeur titulaire

Département de mathématiques appliquées

École Polytechnique de Montréal
septembre 1988

Ce document a pu être publié grâce à une subvention du Gaz Métropolitain.

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite de l'auteur.

Dépôt légal, 3e trimestre 1988
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour ce procurer une copie de ce document, s'adresser aux:

Éditions de l'École Polytechnique de Montréal
École Polytechnique de Montréal
Case postale 6079, Succursale "A"
Montréal (Québec) H3C 3A7
(514) 340-4000

Compter 0,10$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal. Nous n'honorerons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable, dans le cas d'établissements d'enseignement, de société ou d'organismes canadiens.

SOMMAIRE

On présente dans ce rapport un schéma numérique pour la résolution des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible s'écoulant en régime laminaire.

La méthode proposée est explicite et d'ordre deux dans le temps. Elle est basée sur la technique des volumes finis et toutes les variables sont calculées au même point. La méthode est appliquée à deux cas tests:

1. Ecoulement supersonique dans une tuyère.
2. Ecoulement subsonique dans un canal avec expansion.

La comparaison des résultats obtenus avec les résultats expérimentaux est très satisfaisante.

ABSTRACT

In this work we present a numerical scheme for the compressible Navier-Stokes equations. The method is explicit and second order accurate in time. It is based on the finite control volume technique and all the variables are calculated at the same computational point.

The method is applied for two test cases:

1) Supersonic nozzle flow.

2) Flow in a canal with sudden expansion

Comparison between experimental and present numerical results is very good.

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE iii

LISTE DES FIGURES. viii

LISTE DES SYMBOLES vii

Chapitre 1: Introduction. 1

Chapitre 2: Les équations de base 3

2.1 Les équations 3
2.2 Les conditions aux frontières 6

Chapitre 3: Résolution numérique des équations. 9

3.1 Discrétisation du domaine 9
3.2 Discrétisation des équations. 9

3.2.1 Calcul de la variation de premier ordre. 12
3.2.2 Calcul de la variation de deuxième ordre 14
3.2.3 Calcul des gradients 17
3.2.4 Viscosité artificielle 18

3.3 Algorithme de calcul. 19

Chapitre 4: Résultats numériques. 22

4.1 Tuyère supersonique 22
4.2 Marche carrée 23

CONCLUSION 29

BIBLIOGRAPHIE. 30

LISTE DES FIGURES

3.1 Discretisation d'un domaine

3.2 Disposition des points pour la discrétisation des équations

3.3 Zonage typique

4.1 Géométrie et maillage de la tuyère plane

4.2 Lignes isopression et isomach pour la tuyère

4.3 Distribution de la pression

4.4 Géométrie et maillage pour le problème de la marche carrée

4.5 Zone de recirculation et distribution du taux de cisaillement dans la marche

LISTE DES SYMBOLES

Lettres latines

a	-	Vitesse du son
C_p	-	Chaleur spécifique à pression constante
C_v	-	Chaleur spécifique à volume constant
e	-	Energie interne
E_t	-	Energie totale
F	-	Vecteur (équation 2-2)
G	-	Vecteur (équation 2-2)
k	-	Conductivité thermique
L	-	Longueur de référence
$\vec{n}$	-	Vecteur normal à la paroi
p	-	Pression
P_r	-	Nombre de Prandtl ($P_r = C_p\mu/k$)
q_x, q_y	-	Flux de chaleur
R	-	Constante spécifique de l'air
R_e	-	Nombre de Reynolds ($Re = \rho_o a_o L/\mu$)
S	-	Surface
t	-	Temps
T	-	Température
u	-	Vitesse dans la direction X
U	-	Vecteur (équation 2-2)
v	-	Vitesse dans la direction y ou volume
V	-	Vitesse totale ($\sqrt{u^2 + v^2}$) ou volume
$\vec{w}$	-	Vecteur (équation 3.10)
x, y	-	Coordonnées cartésiennes

Lettres grecques

γ - Rapport des chaleurs spécifiques

δ - Variation entre l'étape de temps n + 1 et n

Δ - Variation (équation 3-16)

Δt - Pas de temps

μ - Coefficient de viscosité dynamique

ρ - Densité

$\left.\begin{matrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\end{matrix}\right]$ - Contraintes visqueuses

Φ - Propriété quelconque

Indices inférieurs

0 - Désigne les conditions de stagnation à l'entrée

1, 2, 3, 4 - Relatif aux points 1, 2, 3, 4 (fig. 3.2)

A, B, C, D - Désigne les cellules A, B, C, D (fig. 3.2)

g - Désigne un grand volume

i, j - Relatif au point i, j

w - Relatif à la paroi solide

Indices supérieurs

* - Désigne des valeurs adimensionnelles

1, 2 - Désigne des variations de premier et deuxième ordre

n, n + 1 - L'étape de temps n et l'étape n + 1

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

L'intérêt croissant pour les chambres de combustion aux performances plus élevées, dans les brûleurs à gaz par exemple, conduit au besoin de développer des méthodes et des techniques fiables pour analyser et concevoir de tels systèmes. L'étude de ces chambres de combustion nécessite une description détaillée de l'écoulement à l'intérieur du brûleur ainsi que des effets de la turbulence et des réactions chimiques. Dans ce travail on se limite à la simulation de l'écoulement laminaire d'un fluide compressible sans réaction chimique.

Les équations de Navier-Stokes permettent de décrire l'écoulement d'un tel fluide. La résolution de ces équations nécessite l'utilisation de méthodes numériques à cause de leur complexité: système d'équations, non linéaires, aux dérivées partielles.

Les solutions analytiques ne sont possibles que pour des écoulements simples. Une des techniques utilisées pour la résolution numérique de ces équations est celle des volumes finis [Patankar, 1980]. La plupart des méthodes, basées sur la technique des volumes finis, utilisent le maillage décalé, introduit par Harlow et Welch (1965), et ce afin d'éviter le problème des oscillations ("checkerboard") [Patankar, 1980]. Dans ce cas, les variables (pression, vitesse) ne sont pas calculées au même endroit et l'application des conditions aux frontières est difficile car certaines variables ne sont pas localisées à l'endroit où les conditions aux frontières doivent être appliquées. L'un des avantages de la technique des volumes finis, est qu'elle a un sens physique puisque la discrétisation des équations par une telle technique résulte d'un bilan de flux entrant et sortant du volume. Dans le travail présent toutes les propriétés sont calculées au même endroit grâce à un nouveau schéma numérique basé sur celui de Ni (1981). La méthode est explicite et d'ordre deux dans le temps.

Outre cette nouvelle méthode on présente également un traitement particulier de la discrétisation du domaine. Ceci est fait grâce à une méthode de zonage [Reggio et al., 1988] qui consiste à diviser préalablement le domaine en zones (une zone étant un quadrilatère) et de générer à l'intérieur de chaque zone un maillage. Ainsi on traite plus facilement les irrégularités géométriques d'un domaine donné. Notons toutefois que la résolution numérique reste point par point.

En résumé dans ce rapport on présente une solution numérique des équations de N-S pour le cas d'un fluide compressible s'écoulant en régime laminaire. La méthode utilisée est dérivée du schéma de Ni (1981) qui est de second ordre dans le temps.

La discrétisation des équations dans l'espace est basée sur la technique des volumes finis. Le code, basé sur le schéma développé, permet de résoudre l'écoulement laminaire d'un fluide compressible dans des géométries bi-dimensionnelles quelconques. L'objectif final étant d'élargir ce code pour les écoulements axisymétriques turbulents avec réactions chimiques.

CHAPITRE 2

LES EQUATIONS DE BASE

Dans ce chapitre on présente les équations de conservation décrivant l'écoulement bi-dimensionnel d'un fluide compressible obéissant à la loi de Stokes. Ce sont les équations de Navier-Stokes (N-S).

2.1 Les équations

Sous forme vectorielle, ces équations peuvent se mettre sous la forme:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

U, F et G sont des vecteurs donnés par:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \sigma_{xx} \\ \rho uv - \sigma_{xy} \\ (E_t + p)\, u - u\sigma_{xx} - v\sigma_{xy} + q_x \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}2)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \sigma_{xy} \\ \rho v^2 + p - \sigma_{yy} \\ (E_t + p)\, v - u\sigma_{xy} - v\sigma_{xy} + q_y \end{bmatrix}$$

E_t est l'énergie totale par unité de volume, elle est donnée par:

$$E_t = \rho \left(e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right) \qquad (2\text{-}3)$$

e: énergie interne par unité de volume

$$e = c_v T \qquad (2\text{-}4)$$

les contraintes de cisaillement et les flux q_x et q_y sont:

$$\sigma_{xx} = \frac{2}{3}\mu(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}); \quad \sigma_{yy} = \frac{2}{3}\mu\,(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}); \quad \sigma_{xy} = \mu\,(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \qquad (2\text{-}5)$$

$$q_x = -\,k\,\frac{\partial T}{\partial x}\,; \quad q_y = -\,k\,\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (2\text{-}6)$$

Afin de fermer le système d'équations (2-1) on utilise l'équation d'état du fluide. Pour un gaz parfait l'équation d'état est:

$$p = \rho RT \qquad (2\text{-}7)$$

L'enthalpie est reliée à la température par $h = c_pT$ et les chaleurs spécifiques et la constante R sont liées par les relations:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}\,; \quad c_v = \frac{R}{\gamma-1}\,; \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \qquad (2\text{-}8)$$

A l'aide des équations (2-3), (2-4), (2-7) et (2-8) l'énergie peut s'exprimer de plusieurs façons, soit:

$$E_t = \rho\,(\frac{RT}{\gamma-1} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)) \text{ ou } E_t = (\frac{P}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)) \qquad (2\text{-}9)$$

La pression et la température s'expriment en fonction de l'énergie comme suit:

$$p = (\gamma - 1)\,(E_t - \frac{1}{2}\rho V^2)\,; \qquad T = \frac{\gamma-1}{R}\,(\frac{E_t}{\rho} - \frac{V^2}{2}) \qquad (2\text{-}10)$$

avec $V^2 = u^2 + v^2$

* <u>Adimensionalisation des équations</u>

Il est souvent pratique d'écrire les équations de N-S sous forme adimensionnelle. Ainsi on fait apparaître des paramètres caractéristiques tels le nombre de Mach, le nombre de Reynolds, le nombre de Prandtl, etc..., qui peuvent être variés indépendemment. On utilise ici l'adimentionalisation suivante:

On définit des variables adimensionnelles (désignées par *) selon:

$$\rho^* = \rho/\rho_o \ , \quad p^* = p/\gamma p_o \ , \quad T^* = T/T_o$$

$$E_t^* = E_t/\rho_o a_o^2 \ , \ u^* = u/a_o \ , \ x^* = x/L \ , \ t^* = t/(L/a_o)$$

(L: longueur caractéristique, $\rho_o = p_o/RT_o$, $a_o = \sqrt{\gamma RT_o}$ et ρ_o, T_o, P_o les propriétés de stagnation à l'entrée)

L'équation (2 - 1) devient alors sous forme adimentionnelle:

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} + \frac{\partial F^*}{\partial x^*} + \frac{\partial G^*}{\partial y^*} = 0 \qquad (2\text{-}11)$$

avec

$$U^* = \begin{bmatrix} \rho^* \\ \rho^* u^* \\ \rho^* v^* \\ E_t{}^* \end{bmatrix}$$

$$E^* = \begin{bmatrix} \rho^* u^* \\ \rho^* u^{*2} + p^* - \sigma^*{}_{xx} \\ \rho^* u^* v - \sigma^*{}_{xy} \\ (E^*{}_t + p^*)u^* - u^*\sigma^*{}_{xx} - v^*\sigma^*{}_{xy} + q^*{}_x \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}12)$$

$$F^* = \begin{bmatrix} \rho^* v^* \\ \rho^* u^* v^* - \sigma^*{}_{xy} \\ \rho^* v^{*2} + p^* - \sigma^*{}_{yy} \\ (E^*{}_t + p^*)v^* - u^*\sigma^*{}_{xy} - v^*\sigma^*{}_{yy} + q^*{}_y \end{bmatrix}$$

Les contraintes de cisaillement et les flux de chaleur devenant:

$$\sigma^*{}_{xx} = \frac{2}{3Re}\left(2\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right) \ ; \ \sigma^*{}_{yy} = \frac{2}{3Re}\left(2\frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right) \ ; \ \sigma^*{}_{xy} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)$$

$$q^*_x = -(\gamma - 1)\frac{1}{RePr}\frac{\partial T^*}{\partial x^*} \; ; \; q^*_y = -(\gamma - 1)\frac{1}{RePr}\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \qquad (2\text{-}14)$$

avec $R_e = \left(\frac{\mu}{\rho_o a_o L}\right)^{-1}$; $P_r = \frac{C_p \mu}{k}$

alors que l'équation d'état est:

$$p = \frac{\rho^* T^*}{\gamma} \qquad (2\text{-}15)$$

le reste des équations liant l'énergie aux autres variables donnent:

$$E_t^* = \gamma\left(\frac{T^*}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{V^{*2}}{2}\right) \; ; \; E_t^* = \left(\frac{p^*}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho^* V^{*2}\right) \qquad (2\text{-}16)$$

$$P^* = (\gamma - 1)\left(E_t^* - \frac{1}{2}\rho^*\frac{V^{*2}}{2}\right) \; ; \; T^* = \gamma(\gamma - 1)\left(\frac{E_t^*}{\rho^*} - \frac{V^{*2}}{2}\right) \qquad (2\text{-}17)$$

2.2 Les conditions aux frontières

Toutes les configurations possibles d'un écoulement sont obtenues à partir de la résolution d'un même système d'équations (N-S). Ce qui diffère une solution d'une autre, en dehors des paramètres tels le nombre de Reynolds ou autre, sont les conditions de frontière. Il est donc clair que ces conditions de frontière jouent un rôle important.

Il y a trois types de frontières l'entrée, la sortie et les parois solides.

* Paroi solide

Sur les parois solides on applique la condition d'adhérence (non glissement). Ainsi les composantes de la vitesse sont nulles.

* Pour la température deux cas se présentent:

- parois isothermes: la température à la paroi est connue.
- le flux de chaleur est spécifié: si ce flux est égal à zéro alors on a des parois adiabatiques dans ce cas: $k\,\partial T/\partial \vec{n}=0$ ($\vec{n}$: normale à la paroi).

* Pour la pression on utilise une approximation de la forme $\partial P/\partial \vec{n}|_w=0$. Cette évaluation n'est pas tout à fait semblable à l'hypothèse de la couche limite puisqu'elle n'est appliquée que dans le voisinage immédiat de la paroi et non pas à travers toutes la couche. Cette approximation est cependant simple et permet de converger vers une solution stable [Roache, 1972].

* <u>Entrée</u>

Le nombre de variables à spécifier à l'entrée dépend du nombre de caractéristiques entrant dans la section [Drummond, 1984].

Deux cas se présentent alors:

* Ecoulement subsonique à l'entrée: dans ce cas pour un écoulement bi-dimensionnel ou doit spécifier trois variables. Les autres étant déduites de l'intérieur du domaine.
* Ecoulement supersonique à l'entrée: dans ce cas toutes les variables doivent être a priori connues.

Dans le cas d'une vitesse subsonique à l'entrée, il y a assez de liberté quant au choix des trois variables à spécifier. Par exemple ou peut spécifier les deux composantes de la vitesse (2-D) et la pression ou les composantes de la vitesse et la température. Pour une discussion sur ces alternatives ainsi que d'autres voir, Rudy et al. (1981).

Les conditions aux frontières utilisées dans ce travail sont présentées au chapitre 4.

* <u>Sortie</u>

D'une manière similaire à l'entrée, le nombre de variables que l'on peut spécifier dépend du nombre de caractéristiques.

Deux cas se présentent alors:

* Vitesse subsonique à la sortie: dans ce cas pour un écoulement bi-dimensionnel on peut spécifier une valeur. Toutes les autres sont extrapolées de l'intérieur du domaine. Le plus souvent on fixe la pression

statique à la sortie car c'est une valeur que l'on peut contrôler expérimentalement.

* Vitesse supersonique à la sortie: dans ce cas aucune variable n'est spécifiée. Une extrapolation des variables de l'intérieur vers la sortie est suffisante.

CHAPITRE 3

RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS

Dans ce chapitre on développe la discrétisation des équations. La méthode utilisée est basée sur la technique des volumes finis.

A la première partie on présente la technique du zonage pour la discrétisation du domaine, à la deuxième la discrétisation des équations et enfin la technique de résolution.

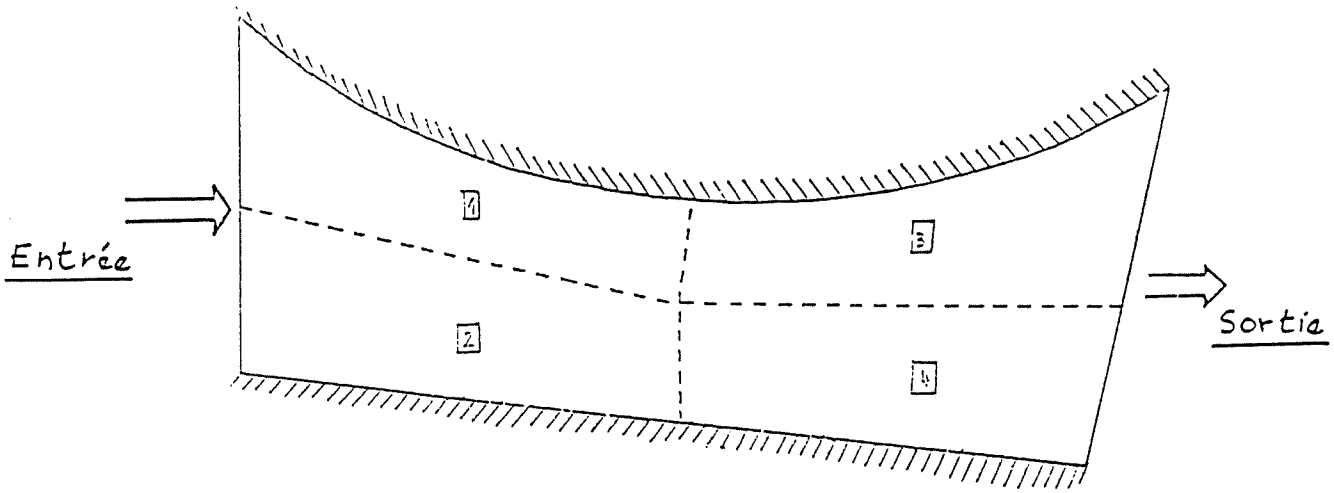
3.1 Discrétisation du domaine

Le domaine de calcul est divisé dans le cas bi-dimensionnel en quadrilatères comme illustré dans la figure 3.1.a. Chaque quadrilatère est appelé zone. Dans chaque zone un maillage est généré par des techniques de transformation conforme, technique de Thompson, interpolation transfinie ou autres. Le maillage entre chaque zone est continu (figure 3.1.b). Cette technique permet de traiter facilement les irrégularités géométriques d'un domaine de même qu'elle nous permet de faire notre calcul numérique à l'intérieur d'un quadrilatère.

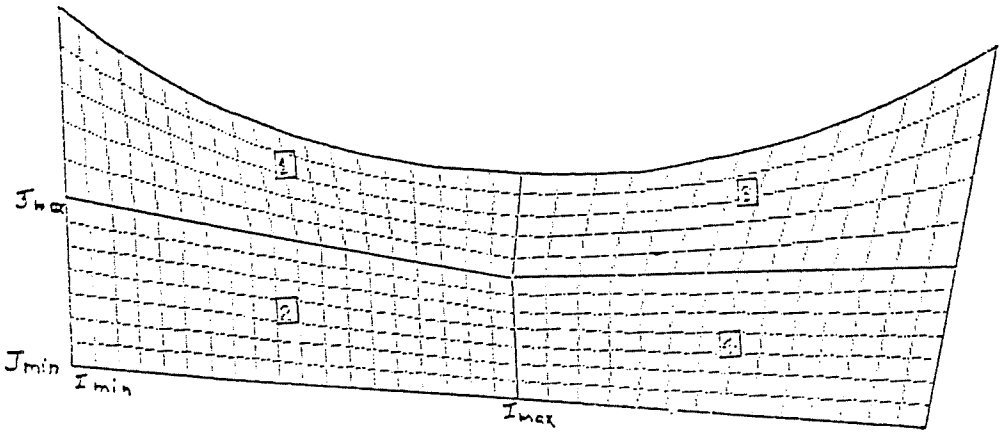
Dans le présent travail tout le processus qui consiste à diviser le domaine (zonage et maillage) est généré indépendement du solveur des équations [Reggio et al. 1988].

3.2 Discrétisation des équations

La grille de calcul et les notations utilisées sont présentées à la figure 3.2. Le point de calcul (point 1) est entouré par quatre mailles A, B, C, D ayant chacune un volume v_A, v_B, v_C et v_D. Chaque maille est délimitée par quatre points (maille A: 7-8-1-6, maille B: 8-9-2-1, etc...) et les points A, B, C, D représentent les centres géométriques de chaque maille. Les équations sont discrétisées par la technique des volumes de contrôle (finis) en adoptant le schéma explicite décrit par Ni (1981) comme suit:



(a) Division du domaine en zones



(b) Maillage de chaque zone

Figure 3.1: Discrétisation d'un domaine

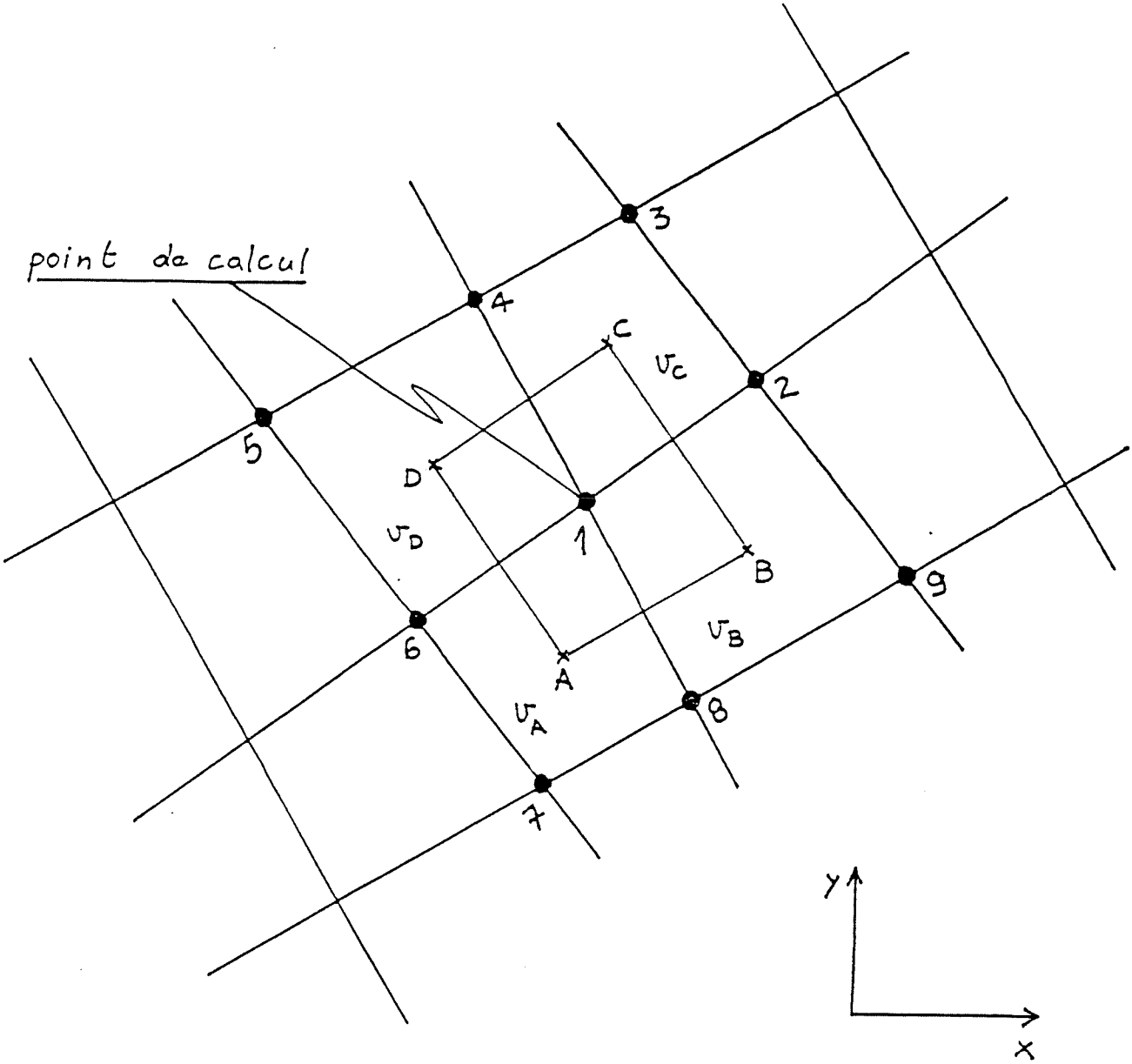


Figure 3.2: Disposition des points pour la discrétisation des équations

Réécrivons l'équations (2-1) de la manière suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) \qquad (3\text{-}1)$$

Soit δU_i le changement de U_i entre l'étape de temps n et l'étape n + 1 au point i, soit:

$$\delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^{n} \qquad (3\text{-}2)$$

Développons δU_i en série de Taylor (2° ordre), on obtient:

$$\delta U_i = \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right) \Delta t \Bigg|_n + \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} \Bigg|_n \qquad (3\text{-}3)$$

La première partie du membre de droite de l'équation (3-3) est la variation de premier ordre de U_i et la deuxième partie la variation de deuxième ordre de U_i, ou encore:

$$\delta U_i = \delta U_i^1 + \delta U_i^2 \qquad (3\text{-}4)$$

$$\delta U_i^1 \equiv \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t \qquad (3\text{-}5)$$

$$\delta U_i^2 \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} \qquad (3\text{-}6)$$

Aux deux paragraphes suivants on développe le calcul de ces deux termes.

3.2.1 Calcul de la variation de premier ordre

On intègre (3-5) sur le volume delimité par les points 7-9-3-5-7 et désigné à partir de maintenant comme le grand volume V_g.

$$\int_{V_g} \delta U_i^1 \, dV = \Delta t \int_{V_g} \frac{\partial U}{\partial t} \, dV \qquad (3\text{-}7)$$

en considérant δU_i^1 comme une valeur moyenne dans V_g (ou δU_A^1 comme une valeur moyenne dans v_a etc...), (3-7) devient avec l'aide de (3-1):

$$\delta U_i^1 \; V_g = \Delta t \int_{V_g} - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dV \qquad (3\text{-}8)$$

ou encore:

$$\delta U_i^1 \; V_g = \Delta t \int_{v_A} -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) dV + \int_{v_B} -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) dV + \int_{v_C} -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) dV + \int_{v_D} -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) dV$$

$$= \Delta t \; \{ \; \delta U_A^1 \; v_A + \delta U_B^1 \; v_B + \delta U_C^1 \; v_C + \delta U_D^1 \; v_D \; \} \qquad (3\text{-}9)$$

on a églament :

$$\int_{v_c} - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dV = \int_{v_c} - \operatorname{div} \vec{w}^{\ell} dV = \int_{S_c} \vec{w}^{\ell} . \vec{n} \; d\varsigma \qquad (3\text{-}10)$$

avec $\vec{w}^{\ell} = \begin{bmatrix} F^{\ell} \\ G^{\ell} \end{bmatrix}$ $\quad \ell = 1, 2, 3, 4, \; (\rho, \rho u, \rho v, E_t)$ $\qquad$ F et G sont des vecteurs.

$\vec{n}$: normale à la surface

S_c : surface

Or en considérant une variation linéaire de F et G entre 2 points et en intégrant sur la surface cernée par les points 1-2-3-4:

$$\begin{aligned} \int_{S = 1,2,3,4} \vec{w} . \vec{n} \; dS = & \frac{F_1 + F_2}{2} (y_2 - y_1) - \frac{G_1 + G_2}{2} (x_2 - x_1) \\ & + \frac{F_2 + F_3}{2} (y_3 - y_2) + \frac{G_2 + G_3}{2} (x_2 - x_3) \\ & - \frac{F_3 + F_4}{2} (y_3 - y_4) + \frac{G_3 + G_4}{2} (x_3 - x_4) \\ & - \frac{F_4 + F_1}{2} (y_4 - y_1) - \frac{G_4 + G1}{2} (x_1 - x_4) \end{aligned} \qquad (3\text{-}11)$$

F_i ou G_i étant calculées de (2-2) au point i. Finalement à l'aide de (3-9) la variation d'ordre un de U au point 1 est donnée par:

$$\delta U_1^1 = (\delta U_A^1 . v_A + \delta U_B^1 . v_B + \delta U_C^1 \; v_C + \delta U_D^1 . v_D)/V_g \qquad (3\text{-}12)$$

où δU_A^1, δU_B^1, δU_C^1 et δU_D^1 sont les variations de premier ordre dans les mailles A, B, C, D et par exemple:

$$\delta U_c^1 v_c = -\Delta t \left[\frac{F_1 + F_2}{2}(y_2 + y_1) - \frac{G_1 + G_2}{2}(x_2 - x_1) \right.$$

$$+ \frac{F_2 + F_3}{2}(y_3 + y_2) + \frac{G_2 + G_3}{2}(x_2 - x_3)$$

$$- \frac{F_3 + F_4}{2}(y_3 + y_4) + \frac{G_3 + G_4}{2}(x_3 - x_4)$$

$$\left. - \frac{F_4 + F_1}{2}(y_4 + y_1) - \frac{G_4 + G_1}{2}(x_1 - x_4) \right] \qquad (3\text{-}13)$$

le reste (δU_A^1, δU_B^1, δU_D^1) étant calculé similairement.

3.2.2 Calcul de la variation de second ordre

Reprenons l'équation (3 - 6)

$$\delta U_1^2 = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t} = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) \qquad (3\text{-}14)$$

d'après (3-1), (3-14) devient:

$$\delta U_1^2 = -\frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right]$$

$$= -\frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right)\right]$$

$$= -\frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial U} . \frac{\partial U}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial U} . \frac{\partial U}{\partial t}\right)\right]$$

$$= - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\Delta t \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right.}_{\delta U_i^1} \cdot \frac{\partial F}{\partial U} \Big) + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left(\Delta t \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \right.}_{\delta U_i^1} \cdot \frac{\partial G}{\partial U} \Big) \right]$$

on a donc:

$$\delta U_i^2 = - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U} \cdot \delta U_i^1 \right. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial U} \delta U_i^1 \right) \right] \qquad (3\text{-}15)$$

Posons:

$$\Delta F \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial U} \right) \delta U_i^1 \quad \text{et} \quad \Delta G \equiv \left(\frac{\partial G}{\partial U} \right) \delta U_i^1 \qquad (3\text{-}16)$$

$\frac{\partial F}{\partial U}$ et $\frac{\partial G}{\partial U}$ étant les matrices jacobiennes.

L'équation (3-15) devient alors:

$$\delta U_i^2 = \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial \Delta F}{\partial x} + \frac{\partial \Delta G}{\partial y} \right] \qquad (3\text{-}17)$$

Comme précédemment on intègre (3-17) sur le volume delimité par les points A-B-C-D et désigné comme le petit volume v_p (δU_i^2 étant une valeur moyenne dans v_p et ΔF et ΔG varient linéairement entre deux points) on obtient pour la variation de deuxième ordre au point 1:

$$\begin{aligned} \delta U_i^2 \; v_p = - \frac{\Delta t}{2} \Bigg[& \frac{\Delta F_A + \Delta F_B}{2} (y_B - y_A) - \frac{\Delta G_A + \Delta G_B}{2} (x_B - x_A) \\ & + \frac{\Delta F_B + \Delta F_C}{2} (y_C - y_B) - \frac{\Delta G_B + \Delta G_C}{2} (x_B - x_C) \\ & - \frac{\Delta F_C + \Delta F_D}{2} (y_C - y_D) - \frac{\Delta G_C + \Delta G_D}{2} (x_C - x_D) \\ & - \frac{\Delta F_D + \Delta F_A}{2} (y_D - y_A) - \frac{\Delta G_D + \Delta G_A}{2} (x_A - x_D) \Bigg] \end{aligned} \qquad (3\text{-}18)$$

x_A, x_B, x_C, x_D, y_A, y_B, y_C, y_D sont les coordonnées du centre des mailles A, B,

C, D ($x_A = \dfrac{x_7 + x_8 + x_1 + x_6}{4}$, $y_A = \dfrac{y_7 + y_8 + y_1 + y_6}{4}$ etc...).

Il ne reste plus maintenant qu'à calculer les expressions de ΔF et ΔG.

D'après (2-2)

$$\delta U_i^1 = \begin{bmatrix} \delta(\rho) \\ \delta(\rho u) \\ \delta(\rho v) \\ \delta(E_t) \end{bmatrix}_i^1 \qquad (3\text{-}19)$$

Après avoir calculé la matrice jacobienne de F et G et avec l'aide de (3-19), ΔF et ΔG sont égals à:

$$\Delta F = \begin{bmatrix} \delta(\rho u)^1 \\ u\rho\delta u^1 + u\delta(\rho u)^1 + \delta p^1 - \delta\sigma^1{}_{xx} \\ u\rho\delta v^1 + v\delta(\rho u)^1 + \delta\sigma^1{}_{xy} \\ E_t\delta u^1 + u\delta E_t{}^1 + u\delta p^1 + p\delta u^1 - u\delta\sigma^1{}_{xx} - \sigma_{xx}\delta u^1 - v\delta\sigma^1{}_{xy} - \sigma_{xy}\delta v^1 + \delta q^1{}_x \end{bmatrix}$$

$$\Delta G = \begin{bmatrix} \delta(\rho v)^1 \\ v\rho\delta u^1 + u\delta(\rho v)^1 + \delta\sigma^1{}_{xy} \\ v\rho\delta v^1 + v\delta(\rho v)^1 + \delta p^1 + \delta\sigma^1{}_{yy} \\ E_t\delta v^1 + v\delta E_t{}^1 + v\delta p^1 + p\delta v^1 - v\delta\sigma^1{}_{yy} - \sigma_{yy}\delta v^1 - u\delta\sigma^1{}_{xy} - \sigma_{xy}\delta v + \delta q^1{}_y \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}20)$$

avec:

$$\rho\delta u^1 = \delta(\rho u)^1 - u\delta\rho^1$$

$$\rho\delta v^1 = \delta(\rho v)^1 - v\delta\rho^1$$

$$\delta p^1 = (\gamma - 1)\ \{\delta E_t - \frac{1}{2}[u\delta(\rho u)^1 + u\delta u^1 + v\delta(\rho v)^1 + v\delta\rho v^1]\}$$

$$\rho\delta T^1 = \frac{1}{R}\delta p^1 - T\delta\rho^1$$

et on peut montrer également en faisant une transformation locale des coordonnées d'une maille, que la valeur d'une propriété Φ au centre géométrique est égale à la moyenne arithmétique des quatre valeurs qui l'entourent (par exemple $\Phi_c = 1/4(\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4)$).

Il est important enfin de noter la différence entre la technique présente et celle de Ni (1981). Ce dernier présente le calcul d'une variation de premier ordre et de second ordre dans chaque cellule. Ces variations sont ensuite distribuées aux quatre points formant la cellule et ce, selon une pondération convenable. Chaque point du maillage reçoit donc la contribution relative de chaque cellule qui l'entoure. Dans notre technique les variations sont calculées dès le départ au point de maillage. On ne peut pas voir le calcul de la variation de second ordre surtout à un point donné comme la somme de variations indépendantes des cellules qui l'entourent, alors que la technique de Ni semble plus intuitive.

3.2.3 Calcul des gradients

Afin de compléter le calcul des variations, il est nécessaire de calculer les contraintes de cisaillement ainsi que les flux q_x et q_y. Tous deux comprennent le calcul de dérivées selon x ou y de la vitesse ou de la température. Ces gradients sont simplement calculés à l'aide d'une différenciation centrée pour un maillage non orthogonal.

* calcul du volume

Le volume d'un quadrilatère formé par les points 1-2-3-4 est calculé par:

$$\text{volume} = \frac{1}{2}\left[y_1(x_4-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_4)+y_4(x_3-x_1)\right] \qquad (3\text{-}29)$$

* calcul du pas de temps

Le schéma étant explicite, le pas de temps, pour des raison de stabilité, est calculé d'après une formule empirique de Tannehill et al. (1975),

selon:

$$\Delta t \leq \frac{\sigma \Delta t_{CFL}}{1 + 2/R_{e\Delta}} \tag{3-30}$$

où σ est un facteur de sécurité ($\approx$0.9) et Δt_{CFL} le pas de temps pour un écoulement non visqueux (Mac-Cormack 1971) afin de satisfaire la condition CFL:

$$\Delta t_{CFL} \leq 1/\left(\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + a\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}\ a\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}\right) \tag{3-31}$$

et:

$$Re_{\Delta} = \min\ (Re_{\Delta x}, Re_{\Delta y}) \tag{3-32}$$

avec:

$$Re_{\Delta x} = \frac{\rho |u| \Delta x}{\mu}$$

$$Re_{\Delta y} = \frac{\rho |v| \Delta y}{\mu}$$

a étant la vitesse locale du son ($a = \sqrt{\gamma RT}$).

3.2.4 Viscosité artificielle

Pour les écoulements supersoniques ou à nombre de Reynolds élevé, les contraintes de cisaillement laminaires, ne produisent pas suffisamment de lissage pour stabiliser le schéma numérique nécessitant ainsi un lissage numérique. Dans le travail présent de lissage est produit d'une manière explicite par de la viscosité artificielle déduite de la différenciation amont.

Si $\Phi^{n+1/2}$ la valeur d'une propriété quelconque calculée à l'étape de temps n+1, Φ est corrigée de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\Phi^{n+1} = \Phi^{n+1/2} &+ \frac{|u|}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\Phi_{i+1,j}{}^{n+1/2} - 2\Phi_{i,j}{}^{n+1/2} + \Phi_{i-1,j}{}^{n+1/2}\right) \\ &+ \frac{|v|}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\Phi_{i,j+1j}{}^{n+1/2} - 2\Phi_{i,j}{}^{n+1/2} + \Phi_{i,j-1}{}^{n+1/2}\right)\end{aligned} \tag{3-34}$$

3.3 Algorithme de calcul

On présente ici l'algorithme simplifié du schéma numérique ainsi que la technique de résolution par zone.

i) Algorithme

1. Estimation de la solution initiale u, v, p, T, ρ.

2. Calcul du pas de temps

3. Calcul des contraintes de cisaillement et des flux de chaleur

4. Calcul de la variation de premier ordre au centre de chaque cellule (Eq. 3.13)

5. Calcul de la variation de premier ordre en chaque point du maillage (Eq. 3.12)

6. Calcul des ΔF et ΔG pour chaque maille

7. Calcul de la variation de second ordre en chaque point du maillage

8. Calcul de la variation globale (ordre 1 plus ordre 2) en chaque point du maillage

9. Incrémentation des composantes du vecteur U selon les variations globales

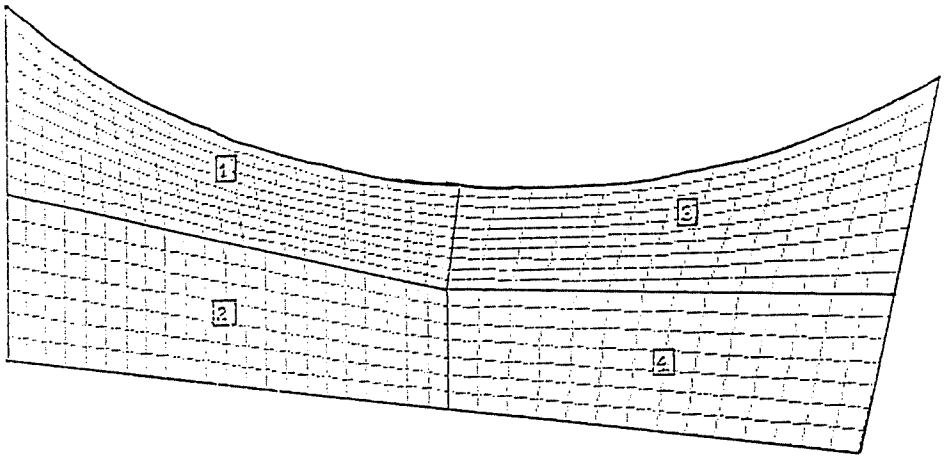
10. Déduction des valeurs de la vitesse, de la pression et de la température d'après les nouvelles composantes calculées à l'étape 9.

11. Application des conditions de frontière

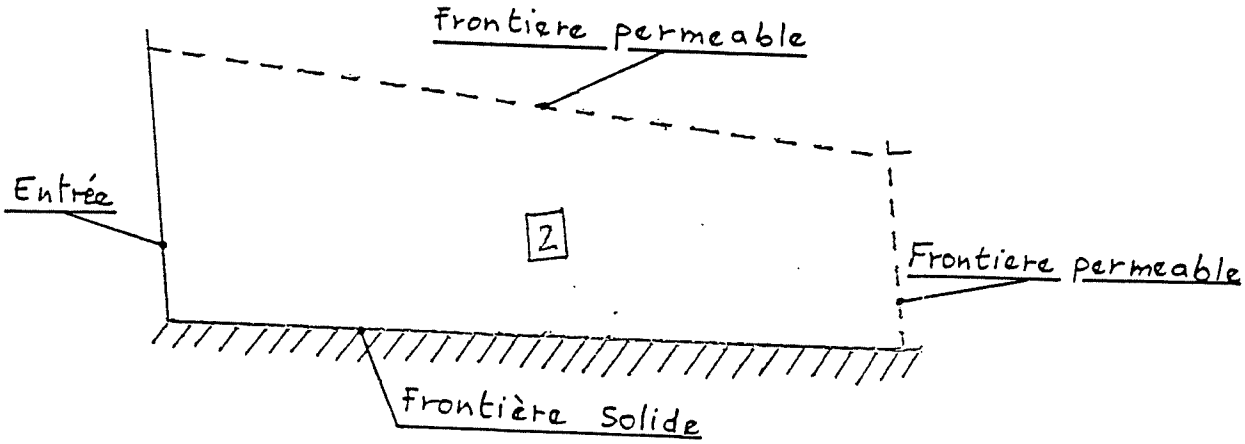
On répète les étapes 2 à 11 jusqu'à l'atteinte du régime stationnaire (lorsque la variation globale maximale de u dans tout le domaine est inférieure à un critère pré-établi max $|\delta U| \leq \epsilon$).

ii) **Technique de résolution zone par zone**

Le calcul est fait zone par zone et point par point. La technique du zonage permet de traiter les irrégularités géométriques d'un domaine, de plus on peut raffiner le maillage dans une zone particulière (fig. 3.3.a). Chaque côté d'une zone est traité, dans les calculs, séparément. Deux cas se présentent: premièrement si le côté est une frontière dite véritable (entrée, sortie, paroi solide ou axe de symétrie fig. 3.4.b), alors les conditions de frontière (chapitre 2) sont appliquées. Deuxièmement si le côté est une frontière dite perméable (fig. 3.4.b), alors les points le long de cette frontière sont traités comme des points de l'intérieur de la zone.



(a)



(b)

Figure 3.3: Zonage typique

a) zonage, b) types de frontières

CHAPITRE 4

RESULTATS NUMERIQUES

Dans ce chapitre le schéma numérique proposé précédemment est testé pour deux cas d'écoulement. Le premier traite l'écoulement supersonique dans une tuyère plane et les résultats sont comparés aux résultats expérimentaux reportés par Mason et al. (1980). Le deuxième traite de l'écoulement bi-dimensionnel dans un canal avec expansion. Les résultats sont comparés aux résultats expérimentaux de Gamm (1984) ainsi qu'aux résultats numériques de Borsboom (1988).

4.1 Tuyère supersonique plane

i. conditions de l'écoulement

Dans cette section on présente les résultats pour la tuyère plane de Mason et al. (1980). Les dimensions de la tuyère ainsi que les conditions aux frontières sont présentées à la figure 4.1.a. Deux maillages différents sont utilisés. La grille A (fig. 4.1.b) avec 49 X 13 points répartis uniformément le long de la tuyère et la grille B (fig. 4.1.c) avec 53 X 13 points avec concentration des mailles dans la région du col. Ces calculs ont été faits avec les équations adimensionnelles pour une longueur de référence de 1cm et un nombre de Reynolds basé sur la vitesse critique égal à 7.5 10^6.

ii. Résultats

Les résultats pour ce premier cas test sont présentés dans les figures 4.2 et 4.3. Toutes les figures reflettent l'importance du maillage et la comparaison de la pression le long de la paroi supérieure et le long de l'axe de symétrie entre les résultats expérimentaux (Mason et al. 1980) et les résultats présents, montrent une concordance très satisfaisante.

Les différences observées au niveau du col sont dues au maillage qui n'est pas suffisamment fin pour récupérer les gradients dans cette région.

4.2 Marche carrée

i. Conditions de l'écoulement

On présente ici les résultats pour la marche carrée de Gamm (1984). Les dimensions du domaine ainsi que les conditions aux frontières sont présentées à la figure 4.4.a et la grille de calcul à la figure 4.4.b. On utilise encore une fois les équations adimensionnelles pour un nombre de Reynolds égal à 187 (basé sur la hauteur du canal et (ρu) max à l'entrée) et un nombre de Prandtl égal à 0.72.

ii. Résultats

A la figure 4.5.a on présente le champ de vitesses. La zone de recirculation est bien présente. La longueur de réattachement L_R, est de 4.5, le résultat numérique de Borsboom (1988) est de 4.9.

Enfin à la figure 4.5.b on présente le taux de cisaillement adimensionnel le long de la paroi supérieure (y=2.0) calculé d'après $\tau = 1/R_e (\rho u)_{max} \partial(\rho u)/\partial y$. La comparaison entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux de Gamm (1984) montre encore une concordance très satisfaisante.

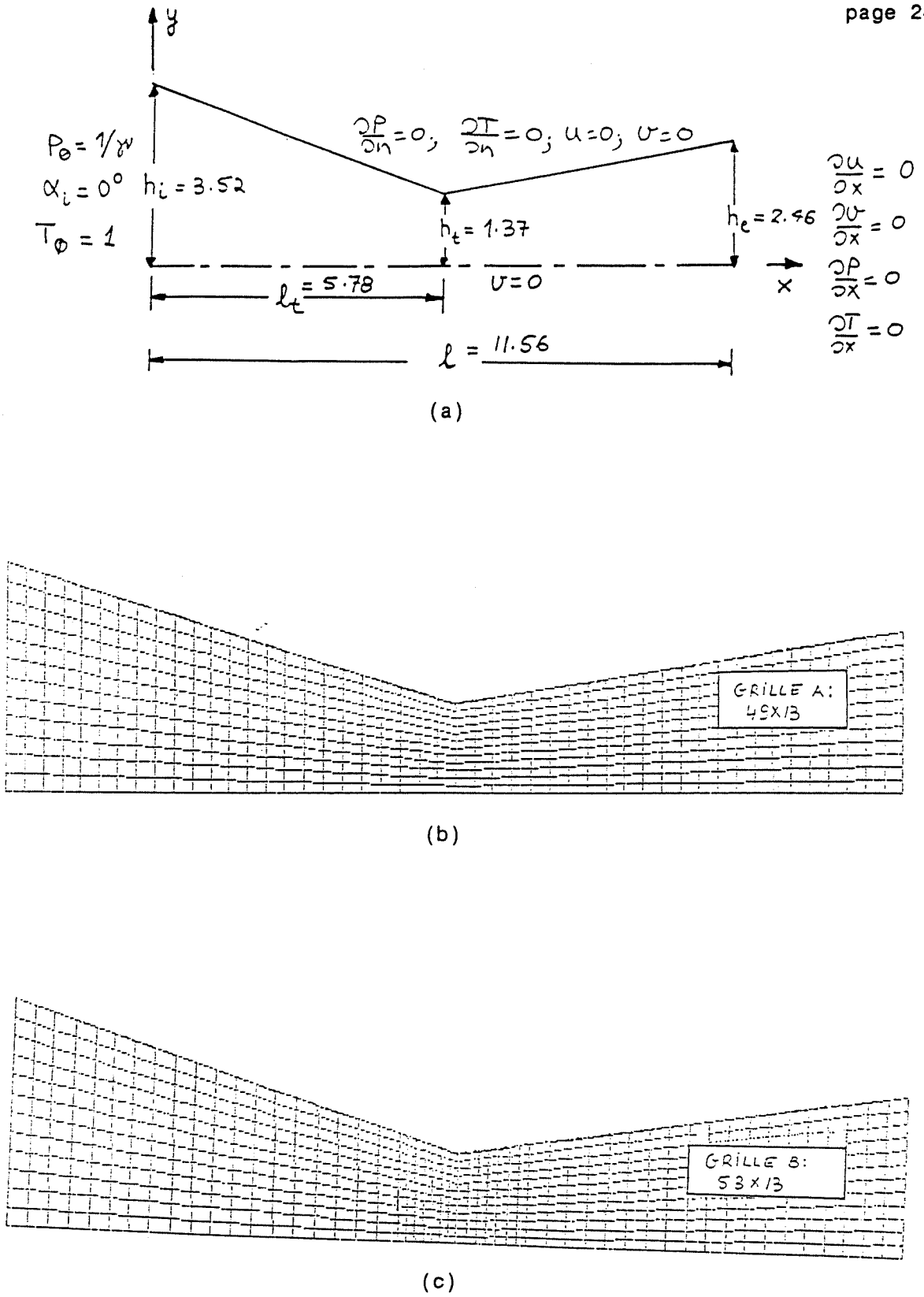
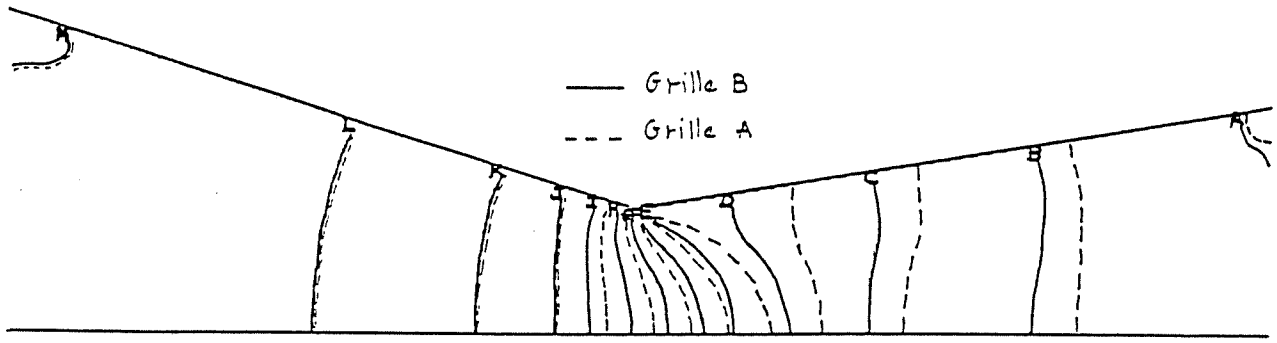
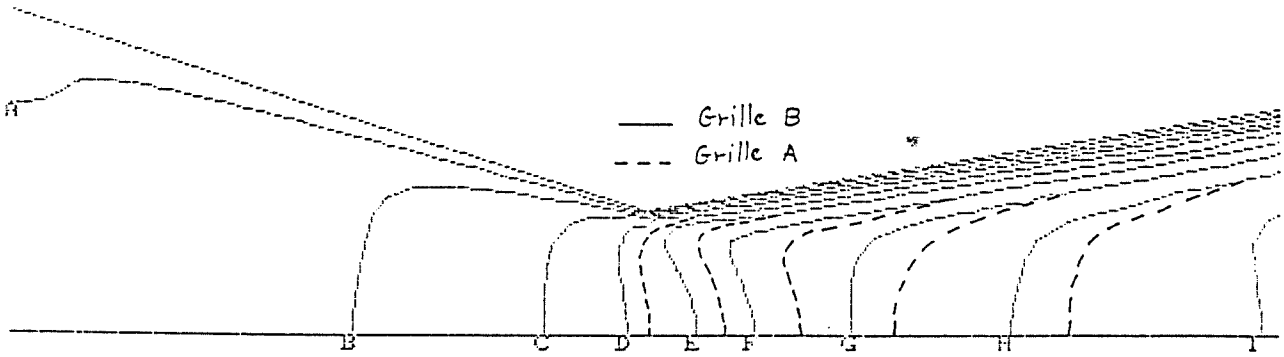


Figure 4.1: Géométrie (a) et maillages (b, c) de la tuyère plane

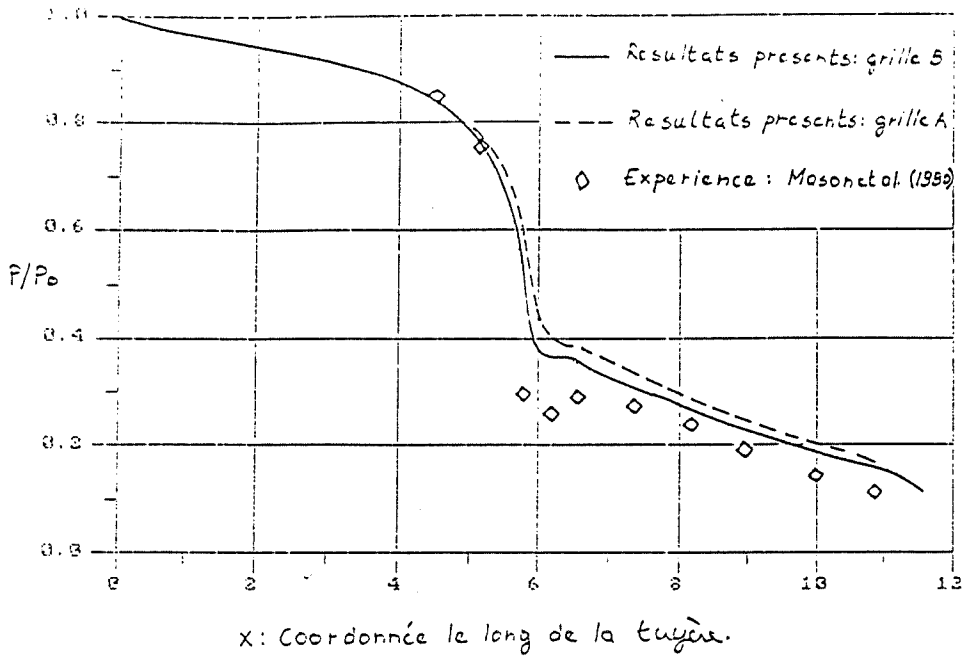


(a): 0.7 - 0.1 (-0.05)

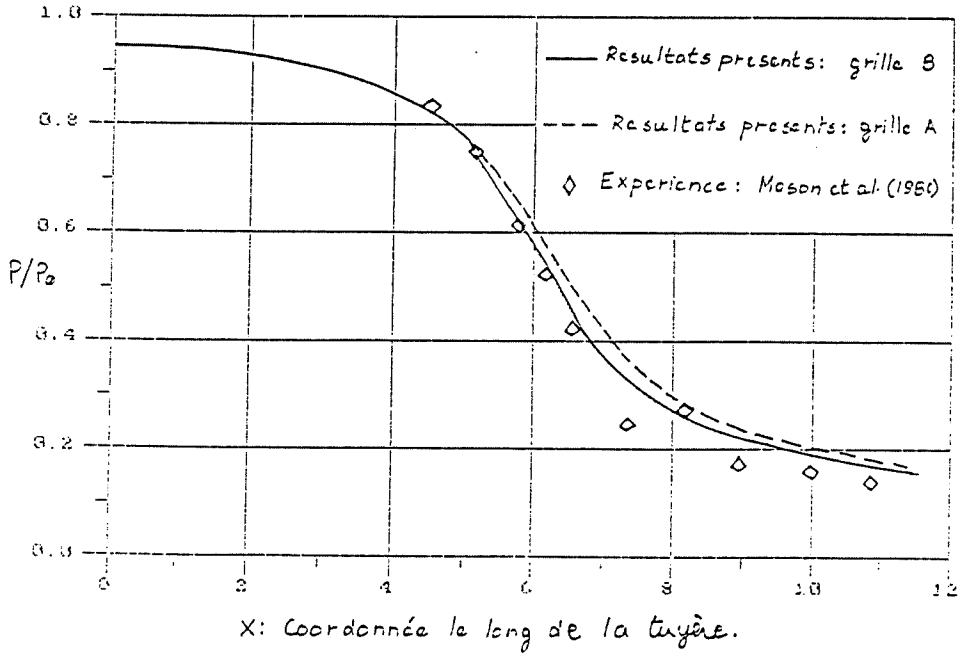


(b): 0.2 - 1.8 (0.2)

Figure 4.2: Lignes isopression (a) et isomach (b) pour la tuyère

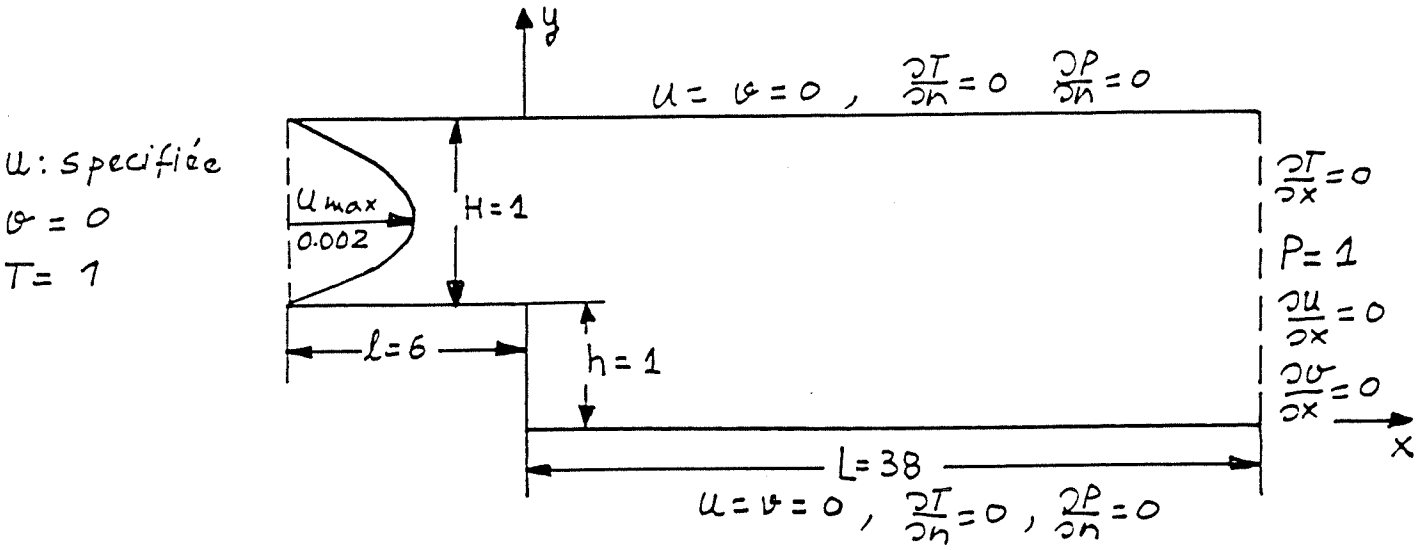


(a): Le long de la paroi

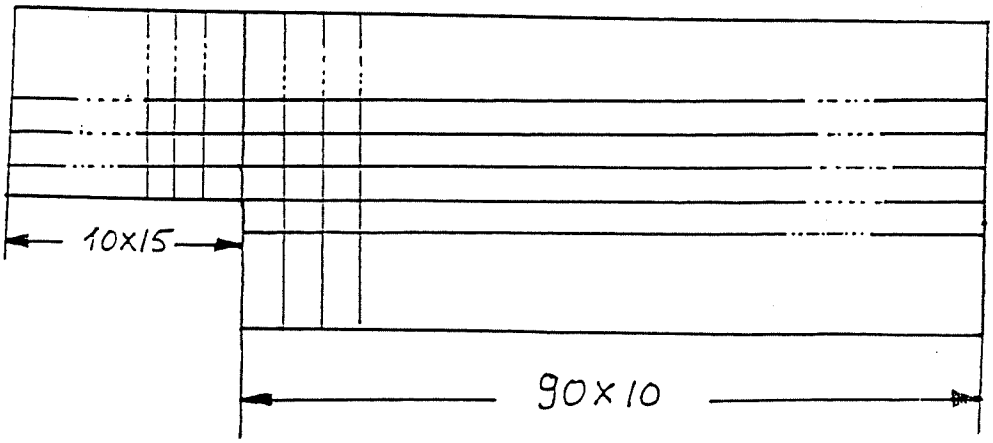


(b): Le long de l'axe de symétrie

Figure 4.3: Distribution de la pression

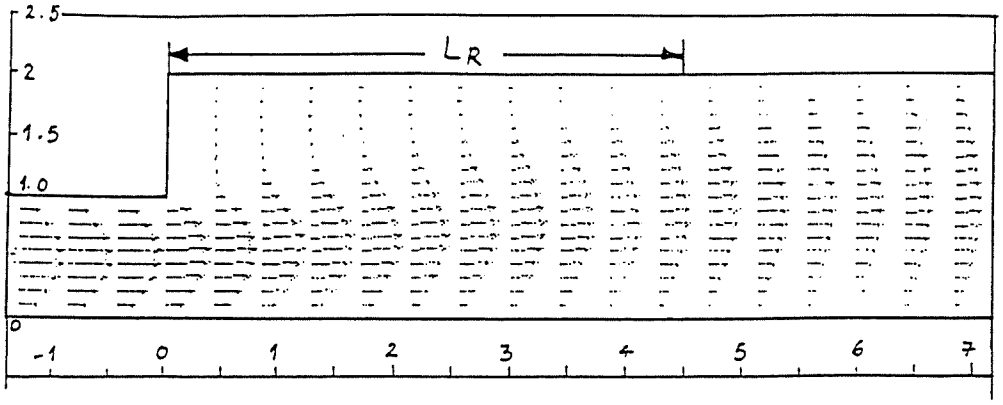


(a)

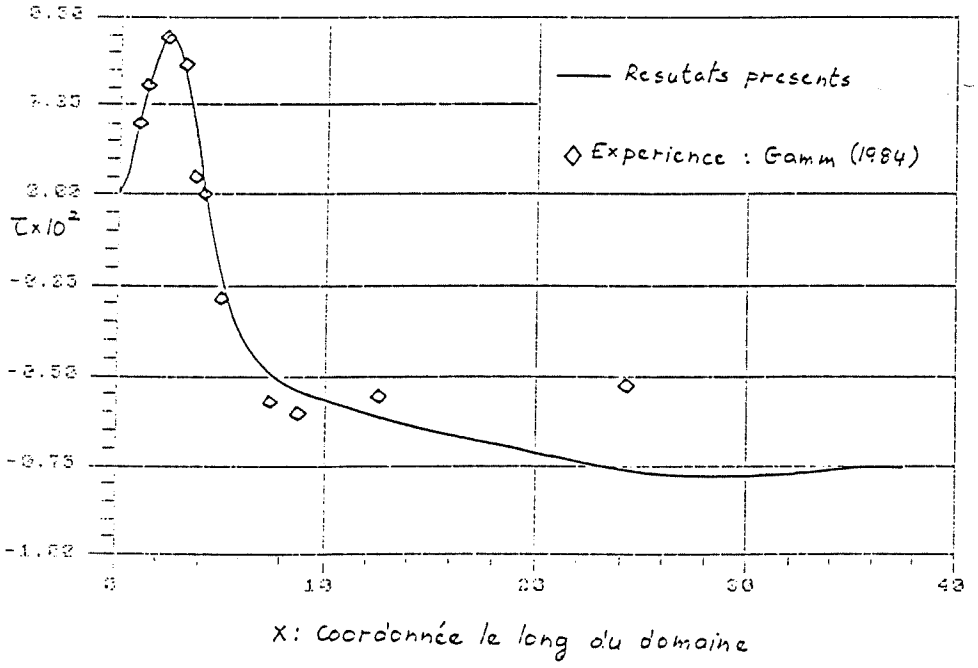


(b)

Figure 4.4: Géométrie (a) et maillage (b) pour la marche carrée



(a)



(b)

Figure 4.5: Zone de recirculation (a) et distribution du taux de cisaillement (b) dans la marche

CONCLUSION

Dans ce travail un schéma numérique a été developpé pour la résolution des équations de Navier-Stokes dans le cas des écoulements laminaires pour les fluides compréssibles. Le schéma est basé sur la technique des volumes finis. Il est explicite et d'ordre deux dans le temps.

Un programme d'ordinateur a été élaboré en se basant sur le schéma développé. Il permet la simulation numérique d'écoulements bi-dimensionnels de fluides compressibles en régime laminaire. Le code a été validé sur deux cas tests: tuyère supersonique et canal avec expansion. Les comparaisons entre les résultats expériementaux et les résultats numériques obtenus sont très satisfaisantes.

La deuxième étape sera d'appliquer ce schéma à des écoulements de fluides compressibles en régime laminaire avec réactions chimiques (combustion). Enfin dans une dernière étape le régime d'écoulement pourra également être turbulent.

BIBLIOGRAPHIE

1. Borsboom, M., (1988). "An Implicit approximate Factorization Finite Volume Technique with Improved Accuracy for the Compressible Navier-Stokes, Equations", Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1988-05.

2. Drummond, J.P. (1984). "Numerical Study of a Ramjet Dump Combustor Flow Field", AIAA Journal, Vol. 23, No.4.

3. Gamm (1984). Workshop on Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step, eds. K. Morgan, J. Periaux, F. Thomasset, Vieweg, Brannschweig.

4. Harlow, F.H. and Welch, J.E. (1965). "Numerical Calculation of Time - Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", Physics of Fluids, Vol. 8, p. 2182.

5. MacCormack, R.W. (1971). "Numerical Solution of the Interaction of a Schock Wave with a Laminar Boundary Layer", Proceedings Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, Vol. 8, Springer-Valag, New-York, pp. 151-163.

6. Mason, M.L., Putnam. L.E. and Re, R.J., (1980). "The effect of Throat Contouring on Two Dimensional Converging-Diverging Nozzles at Static Conditions", Nasa Technical Paper 1704.

7. Ni. R.H. (1981), "A Multiple Grid Scheme for Solving the Euler Equations", AIAA Journal, Vol. 20, No. 11.

8. Patankar, S.V., (1980), Numerical Heat and Fluid Flow, McGraw-Hill Book Company.

9. Reggio, M., Trepanier, J.Y., Camarero, R. (1988), "A composite Grid Approach for the Euler Equations", submited (May 1988) to the International Journal for Numerical Methods in Fluids.

10. Roache, J.P. (1972), Computational fluid Dynamics, Hermosa Publishers.

11. Rudy, D.H. and Strikwerda, J.C. (1981), "Boundary Conditions for Subsonic Compressible Navier-Stokes Calculations", Computers and Fluids, Vol. 9, pp. 327-338.

12. Tannehill J.C., Holst, T.L. and Rakich J.V., (1975). "Numerical Computation of Two-dimensional Viscous Blunt Body Flows with a Impinging Schock, AIAA Paper 75-154, Passadena, California.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
3 9334 00289606 4